UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nevena Mutlak

# Prostori Soboljeva sa negativnim indeksom

-master rad-

Mentor:
prof.dr Marko Nedeljkov

Novi Sad, 2013.

# Sadržaj

# Glava 1

# Uvod

Prostori Soboljeva imaju veoma važnu ulogu u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina, analize, matematičke fizike, diferencijalne geometrije, kao i u drugim oblastima matematike.

Ovi prostori se definišu preko $L^p$ prostora, pa su oni opisani u prvom delu rada. Za ovo su bili potrebni osnovni pojmovi teorije mere i definicija Lebegovog integrala. Videćemo prednosti Lebegovog integrala nad Rimanovim, kao i neke „lepe“ osobine $L^p$ prostora.

Zatim je neophodno definisati prostore distribucija i slabe izvode, što je urađeno u narednom, četvrtom poglavlju.

Poglavlje pet je srž rada - definicija prostora Soboljeva i predstavljanje značajnih osobina i teorema. Definisani su prvo prostori sa pozitivnim indeksom - prostori $H^{p,m}$, a zatim se definicija proširuje na prostore sa negativnim indeksom: $H^{p,-m}$, a potom i na prostore sa realnim indeksom: $H^s$. Na kraju poglavlja su opisani prostori Soboljeva sa specifičnim domenom, što je zapravo uvod u poslednje poglavlje - opis nehomogenog graničnog problema.

U poslednjem poglavlju je na primeru eliptične jednačine predstavljena primena prostora Soboljeva u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina. Definisan je granični problem za eliptičnu jednačinu i potom je pokazano kako se, u zavisnosti od regularnosti početnih uslova, rešenje ovog problema može naći u prostorima $H^s(\Omega)$ ili $H^{-s}(\Omega)$, gde će fokus biti na ovom poslednjem. Kako je prostor $H^{-s}(\Omega)$ zapravo dual prostora $H^s(\Omega)$ značajnu ulogu odigraće dualni (adjungovani) operatori i njima će biti posvećena određena pažnja.

Za početak, ipak, recimo nešto o tvorcu - Sergeju Soboljevu.

# Glava 2

# Sergej Soboljev

Sergej Soboljev rođen je 6.10.1908. u Sankt Peterburgu. Već sa 12 godina je bio upoznat sa elementarnom algebrom, geometrijom i trigonometrijom. 1929. diplomirao je na lenjingradskom fakultetu za matematiku i fiziku. Nakon diplomiranja pozvan je da radi na Seizmološkom institutu, gde je, za deceniju rada, rešio mnoge važne probleme matematičke fizike, a takođe je uveo nove teorije i konstrukcije. Sa samo 25 godina postao je dopisni član Akademije nauka u Sovjetskom Savezu. Za vreme Drugog svetskog rada bio je uključen u realizaciju projekta za nuklearno oružje i bio je postavljen za zamenika direktora na Institutu za atomsku energiju.

Neki od najbitnijih pojmova koje je Soboljev uveo su pojam slabog rešenja, distribucije, prostori Soboljeva i Soboljeva nejednakost.

Njegova definicija slabog rešenja je trijumfovala nad ostalim jer je mogla da se prilagodi brojnim problemima, a kako je znatno oslabila uslov glatkosti - mnoge klase funkcija sa prekidima su postale dostupne.

1935/36 Soboljev je uveo pojam distribucije, mada nije koristio termin „distribucija“. Pod ovim je podrazumevao funkcionele nad prostorom $C^k$ funkcija sa kompaktnim nosačem. Mnogi drugi naučnici su dalje razvili teoriju distribucija. Ispostavilo se da su distribucije u bliskoj vezi sa mnogim poljima matematičke analize.

Jedan od najvažnijih problema matematičke fizike 20-tog veka je bilo dokazivanje dobre postavljenosti Dirihleovog i Nojmanovog problema za Laplasovu jednačinu kao i uopštenije eliptične jednačine drugog reda. Soboljev je rešio centralni problem: pronašao je adekvatne prostore funkcija: prostore Soboljeva. Zajedno sa Soboljevim nejednakostima, ovi prostori su imali fundamentalnu ulogu u teoriji PDJ-a, matematičke fizike, diferencijalne geometrije i drugih polja matematičke analize.

# Glava 3

# Lebegova mera i integral

## 3.1 Osnovni pojmovi

Navešćemo neke pojmove teorije mere na $\mathbb{R}^n$.

**Definicija 3.1.1** *Kolekcija $\Sigma$ podskupova od $\mathbb{R}^n$ naziva se sigma algebra ako važi sledeće:*

1. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$
2. *Ako $A \in \Sigma$ onda $A^C = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x \notin A\} \in \Sigma$*
3. *Ako $A_j \in \Sigma, \quad j = 1, 2, ...$ onda $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$*

Skup iz $\Sigma$ zove se merljiv skup. Svaki otvoren skup iz $\mathbb{R}^n$ je merljiv.

**Definicija 3.1.2** *Mera $\mu$ na $\Sigma$ je funkcija iz $\Sigma$ u $[0, \infty]$ za koju važi:*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

*za bilo koje $A_j \in \Sigma$ takve da $A_j \bigcap A_k = \emptyset$ za $j \neq k$.*

**Definicija 3.1.3** *Ako je $A = \{x \in \mathbb{R}^n |\ a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, ..., n\}$ interval u $\mathbb{R}^n$ onda je **Lebegova mera** skupa $A$:*

$$m(A) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

*Ako je $E$ merljiv skup onda je*

$$m(E) = \inf\{m(U);\ U \supset E,\ U\ je\ otvoren\}.$$

**Napomena 3.1.4** *Koristićemo izraz „skoro svuda“ što znači svuda osim na skupu mere nula.*

**Definicija 3.1.5** *Funkcija koja slika prostor sa $\sigma$ -algebrom u topološki prostor je merljiva ako je inverzna slika otvorenog skupa merljiv skup.*

Neka $A \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija $\chi_A(x)$ definisana sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ ako } x \in A, \\ 0 \text{ ako } x \notin A. \end{cases}$$

Neka je sada $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. $s = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$, gde je $A_j \subset A$ merljiv skup i $a_j \in \mathbb{R}$, ćemo nazivati jednostavnom funkcijom. Definišemo

$$\int_A s(x)dx = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j)$$

i

$$\int_A f(x)dx = \sup \int_A s(x)dx,$$

gde se supremum uzima po merljivim, jednostavnim fukcijama $s$ koje su jednaki nuli van $A$ i zadovoljavaju: $0 \leq s(x) \leq f(x)$ na $A$. Ako $f$ uzima vrednosti u $\mathbb{R}$ korisimo: $f = f^+ - f^-$ gde su $f^+ = max(f, 0)$ i $f^- = -min(f, 0)$ merljive i nenegativne. Lebegov integral realne funkcije je:

$$\int_A f(x) = \int_A f^+(x)dx - \int_A f^-(x)dx$$

Ako je ovaj integral konačan kažemo da je funkcija (Lebeg) integrabilna na $A$. Klasa ovakvih funkcija se označava sa $L^1(A)$.

Sada možemo definisati i Lebegov integral kompleksne funkcije:

**Definicija 3.1.6** *Neka je $f = u + iv$ gde su $u, v$ realne funkcije ($f$ je merljiva ako i samo ako su $u, v$ merljive). $f \in L^1(A)$ ako $|f| = (u^2 + v^2)^{1/2} \in L^1(A)$. Za takvo $f \in L^1(A)$ Lebegov integral je:*

$$\int_A f(x) = \int_A u(x)dx + i \int_A v(x)dx.$$

*Lako je pokazati da $f \in L^1(A)$ akko $u, v \in L^1(A)$.*

Bitna teorema vezana za ove prostore je:

**Teorema 3.1.7** *(O dominantnoj konvergenciji)*

*Neka je $A \in \mathbb{R}^n$ merljiv skup i $\{f_n\}$ kovergentan niz kompleksnih merljivih funkcija na $A$. Ako postoji funkcija $g \in L^1(A)$ takva da je $|f_n(x)| \leq g(x)$ za svako $n$ i za svako $x \in A$ onda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

**Teorema 3.1.8** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena. Tada ako je $f$ Riman integrabilna, onda je i Lebeg integrabilna i Rimanov integral funkcije $f$ je jednak Lebegovom:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

Za razliku od Riman integrabilnih funkcija, Lebeg integralne funkcije ne moraju biti ograničene. Takođe interval na kojem integriramo može biti neograničen. Tako svaka funkcija za koju Rimanov integral:

$$\int_\epsilon^1 |f(x)|dx$$

ima konačnu graničnu vrednost kada $\epsilon \to 0$ je Lebeg integrabilna na $[0, 1]$, štaviše:

$$\int_{[0,1]} f(x)d\mu = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx.$$

Tačnije, svaki apsolutno konvergentan nesvojstveni integral postoji kao Lebegov integral.

Treba napomenuti da nesvojstveni integrali

$$\int_0^1 f(x)dx \quad ili \quad \int_0^\infty f(x)dx$$

nisu Lebegovi u slučaju kada

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 |f(x)|dx = \infty \quad ili \quad \lim_{a\to\infty}\int_0^a |f(x)|dx = \infty.$$

Na primer,

$$\int_0^\infty |\frac{\sin(x)}{x}|dx = \infty$$

i Lebegov integral funkcije $\frac{\sin(x)}{x}$ ne postoji. Ali, Rimanov integral konvergira:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

## 3.2 $L^p$ prostori

**Uvodni pojmovi** Označimo sada sa $\Omega$ otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Sa indukovanom topologijom iz $\mathbb{R}^n$ ovo je potprostor čiji su otvoreni skupovi istovremeno otvoreni i u $\mathbb{R}^n$. U ovom poglavlju biće nam potrebno i nekoliko sledećih pojmova.

Ako $G \subset \mathbb{R}^n$ označavamo sa $\bar{G}$ zatvaranje skupa $G$ u $\mathbb{R}^n$. Pisaćemo $G \subset\subset \Omega$ ako $\bar{G} \subset \Omega$ i $\bar{G}$ je kompaktan (ograničen) podskup od $\mathbb{R}^n$.

$C^m(\Omega)$, gde m$\in$ $\mathbb{N}_0$ je skup funkcija koje su definisane nad $\Omega$ i imaju neprekidne sve izvode zaključno sa redom $m$.

**Definicija 3.2.1** *Nosač neprekidne funkcije* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *je adherentan skup za skup* $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. *Nosač označavamo sa supp*$f$.

**Definicija 3.2.2** *Podskup $C_0^m(\Omega)$ od $C^m(\Omega)$ je skup funkcija čiji su nosači kompaktni u $\Omega$ (supp $f$ je ograničen i supp $f \subset \Omega$).*

**Definicija 3.2.3** *Funkcija $u$ definisana skoro svuda na $\Omega$ je lokalno integrabilna na $\Omega$ ako $u \in L^1(A)$ za svaki merljiv skup $A \subset\subset \Omega$. Pišemo $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*

**Neki pojmovi funkcionalne analize** Neka su $X$ i $Y$ metrički prostori. Linearna funkcija (operator) $L$ iz $X$ u $Y$ je ograničena ako postoji $M > 0$ tako da $\forall x \in X$

$$\|Lx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

$L$ je neprekidna *ako i samo ako* je ograničena. Skup svih linearnih funkcija iz $X$ u $Y$ se označava sa $\mathcal{L}(X, Y)$. Norma u ovom prostoru je data sa:

$$\|L\| = \inf\{M \geq 0 : \ \|Lx\|_Y \leq M\|x\|_X \ \forall x \in X\}. \tag{3.1}$$

Ako je $Y$ kompletan, $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banahov.

Funkcionela nad $X$ je funkcija koja slika $X \mapsto \mathbb{C}$. Dual od $X$, u oznaci $X'$, je skup svih linearnih, neprekidnih funkcionela nad $X$. $X'$ sa dualnom normom (3.1) je Banahov prostor.

Ako je $X \subset Y$ i operator inkluzije je neprekidan, tj. iz $x_n \to x$ *u* $X$ sledi $x_n \to x$ *u* $Y$, onda $Y' \subset X'$ u smislu da restrikcija funkcionele iz $Y'$ na $X$ pripada $X'$.

Homeomorfizam je neprekidna bijekcija takva da je njena inverzna funkcija takođe neprekidna. Homeomorfizmi očuvavaju topološke osobine prostora.
Injekcija $f$ iz $X$ u $Y$ koja je homeomorfizam između $X$ i $f(X)$ naziva se potapanje, obeležavamo je sa $X \hookrightarrow Y$. Intuitivno, potapanje nam dopušta da tretiramo $X$ kao podskup od $Y$.

Neka su $(X, d_X)$ i $(Y, d_Y)$ metrički prostori. Preslikavanje $f : X \mapsto Y$ se naziva izometrija ako $\forall a, b \in X$ važi

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

Svaka izometrija je automatski injekcija i neprekidno preslikavanje (potapanje). Ako je izometrija između $X$ i $Y$ sirjektivna, kažemo da su $X$ i $Y$ izometrični.

Neka je $(X, d_X)$ metrički prostor. Metrički prostor $(Y, d_Y)$ je kompletiranje $X$ ako i samo ako:
- $Y$ je kompletan
- postoji $f : X \mapsto Y$ izometrija
- $\overline{f[X]} = Y$.

**Definicija** Definišimo sada $L^p$ prostore:

**Definicija 3.2.4** *Sa $L^p(\Omega)$ označavamo prostor merljivih kompleksnih funkcija $u$ definisanih na $\Omega$ za koje važi:*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \tag{3.2}$$

**Napomena 3.2.5** *U $L^p(\Omega)$ identifikujemo funkcije koje su jednake skoro svuda na $\Omega$. Stoga su elementi prostora $L^p(\Omega)$ klase ekvivalencije merljivih funkcija koje zadovoljavaju (3.2), gde su dve funkcije ekvivalentne ako su jednake skoro svuda na $\Omega$. Ipak, zbog jednostavnosti poistovećujemo klase sa elementom klase i pišemo da $u \in L^p(\Omega)$ ako $u$ zadovoljava (3.2) i kažemo da je $u = 0$ ako je $u = 0$ skoro svuda na $\Omega$. $L^p(\Omega)$ je vektorski prostor.*

Funkcionela $\|\cdot\|_p$ definisana sa

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{1/p} \tag{3.3}$$

je norma u $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$.

Navešćemo i dve bitne nejednakosti:

1. *Helderova nejednakost*: Neka je $1 \leq p \leq \infty,\ p' = \frac{p}{p-1}$ *i* $u \in L^p(\Omega),\ v \in L^{p'}(\Omega)$ tada $uv \in L^1(\Omega)$ i važi

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

2. *Nejednakost Minkovskog*: Ako $1 \leq p < \infty$ onda

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

**Definicija 3.2.6** *Merljiva funkcija $u$ na $\Omega$ je esencijalno ograničena ako postoji konstanta $K$ takva da je $|u(x)| \leq K$ skoro svuda na $\Omega$. Najmanje takvo K je esencijalni supremum od $|u|$ na $\Omega$ i označava se $ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$. Sa $L^\infty(\Omega)$ označavamo vektorski prostor esencijalno ograničenih funkcija na $\Omega$, a ponovo identifikujemo funkcije koje su skoro svuda jednake na $\Omega$. Norma na $L^\infty(\Omega)$ je:*

$$\|u\|_\infty = ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

**Teorema 3.2.7** *$L^p(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$ je Banahov prostor. $L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom:*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$

**Teorema 3.2.8** *$L^p(\Omega)$ je separabilan za $1 \leq p < \infty$. Ako je $1 < p < \infty$ onda je $L^p(\Omega)$ refleksivan.*

**Teorema 3.2.9** *Neka je $\int_\Omega dx = \mu(\Omega) < \infty$ i $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Ako $u \in L^q(\Omega)$ onda $u \in L^p(\Omega)$ i*

$$\|u\|_p \leq \big(\mu(\Omega)\big)^{1/p-1/q}\|u\|_q$$

*odnosno važi*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

**Dokaz** Dokaz za $p = q$ je jasan. Neka $1 \leq p < q \leq \infty$ i $u \in L^q(\Omega)$. Tada $u^p \in L^{q/p}(\Omega)$ i Hölderova nejednakost daje:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^p dx &\leq \Big(\int_\Omega |u(x)|^{q/p}dx\Big)^{p/q}\Big(\int_\Omega 1dx\Big)^{1-p/q}\\ &\leq \Big(\int_\Omega |u(x)|^q dx\Big)^{p/q}\Big(\int_\Omega 1dx\Big)^{1-p/q}\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$\|u\|_p \leq \big(\mu(\Omega)\big)^{1/p-1/q}\|u\|_q$$

□

Slično se može pokazati da je $\mathbf{L^p(\Omega)} \subset \mathbf{L^1_{loc}(\Omega)}$ za $1 \leq p \leq \infty$ i svaki domen $\Omega$ (zbog konačnosti Lebegove mere kompaktnog skupa).

Vratimo se na Helderovu nejednakost. Eksponent $p'$ naziva se dualni za $p$, sada ćemo i opravdati taj naziv. Helderova nejednakost pokazuje da svaka funkcija $g \in L^{p'}(\Omega)$ generiše neprekidnu linearnu funkcionelu nad $L^p(\Omega)$ datu sa:

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx. \tag{3.4}$$

Može se pokazati i da je svaka neprekidna linearna funkcionela nad $L^p(\Omega)$ oblika (3.4):

**Teorema 3.2.10** *Neka je $1 \leq p < \infty$ i $1/p + 1/p^* = 1$. Tada je*

$$(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$$

*u sledećem smislu: za svaku neprekidnu linearnu funkcionelu $l$ na $L^p(\Omega)$ postoji jedinstveno $g \in L^{p'}(\Omega)$ takvo da*

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

*Šta više, $\|l\| = \|g\|_{p'}$ ($\|\ \|$ označava dualnu normu).*

# Glava 4

# Distribucije i slabi izvodi

## 4.1 Distribucije

Sa $\alpha$ ćemo označavati multiindeks: $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, a $D^\alpha$ će označavati

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \, \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Takođe, sa $x^\alpha$, gde je $x \in \mathbb{R}^n$, ćemo označiti $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$.

Kažemo da niz $\{\phi_n\} \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergira u smislu prostora $\mathcal{D}(\Omega)$ ka funkciji $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$(i)$ postoji skup $K \subset\subset \Omega$ takav da supp $\phi_n \subset K$ za svako $n$ (što implicira supp$\phi \subset K$) i

$(ii)$ $lim_{n\to\infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformno na $K$ za svaki multiindeks $\alpha$. Odnosno važi

$$\|\phi_n - \phi | C^m(\Omega)\| \; ako \; j \to \infty \; \forall m \in \mathbb{N}_0$$

gde $\| \cdot | C^m(\Omega)\|$ označava normu u prostoru $C^m(\Omega)$ definisanu sa

$$\|f|C^m(\Omega)\| = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| < \infty$$

(sa kojom je ovaj prostor Banahov).

Dakle prostor $C_0^\infty(\Omega)$ sa gore definisanom konvergencijom označavamo sa $\mathcal{D}(\Omega)$ a njegove elemente - test funkcije.

**Definicija 4.1.1** *Neprekidna linearna funkcionela nad $\mathcal{D}(\Omega)$ naziva se distribucija.*

Prostor distribucija označavamo sa $\mathcal{D}'(\Omega)$, on je dakle dual prostora $\mathcal{D}(\Omega)$, a distribucije preslikavaju $\mathcal{D}(\Omega)$ u $\mathbb{C}$. Neprekidnost važi u nizovnom smislu:

$$T(\phi_j) \to T(\phi) \; za \; j \to \infty \quad kada \; god \quad \phi_j \stackrel{\mathcal{D}}{\to} \phi$$

Koristimo oznaku:

$$T : \phi \to < T, \phi > .$$

U odnosu na uobičajene operacije sabiranja i množenja, $\mathcal{D}'(\Omega)$ čini vektorski postor nad $\mathbb{C}$:

$$< S + T, \phi > = < S, \phi > + < T, \phi >, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$< cT, \phi > = c < T, \phi >, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Konvergencija u prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$ je definisana na sledeći način:

$T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ako i samo ako $< T_n, \phi > \to < T, \phi >$ u $\mathbb{C}$ za svako $\phi$ iz $\mathcal{D}(\Omega)$.

**Definicija 4.1.2** *Prostor distribucija $A \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ naziva se normalan prostor distribucija nad $\Omega$ ako je $C_0^\infty(\Omega)$ gust u $A$ i ako je identičko preslikavanje $\mathcal{D}(\Omega) \mapsto A$ neprekidno (tj. iz $u_n \to u$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ sledi $u_n \to u$ u $A$). Dual prostora $A$ smatramo potprostorom od $\mathcal{D}'(\Omega)$ (restrikcije sa $A$ na $\mathcal{D}(\Omega)$ su distribucije).*

**Regularne distribucije** Svakoj funkciji $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ odgovara distribucija $T_u \in \mathcal{D}(\Omega)$ definisana sa:

$$T_u = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.1}$$

Jasno ovako definisano $T_u$ je linearna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$. Da bi pokazali da je i neprekidna pretpostavimo da $\phi_n \to \phi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$. Onda postoji $K \subset\subset \Omega$ takav da $\sup(\phi_n - \phi) \subset K$ za $n = 1, 2, 3....$ Stoga:

$$|T_u(\phi_n) - T_u(\phi)| \leq sup_{x \in K}|\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)|dx$$

Pošto $\phi_n \to \phi$ onda desna strana teži nuli, pa je $T$ neprekidno. Ovakve distribucije nazivaju se **regularne** distribucije.

**Napomena 4.1.3** *Nije svaka distribucija regularna. Ako na primer pretpostavimo da $0 \in \Omega$, lako se može pokazati da ne postoji lokalno integrabilna funkcija $\delta$ takva da za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi:*

$$\int_\Omega \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

*S druge strane, lako je videti da je*

$$\delta(\phi) = \phi(0)$$

*neprekidna, linearna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$, tj. distribucija.*

**Napomena 4.1.4** *Funkciju $u$ poistovećujemo sa regularnom distribucijom $T_u$. Kako je $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ za svaki domen $\Omega$, prostor $L^p(\Omega)$ je takođe prostor (regularnih) distriucija.*

## 4.2 Pojam slabog izvoda

Neka $u \in C^1(\Omega)$ i $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Kako je $\phi$ jednaka nuli van nekog kompaktnog skupa u $\Omega$, parcijalnom integracijom po promenljivoj $x_j$ dobijamo:

$$\int_\Omega (\frac{\partial}{\partial x_j}u(x))\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)(\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x))dx.$$

Slično, parcijalnom integracijom $|\alpha|$ puta dolazimo do:

$$\int_\Omega (D^\alpha u(x))\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx.$$

ako $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Ovo je motivacija za uvođenje sledeće definicije izvoda $D^\alpha T$ distribucije $T$:

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi).$$

Pokažimo da je ovako definisan izvod distribucije takođe distribucija. Kako $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $D^\alpha T$ jeste funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$. Jasno $D^\alpha T$ je linearno. Pokažimo još da je neprekidno. Neka $\phi_j \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \phi$. Tada je

$$supp(D^\alpha \phi_j) \subset supp(\phi_j) \subset K$$

za neki kompaktan podskup $K$ od $\Omega$. Takođe

$$\|\phi_j - \phi | C^m(\Omega)\| \to 0 \Rightarrow \|D^\alpha \phi_j - D^\alpha \phi \, | C^m(\Omega)\| \to 0$$

Sada znamo da $T(D^\alpha \phi_j) \to T(D^\alpha \phi)$ pa sledi da $D^\alpha T(\phi_j) \to D^\alpha T(\phi)$.

Dakle svaka distribucija ima izvode proizvoljnog reda u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Štaviše, preslikavanje $D^\alpha$ iz $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekidno. Ako $T_n \to T$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ i ako je $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ onda

$$D^\alpha T_n(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_n(D^\alpha \phi) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) = D^\alpha T(\phi)$$

Sada ćemo uvesti pojam slabog izvoda lokalno integrabilne funkcije. Neka $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Tada može ali ne mora postojati funkcija $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da je $T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ako takva $v_\alpha$ postoji ona je jedinstvena do na skup mere nula i zove se slabi ili distribucioni parcijalni izvod od $u$ i označava se sa $D^\alpha u$.
Dakle $D^\alpha u = v_\alpha$ u slabom (distributivnom) smislu ako $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ zadovoljava:

$$\int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx.$$

Ako $u$ ima izvod u klasičnom smislu, onda je to izvod i u distributivnom smislu. S druge strane, ako lokalno integrabilna funkcija $u$ ima slabi izvod, onda je ona skoro svuda diferencijabilna i u tim tačkama je slabi izvod jednak jakom.

**Primer 4.2.1** *Neka je* $\Omega = \mathbb{R}$ *i* $u(x) = |x|$. *Ova funkcija nije diferencijabilna u nuli, ali videćemo da ima slabi izvod.*
*Neka* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)dx + \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)dx$$

$$= -(x\phi(x))|_{x=-\infty}^{x=0} + \int_{-\infty}^{0} \phi(x)dx + (x\phi(x))|_{x=0}^{x=-\infty} - \int_{0}^{\infty} \phi(x)dx$$

$$\text{(parcijalna integracija)}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} sgn(x)\phi(x)dx$$

*Dakle,*

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & za\ x > 0, \\ 0, & za\ x = 0, \\ -1, & za\ x < 0 \end{cases}$$

*je slabi izvod od* $|x|$.

## 4.3 Furijeova transformacija i temperirane distribucije

**Definicija 4.3.1** *Neka je* $n \in \mathbb{N}$.

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \|\phi\|_{k,l} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0\}$$

*gde je*

$$\|\phi\|_{k,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{k/2} \sum_{|\alpha| \le l} |D^\alpha \phi(x)|.$$

Kažemo da niz $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S$ konvergira u $S$ ka $\phi \in S$ ako

$$\|\phi_j - \phi\|_{k,l} \to 0, \ za\ j \to \infty\ i\ sve\ k, l \in \mathbb{N}_0$$

Ako je u definiciji 4.3.1 stavimo $l = 0$ onda imamo da $|\phi(x)| \leq c_k(1+|x|)^{-k}$ mora da važi za sve $k$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Slično za izvode od $\phi$. Zato se $S$ obično naziva *Švarcov prostor brzo opadajućih funkcija.*

Iz definicije sledi da je

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n), \quad i \quad \phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi \quad implicira \quad \phi_j \xrightarrow{S} \phi.$$

S druge strane, postoje funkcije koje su u $S$, a nisu u $\mathcal{D}$, istaknut primer je:

$$\phi(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

**Definicija 4.3.2** *Neka* $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. *Tada*

$$\hat{\phi}(\xi) = (\mathcal{F}\phi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\phi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

*se naziva Furijeova transformacija od* $\phi$*, a*

$$\check{\phi}(\xi) = (\mathcal{F}^{-1}\phi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\phi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

*je inverzna Furijeova transofrmacija od* $\phi$.

Može se pokazati da ako $\phi \in S$ onda $\mathcal{F}\phi, \mathcal{F}^{-1}\phi \in S$;

$$\phi = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\phi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\phi.$$

Štaviše, i $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ su injektivna preslikavanja prostora $S(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}S = \mathcal{F}^{-1}S = S.$$

Takođe važi

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\phi))(x) = \phi(-x).$$

Prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $S(\mathbb{R}^n)$ označavamo sa $S'(\mathbb{R}^n)$ ili $S'$. Elementi $S'$ nazivaju se temperirane distribucije ili distribucije sporog rasta. Neprekidnost, konvergenciju i ostale osobine definišemo isto kao i kod $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Važi:

$$S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

tj. restrikcija od $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je elemenat od $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Može se pokazati i:

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \quad za \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

u smislu da za $f \in L^p$ važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx < \infty, \quad za \quad \phi \in S$$

Kako je $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ sledi da možemo smatrati da je $S(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$. Zato sada možemo proširiti Furijeovu transformaciju sa $S$ na $S'$.

**Definicija 4.3.3** *Neka $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}T$ i $\mathcal{F}^{-1}T$ se definišu sa:*

$$(\mathcal{F}T)(\phi) = T(\hat{\phi}) \quad i \quad (\mathcal{F}^{-1}T)(\phi) = T(\check{\phi}), \quad \phi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Ponovo važi:

$$\mathcal{F}S' = \mathcal{F}^{-1}S' = S'.$$

Takođe, ako $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ i $\alpha$ je multiindeks onda $x^\alpha T \in S'(\mathbb{R}^n)$ i $D^\alpha T \in S'(\mathbb{R}^n)$ i imamo sledeće važne osobine:

- $\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|}x^\alpha(\mathcal{F}T) \quad i \quad \mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|}D^\alpha(\mathcal{F}T).$ •

Na kraju, ako $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ za $1 \leq p \leq \infty$, onda znamo da $\mathcal{F}f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Može se pokazati i sledeća osobina: Restrikcije od $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$ generišu unitarne operatore na $L^2(\mathbb{R}^n)$ (što znači da je $\|\mathcal{F}f\| = \|f\|, \quad i \quad \mathcal{F}L^2 = L^2$) i važi

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = id_{L^2}$$

# Glava 5

# Prostori Soboljeva

## 5.1 Definicija i osobine

**Definicija 5.1.1** *Neka je $m$ nenegativan ceo broj, a $1 \leq p \leq \infty$. Prostor:*

$$H^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \; za \; 0 \leq \alpha \leq m\}$$

*gde je $D^\alpha$ izvod u distribucionom smislu, naziva se prostor Soboljeva.*

U odnosu na uobičajene operacije $H^{m,p}(\Omega)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$. U taj prostor uvodimo normu:

$$\|u\|_{p,m,\Omega} := (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p)^{1/p} \quad za \; 1 \leq p < \infty, \tag{5.1}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty$$

Ako je $\Omega = \mathbb{R}^n$ tada je uobičajeno da se simbol $\mathbb{R}^n$ izostavlja. Takođe se $p = 2$ izostavlja, pa umesto $H^{m,2}$ pišemo $H^m$.

Još jedan prostor nosi ime Soboljeva:

**Definicija 5.1.2** $H_0^{m,p}(\Omega) =$ *zatvaranje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u $H^{m,p}(\Omega)$ u odnosu na normu* (5.1) .

Jasno, $H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Takođe, $H_0^{m,p}(\Omega)$ je normalan prostor distribucija.

**Teorema 5.1.3** *Prostor* $H^{m,p}(\Omega)$ *je Banahov* ($1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$)*. Prostor* $H^{m,2}(\Omega)$ *je Hilbertov.*

**Dokaz** Neka je $\{u_n\}$ Košijev niz u $H^{m,p}(\Omega)$. To znači da je $\{D^\alpha u_n\}$ Košijev u $L^p(\Omega)$ za $0 \leq |\alpha| \leq m$. Kako je $L^p(\Omega)$ kompletan tako $\{D^\alpha u\}$ ima granicu u $L^p(\Omega)$. Zapišimo: $u_n \to u$ i $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ u $L^p(\Omega)$ kada $n \to \infty$. Pokazaćemo da ovo implicira da $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ i onda, kako je diferenciranje neprekidna operacija u $\mathcal{D}'(\Omega)$ slediće da je $u_\alpha = D^\alpha u$. Dakle, na osnovu Helderove nejednakosti, za proizvoljno $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi:

$$|T_{u_n} - T_u| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_{p'}\|u_n - u\|_p$$

za $0 \leq |\alpha| \leq m$ i $p' = \frac{p}{p-1}$ To znači da $u_n \to u$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$, a slično se pokazuje da $T_{D^\alpha u_n} \to T_{u_\alpha}$. Možemo zapisati:

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n\to\infty}(-1)^\alpha T_{u_n}(D^\alpha\phi) = (-1)^\alpha T_u(D^\alpha\phi),$$

odnosno

$$T_{u_\alpha}(\phi) = T_{D^\alpha u}, \quad ili \quad u_\alpha = D^\alpha u.$$

Odatle $u \in L^p$ i $D^\alpha u \in L^p$ i $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{m,p} = 0$. $H^{m,p}(\Omega)$ je kompletan.

Lako se proverava da sledeći izraz definiše skalarni proizvod u prostoru $H^{m,2}(\Omega)$:

$$(u, v)_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u\overline{D^\alpha v}, \quad u, v \in H^{2,m}(\Omega)$$

□

**Teorema 5.1.4** *Prostor* $H^{m,p}(\Omega)$ *je separabilan za* $1 \leq p < \infty$*, a refleksivan za* $1 < p < \infty$*.*

**Dokaz** Neka je $N$ broj indeksa $\alpha$ za koje važi $|\alpha| \leq m$. Posmatraćemo proizvod prostora $L^p(\Omega)$: $L^p_N = \prod_{i=1}^N L^p(\Omega)$ sa normom:

$$\|u\|_{p,N} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|_p^p\right)^{1/p} & za \quad 1 \leq p < \infty \\ \max_{1\leq j\leq N}\|u_j\|_\infty & za \quad p = \infty \end{cases} \tag{5.2}$$

Topologija u $\prod_{j=1}^{N}(L^p(\Omega), \| \|_p)$ je ekvivalentna sa topologijom koju norma (5.2) indukuje u proizvodu $L_N^p = \prod_{i=1}^{N} L^p(\Omega)$. Kako je $L^p$ separabilan za $1 \leq p < \infty$ i refleksivan za $1 < p < \infty$ tako isto važi i za proizvod $L_N^p$. Svakom $u \in H^{m,p}$ možemo dodeliti dobro definisan vektor $Pu \in L_N^p$:

$$Pu = (u^{(\alpha_1)}, ..., u^{(\alpha_N)})$$

gde su $\alpha_1, ..., \alpha_N$ poređani u proizvoljnom, ali fiksiranom poretku. Kako je $\|Pu\|_{p,N} = \|u\|_{m,p}$, $P$ je izometrija iz $H^{m,p}(\Omega)$ na potprostor $H \subset L_N^p$. Kako je $H^{m,p}(\Omega)$ kompletan, $H$ je zatvoren potprostor od $L_N^p$. Svaki potprostor separabilnog potprostora je separabilan, a svaki zatvoren potprostor refleksivnog prostora je refleksivan. To važi za $H$ a zbog izometrije i za $H^{m,p}(\Omega)$. $\square$

**Teorema 5.1.5** *Prostor $H_0^{m,p}(\Omega)$ je Banahov, a prostor $H_0^{m,2}(\Omega)$ je Hilbertov.*

**Dokaz** Zatvoren potprostor Banahovog (Hilbertovog) prostora je Banahov (Hilbertov). $\square$

Recimo sada nešto i o aproksimaciji glatkim funkcijama.

Označimo sa $C$ skup:

$$C = \{\phi \in C^m(\Omega) : \quad \|\phi\|_{m,p} < \infty\}. \tag{5.3}$$

Ovo je očigledno podskup od $H^{m,p}(\Omega)$. Odatle sledi i da je $\bar{C}$ podskup od $H^{m,p}(\Omega)$. Kako je $H^{m,p}(\Omega)$ kompletan, tako je i $\bar{C}$ takođe kompletan. Identičko preslikavanje je izometrija između $C$ i $\bar{C}$, tj. $\bar{C}$ je kompletiranje od $C$. Dakle kompletiranje od $C$ je podskup od $H^{m,p}(\Omega)$. Pokazaćemo da je kompletiranje od $C$ ustvari baš skup $H^{m,p}(\Omega)$. Pre toga će nam biti potrebni neki novi pojmovi.

**Teorema 5.1.6** *Neka je $A$ proizvoljan podskup od $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{O}$ kolekcija otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ koji pokrivaju $A$, odnosno takvih da je $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$. Tada postoji kolekcija $\Phi$ funkcija $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ koja ima sledeće osobine:*

*1.* $\forall \phi \in \Phi$ *i* $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq \phi(x) \leq 1$

*2. Ako je $K$ kompaktan podskup od A, sve sem konačno mnogo funkcija $\phi \in \Phi$ su identički jednake nuli na $K$.*

*3. Za svako $\phi \in \Phi$ postoji $U \in \mathcal{O}$ tako da $supp\phi \subset U$.*

*4. Za svako $x \in A$ važi $\sum_{\phi\in\Phi} \phi(x) = 1$.*

*Ovakva kolekcija $\Phi$ naziva se $C^\infty$ podela jedinice za $A$ podređena $\mathcal{O}$.*

Takođe će nam biti potrebna funkcija čija je svrha upravo aproksimiranje distribucija glatkim funkcijama, pomoću konvolucije.

Neka je $J$ nenegativna, realna funkcija iz $C_0^\infty(\Omega)$ koja ima sledeće osobine:

1. $J(x) = 0,\ za\ |x| \geq 1,$
2. $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1.$

Ako je $\epsilon > 0$, funkcija $J_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} J(x/\epsilon)$ je nenegativna, pripada $C_0^\infty(\Omega)$ i važi:

1. $J_\epsilon(x) = 0,\ za\ |x| \geq \epsilon$
2. $\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x)dx = 1$

Konvolucija:

$$J_\epsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy, \tag{5.4}$$

definisana za funkcije $u$ za koje desna strana gornje jednačine ima smisla, naziva se (Soboljevo) uglačanje $u$. Može se pokazati da ako $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, gde $u = 0$ van $\Omega$, onda $J_\epsilon * u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

**Lema 5.1.7** *Neka je $1 \leq p < \infty$ i $u \in H^{m,p}(\Omega)$. Ako $\Omega' \subset\subset \Omega$ onda*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} J_\epsilon * u = u \quad u \quad H^{m,p}(\Omega').$$

Sada možemo dokazati teoremu:

**Teorema 5.1.8** $\overline{C} = H^{m,p}(\Omega)$*, odnosno* $H^{m,p}(\Omega)$ *je kompletiranje prostora* $C$ (5.3)*,* $1 \leq p < \infty$.

**Dokaz** Ustvari ćemo pokazati da ako $u \in H^{m,p}(\Omega)$ i $\epsilon > 0$ onda postoji $\phi \in C^{\infty}(\Omega)$ tako da $\|u - \phi\|_{m,p} < \epsilon$.

Da bi iskoristili lemu moramo se ograničiti na $\Omega_k \subset\subset \Omega$, ali koristimo i podelu jedinice koja je takva da postoji samo konačno mnogo $\phi_k \in \Phi$ koje ne nestaju na $\Omega_k$.

Za $k = 1, 2, ...$ neka je

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : \ |x| < k, \ d(x, \partial\Omega) > 1/k\}$$

gde je $d$ udaljenost tačke od skupa: $d(x, G) = \inf_{y \in G} |x - y|$ za neki $G \subset \mathbb{R}^n, \ i \ x \in \mathbb{R}^n$. Neka je $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$. Važi $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}, \ k = 1, 2...$ i $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Takođe:

$$\mathcal{O} = \{U_k : \ U_k = \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c, \ k = 1, 2, ...\}$$

je kolekcija otvorenih podskupova od $\Omega$ koji pokrivaju $\Omega$. Neka je $\Phi$ podela jedinice za $\Omega$ podređena $\mathcal{O}$. Neka $\phi_k$ označava sumu konačno mnogo funkcija $\phi \in \Phi$ čiji su nosači sadržani u $U_k$.

Za svako $x \in \Omega_k \subset\subset \Omega$ možemo napisati $u$ kao

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) u(x)$$

gde se samo konačno mnogo sabiraka sume razlikuje od nule. Dalje, možemo izabrati $\epsilon_k$ tako da:

$$\|J_{\epsilon_k} * (\phi_k u) - \phi_k u\|_{m,p,\Omega_k} < \frac{\epsilon}{2^k}$$

(nejednakost važi po prethodnoj lemi, jer $\phi_k u \in H^{m,p}(\Omega)$).

Neka je $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} J_{\epsilon_k} * (\phi_k u)$, gde se ponovo na $\Omega_k$ samo konačno mnogo sabiraka razlikuje od nule, pa $\phi \in C^{\infty}(\Omega)$. Takođe, možemo pisati:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k} \phi_j(x)u(x), \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^{k} J_{\epsilon_k j} * (\phi_j u)(x).$$

Onda imamo da je

$$\|u - \phi\|_{m,p,\Omega_k} \leq \sum_{j=1}^{k} \|J_{\epsilon_j} * (\phi_j u) - \phi_j u\|_{m,p,\Omega_k} < \epsilon$$

A kako je $\Omega_k = \cup_{j=1}^{k} \Omega_j$, a niz parcijalnih suma u prethodnoj nejednakosti je ograničen i rastući, po teoremi o monotonoj konvergenciji sledi

$$\|u - \phi\|_{m,p,\Omega} < \epsilon. \quad \Box$$

**Teorema 5.1.9** *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je gust u $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

**Ideja dokaza** Dokaz se izvodi takođe pomoću funkcija (5.4). Neka $f \in H^{m,p}$ i $f_h = J_\epsilon * f$ iz (5.4). Tada se pokazuje da $D^\alpha f_h = (D^\alpha f)_h$, a na osnovu toga da $\|D^\alpha f - D^\alpha f_h\|_{L^p} \to 0,\ h \to 0,\ |\alpha| \leq m$. Zbog toga

$$f_h \in C^\infty \cap H^{m,p} \quad i \quad f_h \to f \ u \ H^{m,p} \quad kada \ h \to 0.$$

Zbog ovoga je dovoljno aproksimirati funkcije $g \in C^\infty \cap H^{m,p}$ u $H^{m,p}$ funkcijama iz $\mathcal{D}$. Neka $\phi \in \mathcal{D}$ i $\phi(x) = 1$ za $|x| \leq 1$. Tada važi

$$\mathcal{D} \ni \phi(2^{-j}x)g(x) \to g(x) \ u \ H^{m,p} \quad za \ j \to \infty \quad \Box$$

**Posledica 5.1.10** *Ako je $1 \leq p < \infty$ tada je $H_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

**Posledica 5.1.11** *$S(\mathbb{R}^n)$ je gust u $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

**Dokaz** Znamo $\mathcal{D} \subset S \subset H^{m,p}$, pa $H^{m,p} = \overline{\mathcal{D}} \subset \overline{S} \subset \overline{H^{m,p}} = H^{m,p}$ sledi $\overline{S} = H^{m,p}$.

## 5.2 Prostori Soboljeva sa negativnim indeksom

Podsetimo se, ako je $H_0^{m,p}(\Omega)$ normalan prostor distribucija, $(H_0^{p,m}(\Omega))'$ smatramo potrostorom prostora distribucija.

**Napomena 5.2.1** *Prostor $L^2(\Omega)$ poistovećujemo sa njegovim dualom, ali za prostor $H_0^{m,p}(\Omega)$ to ne radimo.*

**Teorema 5.2.2** *Distribucija $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekidna linearna funkcionela nad $H_0^{p,m}(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,\ m \in \mathbb{N}_0$, ako i samo ako je $u$ oblika:*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_\alpha \quad (izvod\ je\ u\ distribucionom\ smislu) \tag{5.5}$$

*gde su $u_\alpha \in L^{p'}(\Omega),\ |\alpha| \leq m,\ p' = \frac{p}{p-1},\ (za\ p = 1,\ p' = \infty)$.*

**Dokaz** Pokažimo da je uslov (5.5) dovoljan. Neka je $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ oblika (5.5). Treba pokazati da $u \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$. Neka je prvo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tada važi:

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u_\alpha, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle u_\alpha, D^\alpha \phi \rangle =$$
$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha(x) D^\alpha \phi(x) dx$$

Na osnovu Helderove nejednakosti imamo:

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |u_\alpha D^\alpha \phi| dx$$
$$\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|u_\alpha\|_{p'} \|D^\alpha \phi\|_p \leq C \|\phi\|_{p,m,\Omega}, \tag{5.6}$$

gde je $C = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|u_\alpha\|_{p'}^{p'} \right)^{1/p'}$ i gde smo iskoristili Helderovu nejednakost za sume. Ovo znači da je $u$ neprekidna funkcionela nad

$C_0^\infty(\Omega)$ u odnosu na normu 5.1 i da se može proširiti na $H_0^{m,p}(\Omega)$, pa $u \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$.

Pokažimo sada da je uslov (5.5) potreban. Ponovo ćemo koristiti prostore $L_N^p$ sa normom (5.2). Može se pokazati: za svaku $\mathcal{L}$ neprekidnu linearnu funkcionelu nad $L_N^p$ postoji jedinstveno $u \in \sum_{i=1}^N L^{p'}(\Omega),\ p' = \frac{p}{p-1}$ tako da za svako $f \in L_N^p$ važi:

$$\mathcal{L}(f) = \langle u, f \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} u_i f_i dx.$$

Zapravo, $(L_N^p)'$ je izomorfan sa $\sum_{i=1}^N L^{p'}(\Omega)$.

Neka $u \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$. Preslikavanje $H_0^{m,p}(\Omega)$ u $L_N^p$ definisano sa:

$$i : \phi \mapsto (D^{\alpha_1}\phi, ..., D^{\alpha_N}\phi)$$

je izomorfizam prostora $H_0^{m,p}(\Omega)$ i potprostora od $L_N^p$ koje ćemo označiti sa $L$. Izrazom

$$(D^{\alpha_1}\phi, ..., D^{\alpha_N}\phi) \mapsto u(\phi)$$

je definisana neprekidna linearna funkcionela $U$ nad $L$. Neprekidne (ograničene) linearne funkcionele nad potprostorom normiranog prostora imaju proširenje na dati normiran prostor (specijalan slučaj Han - Banahove teoreme). Dakle $U$ se može proširiti na $L_N^p$ kao neprekidna linearna funkcionela $\tilde{U}$, za koju važi $\tilde{U} = U$ nad $L$. Kako $\tilde{U} \in \sum_{i=1}^N L^{p'}(\Omega)$ sledi da postoje funkcije $u_{\alpha_i} \in L^{p'}(\Omega)$ tako da je

$$\tilde{U} = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{\alpha_i} u_{\alpha_i}.$$

Kako je za $\phi \in H_0^{m,p}(\Omega)$:

$$\langle \tilde{U}, (D^{\alpha_1}\phi, ..., D^{\alpha_N}\phi) \rangle = \langle u, \phi \rangle$$

tako i za $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ važi:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{U}, (\phi^{(\alpha_1)}, ..., \phi^{(\alpha_N)})\rangle &= \sum_{i=1}^{N} (-1)^{\alpha_i} \langle u_{\alpha_i}, \phi^{(\alpha_i)}\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{N} D^{\alpha_i} u_{\alpha_i}, \phi\rangle = \langle u, \phi\rangle\end{aligned}$$

Dakle dobili smo da je $u = \sum_{i=1}^{N} D^{\alpha_i} u_{\alpha_i}$, što je i trebalo pokazati. $\square$

**Definicija 5.2.3** *$H^{p,-m}(\Omega),\ 1 \leq p \leq \infty,\ m \geq 1$ je potprostor od $\mathcal{D}'(\Omega)$ čiji su elementi oblika*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_\alpha \tag{5.7}$$

*gde su $u_\alpha \in L^p(\Omega)$.*

U prostor $H^{p,-m}(\Omega)$ uvodimo normu

$$\|u\|_{p,-m,\Omega} := \inf\{\big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|u_\alpha\|_p^p\big)^{1/p}\} \tag{5.8}$$

gde se infimum uzima po svim reprezentacijama od $u$ oblika 5.7.

Posmatrajmo $u$ iz $(H_0^{p,m}(\Omega))'$. Dualna norma od $u$ je:

$$\|u\|'_{p,m,\Omega} = \sup\{|\langle u, \phi\rangle|;\ \|\phi\|_{p,m,\Omega} \leq 1\}.$$

Na osnovu (5.6) dobijamo da je

$$\sup_{\|\phi\|_{p,m,\Omega} \leq 1} \{|\langle u, \phi\rangle|\} \leq \big(\sum_{|\alpha| \leq m} (\|u_\alpha\|_{p'})^{p'}\big)^{1/p'}.$$

Može se pokazati da je zapravo:

$$\|u\|'_{p,m,\Omega} = \|u\|_{p',-m,\Omega}$$

Ovim je dokazana sledeća teorema:

**Teorema 5.2.4** *Prostor* $(H_0^{p,m}(\Omega))'$, $1 \leq p < \infty$ *sa dualnom normom je izometričan sa* $H^{p',-m}(\Omega)$ *i normom 5.8*

Dokažimo sada dve teoreme za prostore $H^{2,-m}(\Omega) = H^{-m}(\Omega)$ i $H_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

**Teorema 5.2.5** *Prostori* $H_0^m(\Omega)$ *i* $H^{-m}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ *su izometrični. Izometrija tih prostora je definisana sa*

$$H_0^m(\Omega) \ni u \mapsto \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u \in H^{-m}(\Omega). \tag{5.9}$$

**Dokaz** Sa (5.9) je definisano preslikavanje iz $H_0^m(\Omega)$ u $H^{-m}(\Omega)$ jer je

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = \sum_{|\alpha|\leq m} D^{\alpha} u_{\alpha},$$

gde je $u_\alpha = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega)$.

Pokažimo da preslikavanje (5.9) „na“. Neka $g \in H^{-m}(\Omega)$, onda je $g$ neprekidna linearna funkcionela nad $H_0^m(\Omega)$.
Koristićemo *Risovu teoremu o reprezentaciji*:

*Ako je* $H$ *Hilbertov prostor i* $g$ *neprekidna linearna funkcionela nad* $H$, *onda postoji* $y \in H$ *takvo da* $g(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H$. *Takođe,* $\|g\|' = \|x\|$.

U našem slučaju, to znači da postoji $f \in H_0^m(\Omega)$ tako da za svako $\phi \in H_0^m(\Omega)$ važi:

$$\langle g, \phi \rangle = (\phi, f)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha \phi(x) D^\alpha \bar{f}(x) dx,$$

$$\|g\|' = \|f\|_{m,\Omega}. \tag{5.10}$$

Označimo sa $\bar{f} = h \in H_0^m(\Omega)$, onda imamo ustvari da je:

$$\langle g, \phi \rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle D^{2\alpha} h, \phi \rangle,$$

odnosno da je $g$ distribucija oblika $g = \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}h,\ h \in H_0^m(\Omega)$. Znamo da je $\|g\|' = \|g\|_{-m,\Omega}$ i $\|h\|_{m,\Omega} = \|f\|_{m,\Omega}$, pa iz (5.10) sledi da je (5.9) izometrija:

$$\|g\|_{-m,\Omega} = \|h\|_{m,\Omega}. \quad \square$$

**Teorema 5.2.6** $(i)$ *Prostor* $H^{-m}(\Omega),\ m \in \mathbb{N}$ *je Hilbertov.*

$(ii)$ $H^{-m}(\Omega),\ m \in \mathbb{N}$ *je normalan prostor distribucija.*

**Dokaz** $(i)$ Tvrđenje sledi na osnovu toga što je (5.9) izometrija.

$(ii)$ Neka je $f$ izometrija (5.9). $f$ je bijekcija iz $C_0^\infty(\Omega)$ na $C_0^\infty(\Omega)$, tj. $C_0^\infty(\Omega)$ je podskup $H^{-m}(\Omega)$. Proizvoljno $u \in H^{-m}(\Omega)$ se može napisati kao $u = f(v)$ za neko $v \in H_0^m(\Omega)$. Tada postoji niz $v_n \in C_0^\infty(\Omega)$ koji teži ka $v$ u $H_0^m(\Omega)$. Sledi da $f(v_n)$ teži ka $f(v)$ u $H^{-m}(\Omega)$, a kako $f(v_n)$ takođe pripada $C_0^\infty(\Omega)$ sledi da je $C_0^\infty(\Omega)$ gust u $H^{-m}(\Omega)$. $\square$

## 5.3 Prostori Soboljeva sa realnim indeksom

### 5.3.1 $H^s(\mathbb{R}^n),\ H_0^s(\mathbb{R}^n)$

Sada ćemo pomoću Furijeove transformacije definisati prostore $H^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ i $H_0^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ kada $s \in \mathbb{R}$, koje kraće zapisujemo $H^s$ i $H_0^s$. Za $s \in \mathbb{N}_0$ ova definicija će se poklapati sa prethodnom definicijom Soboljevih prostora. Prvo pokažimo sledeću teoremu ($H^m(\mathbb{R}^n) = H^m$).

**Teorema 5.3.1** $(i)$ *Distribucija* $u$ *pripada* $H^m$, $m \in \mathbb{N}$ *ako i samo ako je* $u$ *temperirana distribucija i važi*

$$\hat{u}(1+|y|^2)^{m/2} \in L^2, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{5.11}$$

$(ii)$ *Distribucija* $g$ *pripada* $H^{-m}, m \in \mathbb{N}$ *ako i samo ako je* $g$ *temperirana distribucija i važi*

$$\hat{g}(1+|y|^2)^{-m/2} \in L^2, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{5.12}$$

**Dokaz** $(i)$ Neka $u \in H^m$. To znači da $D^\alpha u \in L^2$, $|\alpha| \leq m$. Znamo da za $L^2$ funkcije važi:

$$\|D^\alpha u\|_2 = \|\mathcal{F}(D^\alpha u)\|_2.$$

Za funkcije iz $S'$ (a $L^2 \subset S'$) znamo da važi

$$\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} y^\alpha \mathcal{F}(u)$$

pa je

$$\|D^\alpha u\|_2 = \|i^{|\alpha|} y^\alpha \mathcal{F}(u)\|_2$$

pa sledi da $i^{|\alpha|} y^\alpha \mathcal{F}(u) \in L^2$. Uslov da $y^\alpha \mathcal{F}(u) \in L^2 \quad \forall |\alpha| \leq m$ je ekvivalentan sa uslovom da $(1+|y|^2)^{m/2}\mathcal{F}(u) \in L^2$. Tako dobijamo da važi (i).

$(ii)$ Neka $g \in H^{-m}(\Omega)$. Tada na osnovu teoreme 5.2.5 postoji $h \in H_0^m(\Omega)$ tako da je

$$\hat{g} = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} i^{2|\alpha|} y^{2\alpha} \hat{h}.$$

Iz $(i)$ sledi da je $(1+|y|^2)^{m/2}\hat{h} \in L^2$, pomnoženo sa $(1+|y|^2)^{-m}$ i dalje pripada $L^2$, pa imamo:

$$(1+|y|^2)^{-m/2}\hat{g} = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} i^{2|\alpha|} y^{2\alpha} (1+|y|^2)^{-m/2}\hat{h} \in L^2.$$

Neka je sada $g$ temperirana distribucija za koju važi (5.12). Tada je $\hat{g}(1+|y|^2)^{-m}$ temperirana distribucija. Kako je Furijeova transormacija bijekcija na prostoru $S'$ možemo reći da postoji $h \in S'$ tako da je $\hat{h} = \hat{g}(1+|y|^2)^{-m}$ i $\hat{h}(1+|y|^2)^{m/2}$ pripada $L^2$. Na osnovu $(i)$ sledi $h \in H^m$, i imamo $\hat{g} = (1+|y|^2)^m \hat{h}$. Može se pokazati da iz ovoga sledi

$$g(x) = (1 - 4\triangle)^m h(x),\ h \in H^m,$$

odakle dobijamo da $g \in H^{-m}$. $\square$

**Definicija 5.3.2** *Za proizvoljno $s \in \mathbb{R}$ sa $H^s$ označavamo prostor temperiranih distribucija za koje važi:*

$$u \in H^s \iff (1+|y|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Važi:

$$H^{s_1} \subset H^{s_2}, \quad za \ -\infty < s_2 \leq s_1 < \infty$$

i posebno

$$H^{s_1} \subset H^{s_2} \subset L^2, \quad za\, 0 \leq s_2 \leq s_1 < \infty$$

Norma u prostoru $H^s$ je data sa

$$|u|_s = \|(1+|y|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2}, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{5.13}$$

a skalarni proizvod sa:

$$[u,v]_s = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)\bar{\hat{v}}(y)(1+|y|^2)^s dy, \quad u,v \in H^m, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{5.14}$$

**Definicija 5.3.3** *$H_0^s(\mathbb{R}^n)$ je zatvaranje $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ u $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

**Teorema 5.3.4** *Neka $s \in \mathbb{R}$. Prostori $H^s$ sa skalarnim proizvodom* (5.14) *su Hilbertovi. Važi:*

$$S(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$$

*i $S(\mathbb{R}^n)$ je gust u $H^s$.*

**Dokaz** Označimo sa $w_s = (1+|y|^2)^{s/2}$. Po definiciji,

$$U \ : \ f \mapsto w_s\mathcal{F}f \ : \ H^s \to L^2 \tag{5.15}$$

generiše izometriju. Ako je $g \in L^2$ proizvoljno, možemo izabrati $f = \mathcal{F}^{-1}(w_s g) \in S'(\mathbb{R}^n)$ i time vidimo da je ovo preslikavanje sirjektivno, odnosno unitarno. Kako je $L^2$ Hilbertov, tako je i $H^s$ Hilbertov. Može se pokazati da preslikavanje

$$f \mapsto w_s f, \quad s \in \mathbb{R}$$

definiše bijekciju iz $S$ u $S$, i iz $S'$ u $S'$. Kako je $\mathcal{F}$ takođe bijekcija na ovim prostorima tako $U$ definiše bijekciju iz $S$ u $S$, i iz $S'$ u $S'$. Kada je $m \in \mathbb{N}_0$ znamo da važi $S \subset H^m \subset L^2 \subset S'$ i $S$ je gust u $H^m$. Odatle imamo prvo $S \subset H^m \subset H^s \subset S'$, a kako je $S$ gust u $L^2$ onda je $S$ gust i u $H^s$ jer je $U$ unitarno. □

**Teorema 5.3.5** *Prostor $H^s,\ s \in \mathbb{R}$ je refleksivan i separabilan Hilbertov prostor.*

**Dokaz** Ovo je posledica toga što je preslikavanje (5.15) izometrija iz $H^s$ i $L^2$ koji je refleksivan i separabilan.

**Teorema 5.3.6** *Dual prostora $H^s$ je $H^{-s}$ i dualna norma se poklapa sa $|\ |_{-s}$.*

**Dokaz** Pokažimo prvo da ako $u \in H^{-s}$ tada je to neprekidna linearna funkcionela nad $H^s$. Kako je $S$ gust u $H^s$ onda je ekvivalentno pokazati da je $u$ neprekidna linearna funkcionela nad $S$ u odnosu na $|\ |_s$. Zbog definicije Furijeove transformacije na prostorima $S$ i $S'$ i na osnovu Helderove nejednakosti za $\phi \in S$ imamo:

$$\begin{aligned} \langle u(x), \phi(x)\rangle &= \langle u(x), \mathcal{F}(\hat{\phi}(-y))\rangle = \langle \hat{u}(y), \hat{\phi}(-y)\rangle \\ &= \langle (1+|y|^2)^{-s/2}\hat{u}(y), (1+|y|^2)^{s/2}\hat{\phi}(-y)\rangle \\ = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-s/2}\hat{u}(y)&(1+|y|^2)^{s/2}\hat{\phi}(y)dy \le |u|_{-s}|\phi|_s \end{aligned}$$

što znači da je $u$ neprekidno nad $S$ u odnosu na normu $|\ |_s$.

Neka je sada $u$ neprekidna linearna funkcionela nad $S$ u odnosu na normu $|\ |_s$. Za proizvoljno $\phi \in S$ važi

$$|\langle u, \phi\rangle| \le C|\phi|_s,$$

za neko $C$. Ako ponovo iskoristimo da je $\langle u(x), \phi(x)\rangle$ $= \langle \hat{u}(y), \hat{\phi}(-y)\rangle$ dobijamo

$$|\langle \hat{u}(y), \hat{\phi}(-y)\rangle| \leq C|\phi(x)|_s = C\|(1+|y|^2)^{s/2}\hat{\phi}(y)\|_2.$$

Preslikavanje $\phi(x) \mapsto \hat{\phi}(-y) = \psi(y)$ iz $(S, |\ |_s)$ u $S$ sa normom:

$$|\psi(y)|_{s,1} = \|(1+|y|^2)^{s/2}\hat{\phi}(y)\|_2$$

je izometrija pa dobijamo da je

$$|\langle \hat{u}(y), \psi(y)\rangle| \leq C|\psi(y)|_{s,1},$$

tj. da je $\hat{u}$ neprekidna linearna funkcionela nad $(S, |\ |_{s,1})$. Koristićemo prostor $(L^2_a, |\ |_{s,1})$, to je prostor funkcija $f$ za koje važi $af \in L^2$, a za $a$ ćemo uzeti $a = (1+|y|^2)^{s/2}$. Za prostore $L^2_a$ važe iste osobine kao za prostore $L^2$. $(S, |\ |_{s,1})$ je gust u $(L^2_a, |\ |_{s,1})$, a dual od $(L^2_a, |\ |_{s,1})$ je $(L^2_{a^{-1}}, |\ |_{-s,1})$. Odavde sledi da $\hat{u} \in L^2_{a^{-1}}$ što znači da $u \in H^{-s}$.

Kako važi da je $|u|_{-s,1}$ identično sa dualnom normom od $\hat{u}$, koja je identična sa dualnom normom od $u$, važi i poslednji deo tvrđenja. $\square$

### 5.3.2 $H^s(\Gamma)$

Prostori Soboljeva nalaze svoju primenu u rešavanju graničnih problema. Kasnije ćemo videti kako se formalno opisuju ovi problemi, ali jasno je da će oni uključivati funkcije koje su definisane na granici nekog skupa. Prvi korak ka predstavljanju graničnog problema biće definisanje prostora $H^s(\Gamma)$.

$\Gamma$ će biti granica skupa $\Omega$. Da bi se ona opisala biće nam potrebni

#### Elementi diferencijalne geometrije

**Definicija 5.3.7** *Neka je $U \subset \mathbb{R}^k$ otvoren i $\psi : U \mapsto \mathbb{R}^n$ glatka funkcija, gde je $k \leq n$. $\psi$ se naziva **imerzija** ako je za svako $x \in U$*

*rang Jakobijana* $D\psi(x)$ *maksimalan, odnosno jednak* $k$. *Za rang* $r(D\psi)$ *važi:*

$$r(D\psi(x)) = \dim im(D\psi(x)) = \dim(\mathbb{R}^k) - \dim(\ker D\psi(x)).$$

*Stoga sledi da je* $\ker D\psi(x) = \{0\}$ *i* $D\psi(x)$ *je injektivno za svako* $x$.

**Definicija 5.3.8** *Podskup* $M$ *od* $\mathbb{R}^n$ *se naziva* $k$ *- dimenzionalna beskonačno diferencijabilna (pod)mnogostrukost* ($k \leq n$) *ako važi:*

$$\begin{cases} Za\ svako\ p \in M\ postoji\ otvorena\ okolina\ W\ od\ p\ u\ \mathbb{R}^n, \\ otvoren\ podskup\ U\ od\ \mathbb{R}^k\ i\ imerzija\ \psi : U \mapsto \mathbb{R}^n, \\ takva\ da\ je\ \psi : U \mapsto \psi(U)\ homeomorfizam\ i\ \psi(U) = M \cap W. \end{cases}$$

$\psi$ *dakle topološki identifikuje* $U$ *i* $\psi(U) = M \cap W$ *(*$M \cap W$ *nosi indukovanu topologiju iz* $\mathbb{R}^n$*).* $\psi$ *se naziva lokalna parametrizacija mnogostrukosti* $M$.

Jedinični krug je jednodimezionalna mnogostrukost u $\mathbb{R}^2$. Sfera je dvodimezionalna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$. Svakako i otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ je mnogostrukost, sam $\mathbb{R}^n$ je mnogostrukost. Ali postoje i apstraktniji skupovi koji su podmnogostrukosti. Na primer, može se pokazati da je skup

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n^2} |\ \det A = 1\}$$

podmnogostrukost od $\mathbb{R}^{n^2}$ dimenzije $n^2 - 1$.

Reći ćemo još šta podrazumevamo pod glatkom funkcijom nad mnogostrukostima (parcijalni izvodi se definišu u unutrašnjoj tački skupa, pa definiciju glatke funkcije znamo samo kada je otvoren skup u pitanju, zato nam je sada potrebna nova definicija).

**Definicija 5.3.9** *Neka su* $M \subset \mathbb{R}^m$ *i* $N \subset \mathbb{R}^n$ *mnogostrukosti. Preslikavanje* $f : M \mapsto N$ *je glatko (*$C^\infty$*), ako za svako* $p \in M$ *postoji otvorena okolina* $U_p$ *od* $p$ *u* $\mathbb{R}^m$ *i glatka funkcija* $\tilde{f} : U_p \mapsto \mathbb{R}^n$ *takva da* $\tilde{f}|_{M \cap U_p} = f|_{M \cap U_p}$.

Napomenimo samo da je specijalan slučaj $N = \mathbb{R}^n$ uključen u ovu definiciju. Takođe, lako se može pokazati da je kompozicija glatkih funkcija glatka funkcija.

Ako je $f$ bijektivno i $f$ i $f^{-1}$ su glatke, $f$ nazivamo difeomorfizmom.

**Definicija 5.3.10** *Neka je $M$ $k$ - dimenziona mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$. Karta $(\varphi, V)$ mnogostrukosti je difeomorfizam otvorenog skupa $V \subset M$ na otvoren skup u $\mathbb{R}^k$.*

Dve karte $\varphi_1(V_1)$ i $\varphi_2(V_2)$ su ($C^\infty$) kompatibilne ako su $\varphi_1(V_1 \cap V_2)$ i $\varphi_2(V_1 \cap V_2)$ otvoreni u $\mathbb{R}^k$ i promena karata

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \mapsto \varphi_2(V_1 \cap V_2)$$

je difeomorfizam.

$C^\infty$ atlas od $M$ je familija $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, V_\alpha)|\ \alpha \in A\}$ karti koje su u parovima kompatibilne, takva da $M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$

Lako se može pokazati da ako je $\psi$ lokalna parametrizacija za $M$, tada je $\varphi := \psi^{-1} : W \cap M \mapsto U$ karta $M$. Takođe, može se pokazati da je familija ovakvih karti u parovima kompatibilna, pa imamo atlas za $M$.

Sada ćemo definisati skup $\Omega$ i do kraja rada ćemo smatrati da on ima ovakve osobine.

$$\begin{cases} Neka\ je\ \Omega\ ogranicena\ oblast\ (otvoren\ i\ povezan\ skup)\ u\ \mathbb{R}^n \\ sa\ granicom\ \Gamma,\ gde\ je\ \Gamma\ beskonacno\ diferencijabilna \\ mnogostrukost\ reda\ n-1, \\ a\ \Omega\ se\ lokalno\ nalazi\ na\ jednoj\ strani\ granice\ \Gamma, \\ drugim\ recima\ \bar{\Omega}\ je\ kompaktna\ mnogostrukost\ sa\ granicom \\ \Gamma\ klase\ C^\infty. \end{cases} \tag{5.16}$$

Vratimo se sada na definisanje prostora $H^s(\Gamma)$. Videćemo kasnije da ako je $\Omega$ otvoren skup $H^s(\Omega)$ možemo definisati kao suženje elemenata iz $H^s(\mathbb{R}^n)$. Međutim za mnogostrukost $\Gamma$ ovo nije moguće uraditi. U ovom slučaju želimo da domen ne bude mnogostrukost $\Gamma$ već $\mathbb{R}^{n-1}$.

Neka je $\{(\varphi_j, G_j),\ j = 1, 2, ..., \mu\}$ atlas od $\Gamma$. Neka, osim toga, $\varphi_j$ slikaju $G_j$ u loptu $Q = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} :\ |y| < 1\}$.

Neka je $\{\alpha_j\}$ podela jedinice na $\Gamma$. Podelu jedinice na proizvoljnom skupu smo definisali u teoremi 5.1.6, sada ćemo samo malo drugačije formulisati osobine ove kolekcije:

$$\begin{cases} \alpha_j \in \mathcal{D}(\Gamma) = prostor\ beskonacno\ diferencijabilnih \\ funkcija\ na\ \Gamma, \\ \alpha_j\ ima\ kompaktan\ nosac\ u\ G_j, \\ za\ svako\ x \in \Gamma\ vazi\ \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_j(x) = 1. \end{cases} \tag{5.17}$$

Za proizvoljnu funkciju $u$ definisanu na $\Gamma$ važi

$$u = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_j u \quad na\ \Gamma.$$

Definišimo dalje:

$$\varphi_j^*(\alpha_j u)(y) = (\alpha_j u)(\varphi_j^{-1}(y)),\ y \in Q.$$

Kako $\alpha_j$ (pa i $\alpha_j u$) ima kompaktan nosač na $G_j$ tako $\varphi_j^*(\alpha_j u)$ ima kompaktan nosač na (celom) $Q$ i stoga $\varphi_j^*(\alpha_j u)$ može biti do - definisana na ceo $\mathbb{R}^{n-1}$. tako što se produži nulom van $Q$.

Linearno preslikavanje:

$$u \mapsto \varphi_j^*(\alpha_j u)$$

je neprekidno preslikavanje $L^1(\Gamma) \mapsto L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, a takođe $\mathcal{D}(\Gamma) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, pa se ono produžava na linearno neprekidno preslikavanje iz $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \mapsto \mathcal{D}'(\Gamma)$.

Sada ćemo definisati $H^s(\Gamma)$ za svako realno $s$:

**Definicija 5.3.11**

$$H^s(\Gamma) = \{u| \quad \varphi_j^*(\alpha_j u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ j = 1, ..., \mu\} \tag{5.18}$$

**Napomena 5.3.12** *Prethodna definicija ne zavisi od izbora sistema lokalnih karata* $(\varphi_j, G_j)$ *i podele jedinice* $\alpha_j$*.*

U $H^s(\Gamma)$ možemo uvesti normu:

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \Big(\sum_{j=1}^{\mu} \|\varphi_j^*(\alpha_j u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}\Big)^{1/2}, \tag{5.19}$$

koja očigledno zavisi od sistema $\{\varphi_j, G_j, \alpha_j\}$. Ali ove norme su međusobno ekvivalentne, a $H^s(\Gamma)$ sa normom (5.19) je Hilbertov prostor.

Važi:

**Teorema 5.3.13** $\mathcal{D}(\Gamma)$ *je gust u* $H^s(\Gamma)$.

**Dokaz** Treba pokazati da za proizvoljno $u \in H^s(\Gamma)$ postoji niz $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Gamma)$ koji teži ka $u$ kada $n \to \infty$ u prostoru $H^s(\Gamma)$. Tj.:

$$\|\varphi_n - u\|_{H^s(\Gamma)} = \Big(\sum_{j=1}^{\mu} \|\varphi_j^*(\alpha_j\varphi_n) - \varphi_j^*(\alpha_j u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}\Big)^{1/2} \to 0,$$

kada $n \to \infty$.

Za $\varphi_j^*(\alpha_j u)$ postoji niz $\psi_{jn} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ takav da $\psi_{jn} \to \varphi_j^*(\alpha_j u)$ kada $n \to \infty$ u prostoru $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$. Možemo pretpostaviti da $\psi_{jn}$ ima kompaktan nosač u $|y'| < 1$, a odavde sledi da postoji $\varphi_n$ tako da je $\psi_{jn} = \varphi_j^*(\alpha_j\varphi_n)$ za svako $j$, odakle sledi teorema.

**Teorema 5.3.14** $(H^s(\Gamma))' = H^{-s}(\Gamma), \quad \forall s \in \mathbb{R}$

### 5.3.3 $H^s(\Omega),\ H_0^s(\Omega)$

Rešenja graničnog problema tražićemo u prostorima $H^s(\Omega)$, dakle umesto $H^s(\mathbb{R}^n)$ sada ćemo definisati i prostore $H^s(\Omega)$ i $H_0^s(\Omega)$. Ali prvo ćemo uvesti jedan bitam pojam, koji će nam koristiti u daljem radu.

**Interpolacioni prostor** Neka su $X$ i $Y$ separabilni Hibertovi prostori i neka važi

$$X \subset Y, \; inkluzija\; je\; neprekidna\; i\; X\; gust\; u\; Y.$$

Tada postoji prostor $[X,Y]_\theta,\ \theta \in [0,1]$ takav da važi $X \subset [X,Y]_\theta \subset Y$, kao i nejednakost:

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq C\|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^\theta \quad \forall u \in X.$$

Ovde je

$$[X,Y]_0 = X$$
$$[X,Y]_1 = Y$$

**Osobine**

- $X$ je gust u $[X,Y]_\theta, \forall\theta$
- Neka su $\theta_0$ i $\theta_1$ dva fiksirana broja iz $[0,1]$ i $\theta_0 < \theta_1$. Tada

$$[X,Y]_{\theta_0} \subset [X,Y]_{\theta_1}.$$

Takođe, $[X,Y]_{\theta_0}$ je gust u $[X,Y]_{\theta_1}$.

Kako važi $X \subset [X,Y]_\theta \subset Y$, pri čemu je svaki prostor gust u narednom (i ne identifikujemo prostor sa svojim dualom), tako važi:

$$Y' \subset [X,Y]'_\theta \subset X'$$

pri tom je ponovo svaki skup gust u narednom. Važi i teorema:

**Teorema 5.3.15** *Za svako $\theta \in [0,1]$ važi:*

$$[X,Y]'_\theta = [Y',X']_{1-\theta}$$

*pri čemu su odgovarajuće norme ekvivalentne.*

Sada imamo sve potrebne pojmove za opis prostora $H^s(\Omega)$.

Za $\Omega$ definisano u (5.16) i $s \geq 0$ prostori $H^s(\Omega)$ su suženje elemenata iz $H^s(\mathbb{R}^n)$ na $\Omega$. Prostori $H_0^s(\Omega)$ su i dalje zatvaranje $\mathcal{D}(\Omega)$ u $H^s(\Omega)$. Norma u ovom prostoru je data sa:

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad U = u, \ skoro\ svuda\ na\ \Omega.$$

Prostori $H^s(\Omega)$ se mogu definisati i kao prostori koji se nalaze „između“ prostora $H^0$ i $H^m$, odnosno interpolacioni prostori. Ova definicija je ekvivalentna prethodnoj.

Za $X = H^0$ i $Y = H^m$ ($m$ je ceo pozitivan broj), imamo da je

$$H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta,$$

gde je $s = (1-\theta)m,\ \theta \in (0,1)$. Neke od osobina koje ćemo navesti u ovom odeljku su posledica osobina interpolacionih prostora. Prva od njih je

**Teorema 5.3.16** *Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je gust u $H^s(\mathbb{R}^n)$ za svako $s$.* $H_0^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$.

**Dokaz** Znamo da je $X$ gust u $[X,Y]_\theta$, pa sledi da ako je $X_0 \subset X$, $X_0$ gust u $X$, onda je $X_0$ gust u $[X,Y]_\theta$. Za $s \geq 0$ možemo uzeti $X = H^m(\mathbb{R}^n)$ ($m$ celo i $m \geq s$), $X_0 = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $Y = L^2(\mathbb{R}^n)$. Za $s < 0$ možemo iskoristiti dualnost pa imamo $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ i $Y = H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Za dalji rad biće nam potrebne i glatke funkcije koje nisu neophodno jednake nuli na granici.

Za otvoreno $\Omega$ funkcija $\phi \in C^m(\Omega)$ ne mora biti ograničena na $\Omega$. Ako je $\phi \in C^m(\Omega)$ ograničena i uniformno neprekidna na $\Omega$ onda ona ima jedinstveno ograničeno i neprekidno produženje na zatvaranje $\bar{\Omega}$ od $\Omega$. Vektorski prostor $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ se sastoji iz funkcija $\phi \in C^m(\Omega)$ za koje je $D^\alpha\phi$ ograničena i uniformno neprekidna funkcija na $\Omega$ za svako $0 \leq |\alpha| \leq m$. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ je Banahov prostor sa normom:

$$\|\phi;\ \mathcal{D}(\bar{\Omega})\| = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\phi(x)|.$$

Kako su sve funkcije iz $\mathcal{D}(\Omega)$ ograničene i uniformno neprekidne na $\Omega$ tako važi $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Ali funkcije iz $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ne moraju biti jednake nuli na granici od $\Omega$.

Navešćemo sada neke osobine ovih prostora.

Iz osobina interpolacionih prostora sledi sledeća

**Teorema 5.3.17** *Neka je $s = m(1-\theta)$, a $m$ je ceo pozitivan broj. $\forall \theta \in [0,1]$ $H^m(\Omega)$ je gust u $H^s(\Omega)$.*

Zapravo, možemo videti da je $H^{s_1}$ gust u $H^{s_2}$ za proizvoljno $s_1 > s_2$.

Vratićemo se na kratko na prostore $H^m(\Omega),\ m \in \mathbb{N}_0$. Recimo prvo nešto o operatoru produženja.

**Teorema 5.3.18** *Za svako celo $m \geq 0$ postoji operator $p$ sa sledećim osobinama:*

$$p \in \mathcal{L}(H^k(\Omega), H^k(\mathbb{R}^n)), \quad \forall k,\ 0 \leq k \leq m,$$

$$pu = u \ skoro \ svuda \ na \ \Omega,\ \forall u \in H^0(\Omega).$$

**Napomena 5.3.19** *Preslikavanje „suženje“ na $\Omega$:*

$$u \mapsto r_\Omega u = \text{suzenje } u \text{ na } \Omega$$

*je linearno neprekidno preslikavanje iz $H^k(\mathbb{R}^n)$ u $H^k(\Omega)$ za svako celo $k \geq 0$.*

**Teorema 5.3.20** *$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ je gust u $H^m(\Omega)$.*

**Dokaz** Neka je $pu \in H^m(\mathbb{R}^n)$, tada postoji niz $\Phi_l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ koji teži ka $pu$ u normi prostora $H^m(\mathbb{R}^n)$ (teorema 5.1.9). Zato važi

$$u = r_\Omega(pu) = \lim_{l \to \infty} r_\Omega \Phi_l \quad u \ prostoru \ H^m(\Omega)$$

odakle sledi potreban rezultat jer $r_\Omega \Phi_l \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

**Teorema 5.3.21** *Iz prethodne dve teoreme sledi: $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ je gust u $H^s(\Omega),\ s \geq 0$.*

Potom imamo sledeće osobine:

**Teorema 5.3.22** *Za $s > \frac{n}{2}$ važi inkluzija:*

$$H^s(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}),$$

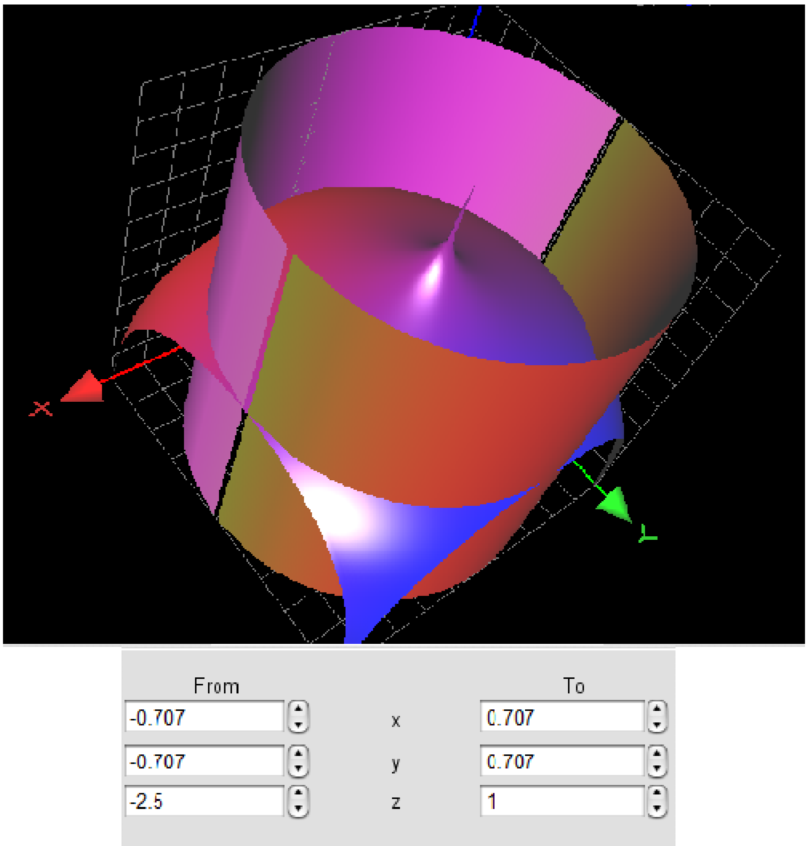
*pri čemu je operator inkluzije neprekidan.*

**Napomena 5.3.23** *Ova inkluzija znači da ako $u \in H^s(\Omega)$ onda se $u$ skoro svuda poklapa s nekim elementom $u \in C(\bar{\Omega})$ i identifikujemo $u$ sa tim elementom.*

**Napomena 5.3.24** *Ovaj rezultat ne može biti uopšten. Na primer, ako je $n = 2$, $s = 1$, a $\Omega$ je krug $|x| < 1/2$, onda $H^s(\Omega)$ nije sadržan u $C(\bar{\Omega})$; funkcija*

$$x \mapsto log|log|x||$$

*pripada $H^1$ ali ne pripada $C(\bar{\Omega})$.*



**Posledica 5.3.25** *Za* $s > \frac{n}{2} + m \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n)$, *važi*

$$H^s(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega})$$

*ako je* $C^m(\bar{\Omega})$ *snabdeven normom* $\sum_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in\Omega} |D^\alpha v(x)|$. *Pri tom je operator inkluzije neprekidan.*

**Posledica 5.3.26**

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(\Omega) = \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

**Teorema 5.3.27** $\mathcal{D}(\Omega)$ *gust u* $H^s(\Omega)$ *(tj.* $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$*) ako i samo ako je* $s \leq \frac{1}{2}$. *U suprotnom imamo pravu inkluziju:* $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$.

**Ideja dokaza** Može se pokazati da je

$$\mathcal{D}(\Omega) \; gust \; u \; H^{1/2}(\Omega).$$

A kako važi

$$H^{1/2}(\Omega) \subset H^s(\Omega), \quad H^{1/2}(\Omega) \; je \; gust \; u \; H^s(\Omega), \quad s < 1/2,$$

to je i dovoljno. $\square$

Definišimo:

$$H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))', \quad s > 0$$

Ovo je ponovo podskup od $\mathcal{D}'(\Omega)$. Za $\Omega = \mathbb{R}^n$ ova definicija se poklapa sa teoremom 5.3.6. Takođe, na osnovu teoreme 5.3.27 znamo da je

$$(H^s(\Omega))' = H^{-s}(\Omega) \quad za \quad s \leq 1/2.$$

Objasnićemo još jedan značajan pojam - trag funkcije.

**Trag funkcije** Ako funkcija pripada $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tada se njen trag može definisati kao restrikcija na neku $(n-1)$ - dimenzionalnu mnogostrukost sadržanu u $\bar{\Omega}$, u našem slučaju će to biti $\Gamma$. Ako je funkcija iz $L^1_{loc}(\Omega)$ ili $L^p(\Omega)$ onda funkciju možemo proizvoljno da definišemo na $\Gamma$ jer je $\Gamma$ mere nula. To znači da ne možemo definisati njen trag na $\Gamma$ na jedinstven način u $L^1_{loc}(\Omega)$ $(L^p(\Omega))$. Za funkcije iz $H^{m,p}(\Omega),\ m \in \mathbb{N}$ je moguće definisati jedinstven trag. Navešćemo primer traga funkcije iz $H^1(\Omega)$.

U ovom primeru uzećemo malo drugačije uslove za domen: $\Omega$ ograničena oblast čija je granica je sastavljena od konačno mnogo zatvorenih $(n-1)$ - dimenzionalnih površi klase $C^1$ koje se međusobno seku. Neka je $\Gamma$ $(n-1)$ - dimenzionalna površ klase $C^1$ sadržana u $\bar{\Omega}$ koja se može prekriti sa konačno mnogo otvorenih skupova.

Ako je $f \in H^1(\Omega)$ tada postoji niz $\{f_n\}$ iz $C^1(\bar{\Omega})$ koji u normi prostora $H^1(\Omega)$ konvergira ka $f$. Može se pokazati da postoji konstanta $C$ takva da

$$\|f|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

Niz $\{f_n\}$ je Košijev u $H^1(\Omega)$ pa iz ove nejednakosti sledi i da je $\{f_n|_\Gamma\}$ Košijev u $L^2(\Gamma)$. $L^2(\Gamma)$ je kompletan pa $\{f_n|_\Gamma\}$ konvergira ka nekom $f_\Gamma \in L^2(\Gamma)$. Može se pokazati da $f_\Gamma$ ne zavisi od izbora niza $\{f_n\}$.

Ovim smo dakle pokazali da za $f \in H^1(\Omega)$ postoji jedinstven element $f_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ tako da postoji $C > 0$ (koje ne zavisi od $f$) i da važi

$$\|f_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

Drugim rečima preslikavanje iz $H^1(\Omega)$ u $L^2(\Gamma)$, $f \mapsto f_\Gamma$ je neprekidno i injektivno. Trag funkcije $f \in H^1(\Omega)$ nad $\Gamma$ je $f_\Gamma \in L^2(\Gamma)$.

Ako je $f \in H^1_0(\Omega)$ iz konstrukcije traga sledi da je $f_\Gamma = 0$, a može se pokazati i obrnuto tvrđenje.

Granični uslovi u diferencijalnim jednačinama podrazumevaju da znamo kakva je funkcija na granici skupa, ali često se traže i izvodi po normali. Kako će nas zanimati rešenje koje je iz prostora Soboljeva, nemamo klasičnu diferencijabilnost i izvode po normali pa će biti potreban malo drugačiji pristup. Sada ćemo se vratiti na uobičajenu definiciju 5.16 za $\Omega$ i $\Gamma$ i dati teoremu o tragu, koju ćemo koristiti u ostatku rada. Ova teorema preciznije „locira“ trag funkcije nego prethodni primer.

**Teorema 5.3.28** *Teorema o tragu u $H^m(\Omega)$*

*Neka $\Omega$ zadovoljava uslove* (5.16). *Tada preslikavanje*

$$u \mapsto \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial v^j} | \quad j = 0, ..., m-1 \right\}, \tag{5.20}$$

*(gde je $\frac{\partial^j u}{\partial v^j}$ $j$ - ti izvod po normali, a normala na granicu $\Gamma$ je orjentisana ka unutrašnjosti od $\Omega$) iz $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ u $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ neprekidno se produžava do neprekidnog linearnog preslikavanja*

$$u \mapsto \{ \frac{\partial^j u}{\partial v^j} | \quad j = 0, ..., m-1 \}, \quad H^m(\Omega) \mapsto \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Kako su prostori $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ i $\mathcal{D}(\Gamma)$ gusti u $H^m(\Omega)$ i $H^m(\Gamma)$ respektivno, svaka funkcija iz $H^m(\Omega)$ može se aproksimirati nizom funkcija iz $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Ove glatke funkcije imaju izvode po normali koji su glatke funkcije na granici. Niz ovih glatkih funkcija na granici onda teži ka funkciji koja je u $H^{m-1/2-j}(\Gamma)$. Za dokaz teoreme je zbog ovoga dovoljno pokazati da je preslikavanje (5.20) neprekidno u odnosu na topologiju prostora $H^m(\Omega)$ i $H^{m-1/2-j}(\Gamma)$, ali to nećemo pokazivati.

Dakle, funkciju iz $H^m(\Omega)$ možemo (neprekidno i linearno) povezati sa njenim tragom koji je u $H^{m-1/2-j}(\Gamma)$, a trag možemo zamišljati kao njen izvod po normali.

# Glava 6

# Primer primene - Nehomogeni granični problem

## 6.1 Motivacija

Počnimo sa formalnim opisom problema. Neka je $O$ skup u $\mathbb{R}^n$ sa granicom $\partial O$. Neka u $O$ i $\partial O$ deluju respektivno linearni diferencijalni operatori $P$ i $Q_j$, $0 \leq j \leq v$. Pod **nehomogenim graničnim problemom** podrazumevamo problem sledećeg tipa: neka su $f$ i $g_j$, $0 \leq j \leq v$ elementi prostora $F$ i $G_j$, $F$ je prostor funkcija nad $O$, a $G_j$ prostor funkcija nad $\partial O$. U prostoru $\mathcal{U}$ funkcija nad $O$, tražimo element $u$, koji zadovoljava sledeće jednačine:

$$\begin{cases} Pu = f \quad u\, O \\ Q_j u = g_j \quad na\, \partial O \quad 0 \leq j \leq v. \end{cases} \tag{6.1}$$

Cilj je pokazati da za $f \in F$ i $g_j \in G_j$ postoji jedinstveno rešenje koje neprekidno zavisi od početnih uslova, odnosno pronaći prostore $F$ i $G$ za koje takvo rešenje postoji. Naravno postoje razni izbori za prostore $\mathcal{U}$ i $\{F, G_j\}$, a prostori Soboljeva su se pokazali najkorisnijim za primene. Daćemo prvo jednostavan i najčešći primer koji pokazuje značaj nehomogenih graničnih problema i čiji opštiji slučaj ćemo razraditi u nastavku.

**Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu** Neka je $O$ skup $\Omega$ u $\mathbb{R}^n$ sa granicom $\Gamma$, za $P$ uzimamo operator Laplasa: $\triangle$; $v = 0$, i $Q_0$ identički operator. Tada problem (6.1) postaje:

$$\begin{cases} \triangle u = f \quad u \quad \Omega \\ u = g_0 = g \quad na \quad \Gamma \end{cases} \tag{6.2}$$

Ponovo je pitanje u kojim prostorima da biramo $f$ i $g$ tako da problem (6.2) ima jedinstveno rešenje. Klasičan odgovor je, na primer: ako su $f$ i $g$ kvadratno integrabilne funkcije (kao i neki njihovi izvodi) na $\Omega$ i $\Gamma$ respektivno, tada je rešenje $u$ problema (6.2) (sa svojim izvodima) takođe kvadratno integrabilno. Pokazalo se da je prirodna familija za prostore $F$ i $G$ familija Soboljevih prostora $H^s(\Omega)$ i $H^s(\Gamma)$. Važi sledeći rezultat:

**Teorema 6.1.1** *Neka je $s$ nenegativan realan broj. Ako $f \in H^s(\Omega)$ i $g \in H^{s+3/2}(\Gamma)$ onda postoji jedinstveno rešenje $u$ problema (6.2) koje pripada $H^{s+2}(\Omega)$. Preciznije, operator $u \mapsto \{\triangle u, u|_\Gamma\}$ je izomorfizam*

$$iz \quad H^{s+2}(\Omega) \quad u \quad H^s(\Omega) \times H^{s+3/2}(\Gamma)$$

Prirodno je razmotriti i slučaj negativnog $s$ jer se u razmatranju problema (6.2) često dešavaju slučajevi da je, na primer, $f = 0$, a $g$ je neka neregularna funkcija, npr. $g$ je kvadratno integrabilna na $\Gamma$ (što se javlja u teoriji optimalnog upravljanja) ili $g$ je jednostavno distribucija na $\Gamma$. Ispostavlja se da je takvo $G$ podskup od $H^s$, $s < 0$. I u slučaju negativnog $s$ problem može biti rešen, a prostori $\mathcal{U}$, $F$ su ponovo podskupovi od $H^s$, ali za negativno $s$.

U nastavku će biti definisan opštiji problem, kada je operator $P$ eliptični operator (biće označen sa $A$), kada su $Q_j$ normalni granični operatori (označeni sa $B_j$) i kada oni zadovoljavaju određene uslove eliptičnosti.

## 6.2 Definicija problema za eliptičnu jednačinu

Neka je $\Omega$ ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$ sa granicom $\Gamma$, gde je $\Gamma$ beskonačno diferencijabilna mnogostrukost reda $n-1$

Neka je u $\mathbb{R}^n$ definisan linearni diferencijalni operator:

$$A(D)u = \sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha D^\alpha u \tag{6.3}$$

reda $l$ sa konstantnim koeficijentima. Za $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ definišemo karakteristični polinom operatora $A$:

$$A_0(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \xi^\alpha,$$

podsetimo se $\xi^p = \xi_1^{p_1} ... \xi_n^{p_n}$.

**Definicija 6.2.1** *Operator $A$ se naziva eliptičnim ako*

$$A_0(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0$$

**Teorema 6.2.2** *Ako je $n > 2$ svaki eliptičan operator je parnog reda.*

**Definicija 6.2.3** *Operator $A$ definisan u (6.3) za $l = 2m$ naziva se regularno eliptičan ako je eliptičan i ako za svaki par linearno nezavisnih vektora $\xi,\ \xi' \in \mathbb{R}^n$ polinom $A_0(\xi + \tau\xi')$ komplesne promenljive $\tau$ ima $m$ korena sa pozitivnim imagirnim delom.*

**Napomena 6.2.4** *Smatraćemo da je $A$ uvek reda $2m$.*

Može se pokazati:

**Teorema 6.2.5** *Za $n > 2$ svaki eliptični operator je regularno eliptičan.*

Neka je sada

$$Au = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x) D^q u),$$

gde $a_{pq} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Osobine (regularne) eliptičnosti definišemo analogno operatoru sa konstantnim koeficijentima.

Operatore $B_j,\ 0 \leq j \leq \mu - 1$ definisane sa:

$$B_j \phi = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha \phi, \quad b_{j\alpha} \in \mathcal{D}(\Gamma) \tag{6.4}$$

nazivaćemo graničnim operatorima. Ovde $D^\alpha$ označava izvod po normali na granici $\Gamma$ i podrazumevaćemo ovo značenje (samo) kada koristimo granične operatore.

Neka je $\Gamma_1$ neki deo granice $\Gamma$.

**Definicija 6.2.6** *Kažemo da je sistem operatora $\{B_j\}_{j=0}^{\nu-1}$ normalan na $\Gamma_1$ ako:*

1. $\sum_{|h|=m_j} b_{jh}(x) \xi^h \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma_1$ *i* $\forall \xi \neq 0$ *i normalno na* $\Gamma$ *u tački* $x$

2. $m_j \neq m_i$ *za* $i \neq j$.

Pretpostavimo sada da $\nu = m$, onda možemo dati:

**Definicija 6.2.7** *Sistem operatora $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ pokriva regularno eliptični operator $A$ na $\Gamma_1$ ako za svako $x$ iz $\Gamma_1$ i za svaki par nenula vektora $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $\xi$ tangentan, a $\xi'$ normalan na $\Gamma$ u tački $x$, polinomi kompleksne promenljive $\tau$:*

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x)(\xi + \tau \xi')^\alpha, \quad j = 0, ..., m-1,$$

*su linearno nezavisni po modulu polinoma $\prod_{i=1}^{m}(\tau - \tau_i^+(x, \xi, \xi'))$ gde su $\tau_i^+(x, \xi, \xi')$ koreni polinoma $A_0(x, \xi + \tau \xi')$ sa pozitivnim imaginarnim delovima.*

Sada možemo definisati **granični problem**. Neka je:

**(i)** $\Omega$ ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$ sa granicom $\Gamma$, gde je $\Gamma$ beskonačno diferencijabilna mnogostrukost reda $n-1$

**(ii)** Operator $A$ zadat jednačinom

$$Au = \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x) D^q u), \tag{6.5}$$

njegovi koeficijenti $a_{pq}$ pripadaju $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ i $A$ je regularan eliptični operator u $\bar{\Omega}$.

**(iii)** Operatori $B_j$ zadati sa:

$$B_j u = \sum_{|h|\leq m_j} b_{jh}(x) D^h u, \tag{6.6}$$

$b_{jh} \in \mathcal{D}(\Gamma), 0 \leq m_j \leq 2m-1$, sistem $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ normalan na $\Gamma$ i pokriva $A$ na $\Gamma$.

Granični probem za eliptičnu jednačinu je:

$$\begin{cases} Au = f & \text{u } \Omega \\ B_j u = g_j & \text{na } \Gamma, \quad j = 0, 1, ..., m-1 \end{cases} \tag{6.7}$$

## 6.3 Adjungovani operator i Formula Grina

Formulu Grina koristićemo u nekim narednim teoremama. Za nju će nam biti potrebna definicija adjungovanog operatora. Prvo ćemo navesti definiciju za slučaj kada je $A$ neprekidno preslikavanje između normiranih vektorskih prostora, a potom i uopštenje.

Ako je $u \in X'$, a $v \in X$ sa $\langle u, v\rangle$ ćemo označavati $u(v)$, gde $\langle\ ,\ \rangle$ predstavljaju bilinearnu formu - funkcionelu iz $X' \times X$ koja je linearna po oba člana.

**Definicija 6.3.1** *Neka su $X$ i $Y$ normirani vektorski prostori i neka $A : X \mapsto Y$ linearan, neprekidan operator. Neka je $y^* \in Y'$, a*

*$x^* \in X'$. Ako par $(y^*, x^*)$ zadovoljava jednačinu*

$$\langle y^*, Ax \rangle = \langle x^*, x \rangle \quad \forall x \in X$$

*tada je $x^*$ jedinstveno određeno sa $y^*$. Stoga možemo definisati operator $A^* : Y' \mapsto X'$ takav da je $A^* y^* = x^*$ i to je adjungovani operator za $A$. On dakle zadovoljava jednačinu:*

$$\langle y^*, Ax \rangle = \langle A^* y^*, x \rangle, \quad x \in X, y^* \in Y' \tag{6.8}$$

Jednačinu (6.8) ćemo nazivati bilinearni identitet i ona dakle služi da se definiše adjungovani (dualni) operator za $A$. Može se pokazati:

**Teorema 6.3.2** *$A^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ i $\|A^*\| = \|A\|$.*

Međutim, u našem slučaju operator $A$ je diferencijalni operator, pa stoga nije ograničen. Neograničene operatore definišemo na podskupu normiranog prostora. Ako na primer imamo normirani prostor $C([0,1])$, $A = d/dx$ možemo definisati samo na podskupu $C^1([0,1])$.

**Definicija 6.3.3** *Neka su $X, Y$ normirani vektorski prostori. Preslikavanje $A$ koje svakom $x$ iz $D(A) \subset X$ dodeljuje jedinstveno $y \in Y$ se naziva operator na $D(A)$. Operator $A$ je linearan ako je $D(A)$ vektorski potprostor od $X$ i ako je $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. $A$ je gusto definisan ako je $D(A)$ gust u $X$.*

**Primer 6.3.4** *Neka je $Au = u'$ definisan na $D(A)$ - skupu svih neprekidno diferencijabilnih funkcija na $[0,1]$,*

$$A : D(A) \subset L^2([0,1]) \mapsto L^2([0,1]).$$

*$A$ je linearan, a i neograničen. Uzmimo na primer niz funkcija iz $D(A)$: $f_n(x) = \sin 2\pi n x$, za njih važi $\|f_n\|_2 = 1/\sqrt{2}$, dok $\|Af_n\|_2 = 2\pi n/\sqrt{2} \to \infty$. Takođe, $A$ je gusto definisan.*

*Ovaj operator se može posmatrati kao operator iz $X \to X$ za mnoge druge normirane prostore $X$ i i dalje će biti neograničen. S druge strane, on jeste ograničen kao operator $X_1 \mapsto X_2$ za neke parove normiranih prostora $X_1, X_2$ i takođe kao operator $X \mapsto X$ za neke topološke vektorske prostore $X$. Na primer kada*

$$A : (C^1(I), \| \|_1,) \mapsto (C(I), \| \|_\infty),$$

*za neki otvoren interval $I \subset \mathbb{R}$, gde je $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.*

Sada želimo da definišemo dual linearnog operatora, tj. hoćemo da važi

$$A^* y^*(x) = y^*(Ax), \ \forall x \in D(A).$$

Kažemo da $y^* \in D(A^*)$ ako postoji $x^* \in X'$ takvo da

$$x^*(x) = y^*(Ax), \ \forall x \in D(A).$$

Postojanje ovakvog $x^*$ više nije zagarantovano. Kada takvo $x^*$ postoji, definišemo $A^* y^* = x^*$. Takođe $x^*$ mora biti jedinstveno. Ispostavlja se da ovo važi ako i samo ako je $D(A)$ gust u $X$. Dakle $A^*$ definišemo za linearan operator $A : D(A) \mapsto Y$, gde je $D(A)$ gust u $X$. $D(A^*)$ je skup onih $y^* \in Y'$ za koje postoji $x^* \in X'$ takvi da je $x^*(x) = y^*(Ax), \ \forall x \in D(A)$. Ovo $x^*$ je jedinstveno i $A^* y^* = x^*$. Ponovo imamo bilinearni identitet:

$$\langle y^*, Ax \rangle = \langle A^* y^*, x \rangle, \quad x \in D(A), y^* \in D(A^*)$$

Sada se postavlja pitanje kako konstruisati $A^*$ za zadato $A$ koristeći bilinearni identitet. Prvo ćemo definisati formalni adjungovani operator (izraz „formalni“ se koristi kada ne uzimamo u obzir prostore na koje deluju operatori):

**Definicija 6.3.5** *Neka je $A$ diferencijalni operator. Formalni adjungovani operator $A^*$ je diferencijalni operator koji zadovoljava*

$$(Au, v)_2 = (u, A^* v)_2 \quad \left(\int_\Omega Au\bar{v}dx = \int_\Omega u\overline{A^* v}dx\right) \tag{6.9}$$

*za sve $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Do $A^*$ se dolazi tako što $\int_\Omega Au\bar{v}dx$ rešavamo parcijalnom integracijom, kako imamo funkcije koje nestaju na granici, dobićemo izraz oblika $\int_\Omega u\overline{A^*v}dx$. Kako za ovakve funkcije važi da je $\int_\Omega udv = -\int_\Omega vdu$ jednakost (6.9) je u nekom smislu uopštenje ovog izraza. Polazimo od ovog izraza zbog analogije između (6.8) i skalarnog proizvoda kada smo u Hilbertovim prostorima.

U našem slučaju dobijamo da je

$$A^*u = \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^{|p|} D^p(\overline{a_{pq}(x)} D^q u).$$

Ono što ćemo kasnije koristiti je: ako ovakvo $A^*$ definišemo na $\mathcal{D}(\Omega)$ koji je gust u $L^2(\Omega)$, $A^* : v \mapsto A^*v \in \mathcal{D}(\Omega)$, onda je operator $(A^*)^* = A$ njegov (pravi) dual koji slika neki podskup od $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ i važi

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle,$$

kao i (linearnost):

$$\langle Au, \bar{v}\rangle = \langle u, \overline{A^*v}\rangle,$$

što se u slučaju regularnih distribucija poklapa sa izrazom (6.9).

Može se pokazati da je $A$ (regularno) eliptičan ako i samo ako je $A^*$ (regularno) eliptičan.

Teorema Grina govori o tome šta se događa kada radimo sa funkcijama koje nisu nula na granici.

Neka je $\{F_i\}_{i=0}^{v-1}$ sistem graničnih diferencijalnih operatora definisan sa:

$$F_i\phi = \sum_{|h|\leq m_i} f_{ih}(x) D^h\phi, \quad f_{ih}(x) \in \mathcal{D}(\Gamma)$$

**Definicija 6.3.6** *Sistem operatora* $\{F_i\}_{i=0}^{v-1}$ *je Dirihleov sistem reda* $v$ *na* $\Gamma_1$ *(deo* $\Gamma$*), ako je on normalan na* $\Gamma_1$*, a red* $m_i$ *prolazi kroz sve vrednosti* $0, 1, ..., v-1$ *kada* $i$ *ide od* $0$ *do* $v-1$.

**Teorema 6.3.7** *Neka operatori $A$ i $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ zadovoljavaju uslove $(ii)$ i $(iii)$. Onda možemo izabrati, i to ne na jedinstven način, drugi sistem graničnih operatora $\{S_j\}_{j=0}^{m-1}$ sa beskonačno diferencijabilnim koeficijentima na $\Gamma$, $S_j$ je reda $\mu_j \leq 2m-1$, tako da operatori $\{B_0, ..., B_{m-1}, S_0, ..., S_{m-1}\}$ obrazuju Dirihleov sistem reda $2m$ na $\Gamma$; a ako je ovaj izbor napravljen, postoji $2m$ graničnih diferencijalnih operatora $C_j, T_j, j = 0, ..., m-1$ definisanih na jedinstven način sa sledećim osobinama:*

1. *koeficijenti operatora $C_j$ i $T_j$ pripadaju $\mathcal{D}(\Gamma)$.*

2. *$C_j$ je reda $2m-1-\mu_j$, a $T_j$ reda $2m-1-m_j$.*

3. *sistem $\{C_0, ..., C_{m-1}, T_0, ..., T_{m-1}\}$ je Dirihleov sistem reda $2m$ na $\Gamma$ pri čemu za svako $u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ važi **formula Grina:***

$$\int_\Omega Au\bar{v}dx - \int_\Omega u\overline{A^*v}dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma S_j u\overline{C_j v}d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma B_j u\overline{T_j v}d\sigma \tag{6.10}$$

**Napomena 6.3.8** *Kako su $T_j$ i $C_j$ granični diferencijalni operatori, za $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi da je $T_j u = 0,\ C_j u = 0,\ j = 0, ..., m-1$.*

**Posledica 6.3.9** *Ako je $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, onda je $B_j u = 0,\ j = 0, ..., m-1$ ako i samo ako*

$$\int_\Omega Au\bar{v}dx = \int_\Omega u\overline{A^*v}dx$$

*za svako $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ koje zadovoljava uslove $C_j v = 0,\ j = 0, ..., m-1$.*

Kažemo da je sistem $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$ iz prethodne teoreme konjugovan za sistem $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ u odnosu na operator $A$ i formulu Grina. Takođe kažemo da je granični problem $\{A^*, C\}$:

$$A^* u = f \quad \text{u}\ \Omega$$

$$C_j u = g_j \quad \text{na } \Gamma, \quad j = 0, 1, ..., m-1 \tag{6.11}$$

formalno konjugovan za problem (6.7) u odnosu na formulu Grina (6.10).

**Teorema 6.3.10** *Neka je operator $A$, definisan sa $(ii)$. Sistem $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ normalan na $\Gamma$ pokriva $A$ ako i samo ako svaki normalan sistem $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$, konjugovan sistemu $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ u odnosu na $A$ i formulu Grina, pokriva operator $A^*$.*

## 6.4 Postojanje rešenja u prostorima sa pozitivnim indeksom

Prvo ćemo razmotriti postojanje rešenja u prostorima $H^{2m+r}(\Omega)$ pri celom $r \geq 0$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Biće nam potrebna definicija količničkog skupa. Ako je $X$ vektorski prostor i $V$ neki njegov potprostor, količnički skup $X/V$ je skup svih klasa ekvivalencije, takvih da je $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in V$. Ako je $V$ jezgro linearne funkcije $f$, ovaj uslov je ekvivalentan sa $f(a) = f(b)$. Dimenziju prostora $X/V$ nazivamo kodimenzija $V$ u prostoru $X$.

Definišimo sada operator $\mathcal{P}$ sa:

$$\mathcal{P}: \quad u \to \mathcal{P}u = \{Au; B_0u, ..., B_{m-1}u\} \tag{6.12}$$

Kažemo da je $\mathcal{P}$ operator s indeksom ako su dimenzije njegovog jezgra i njegovog prostora slika konačne, i da je prostor slika zatvoren, a indeks operatora je zadat sa

$$\chi(\mathcal{P}) = dim(ker(\mathcal{P})) - codim(Im(\mathcal{P})).$$

Može se pokazati

**Teorema 6.4.1** *Neka važe* $(i), (ii)$ *i* $(iii)$. *Neka je* $\{A^*, C\}$ *formalno konjugovan problem u odnosu na formulu Grina* (6.10). *Tada operator* $\mathcal{P}$ *slika*

$$H^{2m+r}(\Omega) \to H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma), \quad r = 0, 1, 2...;$$

*njegovo jezgro je konačno - dimenzioni prostor:*

$$N = \{u| \quad u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), Au = 0, B_0 u = 0, ..., B_{m-1} u = 0\},$$

*a skup slika je potprostor od* $H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma)$, *elemenata* $\{f;\ g_0, ..., g_{m-1}\}$ *koji zadovoljavaju uslov*

$$\int_\Omega f\bar{v}dx + \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma g_j \overline{T_j v} d\sigma = 0 \tag{6.13}$$

*za sve* $v$ *koji pripadaju konačno - dimenzionom prostoru*

$$N^* = \{v| \quad v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), A^* v = 0, C_0 v = 0, ..., C_{m-1} v = 0\}$$

*(a* $T_j$ *su operatori iz formule Grina). Tako definisano* $\mathcal{P}$ *je operator s indeksom i njegov indeks je zadat sa*

$$\chi(\mathcal{P}) = dimN - dimN^*.$$

Neka je $H^{2m+r}(\Omega)/N$ količnički prostor od $H^{2m+r}(\Omega)$ po $N$. Sa

$$\{H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma); N^*, \mathcal{T}\}$$

označićemo potprostor prostora

$$H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma)$$

definisan uslovom (6.13). Prelaskom na količnički prostor dobijamo bijekciju, pa teoremu 6.4.1 možemo formulisati i na sledeći način:

**Teorema 6.4.2** *Operator $\mathcal{P}$ definiše linearni homeomorfizam iz $H^{2m+r}(\Omega)/N$ na*

$$\{H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma); N^*, \mathcal{T}\}.$$

Korišćenjem interpolacije, prethodna teorema se može preformulisati i za **realno** s $\geq$ **2m**:

**Teorema 6.4.3** *Neka važe $(i), (ii)$,i$(iii)$. Operator $\mathcal{P}$ iz (6.12) definiše linearni homeomorfizam*

$$\text{iz} \quad H^s(\Omega)/N \quad \text{na} \quad \{H^{s-2m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma); N^*, \mathcal{T}\}$$

*za svako realno $s \geq 2m$.*

**Napomena 6.4.4** *Iz prethodnih teorema sledi da ako $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ i $g_j \in \mathcal{D}(\Gamma)$ onda rešenje $u$ problema* (6.7) *pripada $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.*

## 6.5 Postojanje rešenja u prostorima sa negativnim indeksom

U ovom delu ćemo sa $r$ označavati nenegativan realan broj.

Neka važe $(i), (ii), (iii)$. Koristeći teoremu 6.3.10 možemo zaključiti da sistem $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$ pokriva $A^*$ i onda možemo primeniti teoremu 6.4.1 postavivši $A^*$ umesto $A$ i $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$ umesto $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$.

Označimo sa $H_C^{2m+r}(\Omega)$:

$$H_C^{2m+r}(\Omega) = \{u : \quad u \in H^{2m+r}(\Omega),\ C_j u = 0,\ j = 0, ..., m-1\},$$

gde je $r \geq 0$; sa $\{H^r(\Omega); N\}$ prostor

$$\{H^r(\Omega); N\} = \{f| \quad f \in H^r(\Omega), \int_\Omega f\bar{u}dx = 0 \quad \forall u \in N\},\ r \geq 0.$$

Sa $A^*$ označavamo i operator $A^*$ po prelasku na količnički prostor po $N^*$ ($A^*v^* = A^*v, \quad za\ v \in v^*$). Onda dobijamo sledeći rezultat:

**Teorema 6.5.1** *Operator $A^*$ definiše linearni homeomorfizam iz $H_C^{2m+r}(\Omega)/N^*$ na $\{H^r(\Omega); N\}$ za svako realno $r$.*

**Napomena 6.5.2** *U teoremi 6.4.1 smo imali količnički prostor po jezgru operatora $\mathcal{P}$, sada taj rezultat prenosimo, ali nas zanima samo operator $A^*$. Da bi se bijekcija očuvala u kodomenu posmatramo samo elemente oblika $\{f; 0, ...0\}$, $f \in \{H^r(\Omega); N\}$, a u domenu samo klase koje se slikaju u takve elemente - $H_C^{2m+r}(\Omega)$.*

Cilj je da se vratimo na operator $A = (A^*)^*$ čiji domen će biti podskup od $H^{-r}(\Omega)$, tj. želimo da „transponujemo" ovaj izomorfizam, međutim za $r \geq 1/2$ dual za prostor $H^r(\Omega)$ nije $H^{-r}(\Omega)$ (on uopšte ne pripada prostoru distribucija). Zato moramo posmatrati restrikciju operatora $A^*$ na

$$X^r(\Omega) = \{v| \quad v \in H^{2m+r}(\Omega), \quad C_j v = 0\, j = 0, ..., m-1, \\ A^*v \in H_0^r(\Omega), \quad r \geq 0\}$$

Sa normom:

$$\|v\|^2_{X^r(\Omega)} = \|v\|^2_{H^{2m+r}(\Omega)} + \|Av\|^2_{H^r(\Omega)}$$

ovaj prostor je Hilbertov.

Ako označimo $\{H^r(\Omega); N\} \cap H_0^r(\Omega)$ sa $\{H_0^r(\Omega); N\}$ onda iz definicije prostora $X^r(\Omega)$ i teoreme 6.5.1 sledi da:

**Teorema 6.5.3** *Operator $A^*$ definiše linearni homeomorfizam iz $X^r(\Omega)/N^*$ na $\{H_0^r(\Omega); N\}$, $r \geq 0$.*

Ovaj rezultat je polazna tačka za primenu metoda transpozicije. Pod transpozicijom podrazumevamo:

**Teorema 6.5.4** *Neka važe pretpostavke $(i), (ii), (iii)$ za fiksirano realno $r \geq 0$. Tada za svaku antilinearnu formu $v^* \to L(v^*)$ na $X^r(\Omega)/N^*$ postoji jedinstveni element $u^*$ u prostoru $\{H_0^r(\Omega); N\}'$ koji neprekidno zavisi od $L$ (u topologiji dualnog prostora) i takav da*

$$\langle u^*, \overline{A^* v^*}\rangle = L(v^*) \quad \forall v^* \in X^r(\Omega)/N^*,$$

*gde zagrade označavaju bilinearnu formu na dualnom paru $\{H_0^r(\Omega); N\}'$ i $\{H_0^r(\Omega); N\}$.*

Može se pokazati

$$\{H_0^r(\Omega); N\}' \cong H^{-r}(\Omega)/N.$$

Onda ako je zadana neprekidna antilinearna forma $L$ na $X^r(\Omega)/N^*$, tada postoji element $u \in H^{-r}(\Omega)$ definisan do na funkciju (iste klase) po $N$, za koji važi

$$\langle u, \overline{A^* v}\rangle = L(v^*) \quad \forall v^* \in X^r(\Omega)/N^* \quad \text{i} \quad \forall v \in X^r(\Omega) \qquad (6.14)$$
$$koje\ pripada\ v^*$$

gde zagrade označavaju bilinearnu formu na dualnom paru $H^{-r}(\Omega)$ i $H_0^r(\Omega)$.

**Napomena 6.5.5** *Teorema 6.5.4 sa jednačinom (6.14) daje u nekom smislu rešenje graničnog problema (6.7) u prostorima $H^{-r}(\Omega)$. Birajući određenu formu $L$, u odgovarajućoj interpretaciji pojaviće se jednačina $Au = f$ i granični uslovi $B_j u = g_j, j = 0, ..., m-1$.*

Ideja je da se forma $L$ razdvoji na dva dela $L = L_1 + L_2$, gde će $L_1$ generisati jednačinu $Au = f$ u smislu distribucija na $\Omega$, a $L_2$ granične uslove $B_j u = g_j$ u nekom najprirodnijem smislu koji će biti razjašnjen.

Neka je $K^r(\Omega)$ Hilbertov prostor distribucija na $\Omega$ takav da:

$$\begin{cases} X^r(\Omega) \subset K^r(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad sa\ neprekidnim\ potapanjem \\ i\ \mathcal{D}(\Omega)\ je\ gust\ u\ K^r(\Omega). \end{cases} \qquad (6.15)$$

Takvi prostori postoje uvek, npr. $K^r(\Omega) = H^s(\Omega),\ 0 \le s \le 1/2$, ($\mathcal{D}(\Omega)$ je tada gust u $H^s(\Omega)$ a $X^r \subset H^s$, jer je $H^{2m+r} \subset H^s \quad za\ 0 \le s \le 1/2$). Osim toga, pošto je $\mathcal{D}(\Omega) \subset X^r(\Omega)$, $X^r(\Omega)$ je takođe gust u $K^r(\Omega)$. Zato možemo identifikovati dual $K^{-r}(\Omega)$ od $K^r(\Omega)$ kao potprostor prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$ i ako $f \in K^{-r}(\Omega)$, onda je forma

$$L_1(v) = \langle f, \bar{v} \rangle$$

(gde zagrade označavaju bilinearnu formu na dualnom paru $K^{-r}(\Omega)$ i $K^r(\Omega)$) definiše antilinearnu i neprekidnu formu na $X^r(\Omega)$.

Za izbor forme $L_2$ moramo prvo razmotriti preslikavanje

$$v \mapsto \mathcal{T}v = \{T_0 v, ..., T_{m-1} v\}$$

kada $v \in X^r(\Omega)$, gde su $T_j$ operatori iz teoreme Grina 6.3.7 (granični diferencijalni operatori reda $2m - 1 - m_j$, $m_j$ je red operatora $B_j$). Možemo okarakterizovati sliku $\mathcal{T}(X^r(\Omega))$. Važi:

**Teorema 6.5.6** *Neka važe (i) i (ii) i sistem $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ normalan na $\Gamma$. Tada je operator $v \mapsto \mathcal{T}v$ linearan i neprekidan*

$$iz\ X^r(\Omega)\ u\ \prod_{j=0}^{m-1} H^{r+m_j+1/2}(\Gamma)$$

*za svako realno $r \ge 0$ i operator $\mathcal{T}$ ima linearan i neprekidan inverzni operator - operator produženja sa granice na oblast $\Omega$.*

Prvi deo teoreme je direktna posledica teoreme o tragu 5.3.28, dok drugi deo nećemo pokazivati.

Ova teorema pokazuje da postoji „optimalan“ izbor $L_2$:

$$L_2(v) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle, \quad g_j \in H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma)$$

gde zagrade označavaju bilinearnu formu na dualnom paru $H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma)$ i $H^{r+m_j+1/2}(\Gamma)$. Za svako $r \ge 0$ forma $L_2$ je neprekidna i antilinearna na $X^r(\Omega)$ pri proizvoljnom izboru

$g_j \in H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma)$. Zašto je ovo optimalan izbor videćemo na kraju, kada povežemo $L_2$ sa graničnim uslovima (operatorima). Sada ćemo još neko vreme posvetiti rešavanju problema $Au = f$.

Neka je sada $L(v) = L_1(v) + L_2(v)$.

Pretpostavljajući da je $L(v) = L(v^*)$ za bilo koje $v \in X^r(\Omega)$ koje je element klase $v^* \in X^r(\Omega)/N^*$ (tj. $L(v_1) = L(v_2) = L(v^*),\ za\ v_1, v_2 \in v^* \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in N^*$), vidimo da $L$ definiše neprekidnu, antilinearnu formu na $X^r(\Omega)/N^*$ ako i samo ako

$$\langle f, \bar{v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1}\langle g_j, \overline{T_j v}\rangle = 0 \quad \forall v \in N^*. \tag{6.16}$$

Iz ovoga zaključujemo:

**Teorema 6.5.7** *Neka važe pretpostavke* $(i), (ii), (iii)$ *i* $r \geq 0$. *Tada ako* $f \in K^{-r}(\Omega), g_j \in H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma), \quad j = 0, ..., m-1$ *i važe uslovi* (6.15), (6.16), *tada postoji funkcija* $u \in H^{-r}(\Omega)$, *definisana sa tačnošću do na funkciju iz* $N$, *takva da*

$$\langle u, \overline{A^* v}\rangle = \langle f, \bar{v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1}\langle g_j, \overline{T_j v}\rangle \quad \forall v \in X^r(\Omega). \tag{6.17}$$

*Pri tom,* $\{f, g_0, ..., g_{m-1}\} \to u^* = u + N$ *je neprekidno linearno preslikavanje iz potprostora od*

$$K^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma),$$

*elemenata koji zadovoljavaju uslov* (6.16) *u* $H^{-r}(\Omega)/N$.

Podsetimo se, kada $A^* : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathcal{D}(\Omega)$ tada $A : \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto \mathcal{D}'(\Omega)$ i važi bilinearni identitet (6.8). Stoga ako zapišemo (6.17) za $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dobijamo

$$\langle u, \overline{A^* v}\rangle = \langle f, \bar{v}\rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

i onda $u$ zadovoljava jednačinu

$$Au = f, \tag{6.18}$$

u smislu distribucija na $\Omega$.

Moguće je još izabrati pogodno $f$ i interpretirati granične uslove „sadržane" u (6.17).

U teoremi Grina smo videli da kada se proširimo sa $\mathcal{D}(\Omega)$ na $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ pojavljuju se neki granični izrazi. Kasnije ćemo videti da se to događa i na prostoru $X^r(\Omega)$. Sada želimo da prostor $K^r(\Omega) \supset X^r(\Omega)$ bude minimalan prostor normalnih distribucija, čiji će dual biti potprostor prostora distribucija i na kojem će granični uslovi ponovo nestati. Kombinacijom Grinove formule na $X^r(\Omega)$ i bilinearnog identiteta dobićemo granični problem i njegovo rešenje.

Za početak uvodimo prostore $\mathcal{B}^s(\Omega)$.

Neka je $\rho(x)$ funkcija iz $\mathcal{D}(\Omega)$, pozitivna nad $\Omega$, jednaka nuli na granici $\Gamma$, a u okolini $\Gamma$ uporediva po redu sa rastojanjem $d(x, \Gamma)$, odnosno:

$$\lim_{x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\rho(x)}{d(x, \Gamma)} = d \neq 0;$$

takve funkcije postoje uvek jer je $\Gamma$ beskonačno diferencijabilna mnogostrukost.

**Definicija 6.5.8** *Za $s = 0, 1, ...$ i prethodno dato $\rho$ neka je*

$$\mathcal{B}^s(\Omega) = \{u| \quad \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq s\}$$

*sa normom*

$$\|u\|_{\mathcal{B}^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\rho^{|\alpha|} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prostor $\mathcal{B}^s(\Omega)$ je Hilbertov i važi:

$$\mathcal{B}^0(\Omega) = L^2(\Omega),\ H^s(\Omega) \subset \mathcal{B}^s(\Omega) \subset L^2(\Omega), \tag{6.19}$$

pri čemu je inkluzija neprekidna.

**Teorema 6.5.9** *$\mathcal{D}(\Omega)$ je gust u $\mathcal{B}^s(\Omega)$.*

**Definicija 6.5.10** *Neka je $k \geq 0$ ceo broj, $0 < \theta < 1$ i $s = k + \theta$. Za ovakvo $s$ prostor $\mathcal{B}^s(\Omega)$ definišemo kao interpolacioni prostor između $\mathcal{B}^{k+1}(\Omega), \mathcal{B}^k(\Omega)$*

$$\mathcal{B}^s(\Omega) = [\mathcal{B}^{k+1}(\Omega), \mathcal{B}^k(\Omega)]_{1-\theta}$$

Iz ove definicije i odnosa (6.19) sledi:

$$H^s(\Omega) \subset \mathcal{B}^s(\Omega) \subset \mathcal{B}^{s'}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad 0 < s' < s.$$

Važi da je $\mathcal{D}(\Omega)$ gust u $\mathcal{B}^s(\Omega)$ za svako realno $s \geq 0$.

Dakle $\mathcal{B}^s(\Omega)$ je (normalan) prostor distribucija na $\Omega$, a njegov dual se može identifikovati sa prostorom distribucija. Ovaj dualni prostor označavamo sa:

$$(\mathcal{B}^s(\Omega))' = \mathcal{B}^{-s}(\Omega), \quad s > 0.$$

**Izbor prostora $K^r(\Omega)$** Za svako $r \geq 0$ definišemo

$$K^r(\Omega) = \mathcal{B}^{2m+r}(\Omega).$$

Iz prethodno navedenog vidimo da za ovakvo $K^r(\Omega)$ važi (6.15).

Sada teoremu 6.5.7 možemo formulisati na sledeći način. Videli smo da $u \in H^{-r}(\Omega)$ i da $Au \in K^{-r}(\Omega)$. Označimo zato sa $D_A^{-r}(\Omega)$ prostor

$$D_A^{-r}(\Omega) = \{u| \quad u \in H^{-r}(\Omega),\ Au \in \mathcal{B}^{-2m-r}(\Omega)\} \quad r \geq 0$$

sa normom

$$\|u\|^2_{D_A^{-r}(\Omega)} = \|u\|^2_{H^{-r}(\Omega)} + \|Au\|^2_{\mathcal{B}^{-2m-r}(\Omega)}.$$

Tada važi:

**Teorema 6.5.11** *Neka važe pretpostavke (i), (ii), (iii) i neka je $r \geq 0$ fiksirano. Tada ako $f \in \mathcal{B}^{-2m-r}(\Omega)$, $g_j \in H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma)$, $j = 0, ..., m-1$, i važi uslov (6.16), onda postoji $u \in D_A^{-r}(\Omega)$, definisano do na funkciju iz $N$, takvo da:*

$$\langle u, \overline{A^* v}\rangle = \langle f, \bar{v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v}\rangle \quad \forall v \in X^r(\Omega). \tag{6.20}$$

*Pri tom, preslikavanje $\{f;\ g_0, ..., g_{m-1}\} \mapsto u^* = u + N$ koje deluje iz potprostora prostora*

$$\mathcal{B}^{-2m-r}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma),$$

*koji obrazuju elementi koji zadovoljavaju uslov (6.16), u $H^{-r}(\Omega)/N$ je linearno i neprekidno.*

Sada ćemo videti i kako se javljaju i tumače granični uslovi. Kako rešenje tražimo u $H^{-r}(\Omega)$ ponovo nam treba tumačenje izvoda na granici $\Gamma$ i ponovo ćemo dati teoremu o tragu, samo ovaj put za elemente iz $D_A^{-r}(\Omega)$. Prvo navedimo teoremu:

**Teorema 6.5.12** *Neka važe (i) i (ii). $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ je gust u $D_A^{-r}(\Omega)$, za svako $r \geq 0$.*

**Teorema 6.5.13** *Neka važe (i) i (ii) i neka je $\{B_J\}_{j=0}^{m-1}$ sistem normalan na $\Gamma$. Tada za svako $r \geq 0$, preslikavanje $u \mapsto Bu : \{B_0 u, ..., B_{m-1} u\}$, koje deluje iz $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ u $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ produžava se do linearnog neprekidnog preslikavanja*

$$iz\ D_A^{-r}(\Omega)\ u\ \prod_{j=0}^{m-1} H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma).$$

*Osim toga, za $u \in D_A^{-r}(\Omega)$ i $v \in X^r(\Omega)$ važi formula Grina:*

$$\langle Au, \bar{v}\rangle - \langle u, \overline{A^* v}\rangle = -\sum_{j=0}^{m-1} \langle B_j u, \overline{T_j v}\rangle, \tag{6.21}$$

*gde prve zagrade označavaju bilinearnu formu na dualnom paru $\mathcal{B}^{-2m-r}(\Omega)$ i $\mathcal{B}^{2m+r}(\Omega)$, druge zagrade su bilinearna formu na paru $H^{-r}(\Omega)$ i $H_0^r(\Omega)$, a zagrade sa desne strane su bilinearna forma na paru $H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma)$ i $H^{r+m_j+1/2}(\Gamma)$.*

**Dokaz** Neka je $u \in D_A^{-r}(\Omega)$ i $\phi_j \in H^{r+m_j+1/2}(\Gamma),\ j = 0, ..., m-1$. Uzmimo operator produženja inverzan za $\mathcal{T}$ iz teoreme 6.5.6 i primenimo ga na $\{\phi_0, ..., \phi_{m-1}\}$. Dobijamo funkciju $v_\phi \in H^{2m+r}(\Omega)$ takvu da:

$$C_j v_\phi = 0,\ T_j v_\phi = \phi_j,\ j = 0, ..., m-1,\ i\ A^* v_\phi \in H_0^r(\Omega),$$

pri čemu $v_\phi$ neprekidno zavisi od $\phi_j$. Zatim, razmotrimo izraz

$$Z(v_\phi) = \langle u, \overline{A^* v_\phi}\rangle - \langle Au, \bar{v}_\phi\rangle, \tag{6.22}$$

gde leve zagrade označavaju bilinearnu formu na dualnom paru $H^{-r}(\Omega)$ i $H_0^r(\Omega)$, a desne na paru $\mathcal{B}^{-2m-r}(\Omega)$ i $\mathcal{B}^{2m+r}(\Omega)$ (podsetimo se da $v_\phi \in X^r(\Omega) \subset \mathcal{B}^{2m+r}(\Omega)$). $Z(v_\phi)$ ne zavisi od korišćenog operatora produženja: ako su $v_1,\ v_2$ različita produženja onda se može pokazati da $\chi = v_1 - v_2 \in H_0^{2m+r}(\Omega)$ pa važi

$$\langle u, \overline{A^* \chi}\rangle = \langle Au, \bar{\chi}\rangle,$$

iz čega sledi $Z(v_1) = Z(v_2)$.

Dakle, $Z$ zavisi samo od $\phi$ pa možemo pisati $Z(\phi)$ umesto $Z(v_\phi)$. Iz (6.22) vidimo takođe da je $\phi \mapsto Z(\phi)$ neprekidna antilinearna forma na

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{r+m_j+1/2}(\Gamma).$$

Kako je $Z$ izraženo preko $u$ onda je $Z$ oblika:

$$Z(\phi) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \tau_j u, \bar{\phi}_j\rangle, \tag{6.23}$$

gde $\tau_j u \in H^{-r-m_j-1/2}(\Gamma)$.

Ponovo koristeći izraz (6.22) za $Z(\phi)$ vidimo da je preslikavanje $u \mapsto \tau_j u$ linearno i neprekidno iz $D_A^r(\Omega)$ u $H^{-r-m_j-1/2}(\Omega)$.

Sada pokažimo da je $u \mapsto \tau_j u$ traženo produženje operatora $u \mapsto B_j u$, tj. da je

$$\tau_j u = B_j u, \quad za\ u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}). \tag{6.24}$$

Ako je dato $\phi_j \in \mathcal{D}(\Gamma),\ j = 0, ..., m-1$ tada se može konstruisati operator produženja $v$ iz $\mathcal{D}(\Gamma)$ u $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Zatim po formuli Grina, za $Z(\phi)$ važi:

$$Z(\phi) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma B_j u \overline{T_j v} d\sigma = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma B_j u \bar{\phi}_j d\sigma, \quad \forall \phi_j \in \mathcal{D}(\Gamma),$$

odakle uz (6.23) sledi (6.24).

Primetimo da je preslikavanje $\tau_j$ jednoznačno definisano operatorom $B_j$ jer je, kao što smo ranije videli, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ gust u $D_A^r(\Omega)$.

Konačno, iz prethodnih razmatranja sledi formula Grina (6.21), jer ako $v \in X^r(\Omega)$ tada $\phi_j = T_j v \in H^{r+m_j+1/2}(\Gamma)$ i u (6.22) možemo staviti $v_\phi = v$, pa imamo da (6.21) sledi iz (6.22) i (6.23). $\square$

Sada možemo dati najbolju interpretaciju teoreme 6.5.11.

Za rešenja $u$, dobijena u teoremi 6.5.11, znamo da važe jednačine (6.21) i (6.20). Ali mi već znamo (vidi (6.18)) da $Au = f$, gde su $Au, f \in \mathcal{D}'(\Omega) \supset \mathcal{B}^{-2m-r}(\Omega)$, pa važi

$$\langle Au, \bar{v} \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{B}^{2m+r}(\Omega) \supset X^r(\Omega),$$

iz čega sledi:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle B_j u - g_j, T_j v \rangle = 0 \quad \forall v \in X^r(\Omega),$$

a takođe zbog teoreme 6.5.6 važi jednačina

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle B_j u - g_j, \phi_j \rangle = 0 \quad \forall \phi_j \in H^{r+m_j+1/2}(\Gamma);$$

stoga $B_j u = g_j,\ j = 0, ..., m-1.$

Na ovaj način dokazana je:

**Teorema 6.5.14** *Neka važe (i), (ii), (iii) i neka je $s \leq 0$ realan broj. Tada je operator:*

$$\mathcal{P}:\ u \mapsto \mathcal{P}u = \{Au;\ B_0 u, ..., B_{m-1}\}$$

*linearni homeomorfizam iz $D_A^s(\Omega)/N$ na prostor*

$$\mathcal{B}^{s-2m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma);\ N^*,\ \mathcal{T}$$

*elemenata iz*

$$\mathcal{B}^{s-2m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma)$$

*koji zadovoljavaju uslov (6.16).*

Konačno, ovo je proširenje teoreme 6.4.3 na prostore $H^s(\Omega)$ za $s \leq 0$.

Ovim smo ustvari rešili granični problem (6.7):

$$Au = f\ u\ \Omega \tag{6.25}$$

$$B_j u = g_j\ na\ \Gamma,\ j = 0, ..., m-1, \tag{6.26}$$

tako što smo ustanovili da za zadato $f \in \mathcal{B}^{s-2m}(\Omega)$ (6.25) važi u smislu distribucija na $\Omega$, a za zadato $g_j \in H^{s-m_j-1/2}(\Gamma)$ granični uslovi (6.26) važe u smislu teoreme o tragu (6.5.13). Na taj način dali smo „prirodan" smisao problemu (6.7) u prostorima $H^s(\Omega),\ s \leq 0$.

# Glava 7

# Zaključak

Ovaj rad je pokušaj da se napravi sažet opis prostora Soboljeva i teorije koja stoji iza njih; da se dobije ideja o mestu koje ovi prostori zauzimaju u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina. Rad se zato sastoji iz ove dve celine.

Zbog prirode Soboljevih prostora, videli smo pojmove iz raznih oblasti: teorije mere, distribucija, slabih izvoda, Furijeove transformacije, teorije operatora i diferencijalne geometrije. Sami prostori imaju niz zanimljivih osobina, koji se većinom odnose na dualne prostore i na aproksimaciju glatkim funkcijama.

Drugu celinu počeli smo sa graničnim problemom za eliptičnu jednačinu, a potom smo videli kako se konstruišu prostori u kojima treba birati početne uslove da bismo dobili rešenje u $H^{-s}(\Omega)$. U ovom procesu javljaju se diferencijalni operatori, adjungovani operatori, konjugovani granični problem; podloga je teorija distribucija.

Sve ovo učinilo je pisanje rada zanimljivim i značajnim iskustvom.

# Literatura


[1] Ж.- Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничые задачи и приложения, Мир, Москва, 1971.

[2] S. Pilipović, B. Stanković, *Prostori distribucija*, Novi Sad, 2000.

[3] Robert A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[4] Dorothee D. Haroske, H. Triebel, *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations*, European Mathematical Society, 2008.

[5] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces in Mathematics II Applications in Analysis and Partial Differential Equations*, Springer, 2008.

[6] M. Nedeljkov, *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Novi Sad, 2004.

[7] S. Pilipović, O. Hadžić, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Novi Sad, 1996.

[8] S. Pilipović, D. Seleši *Teorija mere*, Novi Sad, 2007.

[9] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin *Measure, Lebesgue Integrals and Hilbert space*, Academic Press, New York, 1960.

[10] http://press.princeton.edu/chapters/s9627.pdf

[11] http://www.math.colostate.edu/~estep/research/preprints/adjointcourse_final.pdf

# Kratka biografija

Nevena Mutlak rođena je 7.9.1988. u Foči. 2007. godine završava gimanziju „Svetozar Marković“ u Novom Sadu. Iste godine upisuje Prirodno - matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija. U septembru 2011. završava četvorogodišnje osnovne studije sa prosekom 9.29. Iste godine upisuje master studije, modul tehnomatematika. Polaže poslednji ispit u junskom roku 2012. i završava master studije sa prosečnom ocenom 9.86 i time stiče uslov za odbranu master rada.

Tokom studija bila je stipendista Republičkog fonda za razvoj naučnog i umetničkog podmlatka. Od 1.6. do 31.12.2012. boravila je u Štutgartu na praksi u kompaniji „Robert Bosch GmbH“.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
**RBR**

Identifikacioni broj:
**IBR**

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
**TZ**

Vrsta rada: Master rad
**VR**

Autor: Nevena Mutlak
**AU**

Mentor: dr Marko Nedeljkov
**MN**

Naslov rada: Prostori Soboljeva sa negativnim indeksom
**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)
**JP**

Jezik izvoda: s / e
**JI**

Zemlja publikovanja: Srbija
**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina
**UGP**

Godina: 2013.

**GO**

Izdavač: Autorski reprint

**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

**MA**

Fizički opis rada: (3, 63, 18, 0, 4, 0, 0)

**FO**

Naučna oblast: Matematika

**NO**

Naučna disciplina: Analiza i verovatnoća

**ND**

Predmetna odrednica / Ključne reči: Prostori Soboljeva, Lebeg - integrabilna funkcija, distribucija, slabi izvod, Furijeova transformacija, dualni prostor, granični problem, adjungovani operator, diferencijalni operator

**PO**

**UDK**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno - matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

**ČU**

Važna napomena:

**VN**

Izvod: U prvom delu ovog master rada govori se o Lebegovom integralu, $L^p$ prostorima, distribucijama, slabom izvodu i Furijeovoj transformaciji. U drugom delu rada definisani su prostori Soboljeva, date su njihove osobine: kompletnost, separabilnost, refleksivnost, aproksimacija glatkim funkcijama. Potom su definisani prostori sa negativnim indeksom, date su osobine vezane za dualnost. Na kraju su definisani prostori sa realnim indeksom, najpre nad $\mathbb{R}^n$, a zatim i nad otvorenim skupom i granicom skupa. U trećem delu opisan je granični problem za eliptičnu jednačinu reda $2m$, uveden je pojam adjungovanog operatora i pokazano je postojanje rešenja u prostorima Soboljeva sa negativnim, realnim indeksom.

**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.04.2012.

**DP**

Datum odbrane: Septembar 2013.

**DO**

Članovi komisije:

**KO**

| | |
|---|---|
| Predsednik: | dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |
| Član: | dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor |
| Član: | dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: Monograph type

**DT**

Type of record: Printed text

**TR**

Contents Code: Master's thesis

**CC**

Author: Nevena Mutlak

**AU**

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.

**MN**

Title: Sobolev spaces with negative index

**TI**

Language of text: Serbian

**LT**

Language of abstract: English

**LA**

Country of publication: Serbia

**CP**

Locality of publication: Vojvodina

**LP**

Publication year: 2013.

**PY**

Publisher: Author's reprint

**PU**

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

**PP**

Physical description: (3, 63, 18, 0, 4, 0, 0)

**PD**

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Analysis and probability

**SD**

Subject / Key words: Sobolev spaces, Lebesgue integrable function, distribution, weak derivative, Fourier transform, dual space, boundary value problem, adjoint operator, differential operator

**SKW**

**UC:**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

**HD**

Note:

**N**

Abstract: The first part of the thesis deals with Lebesgue integration, $L^p$ spaces, distributions, weak derivatives and the Fourier transform. In the second part we define Sobolev spaces and give some of their properties: completeness, separability, reflexivity, approximation with smooth functions. Then we define spaces with negative index and provide dual properties. In the end we define spaces with real index, first on $\mathbb{R}^n$, then on an open set and on the boundary. In the last part we describe the boundary value problem for an elliptic equation of order $2m$, we define the adjoint operator and show the existence of a solution in Sobolev spaces with negative, real index.

**AB**

Accepted by the Scientific Board on: 11.04.2012.

**ASB**

Defended: September 2013.

**DE**

Thesis defend board:

**DB**

| | |
|---|---|
| President: | Dr Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad |
| Member: | Dr Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor |
| Member: | Dr Nenad Teofanov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad |