UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nada Cvetković

Borelovi skupovi

-master rad-

Mentor: prof. dr Miloš Kurilić

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu biće reči o Borelovim skupovima koji su važna klasa skupova u jednoj od glavnih oblasti teorije skupova, deskriptivnoj teoriji skupova. Deskriptivna teorija skupova je nauka o skupovima u poljskim prostorima. Njeni koncepti i rezultati se koriste u raznim poljima matematike kao što su matematička logika, kombinatorika, topologija, funkcionalna analiza, teorija mere, teorija verovatnoće i druge.

Imajući u vidu da je cilj ovog rada ispitivanje osobina Borelovih skupova u poljskim prostorima za razumevanje ovog teksta potrebno je poznavanje osnovnih pojmova i tvrđenja iz topologije i teorije skupova. Stoga je u uvodnom delu rada dat pregled definicija, teorema i primera koji su potrebni za rad sa poljskim prostorima i Borelovim skupovima.

Uvodni deo se sastoji iz četiri odeljka. U prvom odeljku je obrađena teorija skupova i kardinalnih brojeva. U drugom je data definicija dobrog uređenja i navedeni principi indukcije i rekurzije, a sve u cilju razumevanja teorije ordinala koja je potrebna za praćenje Kantor-Bendikson analize i Borelovih skupova. Treći i četvrti odeljak obuhvataju teoriju topoloških i metričkih prostora.

U drugoj glavi ovog rada obrađeni su poljski prostori. Pokazano je da je osobina "biti poljski prostor" prebrojivo multiplikativna i topološka osobina. Navedeni su primeri poljskih prostora, a posebna pažnja posvećena je Hilbertovom i Kantorovom kubu i Berovom prostoru. U okviru odeljka Kantor-Bendikson analiza uveden je pojam savršenih skupova i Kantor-Bendiksonovog izvoda. Naslednost osobine "biti poljski prostor" ispitana je u okviru odeljka poljski potprostori.

Sadržaj treće glave ovog rada predstavlja sam cilj rada. U trećoj glavi definisani su Borelovi skupovi, neke klase Borelovih skupova i dokazane su njihove osobine. Uvođenjem nove, finije topologije na datom topološkom prostoru pokazano je da svaki neprebrojiv Borelov skup u poljskom prostoru sadrži savršen skup. Potom je opisana hijerarhija Borelovih skupova u neprebrojivim poljskim prostorima što čini suštinu ovog rada. Na samom kraju rada uveden je pojam tankih skupova i skupova prve i druge kategorije, dokazana je teorema Bera i uvedeno svojstvo Bera.

Ovom prilikom želim da izrazim duboku zahvalnost svom mentoru profesoru dr Milošu Kuriliću na odabiru teme, stručnom usmeravanju prilikom izrade ovog master rada, neverovatnom strpljenju i ukazanoj podršci. Takođe se zahvaljujem akademiku profesoru dr Stevanu Pilipoviću i docentu dr Aleksandru Pavloviću koji su prihvatili da budu predsednik i član komisije za odbranu ovog master rada.

Glava 1

Uvod

1.1 Skupovi i kardinalni brojevi

U ovoj sekciji dajemo pregled osnovnih definicija teorije kardinalnih brojeva i odgovarajućih tvrđenja koja će biti korišćena u daljem tekstu. Teoreme su date bez dokaza. Čitalac dokaze može pronaći u [5] ili [10]. Na samom kraju odeljka uvodimo definiciju drveta.

Ako je $f : X \to Y$ preslikavanje i $A \subseteq X$ proizvoljan skup, onda skup

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

nazivamo **direktna slika** skupa A. Za skup $B \subseteq Y$ skup

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

je **inverzna slika** skupa B.

Definicija 1.1.1. Neka su X i Y neprazni skupovi, $f : X \to Y$ i $A \subseteq X$. Za preslikavanje $g : A \to f[A]$ dato sa $g(x) = f(x)$, za svako $x \in A$, kažemo da je **sirjektivna restrikcija** preslikavanja f na skup A i označavamo ga sa $f|A$.

Definicija 1.1.2. Skup A je **ekvipotentan** skupu B ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

Može se pokazati da relacija "biti ekvipotentan" ima osobine refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti na klasi svih skupova.

Definicija 1.1.3. Klasu svih skupova ekvipotentnih skupu A označavamo sa $|A|$ i nazivamo **kardinalni broj skupa** A.

Definicija 1.1.4. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Definišemo $|A| \leq |B|$ ako i samo ako postoji injekcija $f : A \to B$.

Teorema 1.1.5. *Unija najviše prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.* $\square$

Koristićemo sledeću teoremu.

Teorema 1.1.6 (Šreder-Bernštajn). *Ako su A i B proizvoljni skupovi. Ako je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$ onda je $|A| = |B|$.* $\square$

Definicija 1.1.7. Skup A je **beskonačan** ako i samo ako je ekvipotentan nekom svom pravom podskupu. Skup A je **konačan** ako i samo ako nije beskonačan.

Definicija 1.1.8. Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ označavamo sa $\aleph_0$. Kažemo da je skup A **prebrojiv** ako i samo ako je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$, to jest ako je $|A| = \aleph_0$, da je **najviše prebrojiv** ako i samo ako je $|A| \leq \aleph_0$, a da je **neprebrojiv** ako i samo ako važi $|A| > \aleph_0$.

Teorema 1.1.9 (Kantor). *Za proizvoljan skup A važi $|A| < |P(A)|$.* $\square$

Prema teoremi Kantora važi $|P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Definicija 1.1.10. Kardinalni broj $|P(\mathbb{N})|$ označavamo sa c i zovemo **kontinuum**.

Teorema 1.1.11. *Zatvoren interval $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ima kardinalni broj c.* $\square$

Možemo uvesti sabiranje, množenje i stepenovanje kardinalnih brojeva na sledeći način:

Definicija 1.1.12. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Tada je

i) $|A| + |B| = |(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})|$.

ii) $|A||B| = |A \times B|$

iii) $|A|^{|B|} = |A^B|$.

Definišemo dalje, zbir beskonačno mnogo kardinalnih brojeva.

Definicija 1.1.13. Neka je $\{X_i : i \in I\}$ proizvoljna familija skupova. Tada je

$$\Sigma_{i\in I}|X_i| = \left|\bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})\right|.$$

Teorema 1.1.14. *Za proizvoljan skup A važi $|P(A)| = 2^{|A|}$.* □

Teorema 1.1.15. *Neka su $|A|$ i $|B|$ kardinalni brojevi od kojih je bar jedan beskonačan. Tada je*

$$|A| + |B| = |A||B| = \max\{|A|, |B|\}$$

□

Teorema 1.1.16. *Neka je $\{X_i : i \in I\}$ proizvoljna familija skupova $|X_i| > 0$ za svako $i \in I$ i $I \neq \emptyset$. Tada je*

$$\Sigma_{i\in I}|X_i| = |I| \sup_{i\in I} |X_i|$$

i važi

$$\bigcup_{i\in I} |X_i| \leq |I| \sup_{i\in I} |X_i|.$$

□

Neka je A neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$. Označavamo sa A^n skup konačnih nizova $s = \langle\sigma(0), ..., \sigma(n-1)\rangle = \langle\sigma_0, ...\sigma_{n-1}\rangle$ elemenata skupa A dužine n. Za $n = 0$, A^0 je prazan niz $\emptyset$, to jest niz koji ima 0 članova. Dužinu konačnog niza σ označavaćemo sa $|\sigma|$. Dužina praznog niza je $|\emptyset| = 0$. Ako je $\sigma \in A^n$ i $m \leq n$ uvodimo oznaku $\sigma|m = \langle\sigma_0, ...\sigma_{m-1}\rangle$. Ukoliko su σ i τ konačni nizovi elemenata skupa A kažemo da je s **početni segment** niza τ ili da je τ **produženje** (**ekstenzija**) niza σ , u oznaci $\sigma \subseteq \tau$, ako je $\sigma = \tau|m$ za neko $m \leq |\tau|$. Odatle je $\emptyset \subseteq \sigma$ za svaki niz σ, jer je $\sigma|0 = \emptyset$. Za dva konačna niza kažemo da su **kompatibilni** ukoliko je jedan od njih početni segment drugog, u suprotnom za nizove kažemo da su **nekompatibilni** što ćemo označavati sa $\sigma \perp \tau$. Skup konačnih nizova elemenata skupa A označavaćemo sa $A^{<\omega}$, to jest

$$A^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} A^n,$$

gde je sa ω označen skup prirodnih breojeva sa nulom. Ukoliko su $\sigma, \tau \in A^{<\omega}$ i to $\sigma = \langle\sigma_0, ..., \sigma_n\rangle$ i $\tau = \langle\tau_0, ..., \sigma_m\rangle$, tada sa $\sigma\hat{\ }\tau$ označavamo **nadovezivanje** (**konkatenaciju**) nizova σ i τ, to jest niz $\langle\sigma_0, ..., \sigma_n, \tau_0, ..., \tau_m\rangle$. Ako je $b \in A$ onda sa $\sigma\hat{\ }b$ označavamo niz $\sigma = \langle\sigma_0, ..., \sigma_n, b\rangle \in A^{<\omega}$.

Sa A^ω ćemo označavati skup beskonačnih nizova $\langle x_n \rangle$ elemenata skupa A. Neka je $\langle x_n \rangle \in A^\omega$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je $x|n = \langle x_0, ..., x_{n-1} \rangle \in A^n$. Kažemo da je $\sigma \in A^n$ **početni segment** niza $x \in A^\omega$ ako je $\sigma = x|n$ i to obeležavamo sa $\sigma \subseteq x$.

Definicija 1.1.17. Neka je dat neprazan skup A. Za skup $T \subseteq A^{<\omega}$ kažemo da je **drvo** na skupu A ukoliko je zatvoren u odnosu na početne segmente, to jest ako za svako $\tau \in T$, ukoliko je $\sigma \subseteq \tau$, onda je i $\sigma \in T$. Elemente skupa T nazivamo **čvorovima**. **Beskonačna grana** drveta T je niz $x \in A^\omega$ takav da je $x|n \in T$, za svako n. **Telo drveta** T, u oznaci $[T]$ je skup svih beskonačnih grana drveta T, to jest,

$$[T] = \{x \in A^\omega : \forall n < \omega \ \ x|n \in T\}.$$

Drvo je **orezano** ako za svako $\sigma \in T$ postoji produženje $\tau \in T$ tako da je $\tau \supsetneq \sigma$. Drugim rečima, drvo T je orezano ako za svako $\sigma \in T$ postoji $f \in [T]$ sa osobinom da je $\sigma \subseteq f$.

1.2 Dobro uređenje, indukcija i rekurzija

Iako smatramo da je većina čitalaca upoznata sa principom indukcije i rekurzije, u ovom delu ćemo ih navesti radi potpunosti. Osim toga, obradićemo osnove teorije ordinala koji su neophodni radi razumevanja Kantor-Bendiksonovog izvoda i klasa Borelovih skupova o kojima će biti reči kasnije. Opširnije o reoriji ordinala može se pronaći u [6] i [10].

Za binarnu relaciju ρ skupa A kažemo da je **parcijalno uređenje** ako je ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija. Uobičajeno je da se uređenje obeležava simbolom $\leq$. Ako je dato neko uređenje $\leq$ na nepraznom skupu A, onda par $(A, \leq)$ zovemo parcijalno uređen skup, sa nosačem A. Za dat uređeni skup $(A, \leq)$ definišemo relaciju $<$ na sledeći način

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y.$$

Tako dobijena relacija $<$ biće relacija striktnog uređenja to jest, biće irefleksivna, asimetrična i tranzitivna. Kažemo da je relacija $<$ striktno uređenje indukovano sa $\leq$. Na ovakav način uvedena je potpuna paralela između pojmova "uređenje" i "striktno uređenje". Za elemente $x, y \in A$ kažemo da su uporedivi ako je $x \leq y$ ili $y \leq x$. Ukoliko važi da su svaka dva elementa skupa A uporediva, kažemo da je $(A, \leq)$ **linearno uređen skup**. Na primer, skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa uobičajenom relacijom poretka $\leq$ je linearno uređen skup. Za dva linearno uređena skupa $(A, \leq_1)$ i $(B, \leq_2)$

kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijekcija $f : A \to B$ koja čuva poredak, to jest preslikavanje $f : A \to B$ takvo da za sve $x, y \in A$ važi

$$x \leq_1 y \Leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y).$$

Jedna od važnih osobina uređenog skupa prirodnih brojeva jeste da se u njemu važi princip matematičke indukcije.

Teorema 1.2.1 (**Princip matematičke indukcije**). *Neka je P_n neki iskaz definisan za sve $n \in \omega$. Ako važi*

1. *P_0 je tačan iskaz;*

2. *za svako $n < \omega$ ukoliko je P_n tačan iskaz, tačan je i iskaz P_{n+1}*

onda je iskaz P_n tačan za svako $n < \omega$. □

U više dokaza u ovom radu koristićemo **princip rekurzije**, to jest, konstruisaćemo niz objekata $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ koji ima željeno svojstvo $\mathcal{P}$ na sledeći način:

1. Izabere se F_0 tako da niz dužine 1 $\langle F_0 \rangle$ ima svojstvo $\mathcal{P}$.

2. Pokaže se da svaki niz dužine n $\langle F_0, F_1, ..., F_{n-1}$ sa svojstvom $\mathcal{P}$ može da se produži do niza $\langle F_0, F_1, ..., F_{n-1}, F_n \rangle$ dužine $n + 1$, koji ima svojstvo $\mathcal{P}$.

3. Zaključuje se da postoji beskonačan niz $F_n : n \in \omega$ sa svojstvom $\mathcal{P}$.

Princip matematičke indukcije može se proširiti i na posebnu vrstu uređenih skupova, dobro uređene skupove. Za uređen skup $(A, \leq)$ kažemo da je **dobro uređen** ako svaki neprazan podskup od A ima najmanji element. Ako je $(A, \leq)$ dobro uređen skup, za relaciju $\leq$ kažemo da je **dobro uređenje** na A. Primetimo da su dobra uređenja linearna.

Teorema 1.2.2 (**Princip transfinitne indukcije**). *Neka je $(W, \leq)$ dobro uređen skup i P_w neki iskaz definisan za svako $w \in W$. Ako za svako $w \in W$ važi*

ako je iskaz P_v tačan za svako $v < w$, onda je P_w tačan iskaz,

onda je iskaz P_w tačan za svako $w \in W$. □

Neka je W dobro uređen skup i $w \in W$. Skup oblika $W(w) = \{u \in W : u < w\}$ nazivamo **početni segment** skupa W. Neka su dalje, W i W' dobro uređeni skupovi. Ukoliko postoji izomorfizam između skupova W i W' koji čuva poredak, to obeležavamo sa $W \sim W'$. Ako je W izomorfan sa početnim segmentom skupa W' pišemo $W \prec W'$, a $W \preceq W'$ ukoliko važi $W \prec W'$ ili $W \sim W'$.

Može se pokazati da je izomorfizam koji očuvava poredak na klasi dobro uređenih skupova relacija ekvivalencije. Predstavnike klasa ekvivalencije izomorfizma nazivamo ordinalnim brojevima ili ordinalima. Za svaki dobro uređeni skup W, ordinalni broj koji odgovara skupu W označavamo sa $t(W)$. Svakom konačnom dobro uređenom skupu od n elemenata, odgovara ordinal $n = \{0, 1, ..., n-1\}$ sa uobičajenom relacijom poretka. Skup prirodnih brojeva sa nulom $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ ćemo označavati sa ω. Sa ω ćemo označavati i ordinal koji odgovara klasi dobro uređenih skupova izomorfnih sa $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$.

Ordinalne brojeve možemo sabirati i upoređivati. Neka su α i β dva ordinalna broja i $(W, <_W)$ i $(W', <_{W'})$ dobro uređeni skupovi takvi da je $\alpha = t(W)$ i $\beta = t(W')$ i $W \cap W' = \emptyset$, definišemo:

1. $\alpha < \beta \Leftrightarrow W \prec W'$
2. $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow W \preceq W'$
3. $\alpha + \beta = t(W + W')$,

   gde je uređenje na $W + W'$ dato sa $u < v \Leftrightarrow (u \in W \wedge v \in W') \vee (u, v \in W \wedge\ u <_W v) \vee (u, v \in W' \wedge\ u <_{W'} v)$.

Može se pokazati da je relacija $\leq$ linearno uređenje na svakom skupu ordinalnih brojeva i da je svaki skup ordinalnih brojeva dobro uređen skup. Ordinal ω je prvi beskonačni ordinal, svi ordinali manji od ω su konačni.

Ordinal α je **naredni** ukoliko je $\alpha = \beta + 1$ za neko β, u suprotnom, ordinal α je **granični**.

Neka je A skup ordinala, tada je $\Sigma_{\alpha \in A} \alpha$ je ordinal veći ili jednak od svakog $\alpha \in A$. Najmanji takav ordinal se označava sa $\sup(A)$.

U klasi svih ordinala važi princip transfinitne indukcije.

Teorema 1.2.3 (Princip transfinitne indukcije za klasu ordinala). *Neka je P_α neki iskaz definisan za sve ordinale α. Pretpostavimo da za svaki ordinal α važi:*

ako je za sve ordinale $\beta < \alpha$ iskaz P_β tačan, sledi da je i za ordinal α iskaz P_α tačan.

Tada je iskaz P_α tačan za sve ordinale α. □

1.3 Topološki prostori

U ovoj sekciji dajemo definicije osnovnih pojmova i tvrđenja iz topologije, a koja će nam kasnije biti potrebna za razumevanje poljskih prostora.

Definicija 1.3.1. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako važi:

(O1) Prazan skup i skup X su otvoreni, to jest $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

(O2) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, to jest za svako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, to jest za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$

Kolekciju $\mathcal{O}$ nazivamo **topologijom** na skupu X, uređeni par $(X, \mathcal{O})$ **topološkim prostorom**, a elemente skupa X **tačkama**.

Ako su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ topologije na skupu X i ako je $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$, onda kažemo da je topologija $\mathcal{O}_2$ **finija** od topologije $\mathcal{O}_1$ ili da je topologija $\mathcal{O}_1$ **grublja** od topologije $\mathcal{O}_2$.

Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je **zatvoren** ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup. Familiju zatvorenih skupova označavamo sa $\mathcal{F}$.

Teorema 1.3.2. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada familija $\mathcal{F}$ svih zatvorenih skupova zadovoljava sledeće uslove:*

(F1) Prazan skup i skup X su zatvoreni;

(F2) Unija dva (pa i konačno mnogo) zatvorenih skupova je zatvoren skup;

(F3) Presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 56. □

Definicija 1.3.3. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je

- F_σ skup ako i samo ako se može predstaviti u obliku $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, gde su $F_n \in \mathcal{F}$;

- G_δ skup ako i samo ako se može predstaviti u obliku $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, gde su $O_n \in \mathcal{O}$;

Lema 1.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Ako je A skup koji ima G_δ osobinu tada je skup $X \setminus A$ skup koji ima F_σ osobinu.*

Dokaz. Sledi direktno na osnovu definicije. □

Primer 1.3.5 (**Diskretna topologija**). Neka je X proizvoljan neprazan skup. Lako se proverava da $P(X)$ zadovoljava uslove (O1)-(O3) te je $P(X)$ topologija na X. Takvu topologiju nazivamo **diskretnom topologijom** i označavamo sa $\mathcal{O}_{disc}$.

Primer 1.3.6 (**Antidiksretna topologija**). Kolekcija $emptyset, X$ je topologija na skupu X. Ovu topologiju nazivamo **antidiskretnom topologijom** i označavamo sa $\mathcal{O}_{adisc}$.

Definicija 1.3.7. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je **baza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi, to jest $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$;

(B1) Svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ može da se prikaže kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$ (to jest postoji kolekcija $\{B_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{B}$, takva da je $O = \bigcup_{j\in J} B_j$.

Primer 1.3.8. Familija $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ je jedna baza diskretne topologije $\mathcal{O}_{disc}$ iz primera 1.3.5 na skupu X.

Zaista, uslov (B1) je zadovoljen jer $\mathcal{B} \subseteq P(X) = \mathcal{O}_{disc}$, a za svaki otvoren skup $O \subseteq P(X)$ važi da je $O = \bigcup_{x\in O}\{x\}$ te je zadovoljen i uslov (B2).

Definicija 1.3.9. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je **baza neke topologije** na skupu X ako i samo ako je kolekcija $\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X.

Teorema 1.3.10. *Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je baza neke topologije na skupu X ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(BN1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$

(BN2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists\{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B}\ \ B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i\in I} B_i$.

Dokaz. Može se pronaći u [5], strana 58. □

Posledica 1.3.11. *Neka familija podskupova $\mathcal{B} \subset P(X)$ zadovoljava uslove:*

(BN1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$

(BN2') $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ (B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \cup \{\emptyset\})$

Tada je familija $\mathcal{B}$ baza neke topologije na skupu X.

Primer 1.3.12 (**Uobičajena topologija na skupu** $\mathbb{R}$)**.** Familija svih otvorenih intervala u skupu realnih brojeva $\mathcal{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ je baza neke topologije na skupu $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da familija otvorenih intervala zadovoljava uslove (BN1) i (BN2'). Naime, uslov (BN1) je zadovoljen jer $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \mathbb{R}$. Neka je $a = \max\{a_1, a_2\}$ i $b = \min\{b_1, b_2\}$, onda važi:

$$(a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) = \begin{cases} \emptyset, & ako\ \ a \geq b \\ (a,b), & ako\ \ a < b \end{cases}$$

čime je i uslov (BN2') zadovoljen. Topologiju koju određuje kolekcija $\mathcal{B}$ nazivamo uobičajenom topologijom na skupu $\mathbb{R}$ i obeležavamo sa $\mathcal{O}_{uob}$. Skup O je otvoren u prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ ako i samo ako je unija neke familije (konačne ili beskonačne) otvorenih intervala. Tako je na primer otvoreni interval $(1,2) \in \mathcal{O}_{uob}$, ali i $(1,2) \cup (3,4) \in \mathcal{O}_{uob}$, kao i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n+1) \in \mathcal{O}_{uob}$

Definicija 1.3.13. Topološki prostor X je **potpuno nepovezan** ako i samo ako ima bazu koja se sastoji iz skupova koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni.

Topološki prostor X je **nuladimenzionalan** ako i samo ako je T_2 i potpuno nepovezan.

Definicija 1.3.14. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kolekcija $\mathcal{P} \subseteq P(X)$ je podbaza topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(PB1) Elementi kolekcije $\mathcal{P}$ su otvoreni skupovi, to jest $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$;

(PB2) Familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ predstavlja neku bazu topologije $\mathcal{O}$.

Definicija 1.3.15. Topološki prostor zadovoljava **drugu aksiomu prebrojivosti** ako i sako ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ takva da je $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$.

Definicija 1.3.16. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Skup $A \subseteq X$ je **okolina tačke** x ako postoji $O \in \mathcal{O}$ takav da je $x \in O \subseteq A$. Sa $\mathcal{U}(x)$ označavamo familiju svih okolina tačke x.

Primer 1.3.17. U prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ skup $[0,3]$ je okolina tačke 1 što označavamo sa $[0,3] \in \mathcal{U}(1)$, jer postoji otvoren skup, na primer $(0,3)$ takav da je $1 \in (0,3) \subseteq [0,3]$.

Teorema 1.3.18. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada važi: skup $A \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke.*

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 76. □

Definicija 1.3.19. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je **unutrašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \subseteq A$. Dalje, tačka $x \in X$ je **spoljašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \subseteq X \setminus A$. Konačno, tačka $x \in X$ je **rubna tačka** skupa A ako i samo ako svaki otvoren skup O koji je sadrži seče i skup A i njegov komplement to jest $\forall O \in \mathcal{O}\ (x \in O \Rightarrow O \cap A \neq \emptyset \wedge O \setminus A \neq \emptyset)$. Skup svih unutrašnjih (respektivno: spoljašnjih, rubnih) tačaka skupa A nazivamo **unutrašnjost** (respektivno: **spoljašnjost**, **rub**) skupa A, u oznaci $\mathrm{Int}(A)$ (respektivno: $\mathrm{Ext}(A)$, $\partial(A)$).
Tačka $x \in X$ je **izolovana tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da je $A \cap O = \{x\}$

Teorema 1.3.20. *Naka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Za sve $A, B \subseteq X$ važi:*

a) Unutrašnjost skupa A je najveći otvoren podskup skupa A.

b) Skup A je otvoren ako i samo ako je $A = \mathrm{Int}(A)$.

c) Iz $A \subseteq B$ sledi $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$.

Dokaz. Dokaz je dat u [5], strana 82. □

Teorema 1.3.21. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za svako $A \subseteq X$ važi $X = \mathrm{Int}(A) \cup \partial(A) \cup \mathrm{Ext}(A)$ i to je particija (razbijanje) skupa X.*

Dokaz. Dat je u [5], strana 83. □

Definicija 1.3.22. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je **adherentna tačka** skupa A ako i samo ako svaka okolina U tačke x seče skup A to jest $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ U \cap A \neq \emptyset$. Tačka $x \in X$ je **tačka nagomilavanja** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup $A \setminus \{x\}$ to jest $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Skup svih adherentnih tačaka skupa A zovemo **adherencija** (ili **zatvorenje**) skupa A, u oznaci $\overline{A}$, a skup svih tačaka nagomilavanja skupa A nazivamo **izvod** skupa A, u oznaci A'.

Teorema 1.3.23. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve $A, B \subset X$ važi:*

a) $\overline{A}$ *je najmanji zatvoren nadskup skupa A.*

b) Skup A je zatvoren ako i samo ako $A = \overline{A}$

c) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

d) $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \partial(A)$.

e) $\overline{A} = A \cup A'$

f) Skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, to jest ako je $A' \subset A$.

Dokaz. Može se naći u [5], strana 84. □

Teorema 1.3.24 (Kuratovski). *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Za proizvoljne skupove $A, B \subset X$ važi:*

(A1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(A2) $A \subseteq \overline{A}$;

(A3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(A4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Dokaz. Pogledati [5], strana 85. □

Teorema 1.3.25. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $O \subseteq X$ otvoren skup. Tada je za svako $A \subseteq X$*

$$\overline{O \cap \overline{A}} = \overline{O \cap A}.$$

Dokaz. Može se pronaći u [4], strana 45. □

Definicija 1.3.26. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $D \subseteq X$ je **gust** u X ako i samo ako je $\overline{D} = X$. Prostor $(X, \mathcal{O})$ je **separabilan** ako i samo ako postoji skup $D \subseteq X$ koji je gust i prebrojiv.

Primer 1.3.27 (Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je separabilan). Topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je separabilan topološki prostor.

U prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ imamo $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, što znači da je skup racionalnih brojeva gust u $\mathbb{R}$. Kako je $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup sledi da je $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ separabilan topološki prostor.

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov da skup $D \subseteq X$ bude gust.

Teorema 1.3.28. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}$. Tada važi: skup $D \subseteq X$ je gust ako i samo ako je $B \cap D \neq \emptyset$, za svaki neprazan skup $B \in \mathcal{B}$. Specijalno, skup D je gust ako i samo ako seče svaki neprazan otvoren skup $O \in \mathcal{O}$.*

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 86. $\square$

Teorema 1.3.29. *Ako topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda je separabilan.*

Dokaz. Može se pronaći u [5], strana 87. $\square$

Definicija 1.3.30. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je

- T_0-prostor ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup O koji sadrži tačno jednu od njih.
- T_1-prostor ako i samo ako za svaki par različitih tačaka $x, y \in X$ postoji otvoren skup O takav da je $x \in O$ i $y \notin O$.
- T_2-prostor ili **Hauzdorfov prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $x \in O_1$ i $y \in O_2$.

Teorema 1.3.31. *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je T_1-prostor ako i samo ako su svi jednoelementni podskupovi skupa X zatvoreni.*

Dokaz. Pogledati [5], strana 90. $\square$

Definicija 1.3.32. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je

- **regularan** ako i samo ako je za svaki zatvoren skup F i svaku tačku x koja mu ne pripada postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $x \in O_1$ i $F \subseteq O_2$.
- **normalan** ako i samo ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $F_1 \subseteq O_1$ i $F_2 \subseteq O_2$.
- T_3-prostor ako i samo ako je regularan T_1-prostor.

- T_4-prostor ako i samo ako je normalan T_1-prostor.

Definicija 1.3.33. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$. Funkcija $f : X \to Y$ je **neprekidna u tački** x_0 ako i samo ako $\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ tako da je $f[U] \subset V$. Za funkciju f kažemo da je **neprekidna** ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački $x \in X$.

Teorema 1.3.34. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) Preslikavanje f je neprekidno.

b) Za svaki otvoren skup $O \subseteq Y$, skup $f^{-1}[O] \subseteq X$ je otvoren.

c) Za svaki zatvoren skup $F \subseteq Y$, skup $f^{-1}[F] \subseteq X$ je zatvoren.

Dokaz. Dokaz ove teoreme može se pronaći u [5], strana 98. $\square$

Definicija 1.3.35. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je **otvoreno** ako i samo ako je za svaki otvoren skup $O \subseteq X$ skup $f[O] \subseteq Y$ otvoren. Preslikavanje f je **zatvoreno** ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$ skup $f[F] \subseteq Y$ zatvoren.

Definicija 1.3.36. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **homeomorfizam** ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. f je bijekcija
2. f je neprekidno
3. f^{-1} je neprekidno

Prostori $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ su **homeomorfni** ako i samo ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$. To označavamo sa $X \cong Y$.

Definicija 1.3.37. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je

- **kompletno regularan** ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i neprazan zatvoren skup F koji je ne sadrži postoji nepekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ takva da je $f(x) = 0$ i $f[F] = 1$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor ako i samo ako je kompletno regularan T_1-prostor.

Teorema 1.3.38. *Svaki T_4 prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$, svaki $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3, svaki T_3-prostor je T_2, svaki T_2-prostor je T_1, i svaki T_1-prostor je T_0-prostor.*

Dokaz. Pogledati [5], strane 91, 92, 102 i 104. □

Teorema 1.3.39. *Neka su* $(X, \mathcal{O}_X)$ *i* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *proizvoljni topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna bijekcija. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

a) f *je homeomorfizam;*

b) f *je otvoreno;*

c) f *je zatvoreno.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme može se pronaći u [5], strana 106. □

Definicija 1.3.40. Osobina $\mathcal{P}$ topoloških prostora je **invarijanta homeomorfizma** ako i samo ako za svaka dva topološka prostora $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i svaki homeomorfizam $f : X \to Y$ važi ako X ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i prostor Y ima osobinu $\mathcal{P}$. Invarijante homeomorfizama nazivamo **topološkim osobinama**.

Teorema 1.3.41. *Separabilnost je topološka osobina.*

Dokaz. Pogledati [5], strana 111. □

Definicija 1.3.42. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **potapanje** ako i samo ako je sirjektivna restrikcija $f|X$ homeomorfizam.

Očigledno, ako je $f : X \to Y$ potapanje, onda su prostor $(X, \mathcal{O}_X)$ i potprostor $(f[X], (\mathcal{O}_Y)_{f[X]})$ prostora $(Y, \mathcal{O}_Y)$ homeomorfni.

Teorema 1.3.43. *Neka su* $(X, \mathcal{O}_X)$ *i* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *topološki prostori i* $f : X \to Y$ *proizvoljno preslikavanje. Tada važi:*

a) Ako je f *neprekidna otvorena injekcija, onda je potapanje.*

b) Ako je f *neprekidna zatvorena injekcija, onda je potapanje.*

Dokaz. Pogledati [5], strana 128. □

Definicija 1.3.44. Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je **granica niza** $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji prirodan broj n_0, takav da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Za niz koji ima bar jednu granicu kažemo da je **konvergentan**.

Teorema 1.3.45. *U Hauzdorfovom prostoru niz može da ima najviše jednu granicu.*

Dokaz. Može se pronaći u [5], strana 114. □

Teorema 1.3.46. *Ako je tačka x granica nekog niza tačaka skupa A, onda je $x \in \overline{A}$.*

Dokaz. Za dokaz videti [5], strana 114. □

Teorema 1.3.47. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ neprazan skup. Tada je kolekcija $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme može se pronaći u [5], strana 120. □

Teorema 1.3.48. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ neprazan skup. Ako sa $\mathcal{F}_A$ označimo familiju svih zatvorenih skupova prostora $(A, \mathcal{O}_A)$, onda važi $\mathcal{F}_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$.*

Dokaz. Za dokaz ove teoreme pogledati [5], strana 120. □

Definicija 1.3.49. Za topologiju $\mathcal{O}_A$ kažemo da je **indukovana** topologijom $\mathcal{O}$. Tada je topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ **potprostor** prostora $(X, \mathcal{O})$. Ako je $A \in \mathcal{O}$ za ovaj potprostor kažemo da je **otvoren potprostor**.

Definicija 1.3.50. Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **nasledna** ako i samo ako za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: ako $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i svaki njegov potprostor ima tu osobinu. Topološku osobinu $\mathcal{P}$ **nasleđuju otvoreni skupovi** ako i samo ako za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: ako $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i svaki njegov otvoreni potprostor ima tu osobinu.

Teorema 1.3.51. *Separabilnost nasleđuju otvoreni potprostori.*

Dokaz. Videti [5], strana 124. □

Teorema 1.3.52. *Osobina "zadovoljavati drugu aksiomu prebrojivosti" je nasledna.*

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 123. □

Definicija 1.3.53. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Familija $\{O_i : i \in I\}$ podskupova skupa X je **pokrivač skupa** A ako i samo ako je $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.

Ako su pri tome skupovi O_i, $i \in I$, otvoreni, onda za pokrivač kažemo da je **otvoren**. Za potkolekciju pokrivača koja i sama predstavlja pokrivač kažemo da je **potpokrivač** datog pokrivača.

Definicija 1.3.54. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **kompaktan** ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.

Primer 1.3.55. Topološki prostor $(X, \mathcal{O}_{disc})$ gde je X konačan skup je kompaktan.

Primer 1.3.56. Topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ nije kompaktan jer otvoreni pokrivač $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$, ne sadrži konačni potpokrivač.

Definicija 1.3.57. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je **kompaktan skup** ako i samo ako je potprostor $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan topološki prostor.

Teorema 1.3.58 (Hajne-Borel). *Podskup A prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [5], strana 144. □

Teorema 1.3.59. *Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup.*

Dokaz. Pogledati [5], strana 145. □

Definicija 1.3.60. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je:

- **Nizovno** (**sekvencijalno**) kompaktan ako i samo ako svaki niz u skupu X ima konvergentan podniz.

- **Prebrojivo kompaktan** ako i samo ako svaki beskonačan prebrojiv podskup skupa X ima tačku nagomilavanja.

Definicija 1.3.61. **Direktan proizvod** familije skupova $\{X_i : i \in I\}$, u oznaci $\prod_{i \in I} X_i$, je skup svih funkcija $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, takvih da za svako $i \in I$ važi $x_i \in X_i$.

Definicija 1.3.62. Za proizvoljno $i_0 \in I$, preslikavanje $\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} X_i \to X_{i_0}$ dato sa

$$\pi_{i_0}(\langle x_i : i \in I\rangle) = x_{i_0},$$

za sve $\langle x_i : i \in I\rangle \in \prod_{i\in I} X_i$ zovemo **projekcija** na i_0-tu koordinatu.

Teorema 1.3.63. *Neka je I neprazan skup, a $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada važi:*

a) Kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\Pi_{i\in I} X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $i \in I$ proizvoljni indeks, a $O_i \in \mathcal{O}_i$ otvoren skup u prostoru X_i, je podbaza neke topologije na skupu $\Pi_{i\in I} X_i$. Označimo tu topologiju sa $\mathcal{O}$.

b) Familija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] : K \subseteq I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge \forall i \in K \ \ (O_i \in \mathcal{O}_i)\}$$

je baza topologije $\mathcal{O}$.

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 154. □

Definicija 1.3.64. Topologija $\mathcal{O}$ na skupu $\prod X_i$, uvedena u prethodnoj teoremi naziva se **topologija Tihonova**. Za prostor $(\Pi X_i, \mathcal{O})$ kažemo da je (Tihonovski, topološki) proizvod familije prostora $\{(X_i, _i) : i \in I\}$.

Teorema 1.3.65. *Uz pretpostavke i oznake uvedene u teoremi 1.3.63 važi:*

a) Projekcije $\pi_{i_0} : \prod_i X_i \to X_{i_0}$ su neprekidne otvorene sirjekcije.

b) Neka je $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostor. Preslikavanje $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ je neprekidno ako i samo ako je za svako $i \in I$ kompozicija $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ neprekidna.

Dokaz. Videti [5], strana 155. □

Definicija 1.3.66. Neka je I neprazan skup.

Kub Tihonova je proizvod $[0,1]^I$, gde je prostor $[0,1]$ sa uobičajenom topologijom. Specijalno, za $I = \mathbb{N}$ proizvod $[0,1]^{\mathbb{N}}$ je **kub Hilberta**.

Kub Kantora je proizvod $\{0,1\}^I$, gde je na skupu $\{0,1\}$ diskretna topologija.

Definicija 1.3.67. Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **multiplikativna** (**prebrojivo multiplikativna**) ako i samo ako je proizvod svake familije (svake prebrojive familije) topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$, od kojih svaki ima osobinu $\mathcal{P}$ sa osobinom $\mathcal{P}$.

Teorema 1.3.68. *Separabilnost je prebrojivo multiplikativna osobina.*

Dokaz. Videti [5], strana 163. □

Teorema 1.3.69. *Kompaktnost je multiplikativna osobina.*

Dokaz. Za dokaz ove teoreme pogledati [5], strana 165. □

Teorema 1.3.70. *Svaki $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti može da se potopi u Hilbertov kub $[0,1]^{\mathbb{N}}$.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme čitalac može naći u [5] na strani 167. □

1.4 Metrički prostori

Važnu klasu topoloških prostora čine metrički prostori. Narednom definicijom uvodimo metriku i metrički prostor.

Definicija 1.4.1. Neka je X neprazan skup. Funkcija $d : X^2 \to [0, +\infty)$ je **metrika** na skupu X ako i samo ako za sve $x, y, z \in X$ važi:

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Tada se par (X, d) naziva **metrički prostor**. Broj $d(x, y)$ nazivamo **rastojanjem** tačaka x i y.

Primer 1.4.2 (01-metrika). Neka je X proizvoljan neprazan skup. Lako se proverava da funkcija $d : X^2 \to [0, +\infty)$ definisana sa:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

zadovoljava uslove (M1) - (M3) te je ona metrika na skupu X. Ovako definisanu metriku d nazivamo trivijalna ili 01-metrika.

Lema 1.4.3. *Neka je (X, d) metrički prostor i $a, b, c \in X$. Tada važi: $|d(a, b) - d(a, c)| \leq d(b, c)$.*

Dokaz. Dokaz ove leme se može pronaći u [5], strana 68. □

Definicija 1.4.4. Neka je x proizvoljna tačka skupa X i $r > 0$. Skup $L(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ zovemo **otvorena lopta** sa centrom u tački x i poluprečnikom r.

Lema 1.4.5. *Neka je (X,d) metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$. Tada za proizvoljnu tačku $y \in L(x,r)$ postoji broj $\rho > 0$ takav da je $L(y,\rho) \subseteq L(x,r)$.*

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 68. □

Teorema 1.4.6. *Neka je (X,d) metrički prostor. Tada je familija svih otvorenih lopti $\mathcal{B}_d = \{L(x,r) : x \in X \wedge r > 0\}$ baza neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X.*

Dokaz. Videti [5], strana 68. □

Definicija 1.4.7. Za topologiju $\mathcal{O}_d$ iz prethodne teoreme kažemo da je **određena** (**indukovana**) **metrikom** d.

Topološki prostor $(X,\mathcal{O})$ je **metrizabilan** ako i samo ako postoji metrika d na skupu X takva da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Primer 1.4.8. Posmatrajmo 01-metriku iz primera 1.4.2. Za proizvoljnu tačku $x \in X$ važi $L(x, \frac{1}{2}) = \{y \in X : d(x,y) = 0\} = \{x\}$, pa je $\{x\} \in \mathcal{O}_d$. Za proizvoljan skup $A \subset X$ imamo da je $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$ pa je $\mathcal{O}_d = P(X)$ što znači da 01-metrika indukuje diskretnu topologiju iz primera 1.3.5.

Primer 1.4.9 (**Prostor** $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ **je metrizabilan topološki prostor**). Lako se proverava da funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ definisana sa

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; d(x,y) = |x - y|$$

zadovoljava uslove definicije 1.4.1. Dalje, uslovi $d(y,x) < r$ i $y \in (x-r, x+r)$ su ekvivalentni pa važi $L(x,r) = (x-r, x+r)$. Odatle je $\mathcal{B}_d \subseteq \mathcal{B}_{uob} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$. No kako je $(a,b) = (x-r, x+r)$ za $x = \frac{a+b}{2}$ i $r = \frac{b-a}{2}$, sledi da je $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}_{uob}$ pa je topologija na skupu $\mathbb{R}$ određena ovako definisanom metrikom d baš uobičajena topologija iz primera 1.3.12.

Teorema 1.4.10. *U proizvoljnom metričkom prostoru (X,d) važi: skup $O \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako za svaku tačku $x \in O$ postoji broj $r > 0$ takav da je $L(x,r) \subseteq O$.*

Dokaz. Pogledati [5], strana 69. □

Definicija 1.4.11. Neka je X neprazan skup i $\mathcal{D}_X$ kolekcija svih metrika na skupu X. Za metrike $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_X$ kažemo da su **topološki ekvivalentne** ako i samo ako je $\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2}$. Metrike d_1 i d_2 su **uniformno ekvivalentne** ako i samo ako postoje brojevi $k, h > 0$ takvi da za sve $x, y \in X$ važi $d_1(x,y) \leq kd_2(x,y)$ i $d_2(x,y) \leq hd_2(x,y)$.

Teorema 1.4.12. *Neka je X proizvoljan neprazan skup. Tada važi:*

1. *Ako je $d_1(x,y) \leq kd_2(x,y)$ onda je $L_{d_2}(x,r) \subseteq L_{d_1}(x,kr)$ za sve $x \in X$ i $r > 0$ i važi $\mathcal{O}_{d_1} \subseteq \mathcal{O}_{d_2}$.*

2. *Uniformno ekvivalentne metrike su topološki ekvivalentne, to jest daju istu topologiju.*

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 72. □

Definicija 1.4.13. Metrika d na X je **ograničena** ako i samo ako postoji $M > 0$ takvo da za $(\forall x, y \in X)\,(d(x,y) < M)$.

Teorema 1.4.14. *Neka je (X,d) metrički prostor. Tada važi:*

1. *Funkcija $d_1 : X^2 \to \mathbb{R}$ data sa $d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ je ograničena metrika na skupu X jer je $d_1(x,y) < 1$.*

2. *Metrike d i d_1 na skupu X određuju istu topologiju.*

Dokaz. Videti [5], strana 73. □

Posledica 1.4.15. *Svaki metrički prostor je metrizabilan ograničenom metrikom.*

Teorema 1.4.16. *Neka su $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrički prostori i $f : X \to Y$. Preslikavanje f je neprekidno u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in X)\,(d_X(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)\,.$$

Dokaz. Čitlac dokaz može pronaći u [5] na strani 100. □

Teorema 1.4.17. *Metrički prostor je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], strana 87. □

Primer 1.4.18. Prostor $(C[0,1], d_{sup})$ je separabilan, gde je d_{sup} takozvana supremum metrika $d_{sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$.

Da bi to pokazali koristimo narednu teoremu:

Teorema 1.4.19 (**Stone-Weierstrass**). *Svaka neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ je uniformna granica niza polinoma*[1].

To znači da za proizvoljno $f \in C([0,1])$ postoji niz polinoma $\langle g_n \rangle \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ takav da $g_n \rightrightarrows f$ kada $n \to \infty$, to jest $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g_n(x)|) = 0$, odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g_n(x)| < \varepsilon).$$

Treba naći prebrojiv gust skup. Da bi $\mathcal{P}$ bio gust skup u $(C([0,1]), d_s up)$ treba pokazati

$$(\forall f \in C([0,1]))(\forall r > 0)(\exists p \in \mathcal{P}))(p \in L(f,r)),$$

odnosno

$$(\forall f \in C([0,1]))(\forall r > 0)(\exists p \in \mathcal{P}))(p \in d_{sup}(f,p) < r).$$

Neka je dato $f \in C([0,1])$ i $r > 0$. Znamo da postoji niz polinoma $\langle g_n \rangle$ koji konvergira ka f. Ako je $\varepsilon = r$ možemo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $\sup_{x\in C([0,1])} |f(x) - g_{n_0}(x)| < r$. Znači, za p biramo $g_{n_0}(x)$. Skup svih polinoma još nije dovoljno dobar jer nije prebrojiv. Naime $|\mathcal{P}| \geq c$ jer

$$\mathcal{P} = \{p_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 : \ a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Definišemo $\widetilde{\mathcal{P}} = \{p_n(x) = q_n x^n + ... + q_1 x + q_0 : \ q_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$. $|\widetilde{\mathcal{P}}| = \aleph_0$. Može se pokazati da je $\overline{\widetilde{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$ pa važi $\overline{\overline{\widetilde{\mathcal{P}}}} = \overline{\mathcal{P}}$, a već smo pokazali da je $\overline{\mathcal{P}} = C([0,1])$. Odatle je $\widetilde{\mathcal{P}}$ gust i prebrojiv u $C([0,1])$, pa je $(C[0,1], d_s up)$ separabilan.

Definicija 1.4.20. Neka je (X,d) metrički prostor, A neprazan poskup skupa X i $x \in X$. **Rastojanje tačke** x **od skupa** A je broj

$$d(x, A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Dijametar skupa A je broj

$$\rho(A) = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$$

ako ovaj supremum postoji ili beskonačno ukoliko ne postoji. Ako je $\rho(A) < \infty$ skup A je **ograničen skup**.

[1] Dokaz se može naći u V. Smirnov, *A Course in Higher Mathematics*, volume II, Pergamon press, London 1964

Lema 1.4.21. *Neka je (X, d) metrički ptostor. Tada je skup $A \subseteq X$ zatvoren ako i samo ako za svaku tačku $x \in X \setminus A$ važi $d(x, A) > 0$.*

Dokaz. Može se naći u [5], strana 95. □

Teorema 1.4.22. *Metrizabilnost je nasledna osobina.*

Dokaz. Pogledati [5], strana 181.

Teorema 1.4.23. *Metrizabilnost je prebrojivo multiplikativna osobina.*

Dokaz. Za dokaz videti [5], strana 181. □

Teorema 1.4.24. *Svaki metrizabilan topološki prostor je T_4-prostor.*

Dokaz. Čitalac može pronaći dokaz u [5] na strani 96. □

Teorema 1.4.25. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

1. *Prostor (X, d) je kompaktan.*
2. *Prostor (X, d) je nizovno kompaktan.*
3. *Prostor (X, d) je prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [5], strana 147. □

Teorema 1.4.26. *Kompaktan podskup metričkog prostora je zatvoren i ograničen.*

Dokaz. Dat je u [5], strana 150. □

Teorema 1.4.27. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$ tada je funkcija $d_A = d \upharpoonright (A \times A) : A \times A \to [0, \infty)$ je metrika na skupu A.*

Dokaz. Za dokaz videti [5], strana 125. □

Definicija 1.4.28. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u prostoru X kažemo da je **Košijev niz** ako i samo ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(d(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

Teorema 1.4.29. *U proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) važi:*

a) Svaki Košijev niz je ograničen.

b) Ako Košijev niz ima konvergentan podniz, onda je i sam konvergentan.

c) Svaki konvergentan niz je Košijev.

Teorema 1.4.30. *Neka je (X, d) metrički prostor, onda važi:*

1. *Ako je $\langle x_n \rangle$ niz u X i $x \in X$, onda je $\lim x_n = x$ ako i samo ako važi:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(d(x_n, x) < \varepsilon)$$

2. *Ako postoji, granica niza je jedinstvena.*

3. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Čitalac dokaz ove teoreme može pronaći u [5] na strani 118. □

Definicija 1.4.31. Metrički prostor (X, d) je **kompletan** ako i samo ako je svaki Košijev niz u X konvergentan.

Definicija 1.4.32. Skup $A \subseteq X$ je **kompletan skup** ako i samo ako je (A, d_A) kompletan metrički prostor.

Teorema 1.4.33. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Tada ako je A kompletan, onda je A zatvoren.*

Dokaz. Videti [5], strana 199. □

Teorema 1.4.34. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $A \subseteq X$. Tada je A kompletan ako i samo ako je A zatvoren.*

Dokaz. Videti [5], strana 199. □

Primer 1.4.35. Metrički prostor (X, d) gde je d 01-metrika je kompletan.

Neka je $\langle x_n \rangle$ Košijev niz u (X, d) gde je d 01-metrika. To znači da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(d(x_m, x_n) < \varepsilon),$$

pa i za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ možemo odrediti $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$ odnosno $d(x_m, x_n) = 0$. Vidimo, da je za sve $m, n \geq n_0$ $x_m = x_n$, to jest niz postaje stacionaran, a time i konvergentan.

Primer 1.4.36. Metrički prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je kompletan.

Neka je dat $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, Košijev niz skupa $\mathbb{R}$. Prema teoremi 1.4.29 (a) taj niz je ograničen, pa postoji interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ takav da je $\langle x_n \rangle \subset [a, b]$. Kako je $[a, b]$ zatvoren i ograničen skup, prema Hajne-Borelovoj teoremi on je kompaktan pa prema teoremi 1.4.25 i nizovno kompaktan. To znači da svaki niz u $[a, b]$, pa i $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ima konvergentan podniz, a odatle na osnovu teoreme 1.4.29 (b) sledi da je niz $\langle x_n \rangle$ konvergentan.

Primer 1.4.37. Prostor neprekidnih i ograničenih preslikavanja $f : X \to \mathbb{R}$, $(BC(X, \mathbb{R}), d_{sup})$ je kompletan metrički prostor.

Za dokaz pogledati [5], strana 200.

Primer 1.4.38. $(C[0, 1], d_{sup})$ je kompletan.

Videti [5], strana 203.

Glava 2

Poljski prostori

U prethodhoj glavi smo definisali topološke pojmove koji će nam biti dovoljni za razumevanje posebne vrste topoloških prostora, poljske prostore, čiju definiciju dajemo u nastavku.

Definicija 2.0.39. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **poljski prostor** ukoliko je separabilan i metrizabilan metrikom d takvom da je (X, d) kompletan metrički prostor.

Primer 2.0.40. Topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je poljski prostor.

Na osnovu primera 1.3.27 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je separabilan, a na osnovu primera 1.4.36 je kompletan. Topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je metrizabilan, što je pokazano u primeru 1.4.9. Time je pokazano da je $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ poljski prostor.

Primer 2.0.41. $\mathbb{I} = [0, 1]$ sa uobičajenom topologijom je poljski prostor.

Restrikcija metrike d iz primera 1.4.9 na skup $\mathbb{I}$, je metrika na skupu $\mathbb{I}$. Kako je $\mathbb{I}$ zatvoren i ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$, na osnovu teoreme 1.3.58, skup $\mathbb{I}$ je kompaktan. U metričkim prostorima, na osnovu teoreme 1.4.25, kompaktnost je ekvivalentna nizovnoj kompaktnosti, pa svaki niz u $\mathbb{I}$ ima konvergentan podniz. Dalje, na osnovu teoreme 1.4.29 (b) sledi da je svaki Košijev niz u $\mathbb{I}$ konvergentan. Ovim je pokazana kompletnost. Skup $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$ je gust i prebrojiv u $\mathbb{I}$, te je $(\mathbb{I}, \mathcal{O}_{uob})$ poljski prostor.

Primer 2.0.42. Prebrojiv skup X sa diskretnom topologijom $\mathcal{O}_{disc} = P(X)$ je poljski.

Na osnovu primera 1.4.8 01-metrika indukuje diskretnu topologiju, te je $(X, \mathcal{O}_{disc})$ metrizabilan topološki prostor, a na osnovu primera 1.4.35 sledi kompletnost. U primeru 1.3.8 pokazali smo da je $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ baza diskretne topologije na skupu X. Kako je X prebrojiv, prebrojiva je i baza $\mathcal{B}$, te je na osnovu teoreme 1.3.29 $(X, \mathcal{O}_{disc})$ separabilan topološki prostor.

Teorema 2.0.43. *Neka je* $(X, \mathcal{O}_X)$ *poljski prostor,* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *topološki prostor i* $f : X \to Y$ *homeomorfizam. Prostor* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *je poljski topološki prostor.*

Dokaz. Kako je $(X, \mathcal{O}_X)$ poljski topološki prostor, postoji kompletna metrika koja indukuje $\mathcal{O}_X$. Neka je preslikavanje $g : Y \to X$ dato sa $g = f^{-1}$. Očigledno je g homeomorfizam. Na prostoru $(Y, \mathcal{O}_Y)$ definišemo preslikavanje $d_Y : Y^2 \to [0, \infty)$ na sledeći način: $d_Y(y_1, y_2) = d_X(g(y_1), g(y_2)$. Lako se proverava da je na ovakav način zadato preslikavanj metrika koja indukuje $\mathcal{O}_Y$. Pokazujemo da je kompletna.

Neka je niz $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ Košijev u Y. Očigledno je i niz $\langle g(y_n) : n \in \mathbb{N} \rangle \subseteq X$ Košijev. Kako je prostor X kompletan, niz $\langle g(y_n) : n \in \mathbb{N} \rangle$ je konvergentan, to jest, postoji $x \in X$ takvo da je $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = x$. Pošto je $d_Y(y_n, f(x)) = d_X(g(y_n), g(f(x)) = d_X(g(y_n), x) < \varepsilon$ sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = f(x) \in Y$, pa niz $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ konvergira. Separabilnost je topološka osobina, te je $(Y, \mathcal{O}_Y)$ separabilan topološki prostor metrizabilan kompletnom metrikom, to jest, poljski. □

Ovim smo pokazali da je osobina "biti poljski prostor" topološka. U narednoj teoremi pokazujemo da je ova osobina i prebrojivo multiplikativna, što će nam dati neke značajne primere poljskih prostora kao što su Hilbertov kub, Berov prostor i Kantorov kub o kojima će biti reči kasnije.

Teorema 2.0.44. *Ako su* $X_0, X_1, \ldots$ *poljski prostori, onda je i* $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *poljski prostor.*

Dokaz. Neka su d_i za $i \in \omega$ metrike takve da su (X, d_i) kompletni metrički prostori. Možemo pretpostaviti da je $d_i < 1$ za $i \in \omega$. Definišemo preslikavanje na $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ sa

$$\hat{d} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(f(n), g(n)).$$

Lako se proverava da $\hat{d}$ zadovoljava uslove (M1)-(M3) definicije 1.4.1 pa je $\hat{d}$ metrika. Pokazaćemo da je svaki Košijev niz kovergentan u metričkom prostoru $(\prod X_n, \hat{d})$. Neka je $\langle f_0, f_1, ... \rangle$ Košijev niz u $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$. To znači da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, k \geq n_0)(\hat{d}(f_m, f_k) < \varepsilon)$$

Kako je

$$\frac{d_n(f_m(n), f_k(n))}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f_m(n), f_k(n))}{2^{n+1}}) = \hat{d}(f_m, f_k)$$

sledi da je niz $\langle f_0(n), f_1(n), ...\rangle$ Košijev u X_n za svako $n \in \omega$. Kako je X_n poljski prostor sledi da je kompletan za svako $n \in \omega$ pa je $\langle f_0(n), f_1(n), ...\rangle$ konvergentan, to jest za svako $n \in \omega$ postoji $g(n) \in X_n$ takvo da je

$$\lim_{i\to\infty} f_i(n) = g(n).$$

Pokazaćemo da je niz $g = \langle g(0), g(1), ...\rangle$ granica niza $\langle f_0, f_1, ...\rangle$. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Pošto je $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(n) = g(n)$, za svako $n \in \omega$

$$(\exists m_0^n \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0^n)(d_n(f_m(n), g(n)) < \varepsilon).$$

Neka je $m = \max_{n\in\omega} m_0^n$, tada imamo

$$\hat{d}(f_m, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f_m(n), f_k(n))}{2^{n+1}}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + ... = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...) = \varepsilon$$

pa sledi da $\langle f_0, f_1, ...\rangle$ konvergira ka g. Time je pokazana kompletnost. Kako je topološki prostor (X_n, d_n) poljski za svako $n \in \omega$, on je i separabilan. Na osnovu teoreme 1.3.68 sledi da je i $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ separabilan. $\square$

Primer 2.0.45. Hilbertov kub $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ je poljski prostor.

Sledi na osnovu primera 2.0.41 i prethodne teoreme.

Teorema 2.0.46. *Svaki poljski prostor je homeomorfan nekom potprostoru* $\mathbb{H}$.

Dokaz. Neka je X poljski prostor. X je metrizabilan što znači da zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti na osnovu teoreme 1.4.17. Dalje, svaki metrizabilan prostor je T_4-prostor na osnovu 1.4.24, a na osnovu teoreme 1.3.38 je i $T_{\frac{1}{3}}$-prostor. Tvrđenje sledi na osnovu teoreme 1.3.70. $\square$

Primer 2.0.47. Skup svih neprekidnih realnih funkcija nad jediničnim intervalom i supremum metrikom $(C([0,1]), d_{sup})$ je poljski prostor.

Na osnovu primera 1.4.18 imamo separabilnost, a na osnovu primera 1.4.38 kompletnost. Sledi da je topološki prostor $C([0,1])$ je poljski.

Sledeća teorema nam daje više od toga.

Teorema 2.0.48. *Ako je X kompaktan metrički prostor, a Y poljski prostor, onda je i $C(X,Y)$ poljski prostor, gde je sa $C(X,Y)$ označen prostor neprekidnih funkcija $f : X \to Y$ sa metrikom $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$.*

Dokaz. Metrički prostor $C(X,Y)$ sa supremum metrikom je kompletan. Dokaz za to može se pronaći u [5]. Pokazujemo da je i separabilan. Neka je d_X metrika na X i sa $C_{m,n}$ označen sledeći skup

$$C_{m,n} = \{f \in C(X,Y), \forall x,y\ (d_X(x,y) < \frac{1}{m} \Rightarrow d_Y(f(x),f(y)) < \frac{1}{n})\}.$$

Neka je dalje $X_m \subseteq X$ konačan skup sa osobinom da je svaka tačka skupa X na rastojanju manjem od $\frac{1}{n}$ od neke tačke skupa X_m. S obzirom da je X kompaktan, otvoren pokrivač $\{B(x,\frac{1}{m}), x \in X\}$ ima konačan potpokrivač i to je naš X_m. Neka je $D_{m,n}$ podskup skupa $C_{m,n}$ koji je prebrojiv, takav da za svako $f \in C_{m,n}$ i proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji funkcija $g \in D_{m,n}$ za koju je $d_Y(f(y),g(y)) < \varepsilon$ za sve $y \in X_m$. Pokazaémo da takav skup postoji. Pošto je Y separabilan, postoji prebrojiv gust skup $D \subseteq Y$. Neka je $X_m = \{x_0, ...x_q\}$. Posmatramo nizove dužine k sledećeg oblika:

$$\{B(d_1,q_1), B(d_2,q_2), ..., B(d_k,q_k) : q_i \in \mathbb{Q},\ d_i \in D,\ i = 1,2,...k\}.$$

Ovaj skup je prebrojiv.

Razmatramo dalje, samo one k-torke otvorenih lopti $B(d_i,q_i)$ $i = 1,2,...,k$ za koje postoji funkcija $f \in C_{m,n}$ takva da je $f(x_i) \in B(d_i,q_i)$ za $i = 1,2,...,k$. Biramo za svaku od tih k-torki po jednu takvu funkciju.

Za proizvoljno $f \in C_{m,n}$ i $\varepsilon > 0$ postoji $q \in \mathbb{Q}$, takvo da je $q < \frac{\varepsilon}{3}$. Za tako izabrano q, kako je skup D gust, postoji $d_i \in B(f(x_i),q) \cap D$, za $i = 1,2,...,k$. Očigledno $(B(d_1,q), B(d_2,q), ..., B(d_k,q))$ ima svog predstavnika u $D_{m,n}$ jer je $f(x_i) \in B(d_i,q), i = 1,2,...,k$. Tog predstavnika ćemo označiti sa g. Tada je za svako $i = 1,2,...,k$

$$d_Y(f(x_i),g(x_i)) \leq d_Y(f(x_i),d_i) + d_Y(g(x_i),d_i) < 2q < \varepsilon$$

pa funkcija g ima traženu osobinu.

Označimo sa $E = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} D_{m,n}$. Skup E je gust u $C(X,Y)$. Naime, neka je dato $f \in C(X,Y)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Neka je $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Kako je X kompaktan, svaka neprekidna funkcija je i uniformno neprekidna, te postoji m takvo da je $f \in C_{m,n}$. Neka je $g \in D_{m,n}$ takvo da je $d_Y(f(y),g(y)) < \frac{1}{n}$ za sve $y \in X_m$. Pokazaćemo da je $d(f,g) < \varepsilon$.

Za dato proizvoljno $x \in X$, neka je $x' \in X_m$ takvo da je $d_X(x,x') < \frac{1}{m}$. Tada je $d_Y(f(x),f(x')) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d_Y(f(x'),g(x')) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ kao i $d_Y(g(x'),g(x)) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$. Konačno,

$$d_Y(f(x),g(x)) \leq d_Y(f(x),f(x')) + d_Y(f(x'),g(x')) + d_Y(g(x'),g(x)) < \varepsilon.$$

Sledi da je prostor $C(X,Y)$ poljski. □

Lema 2.0.49. *Neka je X poljski prostor i $X_0, X_1, X_2, \ldots$ zatvoreni podskupovi u X za koje važi $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ i $\lim_{n\to\infty} \rho(X_n) = 0$. Tada postoji $x \in X$ takvo da je $\bigcap X_n = \{x\}$.*

Dokaz. Neka je $x_n \in X_n$. Pošto $\rho(X_n) \to 0$ kada $n \to \infty$ niz $\langle x_n \rangle$ je Košijev, a kako je X kompletan jer je poljski, niz $\langle x_n \rangle$ je konvergentan. Označimo sa $x = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$. Za proizvoljno $m \in \omega$ niz $\langle x_n : n \geq m \rangle \subseteq X_m$. Kako je $x = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ sledi da je $x \in X_m$ za svako $m \in \omega$ pa je $x \in \bigcap_{n\in\omega} X_n$.
Pretpostavimo da postoji $y \neq x$ takvo da je $\{x, y\} \subseteq \bigcap X_n$. Kako je $x \neq y$ sledi da je $d(x, y) = \varepsilon > 0$. Stoga je $\rho(X_n) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X_n\} \geq \varepsilon$ za svako $n \in \omega$. Time smo došli u kontradikciju sa $\lim_{n\to\infty} \rho(X_n) = 0$. $\square$

Lema 2.0.50. *Neka je X poljski prostor, $U \subset X$ otvoren skup i $\varepsilon > 0$. Tada postoje otvoreni skupovi $U_0, U_1, U_2, \ldots$ takvi da je $U = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U}_n$ i $\rho(U_n) < \varepsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je D gust i prebrojiv u X i $U_0, U_1, U_2, \ldots$ familija skupova oblika $L(d, \frac{1}{n})$ takva da je $d \in D$, $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ i važi $\overline{L(d, \frac{1}{n})} \subseteq U$. Očigledno važi $\bigcup U_n \subseteq U$. Pokazaćemo obrnutu inkluziju. Neka je $x \in U$ proizvoljno. Tada postoji lopta $L(x, r) \subseteq U$. Pri tome možemo odabrati $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\frac{1}{n} < \min\{r, \varepsilon\}$, pa je i $L(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Znamo da postoji $d \in D$ takvo da je $d \in L(x, \frac{1}{3n})$, što znači da je $d(d, x) < \frac{1}{3n}$, a time je i $x \in L(d, \frac{1}{3n})$. Takođe je i $\overline{L(d, \frac{1}{3n})} \subseteq U$ pa je $x \in U_i$ za neko $i \in \omega$. Sledi da je $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Na osnovu definicije skupova U_n važi $\bigcup \overline{U}_n \subseteq U$, a kako je $\bigcup U_n \subseteq \bigcup \overline{U_n}$, i $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ važi i obrnuta inkluzija.
Neka je $y \in U_i$ proizvoljno i $y \neq x$. Tada je

$$d(x, y) \leq d(x, d) + d(d, y) < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{2}{3n}$$

$$\rho(U_i) = \sup d(x, y) \leq \frac{2}{3n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$\square$

2.1 Berov i Kantorov prostor

U ovom odeljku upoznaćemo se sa dva važna primera poljskih prostora, Berovim prostorom i Kantorovim kubom.

Primer 2.1.1. Prostor $X^{\mathbb{N}}$ posmatran kao proizvod prebrojivo mnogo kopija skupa X sa diskretnom topologijom je poljski prostor ukoliko je X najviše prebrojiv skup.

Zaista, na osnovu primera 2.0.42 i teoreme 2.0.44 sledi da je $(X, \mathcal{O}_{disc})^{\mathbb{N}}$ poljski topološki prostor.

Posebno značajan među ovakvim poljskim prostorima je Kantorov kub koji dobijamo za $X = \{0,1\}$ i označavamo ga sa $\mathcal{C}$. Dakle $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}} = (\{0,1\}, \mathcal{O}_{disc})^{\mathbb{N}}$.

Takođe, još jedan značajan primer ovakvog poljskog prostora je za $X = \mathbb{N}$ koji nazivamo Berov prostor i označavamo ga sa $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \mathcal{O}_{disc})^{\mathbb{N}}$.

Teorema 2.1.2. *Kantorov kub $\mathcal{C}$ je kompaktan.*

Dokaz. Na osnovu primera 1.3.55 topološki prostor $(\{0,1\}, \mathcal{O}_{disc})$ je kompaktan. Iz teoreme 1.3.69 Tihonovski proizvod kompaktnih topoloških prostora je kompaktan prostor, te je $(\{0,1\}, \mathcal{O}_{disc})^{\mathbb{N}}$ kompaktan topološki prostor. □

Lema 2.1.3. *Metrika na $\mathcal{N}$ data sa*

$$d(f,g) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & f \neq g \\ 0, & f = g \end{cases}$$

gde je $n = \min\{n : f(n) \neq g(n)\}$ je uniformno ekvivalentna metrici $\hat{d}$ definisanoj u dokazu teoreme 2.0.44.

Dokaz. Lako se proverava da gore definisano preslikavanje zadovoljava uslove (M1)-(M3) definicije 1.4.1. Kako je $\mathcal{N}$ proizvod prebrojivih topoloških prostora sa diskretnom topologijom $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{disc})$ i kako 01-metrika indukuje diskretnu topologiju sledi da je $d_n = d_{01}$, pa je

$$\hat{d} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(f(n), g(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_{01}(f(n), g(n)).$$

Neka je $a \neq b$ i neka se a i b razlikuju prvi put na n-tom članu niza. Tada je

$$d(a,b) = \frac{1}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_{01}(a(n), b(n)) = \hat{d}(a,b).$$

Takođe važi

$$\hat{d}(a,b) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} d_{01}(a(i), b(i)) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} d_{01}(a(i), b(i)) \leq$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2^n} = 2d(a,b).$$

Te su $\hat{d}$ i d uniformno ekvivalentne metrike. □

Označimo sa $E_{\frac{1}{3}} \subseteq \mathbb{I}$ skup koji sadrži brojeve skupa $\mathbb{I}$ koji u ternarnoj reprezentaciji imaju kao cifre, isključivo, 0 i 2. Skup $E_{\frac{1}{3}}$ nazivamo Kantorov trijadski skup. Geometrijska reprezentacija Kantorovog trijadskog skupa se formira tako što se u prvom koraku iz intervala $[0,1]$ podeljenog na tri jednaka intervala izostavlja srednji $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. U drugom koraku preostala dva intervala dele se na po tri jednaka intervala i u svakoj trisekciji izostavlja srednji interval $(\frac{1}{9},\frac{2}{2}) = (\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2})$ i $(\frac{7}{9},\frac{8}{9}) = (\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2},\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2})$. U četvrtom koraku svaki od preostalih intervala deli se na po tri jednaka dela od kojih se u svakoj trisekciji izostavlja srednji itd. Kao što je u prethodnom primeru navedeno, Kantorov trijadski skup se može okarakterisati i preko ternarnog zapisa brojeva iz intervala $[0,1]$. Da bismo se u to uverili razmotrićemo neke osnovne osobine ternarne reprezentacije. Svako $x \in [0,1]$ ima ternarnu reprezentaciju oblika: $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ za $a_k \in \{0,1,2\}$. Ova reprezentacija je jedinstvena, osim u slučaju kada je $x = \frac{p}{3^{k_0}}$ za $p, k_0 \in \omega$ kada postoje dve mogućnosti njegovog zapisivanja:

1. $a_{k_0} \neq 0, a_k = 0$ za $k > k_0$ - zapis sa konačno mnogo cifara različitih od nule;

2. $a_{k_0} \in \{0,1\}, a_k = 2$ za $k > k_0$.

Za nas su ovi brojevi interesantni jer predstavljaju granice intervala koji se izostavljaju iz Kantorovog skupa. Primetimo još da barem jedan od zapisa, (1) ili (2), sadrži cifru 1. Na primer: $\frac{1}{3} = (0,1)_3 = (0,02222...)_3$ i $\frac{2}{3} = (0,2)_3 = (0,12222...)_3$.

Dakle broj $\frac{1}{3}$ sadrži cifru 1 u zapisu oblika (1), ali se može zapisati u obliku (2) bez cifre 1, a broj $\frac{2}{3}$ u ternarnom zapisu sa konačnim brojem cifara nema cifru 1, dok u ternarnom zapisu sa beskonačno mnogo cifara ima jedinicu. Ako sa S_n označimo skup koji se u n-tom koraku konstrukcije Kantorovog skupa izbacuje iz intervala $[0,1]$, onda primetimo da za rubne tačke intervala $S_1 = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ postoje ternarni zapisi u kojima se ne pojavljuje cifra 1. Svi elementi $0,a_1a_2a_3...$ intervala $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ moraju imati prvu cifru $a_1 = 1$, to jest njihov ternarni zapis je oblika $(0,1...)_3$, što znači da brojevi iz $[0,1] \setminus S_1$ u ternarnom zapisu (u barem jednom od oblika) imaju $a_1 = 0$ ili $a_1 = 2$. Slično, S_2 čine brojevi koji u ternarnom zapisu imaju $a_2 = 1$, i tako dalje. Kantorov trijadski skup je geometrijski opisan na sledeći način

$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,1] \setminus S_n$. Time smo pokazali da je Kantorov trijadski skup u stvari skup realnih brojeva iz intervala $[0,1]$ koji u svom ternarnom zapisu imaju isključivo cifre 0 i 2.

Primer 2.1.4. Kantorov kub $\mathcal{C}$ se potapa u $[0,1]$.

Posmatrajmo preslikavanje kantorovog kuba $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ u skup realnih brojeva dato sa:

$$f(\langle x_i\rangle) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}.$$

Kako je $0 \leq f(\langle x_i\rangle) \leq \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{3} + ...) = 1$, imamo $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$. Ovo preslikavanje je injekcija jer za različite tačke $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ako je $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}$ i $x_{i_0} = 0$, a $y_{i_0} = 1$, imamo

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{2x_i}{3^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{2x_i}{3^i} + \frac{1}{3^{i_0}}$$

$$< \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{2x_i}{3^i} + \frac{2}{3^{i_0}} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{2y_i}{3^i} = f(y).$$

Pokazaćemo da je funkcija f neprekidna u proizvoljnoj tački $a = \langle a_i\rangle \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, to jest,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists U \in \mathcal{U}(a) \ \ \forall x \in U \ \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Neka je dato $\varepsilon > 0$ i neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $\frac{1}{3^{i_0}} < \varepsilon$. Neka je $U = \bigcap_{i=1}^{i_0} \pi^{-1}[\{a_i\}]$. Tada, ukoliko je $x \in U$, sledi

$$|f(x) - f(a)| \leq \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{2|x_i - y_i|}{3^i} \leq \frac{1}{3^{i_0}} < \varepsilon,$$

te je f neorekidno. Prema teoremi 1.3.43, preslikavanje f je potapanje. Primetimo da je skup $f[\{0,1\}^{\mathbb{N}}] \subseteq \mathbb{R}$ Kantorov trijadski skup, te je Kantorov kub homeomorfan sa $E_{\frac{1}{3}}$.

Teorema 2.1.5. *Berov prostor $\mathcal{N}$ je homeomorfan skupu iracionalnih brojeva iz intervala* $(0,1)$[1]. □

[1]Homeomorfizam između Berovog prostora i skupa iracionalnih brojeva se uspostavlja pomoću verižnih razlomaka. Time se u ovom radu nećemo baviti. Zainteresovani čitalac može pronaći dokaz u G. Hardy, E. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, fourth ed., Oxford. 1960.

Pošto Berov prostor zauzima bitno mesto u proučavanju poljskih prostora, razmotrićemo podrobnije njegovu topologiju. Neka je $\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Definišemo skup $N_\sigma = \{f \in \mathcal{N} : \sigma \subseteq f\}$.

Lema 2.1.6. *Skup $U \subseteq \mathcal{N}$ je otvoren ako i samo ako postoji $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ takav da je $U = \bigcup_{\sigma \in S} N_\sigma$.*

Dokaz. Skup $N_\sigma = \{f \in \mathcal{N} : \sigma \subseteq f\}$ je otvorena okolina tačke $f \in \mathcal{N}$. Treba naći otvoren skup $O \subseteq N_\sigma$ takav da je $f \in O$. Neka je sa $|\sigma|$ označena dužina niza σ. Ako je $a \in L_d(f, \frac{1}{2^{|\sigma|+1}})$ tada je $d(f,a) < \frac{1}{2^{|\sigma|+1}}$, što znači da je $\sigma \subseteq a$, te je $a \in N_\sigma$. Time je pokazano $L_d(f, \frac{1}{2^{|\sigma|+1}}) \subseteq N_\sigma$.

Dalje, neka je $a \in N_\sigma$ i $|\sigma| = n_\sigma$,[2] to znači da je $a|n_\sigma \subseteq f$. Stoga je $d(f,a) < \frac{1}{2^{|\sigma|+1}}$ pa je $a \in L_d(f,)\frac{1}{2^{|\sigma|+1}}$. Na osnovu pokazanog je $N_\sigma = L_d(f, \frac{1}{2^{|\sigma|+1}})$ pa je kolekcija $\{N_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ baza topologije $\mathcal{O}_d$ na $\mathcal{N}$. Odatle sledi da je skup $U \subseteq \mathcal{N}$ otvoren ako i samo ako može da se prikaže kao unija neke podfamilije familije $\{N_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$. $\square$

Primetimo da je skup $\mathcal{N} \setminus N_\sigma = \bigcup\{N_\tau : \exists i \leq |\sigma|, \tau(i) \neq \sigma(i)\}$ kao unija otvorenih skupova otvoren. Stoga je N_σ i otvoren i zatvoren pa je Berov prostor potpuno nepovezan. Kako je $\mathcal{N}$ metrizabilan, važi i opštije tvrđenje. Berov prostor je nuladimenzionalan.

Napomenimo da ukoliko skup N_σ definišemo sa $N_\sigma = \{f \in \mathcal{C} : \sigma \subseteq f\}$, na potpuno isti način kao u lemi 2.1.6 pokazujemo da je kolekcija $\{N_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ baza topologije $\mathcal{O}_d$ na $\mathcal{C}$. Time je i Kantorov kub nuladimenzionalan topološki prostor.

Lema 2.1.7. *Skup $F \subseteq \mathcal{N}$ je zatvoren ako i samo ako postoji drvo $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ takvo da je $F = [T]$.*

Dokaz. Označimo sa $T = \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall \tau \subseteq \sigma, \tau \notin S\}$ gde je $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ takav da je $U = \bigcup_{\sigma \in S} N_\sigma$ za unapred dat otvoren skup $U \subseteq \mathcal{N}$. Primetimo da je skup T drvo. Naime, ako je $\sigma \in T$ i $\tau \subseteq \sigma$, onda $\tau \notin S$ pa je $\tau \in T$, jer za bilo koji početni segment $\upsilon \subseteq \tau$ važi $\upsilon \notin S$ zato što bi u suprotnom $\upsilon \in S$ impliciralo $\tau \in S$. Ako je skup $[T]$ skup njegovih beskonačnih grana, to jest,

$$[T] = \{x \in A^\omega : \forall n < \omega \quad x|n \in T\},$$

tada je $f \in [T]$ ako i samo ako je $\sigma \perp f$ za svako $\sigma \in S$, to jest $f \in [T]$ ako i samo ako $f \notin U$. To znači da je $[T] = \mathcal{N} \setminus U$.

[2] Oznaku n_σ uvodimo u ovom dokazu radi jasnijeg obeležavanja i nećemo je kasnije koristiti.

Kako je $\mathcal{N} \setminus F$ otvoren skup, na osnovu pokazanog imamo da je $f \notin \mathcal{N} \setminus F \Leftrightarrow f \in [T]$, pri čemu je stablo T formirano za skup S takav da je $\mathcal{N} \setminus F = \bigcup_{\sigma \in S} N_\sigma$ koji na osnovu leme 2.1.6 postoji. To dalje implicira da je $f \in F$ ako i samo ako je $f \in [T]$. $\square$

Teorema 2.1.8. *Neka je T drvo, definišemo $T' = \{\sigma \in T : \exists f \in [T],\ \sigma \subseteq f\}$. T' je orezano drvo sa osobinom $T' \subseteq T$.*

Dokaz. Očigledno je $[T'] = [T]$ pa tada za svako $\tau \in T'$ postoji $f \in [T']$ tako da je $\tau \subseteq f$, stoga je T' orezano drvo. $\square$

Posledica 2.1.9. *Svaki zatvoreni skup $F \subseteq \mathcal{N}$ je telo nekog orezanog drveta.*

Teorema 2.1.10. *Neka je X poljski prostor. Postoji neprekidna sirjekcija $\varphi = \mathcal{N} \to X$*

Dokaz. Neka je $\{U_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ familija skupova takvih da važi:

i) $U_\emptyset = X$;

ii) U_σ je otvoren podskup skupa X;

iii) $\rho(U_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|}$;

iv) $\overline{U_\tau} \subseteq U_\sigma$ za $\sigma \subseteq \tau$;

v) $U_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{\sigma\hat{\ }i}$.

Takvu familiju formiramo principom rekurzije po dužini niza σ. Za dužinu 0 imamo $U_\emptyset = X$. Neka skup U_σ zadovoljava uslove (i-v). Na osnovu leme 2.0.50 postoje skupovi U_n takvi da je $U_\sigma = \bigcup_{n \in \omega} U_n = \bigcup_{n \in \omega} \overline{U_n}$ takvi da je $\rho(U_n) < \varepsilon$ za proizvoljno unapred dato $\varepsilon > 0$, pa i za $\varepsilon := \frac{1}{|\sigma|+1}$. Za $U_{\sigma\hat{\ }n}$ možemo izabrati U_n. Tada važi i $\overline{U_{\sigma\hat{\ }n}} \subseteq U_\sigma$, te su uslovi (i-v) zadovoljeni.

Definišimo preslikavanje

$$\phi(f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{f|n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_{f|n}} = \{\phi(f)\}$$

koje je na osnovu leme 2.0.49 dobro definisano. Pokazaćemo da je ovako definisano preslikavanje ϕ sirjektivno i neprekidno. Neka je $x \in X$ dato, hoćemo da nađemo njegov original. Formiramo $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq ...$ takve da je $x \in U_{\sigma_n}$. Neka je $\sigma_0 = \emptyset$ i neka je dato σ_n gde je $x \in U_{\sigma_n}$. Možemo naći $j \in \omega$ takvo da je $x \in U_{\sigma_n\hat{\ }j}$ pa uzimamo da je $\sigma_{n+1} = \sigma_n\hat{\ }j$.

Ukoliko je $f \in \mathcal{N}$ takvo da je $f|n = \sigma_n$ za svako $n \in \omega$ onda je $\phi(f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_{f|n}} = \{x\}$. Time je pokazano da je preslikavanje ϕ sirjekcija.

Ako je $\phi(f) = x$ i $g|n = f|n$, to jest $d(f,g) < \frac{1}{2^{n+1}}$, pošto je $\phi(g) \in U_{f|n}$ i $\phi(f) \in U_{f|n}$ na osnovu (iii) sledi da je $d'(\phi(f), \phi(g)) < \frac{1}{n}$ (gde je d' metrika na X) pa je preslikavanje ϕ neprekidno. $\square$

Lema 2.1.11. *Neka je X poljski prostor, $Y \subseteq X$ F_σ skup i $\varepsilon > 0$. Postoje disjunktni F_σ skupovi $Y_0, Y_1, ...$ takvi da je $\rho(Y_i) < \varepsilon$, $\overline{Y_i} \subseteq Y$ i $\bigcup Y_i = Y$.*

Dokaz. Neka je $Y = \bigcup_{n\in\omega} C_n$ gde su C_n zatvoreni skupovi. Možemo, bez umanjenja opštosti, pretpostaviti da važi $C_0 \subseteq C_1 \subseteq \cdots$ jer ukoliko to ne važi možemo da uzmemo $C'_n = C_0 \cup C_1 \cup ... \cup C_n$. Tada je C'_n zatvoren za svako $n \in \omega$, $Y = \bigcup_{n\in\omega} C'_n$ i važi $C'_0 \subseteq C'_1 \subseteq \cdots$.

Skup Y se može predstaviti kao disjunktna unija skupova $C_0, C_1 \setminus C_0, C_2 \setminus C_1, \cdots$. Kako je $C_i \setminus C_{i-1} \subseteq C_i$ sledi da je $\overline{C_i \setminus C_{i-1}} \subseteq \overline{C_i} = C_i \subseteq Y$. Pokazaćemo da je $C_i \setminus C_{i-1}$ unija disjunktnih F_σ skupova čiji su dijametri manji od ε. Primetimo da je $C_i \setminus C_{i-1} = C_i \cap (X \setminus C_{i-1})$ presek zatvorenog i otvorenog skupa.

Neka je dat skup A takav da je $A = F \cap O$ gde je F zatvoren a O otvoren skup. Na osnovu leme 2.0.50 postoje otvoreni skupovi $O_0, O_1, O_2, \cdots$ takvi da je $\rho(O_n) < \varepsilon$ i $O = \bigcup O_n = \bigcup \overline{O_n}$. Neka je $A_n = F \cap (O_n \setminus (O_0 \cap O_1 \cap \cdots \cap O_{n-1}))$. Očigledno su skupovi A_n, $n \in \omega$ disjunktni i važi $A_n \subseteq O_n$ pa je $\rho(A_n) \leq \rho(O_n) < \varepsilon$ i $\overline{A_n} \subseteq \overline{O_n} \subseteq O \subseteq A$. Odavde je $\bigcup \overline{A_n} = A$.

Trivijalno se zaključuje da je svaki zatvoren skup F_σ skup. Na osnovu pokazanog skupovi oblika $C_i \setminus C_{i-1}$ su prebrojive unije disjunktnih F_σ skupova, dijametra manjeg od ε, pa je i Y, kao njihova prebrojiva unija i dalje prebrojiva unija disjunktnih F_σ skupova dijametra manjeg od ε. $\square$

Teorema 2.1.12. *Neka je X poljski prostor. Postoji zatvoreni skup $F \subseteq \mathcal{N}$ i neprekidna bijekcija $\phi : F \to X$.*

Dokaz. Neka je familija skupova $\{X_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ takva da su X_σ skupovi F_σ skupovi koji zadovoljavaju uslove:

i) $X_\emptyset = X$;

ii) $X_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_{\sigma\hat{\ }i}$;

iii) $\overline{X_\tau} \subseteq X_\sigma$ ako je $\sigma \subseteq \tau$;

iv) $diam(X_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|}$;

v) ako je $i \neq j$ onda je $X_{\sigma\hat{}i} \cap X_{\sigma\hat{}j} = \emptyset$.

Takvu familiju formiramo principom rekurzije po dužini niza σ. Za dužinu 0 imamo $X_\emptyset = X$. Neka skup X_σ F_σ skup koji zadovoljava uslove (i-v). Na osnovu leme 2.1.11 postoje disjunktni F_σ skupovi $Y_0, Y_1, \cdots$ takvi da je $\rho(Y_i) < \varepsilon$ i $\bigcup Y_i = X_\sigma$. Za skup $X_{\sigma\hat{}i}$ biramo skup Y_i. Takvim izborom su ispunjeni uslovi (ii) i (iv). Za njega važi da je $\overline{Y_i} = \overline{X_\sigma\hat{}i} \subseteq X_\sigma$ pa dobijamo da je ispunjen uslov (iii), a kako su $Y_0, Y_1, \cdots$ disjunktni skupovi, ispunjen je i uslov (v).

Ako $f \in \mathcal{N}$ tada $\bigcap X_{f|n}$ sadrži najviše jednu tačku jer na osnovu leme 2.0.49, $\bigcap \overline{X_{f|n}}$ sadrži tačno jednu tačku. Definišimo skup

$$F = \{f \in \mathcal{N} : \exists x \in X \ x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{f|n}\}.$$

Neka je dalje $\phi : F \to X$ definisano sa $\phi(f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{f|n}$. Ovako definisano preslikavanje je neprekidno jer ukoliko važi $d(f,g) < \frac{1}{2^{n+1}}$, to znači da je $f|n = g|n$ pa je $\phi(f) \in X_{f|n}$ i $\phi(g) \in X_{f|n}$ što na osnovu uslova (iv) implicira da je $d'(\phi(f), \phi(g)) < \frac{1}{n}$, gde je d' metrika na X.

Na osnovu uslova (v) ukoliko je $f \neq g$, to jest, ako se f i g razlikuju prvi put na n-tom mestu imamo da je $X_{f|n} \cap X_{g|n} = \emptyset$ te je i $(\bigcap X_{f|n}) \cap (\bigcap X_{g|n}) = \emptyset$. Stoga je preslikavanje injektivno.

Neka je $x \in X$ dato, hoćemo da nađemo njegov original. Formiramo $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq ...$ takve da je $x \in \bigcap X_{\sigma_n}$. Neka je $\sigma_0 = \emptyset$ i neka je dato σ_n gde je $x \in \bigcap X_{\sigma_n}$. Pošto je $X_{\sigma_n} = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_{\sigma\hat{}i}$ možemo naći $n \in \omega$ takvo da je $x \in X_{\sigma_n\hat{}i}$. Za f biramo niz takav da je $\sigma_n \subseteq f$ za svako $n \in \omega$. Time je pokazano da je preslikavanje ϕ sirjekcija.

Ostaje nam još da pokažemo da je skup F zatvoren. Neka je $\langle f_n \rangle$ Košijev niz u F. To znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall i, k \geq m)(d(f_i, f_k) < \varepsilon)$$

Kako je $F \subseteq \mathcal{N}$ i $\mathcal{N}$ kompletan, postoji $f \in \mathcal{N}$ takav da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Treba pokazati da je $f \in F$.

Kako uvek možemo naći $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$, modifikovaćemo Košijev uslov.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall i \geq m)(d(f_i, f_m) < \frac{1}{2^{n+1}})$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall i \geq m)(f_i|n = f_m|n)$$

To znači da je $\phi(f_i) \in X_{f_i|n}$ i $\phi(f_m) \in X_{f_i|n}$ pa sledi da je $d'(\phi(f_i), \phi(f_m)) < \frac{1}{n}$, gde je d' metrika na X. To znači da je niz $\langle \phi(f_n) : n \in \omega \rangle$ Košijev. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(f_n) = x$ (granica niza postoji jer je (X, d') kompletan metrički prostor). Tada je $x \in \bigcap \overline{X_{f|n}} = \bigcap X_{f|n}$ pa je $\phi(f) = x$ i $f \in F$. Na osnovu teoreme 1.4.34 F je zatvoren. $\square$

2.2 Savršeni skupovi i Kantor-Bendikson analiza

U ovoj sekciji pokazaćemo da su neprebrojivi poljski prostori kardinalnosti $2^{\aleph_0}$. Kako bismo stigli do tog rezultata uvešćemo definiciju savršenog skupa i Kantor-Bendiksonovog izvoda skupa.

Definicija 2.2.1. Neka je X poljski topološki prostor. Za skup $P \subseteq X$ kažemo da je **savršen** u X ako je P zatvoren skup čije su sve tačke tačke nagomilavanja, posmatrano u odnosu na topologiju indukovanu na P.

Lema 2.2.2. *Neka je X poljski topološki prostor i $P \subseteq X$ savršeni skup. Postoji neprekidna injekcija $f : \mathcal{C} \to P$ i postoji savršen skup $F \subseteq P$ homeomorfan skupu $\mathcal{C}$.*

Dokaz. Formiramo drvo $\{U_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ nepraznih otvorenih podskupova X na sledeći način:

i) $U_\emptyset = X$;

ii) $\overline{U_\tau} \subseteq U_\sigma$ za $\sigma \subseteq \tau$;

iii) $U_{\sigma^\frown 0} \cap U_{\sigma^\frown 1} = \emptyset$;

iv) $\rho(U_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|}$;

v) $U_\sigma \cap P \neq \emptyset$.

Ovakvo drvo se može formirati. Naime, neka je dato U_σ takvo da važi $U_\sigma \cap P \neq \emptyset$. Kako je P savršen, sve njegove tačke su tačke nagomilavanja pa postoje x_0, x_1, $x_0 \neq x_1$ takvi da je $x_0, x_1 \in U_\sigma \cap P$. Pošto je svaki poljski prostor metrizabilan on je i Hauzdorfov pa možemo izabrati skupove $U_{\sigma^\frown 0}$ i $U_{\sigma^\frown 1}$ koji su disjunktne otvorene okoline tačaka x_0 i x_1 takve da važi $\overline{U_{\sigma^\frown i}} \subseteq U_\sigma$ i $\rho(U_{\sigma^\frown i}) < \frac{1}{|\sigma|+1}$. Na ovaj način su ispunjeni gore navedeni uslovi.

Prema lemi 2.0.49 možemo definisati preslikavanje $f : \mathcal{C} \to P$ na sledeći način:

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{x|n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_{x|n}} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_{x|n}} \cap P.$$

Ako je $d(x,y) < \frac{1}{2^{n+1}}$, to znači da je $x|n = y|n$ pa je $f(x) \in U_{x|n}$ i $f(y) \in U_{x|n}$, što na osnovu uslova (iv) implicira da je $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}$. Time smo pokazali da je f neprekidno preslikavanje.

Preslikavanje f je injekcija jer ukoliko je $x \neq y$, to jest ukoliko se oni prvi put razlikuju na n-toj komponenti, recimo $x_n = 1$ i $y_n = 0$, onda je $U_{y|n} \cap U_{x|n} = \emptyset$, a na osnovu uslova (iii). Kako je $f(y) \in U_{y|n}$ i $f(x) \in U_{x|n}$ sledi da je $f(x) \neq f(y)$.

Na osnovu teorema 2.1.2, 1.3.59 i 1.4.26 imamo da je $F = f[\mathcal{C}]$ zatvoren skup. Neka je $a \in F$, to znači da postoji $x \in \mathcal{C}$ takvo da je $f(x) = a$. Za svako $a \in F$ i svaku okolinu $U \in \mathcal{U}(a)$ postoji bar još jedna tačka $b = f(y) \in F$ takva da je i $b \in U$, to jest $U \cap F \setminus \{a\} \neq \emptyset$, a sve na osnovu injektivnosti i neprekidnosti funkcije f, jer za dovoljno bliske originale x i y sledi da su i slike a i b proizvoljno blizu. Stoga je F savršen.

Preslikavanje $f : \mathcal{C} \to F$ je otvoreno. Pretpostavimo suprotno, da postoji otvoreni skup $O \subseteq \mathcal{C}$ takav da je $f[O]$ zatvoreni skup. Tada bi, na osnovu teoreme 1.3.34 (c), sledilo da je $f^{-1}[f[O]]$ morao biti zatvoren. Međutim, kako je f injekcija važi $f^{-1}[f[O]] = O$, pa je O zatvoren. Kontradikcija.

Preslikavanje $f : \mathcal{C} \to F$ je otvorena neprekidna bijekcija, te je na osnovu teoreme 1.3.39 homeomorfizam. □

Posledica 2.2.3. *Neka je X poljski topološki prostor i $P \subseteq X$ neprazan savršen skup. Tada je $|P| = c$.*

Dokaz. U teoremi 2.0.46 smo pokazali da je svaki poljski prostor X homeomorfan sa podprostorom Hilbertovog kuba $\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$. Kako je $|\mathbb{H}| = |[0,1]^{\mathbb{N}}| = |[0,1]|^{|\mathbb{N}|} = c^{\aleph_0} = c$ imamo da je $|P| \leq |X| \leq c$. Na osnovu leme 2.2.2 važi $\mathcal{C} \cong F \subseteq P \subseteq X$ pa je $|\mathcal{C}| = |F| \leq |P| \leq |X| \leq c$. Kako je $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$ imamo da je $c \leq |P| \leq c$, to jest $|P| = c$. □

Primer 2.2.4. Prostor racionalnih borjeva $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ sa uobičajenom topologijom nije poljski prostor.

Ukoliko posmatramo $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{uob})$, skup $\mathbb{Q}$ je zatvoren u tom topološkom prostoru i nema izolovanih tačaka. Međutim, kako je $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, skup $\mathbb{Q}$ nije poljski.

Neka je X poljski prostor sa prebrojivom bazom $U_0, U_1, ...$ i $F \subseteq X$ zatvoren skup. Označićemo sa F_0 skup svih izolovanih tačaka skupa F. Tada za svako $x \in F_0$ možemo naći i_x takvo da je $U_{i_x} \cap F = \{x\}$. Odatle sledi da je skup F_0 prebrojiv, a skup

$$F \setminus F_0 = F \setminus \bigcup_{x \in F_0} U_{i_x}$$

je zatvoren jer je on presek skupova F i $X \setminus \bigcup_{x \in F_0} U_{i_x}$ koji su zatvoreni.

Definicija 2.2.5. Neka je $F \subseteq X$ zatvoren skup. **Kantor-Bendiksonov izvod skupa** F je skup

$$\Gamma(F) = \{x \in F : x \notin F_0\}.$$

Za svaki prebrojivi ordinal $\alpha < \omega_1$, definišemo $\Gamma^\alpha(F)$ na sledeći način:

i) $\Gamma^0(F) = F$;

ii) $\Gamma^{\alpha+1}(F) = \Gamma(\Gamma^\alpha(F))$;

iii) $\Gamma^\alpha(F) = \bigcap_{\beta<\alpha} \Gamma^\beta(F)$.

Lema 2.2.6. *Neka je X poljski prostor i $F \subseteq X$ zatvoreni skup.*

i) Skup $\Gamma^\alpha(F)$ je zatvoren za svako $\alpha < \omega_1$;

ii) $|\Gamma^{\alpha+1} \setminus \Gamma^\alpha(F)| \leq \aleph_0$;

iii) ako je $\Gamma(F) = F$, onda je F savršen skup i važi $\Gamma^\alpha(F) = F$, za sve $\alpha < \omega_1$;

iv) postoji ordinal $\alpha < \omega_1$ takav da je $\Gamma^\alpha(F) = \Gamma^{\alpha+1}(F)$.

Dokaz. Za (i-iii) dokaz je trivijalan.
(iv) Neka je $U_0, U_1, \ldots$ prebrojiva baza za X. Ukoliko je $\Gamma^{\alpha+1} \setminus \Gamma^\alpha \neq \emptyset$, možemo naći $n_\alpha \in \omega$ takav da U_{n_α} izoluje tačku skupa $\Gamma^\alpha(F)$. Po konstrukciji, U_{n_α} ne izoluje ni jednu tačku skupa $\Gamma^\beta(F)$ za bilo koje $\beta < \alpha$, pa je $n_\alpha \neq n_\beta$ za sve $\beta < \alpha$. Ako ne bi postojao ordinal $\alpha < \omega_1$ sa osobinom $\Gamma^\alpha(F) = \Gamma^{\alpha+1}(F)$ tada bi funkcija f definisana sa $f(\alpha) = n_\alpha$ injekcija iz ω_1 u ω, te je $|\omega_1| \leq |\omega|$. Kontradikcija. □

Definicija 2.2.7. Neka je X poljski prostor i $F \subseteq X$ zatvoren skup. Najmanji ordinal α takav da je $\Gamma^\alpha(F) = \Gamma^{\alpha+1}(F)$ naziva se **Kantor-Bendiksonov rang skupa** F.

Teorema 2.2.8. *Neka je X poljski prostor i $F \subseteq X$ zatvoren. Tada je $F = P \cup A$, gde je P savršen (eventualno prazan), a skup A prebrojiv i važi $P \cap A = \emptyset$.*

Dokaz. Neka je skup $F \subseteq X$ zatvoren skup čiji je Kantor-Bendiksonov rang $\alpha < \omega_1$, onda je $F = P \cup A$, gde je $P = \Gamma^\alpha(F)$ i $A = \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma^{\beta+1}(F) \setminus \Gamma^\beta(F)$. Skup $\Gamma^\alpha(F)$ je prema 2.2.6 (i) zatvoren i kako važi $\Gamma(\Gamma^\alpha(F)) = \Gamma^\alpha(F)$ sledi da je P savršen. Očigledno je $P \cap A = \emptyset$, a skup A je prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova. □

Posledica 2.2.9. *Neka je X poljski prostor i $F \subseteq X$ zatvoren i neprebrojiv. Skup F sadrži neprazan savršeni skup i važi $|F| = 2^{\aleph_0}$. Takođe, ukoliko je $Y \subseteq X$ neprebrojiv F_σ skup, Y sadrži neprazni savršeni skup.*

Dokaz. Kako svaki zatvoren $F \subseteq X$ može da se zapiše kao unija savršenog i prebrojivog skupa na osnovu teoreme 2.2.8, sigurni smo da savršeni skup nije prazan, jer je F neprebrojiv, te ne bi mogao da se napiše kao unija praznog i prebrojivog skupa $F = P \cup A$. Na osnovu posledice 2.2.3 sledi da je $|F| = |P| + |A| = 2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$.

Ukoliko je $Y \subseteq X$ neprebrojiv F_σ skup, on se može zapisati kao $Y = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ gde su F_n zatvoreni skupovi. Postoji $i \in \omega$ takvo da je F_i neprebrojiv skup. U suprotnom bi Y kao prebrojiva unija prebrojivih skupova bio prebrojiv. Tada F_i sadrži neprazan savršeni skup. □

Posledica 2.2.10. *Svaki neprebrojiv poljski prostor sadrži homeomorfnu sliku Kantorovog kuba $\mathcal{C}$ i kardinalnosti je $2^{\aleph_0}$.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.2.8 ukoliko za F izaberemo baš X, sledi da X može da se napiše kao $X = P \cup A$ gde je P savršen, a A prebrojiv. Na osnovu posledice 2.2.9 kako je X neprebrojiv sledi da je P neprazan, te mu je kardinalnost $2^{\aleph_0}$ po posledici 2.2.3. Dokaz sledi na osnovu leme 2.2.2. □

2.3 Poljski potprostori

U ovom odeljku ćemo dati potreban i dovoljan uslov da potprostor poljskog topološkog prostora bude i sam poljski. Uvodimo prvo pomoćna tvrđenja:

Lema 2.3.1. *Neka je X poljski prostor i F njegov zatvoren podskup. Prostor F sa indukovanom topologijom je poljski.*

Dokaz. Neka je $\langle x_n \rangle \subseteq F$ Košijev niz, niz $\langle x_n \rangle$ je i konvergentan jer je X kompletan. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, tada je $x \in F$ jer je F zatvoren, pa je i potprostor F kompletan. Ostaje da pokažemo separabilnost.

Neka je D prebrojiv i gust u X. Konstruišemo skupove $D_n = \{d \in D : d(d, F) < \frac{1}{n}\}$, za $n \in \mathbb{N}$. Tada važi $D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots$. Neka je dalje $d \in D_n$, to znači $d(d, F) < \frac{1}{n}$, to jest, postoji $f \in F \subseteq X$ takav da je $d(d, f) < \frac{1}{n}$. Definišimo dalje skupove $E_n = (F \cap D_n) \cup \{f \in F : d(d, f) < \frac{1}{n},\ d \in D_n\}$. Svaki element skupa F je na rastojanju manjem od $\frac{1}{n}$ od nekog elementa skupa E_n. Stoga E_n seče svaku otvorenu loptu u F. Skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ prebrojiv (kao prebrojiva unija prebrojivih skupova) i gust u F. □

Lema 2.3.2. *Neka je $(X, \mathcal{O}_d)$ poljski prostor i $U \subseteq X$ otvoren skup. Prostor U sa indukovanom topologijom je poljski.*

Dokaz. Neka je d kompletna metrika na X koja indukuje topologiju $\mathcal{O}_d$. Možemo pretpostaviti da je $d < 1$. Definišimo preslikavanje $\hat{d}$ na sledeći način:

$$\hat{d}(x, y) = d(x + y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right|.$$

Lako se proverava da je tako definisano $\hat{d}$ metrika. Iz definicije je očigledno da važi $d(x, y) \leq \hat{d}(x, y)$ pa je $\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{O}_{\hat{d}}$. Neka je dalje, $x \in U$, $d(x, X \setminus U) = r > 0$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo η, tako da je $0 \leq \eta \leq \delta$ i $\eta + \frac{\eta}{r(r-\eta)} < \varepsilon$. Ako je $d(x, y) < \delta$ onda je

$$d(X \setminus U, y) + d(y, x) \geq d(x, X \setminus U)$$

pa je $d(y, X \setminus U) \geq d(x, X \setminus U) - d(y, x) > r - \delta$. Stoga je

$$\hat{d}(x, y) \leq \delta + \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r - \delta} \right| \leq \delta + \left| \frac{-\delta}{r(r - \delta)} \right| < \varepsilon$$

te je $L_{\hat{d}(x,\varepsilon)} \supseteq L_d(x, \delta)$, odakle je dalje $\mathcal{O}_{\hat{d}} \subseteq \mathcal{O}_d$. Time smo pokazali da je $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{\hat{d}}$ i da metrika $\hat{d}$ indukuje topologiju $\mathcal{O}_U$ indukovanu topologijom $\mathcal{O}_d$ na potprostoru U. Pokazaćemo da je $\hat{d}$ kompletna. Neka je $\langle x_n \rangle$ Košijev u odnosu na metriku $\hat{d}$. To znači da je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\hat{d}(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

ali kako je $d(x_m, x_n) \leq \hat{d}(x_m, x_n)$ sledi da je niz Košijev i u odnosu na d, pa postoji $x \in X$ takvo da je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Takođe, važi

$$\lim_{i,j \to \infty} \left| \frac{1}{d(x_i, X \setminus U)} - \frac{1}{d(x_j, X \setminus U)} \right| = 0$$

pa postoji $r \in \mathbb{R}$ takvo da je

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{d(x_i, X \setminus U)} = r.$$

Odatle je $\lim\limits_{i \to \infty} d(x_i, X \setminus U) > 0$. Kako je $d(x_i, X \setminus U) \to d(x, X \setminus U)$, kada $i \to \infty$ onda sledi da je $d(x, X \setminus U) > 0$ pa je $x \in U$, na osnovu leme 1.4.21. Prostor $(U, \mathcal{O}_d)$ poljski jer je i separabilan na osnovu teoreme 1.3.51. $\square$

Posledica 2.3.3. *Neka je X poljski prostor i $Y \subseteq X$ G_δ skup. Tada je Y poljski prostor.*

Dokaz. Neka je $Y = \bigcap O_n$ gde su O_n otvoreni skupovi. Neka je sa d_n označena kompletna metrika na O_n koja indukuje topologiju na potprostoru O_n. Možemo pretpostaviti da je $d_n < 1$. Definišimo preslikavanje $\hat{d}$ na sledeći način:

$$\hat{d}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x,y).$$

Lako se proverava da je ovako definisano $\hat{d}$ metrika. Ako je $\langle x_n \rangle$ Košijev u odnosu na metriku $\hat{d}$, tada je očigledno da je $\langle x_n \rangle$ Košijev i u odnosu na svaku od metrika d_n, kako su metrički prostori (O_n, d_n) kompletni, sledi da postoji $x \in X$ takvo da je za svako n $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, pa je $x \in \bigcap O_n = Y$. Odatle je $(Y, \hat{d})$ kompletan metrički prostor. Ostaje još da pokažemo separabilnost da bi Y bio poljski. Kako su metrizabilnost i druga aksioma prebrojivosti nasledne osobine, sledi da je svaki potprostor separabilnog metričkog prostora i sam separabilan. □

Posledica 2.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor i $Y \subseteq X$ neprebrojivi G_δ skup, tada Y sadrži savršeni skup.*

Dokaz. Na osnovu posledice 2.3.3 sledi da je $(Y, \mathcal{O}_Y)$ neprebrojiv poljski prostor, a Y je zatvoren i neprebrojiv u $(Y, \mathcal{O}_Y)$, pa na osnovu posledice 2.2.9 Y sadrži neprazan savršen skup. □

Tvrđenje posledice 2.3.3 ne važi za F_σ skupove, što vidimo iz primera 2.2.4. Skup racionalnih brojeva je prebrojiv i stoga je F_σ, međutim $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije poljski prostor. Ipak, možemo dalje uopštiti posledicu 2.3.3.

Teorema 2.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor. Skup $Y \subseteq X$ je poljski potprostor ako i samo ako je Y G_δ skup.*

Dokaz. Da je svaki G_δ podskup poljskog prostora X poljski je pokazano u posledici 2.3.3. Pokazujemo obrnuti smer. Neka je $Y \subseteq X$ poljski potprostor, a d metrika koja indukuje topologiju $\mathcal{O}_Y$ na Y, takva da je prostor (Y, d) kompletan. Označimo sa $U_0, U_1, \cdots$ bazu otvorenih skupova u X. Ona postoji jer poljski prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti kao separabilan metrički prostor. Neka je dalje $x \in Y$ i $\varepsilon > 0$, onda za svaku otvorenu okolinu $V \in \mathcal{U}(x)$ gde je $V \subseteq X$, postoji $U_n \subseteq V$ takav da je $x \in U_n$ i da važi $\rho(Y \cap U_n) < \varepsilon$, gde je ρ uzeto u odnosu na metriku d. Definišemo skup A na sledeći način:

$$A = \{x \in \overline{Y} : \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n \in \omega \ \ x \in U_n \ \wedge \ \rho(Y \cap U_n) < \varepsilon\}.$$

Tada skup A može drugačije da se zapiše:

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \in \omega} \{U_n : \rho(Y \cap U_n) < \frac{1}{m}\}.$$

Očigledno važi da je A skup koji ima G_δ osobinu i $Y \subseteq A \subseteq \overline{Y}$.
Neka je $x \in A$. To znači da za svako $m > 0$ postoji n_m takvo da je $x \in U_{n_m}$ i $\rho(Y \cap U_{n_m}) < \frac{1}{m}$. Iz $Y \subseteq A \subseteq \overline{Y}$ sledi $\overline{Y} \subseteq \overline{A}$ i $\overline{A} \subseteq \overline{Y}$, te je $\overline{Y} = \overline{A}$ i $A = \overline{A}$ ukoliko A posmatramo kao topološki prostor, potprostor od X. To znači da je Y gust u A, pa seče svaki neprazni otvoreni skup u A, te za svako $m \in \mathbb{N}$ postoji $y_m \in Y \cap U_{n_1} \cap U_{n_2} \cap \cdots \cap U_{n_m}$. Tada je niz $y_1, y_2, \cdots$ Košijev u Y pa time i konvergentan. Neka je $x \in Y$ granica niza, to znači da je Y zatvoren, to jest $\overline{Y} = Y$, pa na osnovu $\overline{Y} = A$, sledi da je $A = Y$, te skup Y ima G_δ osobinu. $\square$

Posledica 2.3.6. *Svaki poljski prostor je homeomorfan sa G_δ podskupom Hilbertovog kuba $\mathbb{H}$.*

Dokaz. Svaki poljski prostor je homeomorfan potprostoru Y Hilbertovog kuba $\mathbb{H}$, a na osnovu teoreme 2.0.46. Osobina "biti poljski prostor" je nasledna, te je i prostor Y poljski. Na osnovu teoreme 2.3.5 zaključujemo da je Y skup koji ima G_δ osobinu. $\square$

Glava 3

Borelovi skupovi

Pošto smo uveli pojmove koji su nam potrebni za razumevanje Borelovih skupova u ovom delu dajemo njihovu definiciju, uvodimo posebne klase Borelovih skupova i dokazujemo njihove osobine.

Definicija 3.0.7. Neka je X proizvoljan skup. **σ-algebra** na skupu X je familija skupova $\Omega \subseteq P(X)$ sa osobinama:

1. $X \in \Omega$;
2. $A \in \Omega \Rightarrow X \setminus A \in \Omega$
3. $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \Omega \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega$

Skup X sa σ-algebrom Ω nazivamo **prostor sa σ-algebrom** ili **merljiv prostor** i označavamo ga sa (X, Ω). Elemente σ-algebre Ω nazivamo **merljivim skupovima**. Primetimo da na osnovu definicije važi da je svaka $\sigma-$algebra zatvorena i u odnosu na prebrojive preseke.

Definicija 3.0.8. Neka su (X, Ω_X), (Y, Ω_Y) prostori sa σ-algebrama. Preslikavanje $f : X \to Y$ nazivamo **merljivim preslikavanjem** ukoliko je za svako $A \in \Omega_Y$, $f^{-1}[A] \in \Omega_X$.

Definicija 3.0.9. Prostori sa σ-algebrama (X, Ω_X) i (Y, Ω_Y) su **izomorfni** ako i samo ako postoji bijekcija $f : X \to Y$ takva da su i f i f^{-1} merljive funkcije.

Definicija 3.0.10. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. **Borelova σ-algebra** u topološkom prostoru X, u oznaci $\mathcal{B}(X)$, je najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{O}$. Elemente $\mathcal{B}(X)$ zovemo **Borelovim skupovima**.

Kada je potrebno posebno naznačiti topologiju koja generiše Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(X)$, koristićemo oznaku $\mathcal{B}(\mathcal{O})$.

Teorema 3.0.11. *Definicija je dobra, to jest, postoji najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{O}$.*

Dokaz. Neka je μ familija svih σ-algebri koje sadrže $\mathcal{O}$. Familija μ nije prazna jer je $P(X) \in \mu$. Ukoliko pokažemo da je Ω definisano sa $\Omega = \bigcap_{\tilde{\Omega} \in \mu} \tilde{\Omega}$, σ-algebra, to će biti najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{O}$, jer za proizvoljnu σ-algebru Ω_1 koja sadrži $\mathcal{O}$ važi da je $\Omega \subseteq \Omega_1$. Proveravamo uslove definicije 3.0.7.

1. Kako su $\tilde{\Omega}$ σ - algebre, važi $X \in \tilde{\Omega}$ za svako $\tilde{\Omega} \in \mu$, te je $X \in \Omega$;

2. Neka je $A \in \Omega$. Tada je $A \in \tilde{\Omega}$ za svako $\tilde{\Omega} \in \mu$, pa je i $X \setminus A \in \tilde{\Omega}$ za svako $\tilde{\Omega} \in \mu$. Stoga je $X \setminus A \in \bigcap_{\tilde{\Omega} \in \mu} \tilde{\Omega} = \Omega$;

3. Ako je $A_i \in \Omega$ za $i \in \mathbb{N}$ onda za svako $\tilde{\Omega} \in \mu$ važi $A_i \in \tilde{\Omega}$, za svako $i \in \mathbb{N}$. Odatle je $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \tilde{\Omega}$ za svako $\tilde{\Omega} \in \mu$ pa je $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \bigcap_{\tilde{\Omega} \in \mu} \tilde{\Omega} = \Omega$. □

Definicija 3.0.12. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ nazivamo **Borel-merljivim preslikavanjem** ukoliko je f merljivo preslikavanje koje preslikava merljiv prostor $(X, \mathcal{B}(X))$, na $(Y, \mathcal{B}(Y))$.

Definicija 3.0.13. Neka su (X, Ω) prostor sa σ-algebrom. Reći ćemo da je (X, Ω) **standardni Borelov prostor** ako postoji poljski prostor Y takav da su prostori (X, Ω) i $(Y, \mathcal{B}(Y))$ izomorfni, ili ekvivalentno, ako postoji poljska topologija $\mathcal{O}_X$ na X takva da je $\Omega = \mathcal{B}(\mathcal{O}_X)$.

Lema 3.0.14. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje:*

i) Funkcija f je Borel-merljiva ako i samo ako je $f^{-1}[O]$ Borelov skup za svaki $O \in \mathcal{O}_Y$.

ii) Ako je Y separabilan metrički prostor i $\{U_n : n \in \omega\}$ prebrojiva baza topologije $\mathcal{O}_Y$, funkcija f je Borel-merljiva ako i samo ako je $f^{-1}[U_n] \in \mathcal{B}(X)$ za $n \in \omega$.

iii) Ako je Y separabilan metrički prostor i funkcija $f : X \to Y$ Borel-merljiva, onda je grafik funkcije f merljiv skup.

Dokaz.

i) Ako je funkcija f Borel-merljiva onda je ona po definiciji merljiva funkcija te sledi da je $f^{-1}[O] \in \mathcal{B}(X)$, za svako $O \in \mathcal{B}(Y)$, pa i za svako $O \in \mathcal{O}_Y$.

Pokazujemo obrnuti smer. Neka je skup Ω definisan sa $\Omega = \{A \in \mathcal{B}(Y) : f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)\}$. Pretpostavimo da je svaki otvoreni skup $O \in \mathcal{O}_Y$ sadržan u Ω. Pokazaćemo da je skup Ω $\sigma-$algebra. Kako je je svaki otvoreni skup $O \in \mathcal{O}_Y$ sadržan u Ω, sledi da je $Y \in \Omega$, pa je ispunjen uslov 1. definicije 3.0.7. Dalje, ako je $A \in \Omega$ tada je $f^{-1}[Y \setminus A] = f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[A] = X \setminus f^{-1}[A]$ Borelov jer je $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$. Sledi da je $Y \setminus A \in \Omega$ pa je ispunjen i drugi uslov. Konačno, ako je $A_0, A_1, \dots \in \Omega$, tada je $f^{-1}[\bigcup A_i] = \bigcup f^{-1}[A_i] \in \mathcal{B}(X)$ jer je $f^{-1}[A_i] \in \mathcal{B}(X)$ pa na osnovu osobine 3 iz definicije σ- algebre važi $\bigcup f^{-1}[A_i] \in \mathcal{B}(X)$. Stoga je $\bigcup A_i \in \Omega$ te je ispunjen i treći uslov definicije σ-algebre. Time smo pokazali da je skup Ω $\sigma-$algebra, a kako je $\Omega \subseteq \mathcal{B}(Y)$ na osnovu definicije skupa Ω i ne postoji manja σ-algebra od $\mathcal{B}(Y)$ sledi da je $\Omega = \mathcal{B}(Y)$. Tada za svako $A \in \mathcal{B}(Y)$ važi da je $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$ što je definicija Borel-merljive funkcije.

ii) Na osnovu (i) važi da ako je f Borel-merljivo onda je inverzna slika svakog otvorenog skupa Borelov skup. Pokazujemo obrnuti smer. Kako je Y separabilan, postoji prebrojiva baza $U_0, U_1, ...$ otvorenih skupova. Neka je $f^{-1}[U_n] \in \mathcal{B}(X)$ za bazne otvorene skupove $U_n, n \in \omega$. Ako je O otvoren skup u Y, tada on može da se predstavi kao unija neke potfamilije baznih otvorenih skupova $O = \bigcup U_n$ pa je $f^{-1}[O] = \bigcup f^{-1}[U_n] \in \mathcal{B}(X)$ kao prebrojiva unija Borelovih skupova. Kako je inverzna slika proizvoljnog otvorenog skupa Borelov skup, na osnovu (i) sledi da je funkcija f Borel-merljiva. □

iii) Kako je Y separabilan, postoji prebrojiva baza $U_0, U_1, ...$ otvorenih skupova. Par tačaka $\langle x, y \rangle$ pripada grafiku funkcije f ako i samo ako je $f(x) = y$, to jest ako i samo ako iz $y \in U_n$ sledi da je $f(x) \in U_n$ za svako $n \in \omega$, to jest

$$\forall n \in \omega(y \in U_n \Rightarrow f(x) \in U_n),$$

što je dalje ekvivalentno sa

$$(\forall n \in \omega)\ \neg(y \in U_n \land x \in X \setminus f^{-1}[U_n])$$

pa je
$$(\neg\exists n \in \omega)\ \langle x, y\rangle \in X \setminus f^{-1}[U_n] \times U_n.$$
To je dalje ekvivalentno sa
$$\neg\langle x, y\rangle \in \bigcup_{n\in\omega} X \setminus f^{-1}[U_n] \times U_n$$
to jest $\langle x, y\rangle$ pripada grafiku funkcije f ako i samo ako važi
$$\langle x, y\rangle \in \bigcap_{n\in\omega} (X \times (Y \setminus U_n)) \cup \left(f^{-1}[U_n] \times U_n\right).$$
Odavde se može pokazati da je grafik funkcije f Borelov skup u prostoru $X \times Y$. □

Posledica 3.0.15. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Svaka neprekidna funkcija $f : X \to Y$ je Borel-merljiva.*

Dokaz. Ukoliko je f neprekidna funkcija, inverzna slika otvorenog skupa $O \in \mathcal{O}_y$ je otvoren skup $(X, \mathcal{O}_X)$ na osnovu teoreme 1.3.34. Kako je svaki otvoren skup Borelov, sledi da je $f^{-1}[O] \in \mathcal{B}(X)$, pa na osnovu leme 3.0.14 (i) sledi da je preslikavanje f merljivo. □

Primetimo da kako je
$$\bigcap A_n = X \setminus \bigcup (X \setminus A_n)$$
sledi da je σ-algebra zatvorena u odnosu na prebrojive preseke. Stoga $\mathcal{B}(X)$ sadrži sve otvorene, zatvorene, F_σ i G_δ skupove. Međutim, $\mathcal{B}(X)$ sadrži i $F_{\sigma\delta}$ skupove koje dobijamo uzimanjem prebrojivih preseka F_σ skupova, $G_{\delta\sigma}$ skupove, koje dobijamo uzimanjem prebrojivih unija G_δ skupova, $F_{\sigma\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$,itd. Uvešćemo nove oznake za ovakve skupove.

Definicija 3.0.16. Neka je X metrizabilan topološki prostor. Za $\alpha < \omega_1$ definišemo rekurzijom kolekcije skupova $\Sigma^0_\alpha(X)$, $\Pi^0_\alpha(X)$ i $\Delta^0_\alpha(X)$ na sledeći način:

$\Sigma^0_1(X)$ je kolekcija svih otvorenih podskupova skupa X.

$\Pi^0_\alpha(X)$ je kolekcija svih skupova oblika $X \setminus A$ gde je $A \in \Sigma^0_\alpha(X)$

Za $\alpha > 1$, $\Sigma^0_\alpha(X)$ je kolekcija svih skupova oblika $X = \bigcup A_n$ gde su svi $A_n \in \Pi^0_\beta$ za neko $\beta < \alpha$, to jest
$$\Sigma^0_\alpha(X) = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^0_\beta(X)\}.$$
$\Delta^0_\alpha(X) = \Sigma^0_\alpha(X) \cap \Pi^0_\alpha(X)$.

Oznake $\Sigma^0_\alpha(X)$ i $\Pi^0_\alpha(X)$ možemo zameniti oznakama Σ^0_α i Π^0_α ukoliko je očigledno na koji se prostor odnose.

Iz definicije je očigledno da su $\Pi^0_1(X)$ zatvoreni skupovi u X, $\Sigma^0_2(X)$ kao prebrojive unije zatvorenih skupova su F_σ skupovi, $\Pi^0_2(X)$ su G_δ skupovi, a $\Delta^0_1(X)$ označava skupove koji su i otvoreni i zatvoreni u X.

Lema 3.0.17. *Neka je X poljski topološki prostor. Svaki otvoreni i svaki zatvoreni skup je F_σ. Svaki otvoreni i svaki zatvoreni skup je G_δ skup.*

Dokaz. Iz definicije F_σ skupova sledi da svaki zatvoreni skup F ima F_σ osobinu jer se F može zapisati kao $F = \bigcup_{n<\omega} F_n$, gde su svi $F_n = F$. Na osnovu leme 2.0.50 za svaki otvoreni skup $O \subseteq X$ postoje otvoreni skupovi $U_0, U_1, ...$ takvi da O može da se zapiše u obliku $O = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}$, pa je svaki otvoreni skup u poljskom prostoru F_σ skup. Na osnovu pokazanog i leme 1.3.4 sledi ostatak tvrđenja. □

Lema 3.0.18. *Za svako $\alpha < \beta$ važi:*

$$\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta, \quad \Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta, \quad \Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta, \quad \Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$$

Dokaz. Dokazujemo prvo da je $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$, tačnije, pokazaćemo $\Sigma^0_\delta \subseteq \Pi^0_{\delta+1}$. Neka je $A \in \Sigma^0_\delta$, tada je skup $B = X \setminus A \in \Pi^0_\delta$ pa ga možemo zapisati kao $B = \bigcup_{n<\omega} B_n$ gde su svi $B_n = B$ pa je $B \in \Sigma^0_{\delta+1}$. Odatle je $A \in \Pi^0_{\delta+1}$ kao komplement skupa B.

Dokaz da je $\Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$ sledi na osnovu defiicije Σ^0_β skupa.

Ostalo je da pokažemo $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$ i $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$. Pokazujemo $\Sigma^0_\delta \subseteq \Sigma^0_{\delta+1}$ i $\Pi^0_\delta \subseteq \Pi^0_{\delta+1}$ paralelno, indukcojom po δ. U lemi 3.0.17 pokazali smo da je svaki otvoreni skup F_σ, to jest, da je svaki zatvoreni skup G_δ skup, te važi $\Sigma^0_1 \subseteq \Sigma^0_2$ i $\Pi^0_1 \subseteq \Pi^0_2$. Pretpostavimo da važi $\Sigma^0_{gamma} \subseteq \Sigma^0_{\gamma+1}$ i $\Pi^0_\gamma \subseteq \Pi^0_{\gamma+1}$ za sve $\gamma < \delta$. Dokažimo da važi $\Sigma_\delta \subseteq \Sigma^0_{\delta+1}$ i $\Pi_\delta \subseteq \Pi^0_{\delta+1}$. Neka je $A \in \Sigma^0_\delta$, tada je $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ gde su $A_n \in \Pi^0_{\gamma_n}$ i $\gamma_n < \delta$ za svako n. Ali na osnovu pretpostavke je $\Pi^0_{\gamma_n} \subseteq \Pi^0_{\gamma_n+1}$ jer je $\gamma_n < \delta$ za svako n, pa je $\gamma_n + 1 < \delta + 1$, te je $A_n \in \Pi^0_{\gamma_n+1}$, a kako je $A = \bigcup A_n$ sledi da je $A \in \Sigma^0_{\delta+1}$.

Ukoliko je $A \in \Pi^0_\delta$, onda je $A = X \setminus B$ za neko $B \in \Sigma^0_\delta$. Pokazali smo da je $\Sigma^0_\delta \subseteq \Sigma^0_{\delta+1}$, te je $B \in \Sigma^0_{\delta+1}$, odakle sledi $A \in \Pi^0_{\delta+1}$. □

Lema 3.0.19. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ metrizabilan topološki prostor tada važi:*

i) $\Sigma^0_\alpha \cup \Pi^0_\alpha \subseteq \Delta^0_{\alpha+1}(X)$ *za sve* $\alpha < \omega_1$;

ii) $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha$;

iii) Ukoliko je X separabilan i beskonačan važi $|\mathcal{B}(X)| = 2^{\aleph_0}$.

Dokaz. (i) Dokaz sledi indukcijom. Na osnovu leme 3.0.17 svaki otvoreni i svaki zatvoreni skup ima i F_σ i G_δ osobinu. Što znači da je $\Sigma_1^0 \subseteq \Sigma_0^2 \cap \Pi_2^0$ i $\Pi_1^0 \subseteq \Sigma_0^2 \cap \Pi_2^0$. Skup Δ_2^0 je definisan kao presek $\Sigma_0^2 \cap \Pi_2^0$, što implicira da je $\Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0 \subseteq \Delta_0^0$. Pretpostavimo dalje, da je $\Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0 \subseteq \Delta_{\beta+1}^0$ za sve $\beta < \alpha$. Pokazujemo da je $\Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0$ za $\alpha = \beta + 1$ ili α granični ordinal. Na osnovu leme 3.0.18 imamo da je $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^0$ i $\Pi_\alpha^0 \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^0$ pa je $\Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^0$. Takođe je $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \Pi_{\alpha+1}^0$ i $\Pi_\alpha^0 \subseteq \Pi_{\alpha+1}^0$ te je i $\Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \subseteq \Pi_{\alpha+1}^0$. Sledi da je $\Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0$.

(ii) Na osnovu definicije Borelove σ-algebre sledi da je $\Sigma_1^0 \subseteq \mathcal{B}(X)$. Pretpostavimo da je $\Sigma_\beta \subseteq \mathcal{B}(X)$ za $\beta < \alpha$. Treba pokazati da je $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \mathcal{B}(X)$. Ako je $A \in \Sigma_\beta^0 \subseteq \mathcal{B}(X)$ tada pošto je $X \setminus A \in \mathcal{B}(X)$ sledi $\Pi_\beta^0 \subseteq \mathcal{B}(X)$ za sve $\beta < \alpha$. Odatle je i svaki skup B oblika $B = \bigcup A_i \in \mathcal{B}(X)$ gde su $A_i \in \Pi_{\beta_i}^0$ i $\beta_i < \alpha$, te je $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \mathcal{B}(X)$. Ostalo je da pokažemo $\mathcal{B}(X) \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0$. Lako je pokazati da je $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0$ σ-algebra na X, pa kako je $\mathcal{B}(X)$ najmanja σ-algebra, sledi tražena inkluzija.

(iii) Neka je $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, ...\}$ prebrojiva baza prostora $(X, \mathcal{O})$, tada svaki otvoreni skup O topologije na X može da se zapiše u obliku $O = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_1} U$, gde je $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$. Stoga je

$$\left|\Sigma_1^0\right| = |\mathcal{O}| \leq |P(\mathcal{U})| = 2^{|\mathcal{U}|} = 2^{\aleph_0}.$$

Pretpostavimo da je $\left|\Sigma_\alpha^0\right| \leq 2^{\aleph_0}$ za sve $\alpha < \beta$. Pokazujemo da je $\left|\Sigma_\beta^0\right| \leq 2^{\aleph_0}$. Neka je $\beta = \alpha + 1$ (naredni ordinal za neko α), kako na osnovu definicije skupa Π_α^0 imamo $\left|\Pi_\alpha^0\right| = \left|\Sigma_\alpha^0\right|$, iz pretpostavke sledi da je $\left|\Pi_\alpha^0\right| \leq 2^{\aleph_0}$ za svako $\alpha < \beta$. Kako je svaki $\Sigma_{\alpha+1}^0$ skup prebrojiva unija Π_α^0 skupova, sledi da je $\left|\Sigma_\beta^0\right| \leq 2^{\aleph_0}$. Ukoliko je β granični ordinal, kako je $\Sigma_\beta^0 = \bigcup_{\alpha<\beta} \Pi_\alpha^0$ imamo

$$\left|\Sigma_\beta^0\right| = \left|\bigcup_{\alpha<\beta} \Pi_\alpha^0\right| \leq \sum_{\alpha<\beta} \left|\Pi_\alpha^0\right| \leq |\beta| \sup\{\left|\Pi_\alpha^0\right| : \alpha < \beta\} \leq \omega 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Odatle sledi da je

$$|\mathcal{B}(X)| = \left|\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0\right| \leq \sum_{\alpha<\omega_1} \left|\Sigma_\alpha^0\right| \leq \omega_1 \sup\{\left|\Sigma_\alpha^0 : \alpha < \omega_1\right|\} \leq \omega_1 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

S druge strane, Borelovih skupova ima barem onoliko koliko ima Σ_2^0 skupova, a svi prebrojivi podskupovi X su Σ_2^0 skupovi, (kao prebrojiva unija singltona koji su zatvoreni), pa važi

$$|\mathcal{B}(X)| \geq |X|^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0}.$$

Time smo pokazali da je $|\mathcal{B}(X)| = 2^{\aleph_0}$. □

Lema 3.0.20. *Neka je X topološki prostor.*

i) Kolekcija $\Sigma^0_\alpha(X)$ je zatvorena u odnosu na prebrojive unije i konačne preseke;

ii) Kolekcija $\Pi^0_\alpha(X)$ je zatvorena u odnosu na prebrojive preseke i konačne unije;

iii) Kolekcija $\Delta^0_\alpha(X)$ je zatvorena u odnosu na konačne unije, konačne preseke i komplementiranje;

iv) Kolekcije $\Sigma^0_\alpha(X), \Pi^0_\alpha(X)$ i $\Delta^0_\alpha(X)$ su zatvorene u odnosu na inverzne slike neprekidnih preslikivanja.

Dokaz. Pokazujemo (i) i (ii) istovremeno, indukcijom po α. Znamo da (i) važi za otvorene skupove. Očigledno, ako je Σ^0_α zatvorena u odnosu na prebrojive unije i konačne preseke, uzimanjem komplemenata sledi da je kolekcija Π^0_α zatvorena u odnosu na prebrojive preseke i konačne unije. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $\alpha < \beta$. Neka je $A_0, A_1, ... \in \Sigma^0_\beta$. Tada je $A_i = \bigcup_{j=0}^\infty B_{i,j}$ gde je svaki $B_{i,j} \in \Pi^0_\alpha$ za neko $\alpha < \beta$. Odatle je $\bigcup_{i=0}^\infty A_i = \bigcup_{i=0}^\infty \bigcup_{j=0}^\infty Bi, j \in \Sigma^0_\beta$. Takođe $A_0 \cap A_1 = \bigcup_{i=0} \infty \bigcup_{i=0} \infty (B_{0,i} \cap B_{1,j})$, a kako je svaki $B_{0,i} \cap B_{1,j} \in \Pi^0_\alpha$ za neko $\alpha < \beta$, sledi da je $A_0 \cap A_1 \in \Sigma^0_\alpha$.

(iii) Sledi direktno iz (i) i (ii).

(iv) Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Treba pokazati da ako je $A \subseteq Y$ Σ^0_α (odnosno Π^0_α skup), tada je i $f^{-1}[A]$ Σ^0_α (odnosno Π^0_α skup). Dokaz sledi indukcijom. Za $\alpha = 1$ sledi na osnovu teoreme 1.3.34. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $\alpha < \beta$ to jest, da za $A \in \Sigma^0_\alpha$, (Π^0_α) sledi da je $f^{-1}[A] \in \Sigma^0_\alpha$, respektivno Π^0_α. Treba pokazati da ako je $A \in \Sigma^0_\beta$, (Π^0_β) sledi da je $f^{-1}[A] \in \Sigma^0_\beta$, respektivno Π^0_β. Neka je dato $A \in \Sigma^0_\beta$, skup A se može zapisati kao $A = \bigcup A_i$ gde su $A_i \in \Pi^0_{\alpha_i}$ za neke $\alpha_i < \beta$ i tada je $f^{-1}[\bigcup A_i] = \bigcup f^{-1}[A_i]$, te je na osnovu pretpostavke $f^{-1}[A] \in \Sigma^0_\beta$. Slično, neka je $B \in \Pi^0_\beta$ onda je $B = Y \setminus A$ za neko $A \in \Sigma^0_\beta$, pa je $f^{-1}[B] = f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A] \in \Pi^0_\beta$. □

Posledica 3.0.21. *Neka je $A \subseteq X \times Y$ i $A \in \Sigma^0_\alpha$ (respektivno Π^0_α ili Δ^0_α) i $a \in Y$. Skup $\{x \in X : (x, a) \in A\}$ je Σ^0_α skup (respektivno Π^0_α ili Δ^0_α).*

Dokaz. Neka je preslikavanje $f : X \to X \times Y$ takvo da je $f(x) = \langle x, a \rangle$. Preslikavanje $f : X \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su preslikavanja $\pi_X \circ f : X \to X$ i $\pi_Y \circ f : X \to Y$ neprekidna. Kako je $(\pi_X \circ f)(x) = \pi_X(f(x)) = \pi_X(\langle x, a \rangle) = x$, sledi da je $\pi_X \circ f$ identičko preslikavanje, te je $\pi_X \circ f$ neprekidno. I preskilavanje $\pi_Y \circ f$ je neprekidno jer je $(\pi_X \circ f)(x) = \pi_Y(f(x)) = \pi_Y(\langle x, a \rangle) = a$, pa je preslikavanje $\pi_Y \circ f$ konstanta. Kako su kolekcije $\Sigma^0_\alpha(X), \Pi^0_\alpha(X)$ i $\Delta^0_\alpha(X)$ zatvorene u odnosu na inverzne slike neprekidnih preslikivanja, sledi tvrđenje. □

Lema 3.0.22. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ poljski prostor i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ njegov potprostor. Važi: $\Sigma^0_\alpha(Y) = \{Y \cap A : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\}$ i $\Pi^0_\alpha(Y) = \{Y \cap A : A \in \Pi^0_\alpha(X)\}$.*

Dokaz. Dokaz dajemo indukcijom po α. Za $\alpha = 1$, na osnovu teoreme 1.3.47, sledi da je $\mathcal{O}_Y = \{Y \cap A : A \in \mathcal{O}_X\}$, a na osnovu teoreme 1.3.48 sledi da je $\mathcal{F}_Y = \{F \cap Y : F \in \mathcal{F}\}$. Pretpostavimo da za $\beta < \alpha$ važi $\Sigma^0_\beta(Y) = \{Y \cap A : A \in \Sigma^0_\beta(X)\}$ i $\Pi^0_\beta(Y) = \{Y \cap A : A \in \Pi^0_\beta(X)\}$.

Dokazujemo da važi $\Sigma^0_\alpha(Y) = \{Y \cap A : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\}$. Neka je $B \in \{Y \cap A : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\}$. Skup A se može zapisati kao $A = \bigcup_{k<\omega} A_k$ gde su svi $A_k \in \Pi^0_{\beta_k}(X)$, za $\beta_k < \alpha$. Odatle je $B = \bigcup_{k<\omega} Y \cap A_k$, te na osnovu pretpostavke imamo $B \in \Sigma^0_\alpha(Y)$.

Neka je $B \in \{Y \cap A : A \in \Pi^0_\alpha(X)\}$, tada je $A = X \setminus C$ za neko $C \in \Sigma^0_\alpha(X)$, te je $B \in \{Y \cap (X \setminus C) : C \in \Sigma^0_\alpha(X)\}$ to jest $B \in \{Y \cap C : C \in \Sigma^0_\alpha(X)\}$. Kako se B može zapisati kao $B = \bigcup_{k<\omega} B_k$, gde je $B_k \in \Pi^0_{\beta_k}(X)$ za $\beta_k < \alpha$ sledi $B \in \{\bigcap_{k<\omega} Y \cap B_k\} : B_k \in \Pi^0_{\beta_k}(X)$, to jest $B \in \{\bigcap_{k<\omega} Y \cap A_k : A_k = X \setminus B_k \in \Sigma^0_{\beta_k}(X)\}$. Na osnovu pretpostavke sledi da je $B \in \Pi^0_\alpha$. □

Primer 3.0.23. Neka je X prebrojiv topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je $\Sigma^0_2(X)$.

Prebrojiv skup je metrizabilan 01-metrikom i kao takav je T_1 prostor, a u T_1 skupu su svi singltoni zatvoreni, a svaki skup $A \subseteq X$ je kao prebrojiva unija zatvorenih skupova Σ^0_2 skup.

Primer 3.0.24. Neka je $A = \{x \in \mathcal{N} : x \textit{ je skoro stacionaran}\}$. Ovako definisano A je Σ^0_2 skup.

Da je neki niz $x \in \mathcal{N}$ skoro stacionaran znači da postoji $m \in \omega$ takvo da za sve $n > m$ sledi da je $x(n) = x(n+1)$. Označimo sa

$$A_n = \{x : x(n) = x(n+1)\}.$$

Lako je pokazati da je skup A_n i otvoren i zatvoren, te kako je

$$A = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n>m} A_n$$

sledi da je $A \in \Sigma_2^0$ kao prebrojiva unija zatvorenih (Π_1^0) skupova.

Primer 3.0.25. Svaka binarna relacija ρ na skupu $\mathbb{N}$ takve da je $\langle i,j\rangle \in \rho \Leftrightarrow \chi_\rho(\langle i,j\rangle) = 1$ može se poistovetiti sa elementom $\chi_\rho \in 2^{\mathbb{N}^2}$. Skup $LU = \{\chi_\rho : \rho \textit{ je linearno uredjenje}\}$ je Π_1^0, a skup $GLU = \{\chi_\rho \in LU : \rho \textit{ je gusto linearno uredjenje }\}$ je Π_2^0.

Pokazujemo prvo da je skup svih refleksivnih relacija Π_1^0 skup. Relacija $\rho \subseteq \mathbb{N}^2$ je refleksivna ako i samo ako je

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \langle n,n\rangle \in \rho$$

to jest, ukoliko je

$$\forall n \in \mathbb{N}\chi_\rho(\langle n,n\rangle) = 1,$$

odnosno

$$\chi_\rho \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^{-1}_{\langle n,n\rangle}[\{1\}].$$

Kako je jednoelementni skup u diskretnoj topologiji i otvoren i zatvoren, tada je i $\pi^{-1}_{\langle n,n\rangle}[\{1\}]$ zatvoren, to jest Π_1^0 skup jer je projekcija neprekidno preslikavanje, pa je i prebrojivi presek takvih skupova Π_1^0, na osnovu leme 3.0.20 (iii).

Na sličan način se pokazuje da je uslov antisimetričnosti

$$\forall m,n \in \mathbb{N}\ m\rho n \wedge n\rho m \Rightarrow m = n$$

ekvivalentan uslovu

$$\chi_\rho \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\neq n}} \left((\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus \left(\pi^{-1}_{\langle m,n\rangle}[\{1\}]\right)\right) \cup \left((\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus \pi^{-1}_{\langle n,m\rangle}[\{1\}]\right).$$

Kako je skup $\{1\}$ otvoren, a projekcija neprekidno preslikavanje, sledi da je skup $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus \left(\pi^{-1}_{\langle m,n\rangle}[\{1\}]\right)$ zatvoren (Π_1^0), a kako je kolekcija Π_1^0 zatvorena u odnosu na konačnu uniju i prebrojivi presek, na osnovu leme 3.0.20, sledi da je skup svih antisimetričnih relacija takođe Π_1^0 skup.

Takođe uslov tranzitivnosti

$$\forall m,n,p \in \mathbb{N}\ \langle m,n\rangle \in \rho \wedge \langle n,p\rangle \in \rho \Rightarrow \langle m,p\rangle \in \rho$$

je ekvivalentan sa uslovom

$$\chi_\rho \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{N}^2 \setminus \pi^{-1}_{\langle m,n\rangle}[\{1\}]\right) \cup \left(\mathbb{N}^2 \setminus \pi^{-1}_{\langle n,p\rangle}[\{1\}]\right) \cup \left(\mathbb{N}^2 \setminus \pi^{-1}_{\langle m,p\rangle}[\{0\}]\right),$$

a uslov linearnosti

$$\forall m, n \in \mathbb{N}\ \langle m, n\rangle \in \rho \vee \langle n, m\rangle \in \rho$$

je ekvivalentan uslovu

$$\chi_\rho \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\pi^{-1}_{\langle m,n\rangle}[\{1\}] \cup \pi^{-1}_{\langle n,m\rangle}[\{1\}]\right).$$

Odatle se na sličan način kao i ranije zaključuje da su skupovi tranzitivnih i linearnih relacija Π^0_1 skupovi.

Skup linearnih uređenja je skup relacija koje su refleksivne, antisimetrične, tranzitivne i zadovoljavaju uslov linearnosti, to jest, presek četiri gore navedena skupa. Iz svega pokazanog kako je konačni presek Π^0_1 skupova i dalje Π^0_1 skup, sledi tvrđenje.

Skup gustih linearnih uređenja je skup relacija koje su linearna uređenja i uz to zadovoljavaju uslov:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\langle n, m\rangle \in \rho \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}(\langle n, k\rangle \in \rho \wedge \langle k, m\rangle \in \rho).$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu

$$\chi_\rho \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left((\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus \left(\pi^{-1}_{\langle n,m\rangle}[\{1\}] \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\pi^{-1}_{\langle n,k\rangle}[\{0\}] \cup \pi^{-1}_{\langle k,m\rangle}[\{0\}]\right)\right)\right)\right)$$

te su, kao i ranije $\pi^{-1}_{\langle n,k\rangle}[\{0\}]$ i $\pi^{-1}_{\langle k,m\rangle}[\{0\}]$ zatvoreni, kao i njihova unija. Prebrojiv presek zatvorenih skupova je takođe zatvoren. Imamo da je skup $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus \left(\pi^{-1}_{\langle n,m\rangle}[\{1\}] \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\pi^{-1}_{\langle n,k\rangle}[\{0\}] \cup \pi^{-1}_{\langle k,m\rangle}[\{0\}]\right)\right)\right)$ otvoren. Prebrojiv presek otvorenih skupova pripada kolekciji Π^0_2. Kako smo pokazali da je $\Pi^0_1 \subseteq \Pi^0_2$, sledi da su linearna uređenja u kolekciji Π^0_2, pa je skup gustih linearnih uređenja, kao presek Π^0_2 skupova, takođe Π^0_2.

3.1 Pretvaranje Borelovih skupova u skupove koji su i otvoreni i zatvoreni

Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski topološki prostor. Dokazaćemo zanimljive rezultate o Borelovim skupovima $A \subseteq X$ tako što ćemo topologiju $\mathcal{O}$ promeniti u novu, finiju topologiju $\mathcal{O}_1$ koja će imati iste Borelove skupove kao i polazna topologija, ali tako da je skup A i otvoren i zatvoren u novoj topologiji.

Lema 3.1.1. *Neka su X i Y disjunktni poljski prostori. Disjunktna unija $X \uplus Y$ je prostor $X \cup Y$ gde važi $U \subseteq X \cup Y$ je otvoren ako i samo ako su $U \cap X$ i $U \cap Y$ otvoreni. Takav $X \uplus Y$ je poljski prostor.*

Dokaz. Označimo sa d_X i d_Y odgovarajuće kompletne metrike na poljskim prostorima X i Y. Možemo pretpostaviti da važi $d_X < 1$ i $d_Y < 1$. Definišemo preslikavanje $\hat{d}$ na skupu $X \uplus Y$ na sledeći način:

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} d_X(x,y), & x,y \in X \\ d_Y(x,y), & x,y \in Y \\ 2, & (x \in X \land y \in Y) \lor (y \in X \land x \in Y). \end{cases}$$

Lako se proverava da je ovako definisano $\hat{d}$ metrika. Skupovi X i Y su i otvoreni i zatvoreni u topologiji koju indukuje metrika $\hat{d}$. Naime, X je otvoren jer za proizvoljno $x \in X$ važi da je $L_{\hat{d}}(x,1) \subseteq X$. Analogno se pokazuje i da je skup Y otvoren. Takođe, kako je $(X \uplus Y) \setminus X = Y$, sledi da je komplement skupa X je otovren, pa je X zatvoren skup. Analogno se pokazuje da je skup Y zatvoren.

Pokazujemo da su otvoreni skupovi u $X \uplus Y$ unije otvorenih skupova skupa X i otvorenih skupova skupa Y.

Neka je $O_1 \subseteq X$ otvoren u X i $O_2 \subseteq Y$ otvoren u Y. Pokazaćemo da je skup $O_1 \cup O_2 \subseteq X \uplus Y$ otvoren. Neka je $a \in O_1 \cup O_2$, kako su prostori X i Y disjunktni, sledi da su i skupovi O_1 i O_2 disjunktni te je $a \in O_1 \veebar a \in O_2$. Ukoliko važi da je $a \in O_1$, pošto je O_1 otvoren, na osnovu teoreme 1.4.10 sledi da postoji $r > 0$ takvo da je $a \in L_{\hat{d}}(a,r) \subseteq O_1 \subseteq O_1 \cup O_2$. Stoga je skup $O_1 \cup O_2$ otvoren u $X \uplus Y$.

Neka je sada skup $O \subseteq X \uplus Y$ otvoren. Možemo ga napisati kao uniju dva disjunktna skupa O_1 i O_2 pri čemu je $O_1 = O \cap X$ i $O_2 = O \cap Y$. Pokazaćemo da su O_1 i O_2 otvoreni u X, odnosno Y. Kako za proizvoljno $a \in O = O_1 \uplus O_2$ postoji $L_{\hat{d}}(a,\rho) \subseteq O$ i kako uvek možemo pronaći $\rho_1 < 1$ takvo da je $L_{\hat{d}}(a,\rho_1) \subseteq L_{\hat{d}}(a,\rho)$, sledi da je $L_{\hat{d}}(a,\rho_1) \subseteq O_1$ ili $L_{\hat{d}}(a,\rho_1) \subseteq O_2$ (u zavisnosti da li je $a \in O_1$ ili $a \in O_2$). Stoga su skupovi O_1 i O_2 otvoreni u odgovarajućim topologijama.

Ostalo je da pokažemo kompletnost i separabilnost ovakvog topološkog prostora. Lako je utvrditi da za svaki Košijev niz skoro svi članovi niza pripadaju ili skupu X ili skupu Y. To sledi na osnovu činjenice da je $\hat{d}(x,y) = 2$, za tačke x i y koje pripadaju različitim prostorima X i Y. Kako su X i Y poljski topološki prostori, sledi da svaki Košijev niz konvergira, te je niz konvergentan i u prostoru $X \cup Y$.

Separabilnost je očigledna jer su X i Y separabilni topološki prostori, pa postoje gusti i prebrojivi skupovi $D_X \subseteq X$ i $D_Y \subseteq Y$, koji seku svaki tvoreni skup $O_X \subseteq X$ i $O_Y \subseteq Y$, respektivno. Kako je svaki otvoreni skup u $X \uplus Y$ unija nekih O_X i O_Y, sledi da će skup $D_X \cup D_Y$ seći svaki otvoreni skup iz $X \uplus Y$. Pri tome je $D_X \cup D_Y$ prebrojiv, čime je pokazano da je $X \uplus Y$ separabilan, dakle poljski. $\square$

Lema 3.1.2. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski topološki prostor i $F \subseteq X$ zatvoren. Postoji poljska topologija $\mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}$ na X takva da je skup F i otvoren i zatvoren u $\mathcal{O}_1$, a da pri tome $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}_1$ imaju iste Borelove skupove, to jest $\mathcal{B}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{B}(\mathcal{O})$.*

Dokaz. U lemama 2.3.1 i 2.3.2 pokazali smo da su zatvoreni i otvoreni podskupovi poljskog prostora takođe poljski prostori. Stoga su skupovi F i $X \setminus F$ poljski topološki potprostori. Neka je sa $\mathcal{O}_1$ označena topologija na skupu $(X \setminus F) \uplus F$ takva da je $X \setminus F \uplus F$ poljski topološki prostor. Ona postoji na osnovu leme 3.1.1. Odatle sledi da je skup F otvoren u topološkom prostoru $((X \setminus F) \uplus F, \mathcal{O}_1)$ i važi

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \cup \{O \cap F : O \in \mathcal{O}\}.$$

Očigledno, svi skupovi iz $\mathcal{O}_1$ su Borelovi u $\mathcal{O}$, te su Borelovi skupovi u $\mathcal{O}_1$ isti kao Borelovi skupovi u $\mathcal{O}$. $\square$

Lema 3.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski topološki prostor i $\langle \mathcal{O}_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ niz poljskih topologija na X sa osobinom $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je topologija $\mathcal{O}_\infty$ generisana sa $\bigcup_n \mathcal{O}_n$ poljska topologija. Ukoliko je $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{O})$, onda je $\mathcal{B}(\mathcal{O}_\infty) = \mathcal{B}(\mathcal{O})$.*

Dokaz. Neka je $X_n = X$ za svako $n \in \omega$ i preslikavanje $\varphi : X \to \prod_{n \in \omega} X_n$ dato sa $\varphi(x) = \langle x, x, ... \rangle$. Primetimo da je skup $\varphi[X]$ zatvoren u $\prod_{n \in \omega}(X_n, \mathcal{O}_n)$. Naime, ako važi $\langle x_n \rangle \notin \varphi[X]$ tada za neko $i < j$ važi da je $x_i \neq x_j$. Neka su U i V redom disjunktne otvorene okoline tačaka x_i i x_j u odnosu na topologiju $\mathcal{O}$, pa time i u odnos na topologije $\mathcal{O}_i$ i $\mathcal{O}_j$ respektivno. Tada je

$$\langle x_n \rangle \in X_0 \times \cdots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \cdots \times X_{j-1} \times V \times X_{j+1} \times \cdots \subseteq X \setminus \varphi[X].$$

Skup $\varphi[X]$ je poljski prostor kao zatvoren podskup poljskog prostora. Takođe, φ je homeomorfizam između prostora $(X, \mathcal{O}_\infty)$ i $\varphi[X]$ pa je prostor (X, O_∞) poljski.

Neka je $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{O})$ i $\{U_i^{(n)}\}_{i \in \omega}$ baza topologije $\mathcal{O}_n$. Tada je $\{U_i^{(n)}\}_{i,n \in \omega}$ podbaza za $\mathcal{O}_\infty$ pa je $\mathcal{O}_\infty \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{O})$. $\square$

Teorema 3.1.4. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski topološki prostor i $B \subseteq X$ Borelov skup. Postoji poljska topologija $\mathcal{O}_B \supseteq \mathcal{O}$ na X za koju važi $\mathcal{B}(\mathcal{O}_B) = \mathcal{B}(\mathcal{O})$, takva da skup B bude i otvoren i zatvoren u $\mathcal{O}_B$.*

Dokaz. Označimo sa Ω familiju svih skupova $B \in \mathcal{B}(X)$ takvih da postoji finija poljska topologija na X u odnosu na koju je skup B i otvoren i zatvoren i pri tome nova topologija generiše iste Borelove skupove kao i $\mathcal{O}$. Prema lemi 3.1.2 znamo da Ω sadrži sve zatvorene skupove u odnosu na polaznu topologiju $\mathcal{O}$, uz to je očigledno da je Ω zatvoren u odnosu na komplementiranje. Pokazaćemo da je Ω zatvoren u odnosu na prebrojive unije. Neka su $B_n \in \Omega$, za $n \in \omega$ i $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Neka je dalje za svako $n \in \omega$ sa $\mathcal{O}_n$ označena finija poljska topologija na X takva da je B_n u odnosu na nju i otvoren i zatvoren, i važi $\mathcal{B}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathcal{O}_n)$. Tada je $B \in \mathcal{O}_\infty$, gde je $\mathcal{O}_\infty$ topologija iz prethodne leme generisana sa $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{O}_n$. Na osnovu prethodne leme $\mathcal{O}_\infty$ je poljska topologija. Tada je topologija $\mathcal{O}_B$ generisana sa $\mathcal{O}_\infty \cup \{X \setminus B\}$ poljska topologija koja generiše iste Borelove skupove i u odnosu na koju je B i otvoren i zatvoren, primenom leme 3.1.2. Ovim smo pokazali da je Ω σ-algebra, a kako je $\Omega \subseteq \mathcal{B}(X)$ sledi da je $\Omega = \mathcal{B}(X)$ po definiciji Borelove σ-algebre. Time je dokaz završen. $\square$

Teorema 3.1.5 (o savršenom skupu u Borelovim skupovima). *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski topološki prostor i $A \subseteq X$ Borelov skup. A je ili prebrojiv ili sadrži homeomorfnu sliku Kantorovog skupa $\mathcal{C}$. Svaki neprebrojiv Borelov skup sadrži savršen skup.*

Dokaz. Prema teoremi 3.1.4 postoji finija topologija $\mathcal{O}_A$ od topologije $\mathcal{O}$, koja generiše iste Borelove skupove, a u kojoj je skup A i otvoren i zatvoren. Odatle sledi da je skup A poljski prostor u relativnoj topologiji. Ako je A neprebrojiv, na osnovu posledice 2.2.10 A sadrži homeomorfnu sliku Kantorovog kuba $\mathcal{C}$ (u odnosu na topologiju $\mathcal{O}_A$). Označimo homeomorfizam $f : \mathcal{C} \to f[\mathcal{C}]$. Kako je $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_A$ sledi da je to takođe homeomorfna slika u odnosu na topologiju $\mathcal{O}$. Kako je $\mathcal{C}$ na osnovu 2.1.2 kompaktan, njegova homeomorfna slika $f[\mathcal{C}]$ je zatvoren skup. Kako $f[\mathcal{C}]$ ne sadrži izolovane tačke u odnosu na $\mathcal{O}_A$, ne sadrži ni izolovane tačke u odnosu na topologiju $\mathcal{O}$ pa je $f[\mathcal{C}]$ savršeni podskup skupa A. $\square$

Teorema 3.1.6. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski topološki prostor i $A \subseteq X$.*

i) Postoji neprekidna $f : \mathcal{N} \to X$ takva da je $f[\mathcal{N}] = A$;

ii) Postoji zatvoreni skup $F \subseteq \mathcal{N}$ i neprekidna injekcija $g : F \to X$ takva da je $g[F] = A$.

Dokaz. (i) Na osnovu teoreme 3.1.4 postoji finija topologija $\mathcal{O}_A$ u odnosu na koju je skup A i otvoren i zatvoren, a X ostaje poljski topološki prostor. Tada je i skup A poljski topološki prostor u odnosu na topologiju indukovanu na A, topologijom $\mathcal{O}_A$. Prema teoremi 2.1.10 postoji sirjektivno i neprekidno preslikavanje $f : \mathcal{N} \to A$. Preslikavnje f je neprekidno i u odnosu na polaznu topologiju $\mathcal{O}$, pa sledi tvrđenje.

(ii) Slično kao (i), postoji finija topologija $\mathcal{O}_A$ u odnosu na koju je skup A zatvoren, pa je A poljski topološki prostor u odnosu na topologiju indukovanu na A, topologijom $\mathcal{O}_A$. Na osnovu teoreme 2.1.12 postoji zatvoreni skup $F \subseteq \mathcal{N}$ i neprekidna bijekcija $g : F \to A$ pa je $g[F] = A$ i preslikavanje $g : F \to X$ neprekidna injekcija. $\square$

Sledećom teoremom dajemo još jednu primenu zamene topologije finijom topologijom.

Teorema 3.1.7. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor, Y separabilan metrički prostor i $f : X \to Y$ Borel-merljivo preslikavanje. Postoji topologija $\mathcal{O}^* \supseteq \mathcal{O}$ koja ima iste Borelove skupove kao $\mathcal{O}$ takva da je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $U_0, U_1, ...$ prebrojiva baza prostora Y. Kako je za svako $i \in \omega$ $f^{-1}[U_i] \in \mathcal{B}(X)$, na osnovu teoreme 3.1.5 sledi da postoji finija poljska topologija $\mathcal{O}^*$ takva da je skup $f^{-1}[U_i]$ i otvoren i zatvoren za svako $i \in \omega$ pri čemu je $\mathcal{B}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathcal{O}^*)$. $\square$

3.2 Borelov izomorfizam

U ovom odeljku definisaćemo Borelov izomorfizam i daćemo značajnija tvrđenja radi potpunosti rada. Kako tvrđenja ne koristimo u ostatku rada, navodimo ih bez dokaza. Čitalac dokaze može pronaći u [7], strane 22-23.

Definicija 3.2.1. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ poljski topološki prostori. Kažemo da je $f : X \to Y$ **Borelov izomorfizam** ukoliko je ona Borel-merljiva bijekcija čija inverzna funkcija je takođe Borel-merljiva.

Teorema 3.2.2. *Ako su A i B prebrojivi metrizabilni topološki prostori i $|A| = |B|$, onda je bilo koja bijekcija $f : A \to B$ Borelov izomorfizam.*

Dokaz. U diskretnoj topologiji svi skupovi su otvoreni, a inverzna slika svakog otvorenog skupa prebrojiv skup. Kako prebrojivi skupovi pripadaju kolekciji F_σ oni su i Borelovi. $\square$

Teorema 3.2.3. *Zatvoren jedinični interval* $\mathbb{I} = [0,1]$ *i Kantorov skup* $\mathcal{C}$ *su Borel-izomorfni.* □

Posledica 3.2.4. *Neka je* X *poljski prostor. Postoji Borelov skup* $A \subseteq \mathcal{C}$ *i Borelov izomorfizam* $f : X \to A$. □

Lema 3.2.5. *Neka su* X *i* Y *poljski prostori,* $f : X \to Y$ *je Borelov izomorfizam između* X *i* $f[X]$ *i* $g : Y \to X$ *je Borelov izomorfizam između* Y *i* $g[Y]$. *Tada postoji Borelov izomorfizam između* X *i* Y. □

Posledica 3.2.6. *i) Ako je* X *poljski prostor i* $A \subseteq X$ *neprebrojiv Borelov skup, onda postoji Borelov izomorfizam između* A *i Kantorovg skupa* $\mathcal{C}$.

ii) Svaka dva neprebrojiva poljska prostora su Borel-izomorfna.

iii) Svaka dva neprebrojiva standardna Borelova prostora su izomorfna.

□

3.3 Borelova hijerarhija

Pokazali smo da važi $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha$. Prirodno se postavlja pitanje da li su nam potrebni svi Σ^0_α-skupovi, za $\alpha < \omega_1$. Pokazaćemo da za svaki neprebrojivi poljski prostor X važi $\Sigma^0_\alpha \neq \Sigma^0_\beta$, za svako $\alpha \neq \beta$. Time ćemo upotpuniti znanja o hijerarhiji koja postoji u Borelovim skupovima.

Za skup $U \subseteq Y \times X$ i $a \in Y$ definišemo a**-presek skupa** U (u oznaci U_a) na sledeći način:

$$U_a = \{x \in X : (a,x) \in U\}.$$

Familiju $\{U_a\}_{a\in Y}$ možemo posmatrati kao familiju podskupova skupa X, parametrizovanih skupom Y.

Uvedimo oznaku Γ_α za skupove koji pripadaju kolekciji Σ^0_α ili Π^0_α.

Definicija 3.3.1. Neka su X i Y topološki prostori. Skup $G \subseteq Y \times X$ je **univerzalni** Γ_α **skup** ako i samo ako je $G \in \Gamma_\alpha(Y \times X)$ i ukoliko je $U \subseteq X$ takav da je $U \in \Gamma_\alpha(X)$ onda je $U = G_y$ za neko $y \in Y$.

Reći ćemo da je kolekcija Γ_α Y**-parametrizovana** ako za svaki topološki prostor X postoji univerzalni Γ_α skup $G \subseteq Y \times X$.

Teorema 3.3.2. *Neka je* X *poljski prostor i* $\alpha < \omega_1$ *proizvoljno i neka je sa* Γ_α *označena kolekcija* Σ^0_α *ili* Π^0_α. *Postoji univerzalni* Γ_α *skup* $W \subseteq \mathcal{C} \times X$.

Dokaz. Neka je sa $U_0, U_1, ...$ označena prebrojiva baza otvorenih skupova za X. Otvoreni skupovi iz X su prebrojive unije baznih skupova, a kako njih ima prebrojivo mnogo možemo koristiti elemente $\mathcal{C}$ da formiramo sve moguće unije. Definišemo skup $W \subseteq \mathcal{C} \times X$ na sledeći način:

$$W = \{\langle y, x\rangle \in \mathcal{C} \times X : \ \exists n \in \omega \ y(n) = 1 \ \wedge \ x \in U_n\}.$$

Neka je dato proizvoljno $\langle y, x\rangle \in W$, tada postoji $n \in \omega$ takvo da je $y(n) = 1$ i $x \in U_n$. Neka je $t = y|(n+1)$. Analogno postupku kojim je u odeljku 2.1 uvedena baza topologije Berovog prostora, može se proveriti da je za dato $\sigma \in \mathcal{C}$ familija skupova oblika $N_\sigma = \{f \in \mathcal{C} : \sigma \subseteq f\}$ baza otvorenih skupova Kantorovog kuba $\mathcal{C}$. Za više detalja, pogledati dokaz leme 2.1.6. Očigledno je $\langle y, x\rangle \in N_t \times U_n$ i važi $N_t \times U_n \subseteq W$. Time smo pokazali da je skup W otvoren, to jest, Σ^0_1.

Neka je $A \subseteq X$ otvoren. Tada skup A može da se napiše kao prebrojiva unija baznih skupova

$$A = \bigcup_{\substack{n<\omega \\ y(n)=1}} U_n.$$

Odatle je $A = W_y$ pa je W univerzalni Σ^0_1 skup.

Lako se zaključuje da je $W \subseteq \mathcal{C} \times X$ univerzalni Σ^0_α skup ako i samo ako je $(\mathcal{C} \times X) \setminus W$ univerzalni Π^0_α skup. Naime, neka je $W \subseteq \mathcal{C} \times X$ univerzalni Σ^0_α skup, tada skup $(\mathcal{C} \times X) \setminus W$ pripada Π^0_α kolekciji. Pokazujemo još da je univerzalni Π^0_α skup. Neka je dat Π^0_α skup $A \subseteq X$. Tada je skup $X \setminus A \in \Sigma^0_\alpha$ i postoji $y \in \mathcal{C}$ takav da je $W_y = X \setminus A$ jer je $W \subseteq \mathcal{C} \times X$ univerzalni Σ^0_α skup. Odatle je $X \setminus W_y = A$ pa je $X \setminus W_y = ((\mathcal{C} \times X) \setminus W)_y$, a odatle je $(\mathcal{C} \times X) \setminus W$ univerzalan.

Neka je dato $\alpha < \omega_1$. Pretpostavimo da za svako $\beta < \alpha$ postoji univerzalni Π^0_β skup $W^\beta \in \mathcal{C} \times X$, pokazaćemo da postoji $W \subseteq \mathcal{C} \times X$ univerzalni Σ^0_α skup.

Definišimo preslikavanje $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ na sledeći način: $f(x) = \langle x_n\rangle$ gde je $(x)_n(m) = x(2^m 3^n)$. Primetimo da je preslikavanje f neprekidno i da za proizvoljan niz elemenata skupa $\mathcal{C}$ $\langle y_n : n \in \omega\rangle$ postoji jedinstveno $x \in \mathcal{C}$ takvo da je $(x)_n = y_n$.

Neka kolekcija $\{\beta_k : \ k < \omega\}$ sadrži sve ordinale manje od α pri čemu se svaki od njih pojavljuje beskonačno mnogo puta. Definšimo skup $W = \{\langle y, x\rangle : \ \exists k \ \langle x, (y)_n\rangle \in W^{\beta_k}\}$. Pokazaćemo da je $W \in \Sigma^0_\alpha$. Za svako $k < \omega$ definišemo kolekciju

$$B_k = \{\langle y, x\rangle : \ x \in W^{\beta_k}_{(y)_k}\}.$$

Očigledno je $W = \bigcup_{k<\omega} B_k$. Definišimo sada preslikavanje $f_k = \mathcal{C} \times X \to \mathcal{C} \times X$ sa $f_k(\langle y, x\rangle) = \langle (y)_k, x\rangle$. Preslikavanje f je neprekidno i $f_k^{-1}[W^{\beta_k}]$ je B_k. Odatle je $W \in \Sigma^0_\alpha$.

Neka skup $A \subseteq X$ pripada kolekciji Σ^0_α. Tada je $A = \bigcup_{k<\omega} A_k$, gde svi $A_k \subseteq X$ pripadaju kolekciji $\Pi^0_{\beta_k}$. Kako je W^{β_k} univerzalan za svako $k < \omega$ postoji y_k takav da je $A_k = W^{\beta_k}_{y_k}$. Neka je y takvo da je $(y)_k = y_k$. Sledi da je $x \in W_y$ ako i samo ako je $\langle y, x\rangle \in W$, to jest, ako i samo ako postoji k takvo da je $\langle (y)_k, x\rangle \in W^{\beta_k}_{(y)_k}$, odnosno, ako i samo ako $\langle y_k, x\rangle \in W^{\beta_k}$, što je ekvivalentno sa $x \in A_k$. Sledi $A = W_y$ pa je W univerzalni Σ^0_α skup. □

Teorema 3.3.3. *Neka je $\mathcal{C}$ Kantorov skup. Za svako $\alpha < \omega_1$ postoji $A \subseteq \mathcal{C}$ takav da je $A \in \Sigma^0_\alpha(\mathcal{C}) \setminus \Pi^0_\alpha(\mathcal{C})$.*

Dokaz. Neka je $U \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ univerzalni Σ^0_α skup i

$$Y = \{x : (x, x) \notin U_y\}.$$

Očigledno je $Y \in \Pi^0_\alpha(\mathcal{C})$. Pretpostavimo da je $Y \in \Sigma^0_\alpha(\mathcal{C})$ tada postoji $y \in \mathcal{C}$ takvo da je $x \in Y$ ako i samo ako je $\langle y, x\rangle \in U_y$. Tada je

$$y \in Y \Leftrightarrow \langle y, y\rangle \in U_y \Leftrightarrow y \notin Y.$$

Ovim smo došli u kontradikciju sa pretpostavkom pa $Y \notin \Sigma^0_\alpha(\mathcal{C})$. □

Posledica 3.3.4. *Neka je X neprebrojiv poljski prostor. Za svako $\alpha < \omega_1$ postoji $A \subseteq X$ takav da je $A \in \Sigma^0_\alpha(X) \setminus \Pi^0_\alpha(X)$.*

Dokaz. Neka je X neprebrojiv poljski prostor. Na osnovu posledice 2.2.10 X sadrži savršen skup P homeomorfan sa $\mathcal{C}$. Ako je $\Sigma^0_\alpha(X) = \Pi^0_\alpha(X)$, na osnovu leme 3.0.22, sledi da je $\Sigma^0_\alpha(P) = \Pi^0_\alpha(P)$ čime dolazimo u kontradikciju, jer je prema teoremi 3.3.3 $\Sigma^0_\alpha(\mathcal{C}) \neq \Pi^0_\alpha(\mathcal{C})$. □

Primetimo da komplementiranjem imamo i da je skup $\Pi^0_\alpha(X) \setminus \Sigma^0_\alpha(X)$ neprazan za neprebrojiv poljski prostor X.

Teorema 3.3.5. *Neka je X savršeni poljski prostor. Klase $\Sigma^0_\alpha(X), \Pi^0_\alpha(X)$ i $\Delta^0_\alpha(X)$ zadovoljavaju prave inkluzije predstavljene na sledećem dijagramu:*

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma^0_1(X) \arrow[dr, hook, "\neq"] & & \Sigma^0_2(X) & \ldots \\
\Delta^0_1(X) \arrow[ur, hook, "\neq"] \arrow[dr, hook, "\neq"'] & & \Delta^0_2(X) \arrow[ur, hook, "\neq"] \arrow[dr, hook, "\neq"'] & & \ldots \\
 & \Pi^0_1(X) \arrow[ur, hook, "\neq"'] & & \Pi^0_2(X) & \ldots
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Na osnovu posledice 3.3.4 za neprebrojiv poljski prostor X imamo $\Sigma^0_\alpha(X) \subsetneq \Pi^0_\alpha(X)$, stoga je $\Delta^0_\alpha(X) \subsetneq \Sigma^0_\alpha(X)$. Slično $\Pi^0_\alpha(X) \subsetneq \Sigma^0_\alpha(X)$ te je $\Delta^0_\alpha(X) \subsetneq \Pi^0_\alpha(X)$. Pretpostavimo da je $\Sigma^0_\alpha(X) = \Delta^0_{\alpha+1}(X)$. Na osnovu leme 3.0.20 (iii) bi kolekcija $\Sigma^0_\alpha(X)$ bila zatvorena u odnosu na komplementiranje pa bi važilo $\Pi^0_\alpha(X) \subseteq \Sigma^0_\alpha(X)$ što je u kontradikciji sa posledicom 3.3.4. □

3.4 Teorema Bera

U ovom odeljku uvodimo definiciju tankog skupa i skupova prve i druge kategorije. Zatim pokazujemo da je svaki poljski prostor skup druge katege-gorije.

Definicija 3.4.1. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je **tanak** (**nigde gust**) ako i samo ako je $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Lema 3.4.2. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, $O \subseteq X$ neprazan otvoren skup i $A \subseteq X$. Skup A je nigde gust skup ako i samo ako postoji neprazan $V \in \mathcal{O}$ takav da je $V \subseteq O$ i $V \cap A = \emptyset$.*

Dokaz. Neka je A nigde gust, to znači $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$ i neka je O proizvoljan otvoreni skup. Ukoliko je $O \cap A = \emptyset$ za V uzimamo baš skup O. S druge strane, ukoliko je $O \cap A \neq \emptyset$ skup $O \setminus \overline{A}$ je otvoren i takav da je $(O \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$ jer je $O \setminus \overline{A} \subseteq O \setminus A \subseteq X \setminus A$. Treba pokazati još da je $O \setminus \overline{A}$ neprazan. To je ispunjeno jer u suprotnom bi $O \subseteq \overline{A}$ pa bi $O \subseteq \mathrm{Int}(\overline{A})$, pa za V uzimamo $O \setminus \overline{A}$.

Obratno, neka je za svaki neprazan otvoren $O \subseteq X$ postoji $V \in \mathcal{O}$ takav da je $V \subseteq O$ i $V \cup A = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno da je $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$. Odatle, ukoliko je $O \in \mathcal{O}$ neprazan i važi $O \subseteq \mathrm{Int}(\overline{A}) \subseteq A$ sledi da je $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ i na osnovu teoreme 1.3.25 sledi da je $O \cup A \neq \emptyset$ čime smo došli do kontradikcije. □

Primer 3.4.3. Kantorov trijadski skup je tanak u $[0, 1]$.

Posmatramo topologiju indukovanu uobičajenom topologijom na jediničnom intervalu, $\mathcal{O}_{[0,1]} = \{A \cap [0, 1] : A \in \mathcal{O}_{uob}\}$, te su neprazni otvoreni skupovi iz $([0, 1], \mathcal{O}_{uob})$ intervali oblika $[0, 1], [0, b), (a, 1], (a, b)$ ili njihove prebrojive unije, gde su $a, b \in [0, 1]$. Neka je O neprazan otvoren skup u $[0, 1]$ oblika $[0, 1], [0, b), (a, 1], (a, b)$. Možemo pronaći najveće $n \in \mathbb{N}$ za koje postoji $k \in \{0, 1, ..., 3^n - 1\}$ tako da $O \subseteq \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$. Skup $V = O \cap \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$ je otvoren u $[0, 1]$ i $V \cap E_{\frac{1}{3}}$, gde je sa $E_{\frac{1}{3}}$ označen Kantorov trijadski skup. □

Definicija 3.4.4. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je skup **prve kategorije** ako i samo ako se može predstaviti kao prebrojiva unija tankih skupova. Ukoliko $A \subseteq X$ nije skup prve kategorije u X za njega kažemo da je **skup druge kategorije**.

Definicija 3.4.5. Skup $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **ideal** ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

i) $\emptyset \in I$;

ii) ako je $A \in I$ i $B \subseteq A$, onda je i $B \in I$;

iii) ako je $A, B \in I$, onda je i $A \cup B \in I$.
Ukoliko je zadovoljen i dodatni uslov

iv) ako je $A_0, A_1, ... \in I$, onda je i $\bigcup_n A_n \in I$, ideal je σ-**ideal**.

Lema 3.4.6. *Nigde gusti skupovi formiraju ideal.*

Dokaz. Proveravamo da li su zadovoljeni uslovi (i-iii) definicije 3.4.5. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor.

(i) Prazan skup je nigde gust jer je za svaki otvoreni skup O, $O \cap \emptyset = \emptyset$.

(ii) Neka je skup A nigde gust i $B \subseteq A$. Odavde za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$ postoji otvoreni skup $V \subseteq U$ takav da je $A \cap V = \emptyset$ pa je i $B \cap V = \emptyset$.

(iii) Neka su A i B nigde gusti skupovi i $U \subseteq X$ otvoren skup. Postoje otvoreni skupovi $V_A \subseteq U$ i $V_B \subseteq U$ takvi da je $A \cap V_A = \emptyset$ i $B \cap V_B = \emptyset$. Sledi da je $(V_A \cap V_B) \cap (A \cup B) = \emptyset$, te je $A \cup B$ nigde gust.

□

Lema 3.4.7. *Skupovi prve kategorije formiraju σ-ideal.*

Dokaz. Proveravamo da li su zadovoljeni uslovi (i-iv) definicije 3.4.5. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor.

(i) Prazan skup je skup prve kategorije jer $\emptyset = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, gde je $A_n = \emptyset$ za svako $n \in \mathbb{N}$, a na osnovu prethodne leme je $\emptyset$ tanak.

(ii) Neka je $A \subseteq$ skup prve kategorije i $B \subseteq A$. To znači da je $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, gde su A_n nigde gusti skupovi i $B = B \cap A = B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B \cap A_n$, te je na osnovu prethodne leme B skup prve kategorije.

(iii) Neka su A i B skupovi prve kategorije. To znači da je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ gde su skupovi A_n i B_n tanki za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je skup $A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ prve kategorije.

(iv) Neka su $A_0, A_1, A_2, ...$ skupovi prve kategorije. Očigledno je $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ skup prve kategorije. $\square$

Teorema 3.4.8. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. $A \subseteq X$ je nigde gust ako i samo ako je $\overline{A}$ nigde gust.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ nigde gust. Na osnovu definicije je $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$ pa sledi $\mathrm{Int}(\overline{\overline{A}}) = \mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$ te je skup $\overline{A}$ nigde gust.

Obrnuto, neka je skup $\overline{A}$ nigde gust. Na osnovu definicije je $\mathrm{Int}(\overline{\overline{A}}) = \emptyset$, a kako je na osnovu teoreme 1.3.24 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, sledi da je A nigde gust. $\square$

Teorema 3.4.9. *Svaki skup prve kategorije je sadržan u F_σ skupu prve kategorije.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ skup prve kategorije. To znači da je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gde su A_n tanki skupovi za svako $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu teoreme 3.4.8 skupovi $\overline{A_n}$ su nigde gusti za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ sledi tvrđenje. $\square$

Lema 3.4.10. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $F \subseteq X$ zatvoren. Skup $F \setminus \mathrm{Int(F)}$ je nigde gust skup.*

Dokaz. Neka je skup $V \subseteq X$ otvoren takav da je $V \cap (F \setminus \mathrm{Int}(F)) \neq \emptyset$. Na osnovu teorema 1.3.21 i 1.3.23 (e), sledi da je $F \setminus \mathrm{Int}(F) \neq \emptyset$, te skup V postoji. Odatle V nije podskup $\mathrm{Int}(F)$. Takođe, $F \setminus \mathrm{Int}(F) = \partial F$, pa svaki otvoreni skup koji sadrži tačku skupa ∂F seče i skup F i skup $X \setminus F$. Stoga je $V \setminus F$ neprazan, a kako je $V \setminus F = V \cap (X \setminus F)$, on je i otvoren skup. Važi $(V \setminus F) \cap (F \setminus \mathrm{Int}(F)) = \emptyset$, te je skup $F \setminus \mathrm{Int(F)}$ nigde gust. $\square$

Teorema 3.4.11 (Ber). *Ako je X poljski prostor, X je skup druge kategorije.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, gde su A_n nigde gusti skupovi za svako $n \in \mathbb{N}$. Izaberimo otvorene skupove $U_0, U_1, U_2, ...$ takve da je $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$, $\rho(U_n) < \frac{1}{n+1}$ i $U_n \cap A = \emptyset$. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Tada je $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ pa je $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Kontradikcija. $\square$

3.5 Svojstvo Bera

Pošto smo u prethodnoj sekciji definisali pojam tankog skupa i skupova prve i druge kategorije uvodimo svojstvo Bera i pokazujemo da je kolekcija skupova sa svojstvom Bera σ-algebra koja je veća od Borelove σ-algebre.

Definicija 3.5.1. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A, B \subseteq X$. Definišemo relaciju $=_*$ tako da važi $A =_* B$ ako i samo ako je skup $A \Delta B$ skup prve kategorije, gde je sa $A \Delta B$ označena simetrična razlika $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Teorema 3.5.2. *Relacija $=_*$ je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Refleksivnost je zadovoljena jer za $A \subseteq X$ sledi $A \Delta A = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, a prazan skup je nigde gust pa je $A =_* A$.

Neka su $A, B \subseteq X$ i $A =_* B$. To znači da je skup $A \Delta B$ prve kategorije, ali onda je i $B \Delta A$ skup prve kategorije na osnovu definicije simetrične razlike, pa je ispunjen uslov simetričnosti.

Neka su $A, B, C \subseteq X$ i $A =_* B$ i $B =_* C$. To znači da su skupovi $A \Delta B$ i $B \Delta C$ prve kategorije. Tada je skup $A \setminus C = (A \setminus B) \cap (X \setminus C) \cup (B \setminus C) \cap A$, na osnovu leme 3.4.7, prve kategorije. Slično je $C \setminus A = (C \setminus B) \cap (X \setminus A) \cup (B \setminus A) \cap C$ skup prve kategorije. Sledi da je skup $A \Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ prve kategorije, te je $A =_* C$. Time smo pokazali da je relacija $=_*$ tranzitivna. $\square$

Teorema 3.5.3. *Ako je $A =_* B$, onda važi $X \setminus A =_* X \setminus B$.*

Dokaz. Treba pokazati da je skup $(X \setminus A)\ \Delta\ (X \setminus B)$ prve kategorije. Kako je $(X \setminus A)\ \Delta\ (X \setminus B) = (X \setminus A) \setminus (X \setminus B) \cup (X \setminus B) \setminus (X \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ sledi da je $(X \setminus A)\ \Delta\ (X \setminus B)$ skup prve kategorije. $\square$

Teorema 3.5.4. *Ako je $A_n =_* B_n$ za $n = 0, 1, ...,$ onda važi $\bigcup_n A_n =_* \bigcup_n B_n$.*

Dokaz. Neka je $A_n =_* B_n$ za $n = 0, 1, ...$ To znači da je $(A_n \setminus B_n) \cup (B_n \setminus A_n)$ skup prve kategorije za sve $n \in \omega$. Pokazujemo da je $\bigcup_{n\in\omega} A_n \setminus \bigcup_{n\in\omega} B_n$ skup prve kategorije. Naime $\bigcup_{n\in\omega} A_n \setminus \bigcup_{n\in\omega} B_n = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cap (X \setminus (\bigcap_{n\in\omega} B_n)) = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cap \bigcap_{n\in\omega} (X \setminus B_n)$, a kako je $A_n \cap \bigcap_{n\in\omega} (X \setminus B_n) \subseteq A_n \cap (X \setminus B_n) = A_n \setminus B_n$ i $A_n \setminus B_n$ skup prve kategorije, na osnovu leme 3.4.7 sledi da je i $A_n \cap \bigcap_{n\in\omega} (X \setminus B_n)$ skup prve kategorije, pa je $\bigcup_{n\in\omega} A_n \setminus \bigcup_{n\in\omega} B_n$ skup prve kategorije.

Analogno se pokazuje da je skup $\bigcup_{n\in\omega} B_n \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n$ prve kategorije, te je $\bigcup_n A_n =_* \bigcup_n B_n$. $\square$

Definicija 3.5.5. Neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Kažemo da skup A ima **svojstvo Bera** ako postoji otvoren skup U takav da je $A =_* U$.

Označimo sa SB kolekciju skupova koji imaju Berovo svojstvo u topološkom prostoru $(X,\mathcal{O})$, to jest $SB = \{A \subseteq X : \exists U \in \mathcal{O},\ A =_* U\}$.

Teorema 3.5.6. *Ako je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor i $F \subseteq X$ zatvoreni skup, onda je $F \in SB$.*

Dokaz. Neka je $F \subseteq X$ zatvoreni skup. Na osnovu leme 3.4.10 sledi $F \setminus \operatorname{Int}(F)$ je nigde gust. Kako je $\operatorname{Int}(F) \subseteq F$, sledi $F \Delta \operatorname{Int}(F) = (F \setminus \operatorname{Int}(F)) \cup (\operatorname{Int}(F) \setminus F) = F \setminus \operatorname{Int}(F)$, pa je skup $F \Delta \operatorname{Int}(F)$ nigde gust. Trivijalno, svaki nigde gust skup može da se predstavi kao prebrojiva unija nigde gustih skupova, te je skup $F \Delta \operatorname{Int}(F)$ prve kategorije i $F =_* \operatorname{Int}(F)$. Time smo pokazali da svaki zatvoreni skup ima svojstvo Bera. □

Teorema 3.5.7. *Neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor. Skup SB je σ-algebra koja sadrži sve otvorene skupove.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 3.5.4 zaključujemo da je SB zatvoren u odnosu na prebrojive unije.

Neka je $A \in SB$. Tada postoji otvoren skup $U \subseteq X$ takav da važi $A =_* U$. Na osnovu teoreme 3.5.3 sledi $X \setminus A =_* X \setminus U$. Pokazaćemo da je $X \setminus U =_* \operatorname{Int}(X \setminus U)$. Naime, $X \setminus U =_* \operatorname{Int}(X \setminus U)$ ako i samo ako je skup $(X \setminus U) \Delta \operatorname{Int}(X \setminus U)$ prve kategorije. Kako je $(X \setminus U) \Delta \operatorname{Int}(X \setminus U) = ((X \setminus U) \setminus \operatorname{Int}(X \setminus U)) \cup (\operatorname{Int}(X \setminus U) \setminus (X \setminus U)) = (X \setminus U) \setminus \operatorname{Int}(X \setminus U)$ i skup $X \setminus U$ zatvoren, na osnovu leme 3.4.10 sledi da je skup $(X \setminus U) \setminus \operatorname{Int}(X \setminus U)$ nigde gust. Svaki nigde gust skup je skup prve kategorije te je $(X \setminus U) \Delta \operatorname{Int}(X \setminus U)$ skup prve kategorije, odnosno, važi $X \setminus U =_* \operatorname{Int}(X \setminus U)$. Na osnovu tranzitivnosti relacije $=_*$ imamo $X \setminus A =_* \operatorname{Int}(X \setminus U)$ čime smo pokazali da je SB zatvoren u odnosu na komplementiranje. Na osnovu teoreme 3.5.6 imamo $\mathcal{F} \subseteq SB$, pa kako je skup SB zatvoren u odnosu na komplementiranje, sledi $\mathcal{O} \subseteq SB$. Time je tvrđenje dokazano. □

Kako je SB σ-algebra koja sadrži sve otvorene skupove, važi $\mathcal{B} \subseteq SB$. Skup SB sadrži i skupove koji nisu Borelovi što pokazujemo sledećim primerom.

Teorema 3.5.8. *Neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor. Skup SB sadrži sve skupove prve kategorije.*

Dokaz. Ako je M skup prve kategorije tada, kako je $M \Delta \emptyset = M$, sledi da je $M \in SB$. □

Primer 3.5.9. Označimo sa $E_{\frac{1}{3}} \subseteq \mathbb{R}$ Kantorov trijadski skup. Na osnovu primera 3.4.3 i leme 3.4.6 važi da je svaki $A \subseteq E_{\frac{1}{3}}$ tanak u $\mathbb{R}$, a time i prve kategorije, te je $A \in SB(\mathbb{R})$. Odatle je $|SB(\mathbb{R})| \geq 2^{2^{\aleph_0}}$ dok je $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ na osnovu leme 3.0.19. Sledi $SB(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Teorema 3.5.10. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

i) A ima Berovo svojstvo;

ii) $A = G \cup M$, gde je G skup koji ima G_δ osobinu, a M skup prve kategorije.

Dokaz. Na osnovu teorema 3.5.7 i 3.5.8, ukoliko je G skup koji ima G_δ osobinu i M skup prve kategorije, sledi da $G \cup M \in SB$.

Neka skup A ima svojstvo Bera i neka je U otvoren skup, takav da je $A \Delta U$ skup prve kategorije. Na osnovu teoreme 3.4.9 postoji skup F koji ima osobinu F_σ takav da je $A \Delta U \subseteq F$. Tada skup $G = U \setminus F$, kao prebrojivi presek otvorenih skupova, ima G_δ osobinu i $G \subseteq A$. Takođe, skup $M = A \setminus G \subseteq F$ je prve kategorije. $\square$

Primer 3.5.11. Postoji $A \subseteq \mathbb{R}$ koji nema Berovo svojstvo.

Koristeći Aksiomu izbora konstruisaćemo takozvani Bernštajnov skup, to jest skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da ni skup A ni skup $\mathbb{R} \setminus A$ ne sadrže neprazan savršeni skup. Označimo sa $\{P_\alpha\}_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ neprazne savršene podskupove $\mathbb{R}$. Transfinitnom rekurzijom na $\alpha < 2^{\aleph_0}$ izaberimo $a_\alpha, b_\alpha \in P_\alpha$, takve da je $a_\alpha \neq b_\alpha$ za svako α, $a_\alpha \neq a_\beta$ i $b_\alpha \neq b_\beta$, za sve $\alpha \neq \beta$. Neka je $A = \{a_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$. Ukoliko bi A imao Berovo svojstvo, kako bar jedan od skupova A, $\mathbb{R} \setminus A$ nije prve kategorije, na osnovu teoreme 3.5.10 jedan od njih sadrži G_δ skup koji nije prve kategorije, što implicira da je neprebrojiv. Bez umenjenja opštosti, uzmimo da je to skup A. Kako je uz to poljski sledi da sadrži homeomorfnu sliku Kantorovog skupa $\mathcal{C}$ koja je savršen skup. Kako su svi neprazni savršeni podskupovi $\mathbb{R}$ nabrojani u $\{P_\alpha\}_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$, u njemu je nabrojana i homeomorfna slika Kantorovog skupa P_ξ, za nako $\xi < 2^{\aleph_0}$. Sledi da su $b_\xi, a_\xi \in P_\xi$, međutim $P_\xi \subseteq A$. Kontradikcija.

Zaključak

Deskriptivna teorija skupova je nauka o skupovima u poljskim prostorima. Ovaj rad obuhvata jedan njen mali deo, Borelove skupove u poljskim prostorima.

Materijal izložen u ovom radu predstavlja osnovu deskriptivne teorije skupova koja je u udžbenicima deskriptivne teorije skupova izneta na svega par strana. Dokazi su pritom često izostavljeni, a mnoge činjenice se podrazumevaju. Cilj ovog rada je da pruži što detaljnije dokaze tvrđenja i time dopuni postojeću literaturu.

Biografija

Nada Cvetković je rođena 22. maja 1989. godine u Senti. Godine 2004. završava Osnovnu školu "Čeh Karolj" u Adi kao nosilac Vukove diplome i učenik generacije. Iste godine upisuje "Senćansku gimnaziju" u Senti koju završava 2008. godine kao nosilac Vukove diplome. Po završetku sredje škole upisuje osnovne akademske studije primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu koje završava u julu 2011. godine sa prosekom ocena 10,00. Iste godine u oktobru, upisuje master akademske studije primenjene matematike. Sve ispite predviđene planom i programom polaže zaključno sa junskim ispitnim rokom 2013. godine i time stiče uslov za odbranu ovog master rada.

U Novom Sadu, juna 2014. godine — Nada Cvetković

Literatura

[1] S. Jackson, *Descriptive Set Theory*, University of North Texas, unpublished notes

[2] T. Jech, *Set Theory*, 4th corr. Edition, Springer, Berlin, 2006.

[3] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] K. Kuratowski, *Topology*, Volume 1, New ed., Academic Press, New York, 1966.

[5] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1998.

[6] R. Sz. Madarász, *Matematička logka*, skripte, Univerzitet u Novom Sadu, 2012.

[7] D. Marker, *Descriptive Set Theory*, unpublished lecture notes

[8] J. Palumbo, *Summer School 2010*, unpublished course notes

[9] S. Pilipović, D. Seleši, *Mera i integral, fundamenti teorije verovatnoće*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[10] S. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Springer-Verlag, New York, 1998.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Nada Cvetković
AU

Mentor: dr Miloš Kurilić
MN

Naslov rada: Borelovi skupovi
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2014.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: (3/69/10/1/0/0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Topologija

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči: Borelovi skupovi, Borelova hijerarhija, svojstvo Bera, poljski prostori
PO

UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog rada su Borelovi skupovi u poljskim topološkim prostorima. Nakon definisanja poljskih prostora, pri čemu se posebna pažnja posvećuje Hilbertovom i Kantorovom kubu i Berovom prostoru, ispituju se neke njihove osobine. Zatim se definišu Borelovi skupovi i neke klase Borelovih skupova, dokazuju se njihove osobine i daju primeri takvih skupova. Pokazuje se da svaki neprebrojiv Borelov skup u poljskom prostoru sadrži savršen skup. Potom se opisuje hijerarhija Borelovih skupova u neprebrojivim poljskim prostorima, uvodi se pojam tankih skupova i skupova prve i druge kategorije, dokazuje teorema Bera i uvodi svojstvo Bera.
IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća: 11.06.2013.
DP

Datum odbrane: jun 2014
DO

Članovi komisije:
KO

President:	dr Stevan Pilipović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Member:	dr Aleksandar Pavlović, docent Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Member:	dr Miloš Kurilić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph publication
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Content code: Master's thesis
CC

Author: Nada Cvetković
AU

Mentor/comentor: Miloš Kurilić, Ph. D.
MN

Title: Borel Sets
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2014.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (3/69/10/1/0/0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Topology

SD

Subject/ Key words: Borel sets, Borel hierarchy, Baire property, Polish spaces
SKW

UC

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis deals with Borel sets and their properties within Polish topological spaces. After defining Polish spaces and presenting examples such as Hilbert cube, Cantor and Baire space, some of their properties are presented. Afterwards we are defining Borel sets, present some of their classes, prove some of their properties and give examples of such sets. Moreover, we show that every uncountable Borel set in Polish space contains a perfect set. Furthermore we are exploring hierarchy of Borel sets in uncountable Polish spaces, defining nowhere dense and meager sets, proving Baire theorem and defining Baire property.
AB

Accepted by the Scientific Board: 11.06.2013.
ASB

Defended on: June 2014
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Stevan Pilipović, PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Aleksandar Pavlović PhD, docent, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Miloš Kurilić, PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad