UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milana Vujkov

POASONOV PROCES

- MASTER RAD -

Novi Sad, 2010.

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu proučavan je Poasonov proces kao jedan od važnijih stohastičkih procesa. Motivacija za izučavanje ove teme leži u značajnoj ulozi ovih procesa u modeliranju raznih pojava slučajnog karaktera. U radu je najpre detaljno proučavan homogeni Poasonov proces čija primena je ilustrovana na primeru telegrafskog signala. Pored homogenog Poasonovog procesa izučavani su i nehomogeni Poasonov proces, složeni Poasonov proces, dvostruko - stohastički Poasonov proces i filtrirani Poasonov proces. Posebno su proučavani i takozvani procesi obnavljanja.

Zahvalila bih se svom mentoru, dr Danijeli Rajter - Ćirić, na nesebičnoj pomoći i podršci pruženoj onda kada mi je bila najpotrebnija. Takođe joj se zahvaljujem na korisnim savetima upućenim u toku izrade ovog rada. Zahvalila bih i svima onima koji su mi, na bilo koji način, pružili pomoć i podršku, prvenstveno svojoj porodici i prijateljima Sandri, Tamari, Senadi i Feliksu. Posebnu zahvalnost dugujem i Smuk Aleksandru.

Glava 1

Uvodni pojmovi

1.1 Stohastički procesi

Definicija stohastičkog procesa

Zamislimo da se u svakom vremenskom trenutku $t \in T$, gde je $T \subset \mathbb{R}$, posmatra neka karakteristika X sistema koja je slučajnog karaktera. Tada je $X(t)$ neka slučajna promenljiva, za svako t. Zato na skup svih slučajnih promenljivih $\{X(t)\}_{t\in T}$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, odnosno dobijamo jednu slučajnu funkciju vremena. U tom slučaju familiju $\{X(t)\}_{t\in I}$ zovemo *stohastički (slučajni) proces.*

Definicija 1.1.1 *Stohastički (slučajni) proces* $\{X(t), t \in T\} = \{X(t)\}_{t\in T}$ *je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Skup* T *zovemo parametarski skup, a realni prostor* $\mathbb{R}^d$ *skup stanja procesa* $(X : \Omega \to \mathbb{R}^d)$.

Ako je parametarski skup T prebrojiv govorimo o nizu, lancu slučajnih promenljivih. Specijalno, ako je T konačan, tada imamo konačno mnogo slučajnih promenljivih.

Slučajni proces $\{X(t)\}_{t\in T} = \{X(t,\omega)\}_{t\in T}$ je, zapravo, funkcija dva parametra, t i ω. Koristićemo kraći zapis $\{X(t)\}_{t\in T}$.
Ukoliko fiksiramo $\omega \in \Omega$, dobijamo realnu funkciju definisanu na skupu T koja se zove trajektorija (realizacija) stohastičkog procesa $X(t)$.
Ukoliko fiksiramo $t \in T$ dobijamo jednu slučajnu promenljivu koja se zove zasek ili sečenje u trenutku t. Ta slučajna promenljiva ima svoju funkciju raspodele

$$F_1(t,x) = P\{X(t) < x\},$$

za t fiksirano.
Ovi jednodimenzionalni zakoni raspodele nisu dovoljni za kategorizaciju stohastičkog procesa, osim u određenim specijalnim slučajevima. U opštem slučaju je neophodno poznavati višedimenzionalne zakone raspodela, odnosno konačno-dimenzionalne raspodele procesa.

Definicija 1.1.2 *Konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkog procesa* $\{X(t), t \in T\}$ *su date sa:*

$$\begin{aligned}
F_t(x) &= F_1(t;x) = P\{X(t) < x\} \\
F_{t_1,t_2}(x_1,x_2) &= F_2(t_1,t_2;x_1,x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\} \\
&\vdots \\
F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) &= F_n(t_1,\ldots,t_n;x_1,\ldots,x_n) = P\{X(t_1) < x_1,\ldots,X(t_n) < x_n\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

gde su $t, t_1, \ldots t_n \in T$*, i* $x_1, x_2, \ldots \mathbb{R}$.

Neka svojstva stohastičkih procesa

Srednja vrednost ili očekivanje procesa X_t je preslikavanje $m_X : T \to \mathbb{R}$ definisano kao

$$m_X(t) = E(X_t).$$

Autokorelaciona funkcija procesa X_t je

$$R_x(t_1,t_2) = E(X_{t_1}, X_{t_2}).$$

Autokovarijansna funkcija procesa X_t je

$$\begin{aligned}
C_X(t_1,t_2) &= E[(X_{t_1} - m_X(t_1))(X_{t_2} - m_X(t_2))] \\
&= E(X_{t_1}, X_{t_2}) - m_X(t_1)m_X(t_2).
\end{aligned}$$

Uzajamno korelaciona funkcija dva procesa X_t i Y_t je

$$C_{XY}(t,s) = E[(X_t - m_X(t))(Y_s - m_Y(s))].$$

Disperzija stohastičkog procesa X_t je

$$D_X(t) = C_X(t,t) = E(X_t^2) - m_X^2(t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2.$$

Koeficijent korelacije procesa X_t je

$$\rho_X(t_1,t_2) = \rho(t_1,t_2) = \frac{C_X(t_1,t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}} = \frac{E(X_{t_1}, X_{t_2}) - m_X(t_1)m_X(t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}}.$$

Neke klase stohastičkih procesa

Definicija 1.1.3 *Za proces $\{X(t), t \in T\}$ za koji važi da su slučajne promenljive (tzv. priraštaji) $X(t_0)$, $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $\ldots X(t_n) - X(t_{n-1})$, $\ldots$ nezavisni za bilo koji izbor $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq \ldots$, kažemo da je stohastički proces sa nezavisnim priraštajima.*

Definicija 1.1.4 *Ako slučajne promenljive $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ imaju istu funkciju raspodele, za svako h i $t_1 < t_2$, tada je stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ proces sa stacionarnim priraštajima.*

Definicija 1.1.5 *Za stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ kažemo da je stacionaran, odnosno strogo stacionaran, ako su njegove konačno - dimenzione raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena, tj. ako važi*

$$F_{t_1+h, t_2+h, \ldots t_n+h}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n), \text{ za svako } h, t_1, \ldots, t_n \in T.$$

Napomena: Vrednost h mora se birati tako da je $t_k + h \in T$, za $k \in \mathbb{N}$.

Za strogo stacionarne procese važe osobine:

1.) $m_X(t) = c = const$,

2.) $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 - t_2)$,

koje su iskorišćene za definisanje slabo stacionarnih procesa.

Definicija 1.1.6 *Za proces $\{X(t), t \in T\}$ kažemo da je slabo stacionaran proces ako važe sledeće osobine:*

1.) $m_X(t) = c = const$,

2.) $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 - t_2)$.

1.2 Lanci Markova

Definicija 1.2.1 *Za stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ kažemo da je proces Markova ukoliko važi*

$$P\{X(t_{n+1}) \in A | X(t) = x_t, t \leq t_n\} = P\{X(t_{n+1}) \in A | X(t_n) = x_{t_n}\},$$

za svaki događaj is skupa A i za svaki vremenski trenutak $t_n < t_{n+1}$.

Dakle, verovatnoća da će proces preći iz nekog stanja x_{t_n} u kojem se nalazi u trenutku t_n, u neko drugo stanje iz skupa A u trenutku t_{n+1} ne zavisi od načina na koji je proces dospeo u stanje x_{t_n} iz stanja x_{t_0} u kojem se proces nalazio u početnom trenutku t_0. Drugim rečima, svojstvo Markova znači da evolucija sistema u budućnosti zavisi isključivo od stanja sistema u sadašnjosti, a ne od ponašanja sistema u prošlosti.

Diskretni slučaj lanaca Markova

Ukoliko je parametarski skup T stohastičkog procesa $\{X(t), t \in T\}$ prebrojiv, govorimo o lancu. U ovom slučaju, stohastički proces je oblika $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ i ima prebrojiv skup mogućih vrednosti $\{x_1, x_2, \ldots\}$, koji se zove još i skup stanja.

Definicija 1.2.2 *Niz slučajnih promenljivih sa jednakim skupom stanja zove se lanac Markova ako za proizvoljne $n > k_1 > k_2 > \ldots > k_r, r \in \mathbb{R}$ važi*

$$P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}, X_{k_2} = x_{k_2}, \ldots, X_{k_r} = x_{k_r}\} = P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}\}.$$

Definicija 1.2.3 *Verovatnoća prelaza iz i-tog u j-to stanje (u jednom koraku) je*

$$P\{X_{m+1} = x_j | X_m = x_i\} = p_{i,j}^{m,m+1}.$$

Ukoliko verovatnoća $p_{i,j}^{m,m+1}$ ne zavisi od m (tj. $p_{i,j}^{m,m+1} = p_{i,j}$), onda je lanac homogen.
Matrica $P = [p_{i,j}]_{i,j}$ se zove matrica prelaza za jedan korak.

Slično, možemo da govorimo o verovatnoći prelaza iz i-tog u j-to stanje, ali u n koraka.

Definicija 1.2.4 *Verovatnoća prelaza iz i-tog u j-to stanje u n koraka je*

$$p_{i,j}(n) = P\{X_{n+k} = x_j | X_k = x_i\}.$$

Matrica prelaza za n koraka je

$$P(n) = P_n = [p_{i,j}(n)]_{i,j}.$$

Metod za izračunavanje verovatnoće prelaza iz i-tog u j-to stanje u n koraka obezbeđuje nam jednačina Čepmen - Kolmogorova.

Tvrđenje 1.2.1 *Jednačina Čepmen - Kolmogorova*

$$p_{i,j}(n+m) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(n) p_{k,j}(m),$$

za svako $m, n \geq 0$ i za svako i, j.

Matrično zapisana jednačina Čepmen - Kolmogorova glasi:

$$P_{n+m} = P_n \cdot P_m.$$

Ako uvrstimo $n = m = 1$, dobijamo

$$P_2 = P \cdot P = P^2.$$

Dalje,

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 \cdot P = P^2 \cdot P = P^3, \\ P_4 &= P_3 \cdot P = P^3 \cdot P = P^4, \\ &\vdots \\ P_n &= P^n. \end{aligned}$$

Definicija 1.2.5 *Lanac Markova čiji je skup stanja $i \in \mathbb{Z}$ zove se slučajan hod ako za neko $p \in (0, 1)$ važi*

$$p_{i,i+n} = p = 1 - p_{i,i-1}.$$

Kod diskretnog slučaja lanaca Markova, vreme koje sistem provede u datom stanju je deterministički određeno. Za razliku od diskretnog, kod neprekidnog slučaja lanaca Markova vreme koje sistem provede u datom stanju je slučajna promenljiva koja ima eksponencijalnu raspodelu.

Glava 2

Poasonovi procesi

2.1 Definicija Poasonovog procesa

Poasonov proces nosi naziv po francuskom matematičaru Simeo-Deni Poasonu[1], i predstavlja stohastički proces u kojem se događaji dešavaju neprekidno i nezavisno jedan od drugog. Poasonovi procesi jesu neprekidan slučaj lanaca Markova.
Primeri koji se mogu opisati kao Poasonovi procesi su posete nekom web sajtu, radioaktivnost atoma, telefonski pozivi, itd ...

Definicija 2.1.1 *Neka je $N(t)$ ukupan broj događaja koji se dese u intervalu $[0, t]$. Stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$ zove se proces brojanja događaja ili proces prebrajanja.*

Procesi prebrajanja imaju sledeće osobine:

1. Za fiksirano t, $N(t)$ je slučajna promenljiva čije su vrednosti iz skupa $\mathbb{N}_0$.

2. Funkcija $N(t)$ je neopadajuća, tj.

$$N(t_2) - N(t_1) \geq 0, \quad \text{ako je} \quad t_2 > t_1 \geq 0,$$

   štaviše, $N(t_2) - N(t_1)$ jeste broj događaja koji se jave u intervalu $(t_1, t_2]$.

[1]Simeon - Denis Poisson (1781 - 1840)

Definicija 2.1.2 *(Homogeni) Poasonov proces sa stopom rasta λ, $\lambda > 0$ je proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ za koji važi:*

1. *$N(0) = 0$;*
2. *Proces $N(t)$ ima nezavisne priraštaje;*
3. *Broj događaja u proizvoljnom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λt, tj.*

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \textit{za svako } t \geq 0 \textit{ i } n \in \mathbb{N}_0.$$

Iz predhodne jednakosti možemo zaključiti da Poasonov proces ima stacionarne priraštaje jer raspodela događaja $N(t+s) - N(s)$ ne zavisi od s, odnosno, zavisi samo od dužine intervala, a ne zavisi od njegovog položaja na vremenskoj osi.
Ako u definiciji Poasonovog procesa preciziramo da je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces sa nezavisnim i stacionarnim priraštajima, tada umesto poslednjeg uslova iz definicije možemo pisati sledeće uslove:

$$\begin{aligned} P\{N(h) = 1\} &= \lambda h + o(h) \\ P\{N(h) = 0\} &= 1 - \lambda h + o(h), \end{aligned} \tag{2.1}$$

gde je h dužina intervala i pri čemu važi $lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$.
Dakle, verovatnoća da će se na intervalu dužine h desiti tačno jedan događaj mora biti proporcionalna dužini tog intervala uz uslov koji je zanemarljiv ukoliko je h dovoljno malo, odnosno ukoliko je interval dovoljno kratak.
Štaviše, važi da je

$$P\{N(h) \geq 2\} = 1 - (P\{N(h) = 0\} + P\{N(h) = 1\}) = o(h).$$

Stoga ne postoji mogućnost da će se u proizvoljnom intervalu $(t_0, t_0 + h)$ pojaviti dva ili više događaja. Međutim, slučaj kada će h biti značajno malo realno je malo verovatan.

Može se pokazati da ako $N(h) : \mathcal{P}(\lambda h)$, onda su uslovi (2.1) zadovoljeni. Zaista, koristeći Tejlorov razvoj, imamo:

$$P\{N(h) = 0\} = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \ldots = 1 - \lambda h + o(h),$$

i

$$P\{N(h) = 1\} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h(1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h).$$

Može se pokazati da su uslovi (2.1) zadovoljeni kada su priraštaji procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ stacionarni i za opštiji slučaj, kada je stopa rasta $\lambda = \lambda(t)$, o čemu će biti reči u narednom poglavlju.

Pošto slučajna promenljiva $N(t)$ ima Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda t, t \geq 0$, možemo odrediti očekivanje i disperziju ovog procesa.

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= \lambda t, \\ D(N(t)) &= \lambda t, \\ E(N^2(t)) &= D(N(t)) + (E(N(t))^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dalje, koristimo osobinu da su priraštaji Poasonovog procesa nezavisni i stacionarni kako bismo odredili autokorelacionu funkciju. Koristeći jednakosti (2.2) , imamo da je autokorelaciona funkcija Poasonovog procesa $N(t)$

$$\begin{aligned} R_N(t, t+s) &:= E(N(t)N(t+s)) \\ &= E(N(t)[N(t+s) - N(t)]) + E(N^2(t)) \\ &\overset{\text{nez.}}{=} E(N(t))E(N(t+s) - N(t)) + E(N^2(t)) \\ &= \lambda t \lambda s + (\lambda t + \lambda^2 t^2) \\ &= \lambda^2 t(t+s) + \lambda t. \end{aligned}$$

Sledi da je autokovarijansna funkcija Poasonovog procesa

$$\begin{aligned} C_N(t, t+s) &= R_N(t, t+s) - E(N(t))E(N(t+s)) \\ &= \lambda^2 t(t+s) + \lambda t - \lambda t(\lambda(t+s)) = \lambda t. \end{aligned}$$

Za proizvoljne vrednosti t_1 i t_2 funkcija autokovarijanse Poasonovog procesa sa parametrom rasta $\lambda > 0$ data je kao

$$C_N(t_1, t_2) = \lambda \cdot min\{t_1, t_2\}.$$

Obzirom da očekivanje Poasonovog procesa zavisi od promenljive t, možemo zaključiti da ovaj proces nije slabo stacionaran proces, iako su njegovi priraštaji stacionarni.

Primer2.1.1. Pretpostavimo da se kvar neke mašine javlja nedeljno, u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta $\lambda = 2$, a da se na intervalu $[0, 1]$ jave tačno dva kvara. Neka je $t_0 > 3$ proizvoljna vrednost za t.

a) Koja je verovatnoća da će u trenutku t_0 proći bar dve nedelje od:

i) poslednjeg kvara?

ii) pretposlednjeg kvara?

b) Koja je verovatnoća da se, počev od t_0, neće pojaviti nijedan kvar u naredna dva dana, ako se zna da se u protekle dve nedelje pojavio tačno jedan kvar?

Rešenje:
Da bismo rešili problem, najpre moramo odrediti vrednost parametra Poasonove raspodele za svako pitanje posebno. Neka je $N(t)$ broj kvarova koji se jave na intervalu $[0, t]$, gde se t meri nedeljama. Pošto je prosečna stopa pojavljivanja kvara 2 nedeljno, slučajna promenljiva $N(t)$ imaće Poasonovu raspodelu sa parametrom $2t$.

a) i) Zanima nas broj kvarova tokom perioda od dve nedelje. Obzirom da Poasonov proces ima stacionarne priraštaje, možemo izračunati verovatnoću uzimajući u obzir slučajnu promenljivu $N(2) : \mathcal{P}(4)$. Računamo:

$$P\{N(2) = 0\} = e^{-4} \cong 0.0183.$$

Dakle, odgovor je 1.83%.

ii) Od pretposlednjeg kvara je prošlo dve nedelje ako i samo ako je broj kvarova na intervalu $[t_0 - 2, t_0]$ ili 0 ili 1. Zato računamo:

$$P\{N(2) \leq 1\} = P\{N(2) = 0\} + P\{N(2) = 1\} = e^{-4}(1 + 4) \cong 0.0916.$$

Dakle, odgovor je 9.16%.

b) Pošto Poasonov proces ima nezavisne priraštaje, podatak da se u poslednje dve nedelje desio jedan kvar nije bitan u ovom slučaju. Nas zanima

$$N\left(t_0 + \frac{2}{7}\right) - N(t_0) = N\left(\frac{2}{7}\right) : \mathcal{P}\left(\frac{4}{7}\right),$$

što je, kada izračunamo,

$$P\left\{N\left(\frac{2}{7}\right) = 0\right\} = e^{-\frac{4}{7}} \cong 0.5647.$$

Dakle, odgovor je 56.47%.

U pokazanom primeru pretpostavili smo da je stopa rasta Poasonovog procesa ista za svaki dan u nedelji. U praksi, ova pretpostavka nije realna, jer je stopa rasta po danima verovatno različita. Na primer, realno je pretpostaviti da je stopa kvara mašine različita radnim danima u odnosu na neradne dane, kada se mašina ni ne koristi. Takođe, realno je pretpostaviti da stopa rasta varira i u toku dana. Dakle, ukoliko želimo realnije da razmatramo ovaj problem, moramo koristiti parametar λ koji nije konstantan, nego je promenljiv u odnosu na vreme, odnosno, λ bi trebalo da bude funkcija od t, o čemu ćemo govoriti u narednom poglavlju.

Tvrđenje 2.1.1 *Neka su* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *i* $\{N_2(t), t \geq 0\}$ *dva nezavisna Poasonova procesa sa stopama rasta* λ_1 *i* λ_2*, respektivno. Proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *definisan kao*

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

je takođe Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$*.*

Dokaz: Da bismo dokazali tvrđenje pokazaćemo da i za zbir Poasonovih procesa važe osobine Poasonovog procesa. Najpre pokazujemo prvu osobinu

$$N(0) := N_1(0) + N_2(0) = 0 + 0 = 0,$$

što važi.
Dalje, pošto su priraštaji procesa $\{N_1(t), t \geq 0\}$ i $\{N_2(t), t \geq 0\}$ nezavisni, možemo pokazati da su nezavisi i prirštaji procesa $\{N(t), t \geq 0\}$.
Pišemo:

$$\begin{aligned} N(t_k) - N(t_{k-1}) &= (N_1(t_k) - N_1(t_{k-1})) + (N_2(t_k) - N_2(t_{k-1})) \\ &= (N_1(t_k) + N_2(t_k)) - (N_1(t_{k-1}) + N_2(t_{k-1})), \end{aligned}$$

što takođe važi. Suma nezavisnih Poasonovih slučajnih promenljivih sa stopama rasta λ_1 i λ_2 takođe ima Poasonovu raspodelu sa stopom rasta $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$. Zaista, ako $X_i : \mathcal{P}(\lambda_i)$, tada je njegova funkcija generatrise momenata data sa

$$M_{X_i}(t) = e^{-\lambda_i} \cdot exp\{e^t \lambda_i\}.$$

Dalje sledi da je

$$M_{X_1+X_2}(t) \stackrel{\text{nez.}}{=} M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} exp\{e^t(\lambda_1 + \lambda_2)\}.$$

Dakle, možemo pokazati da je

$$N(\tau+t)-N(\tau)=(N_1(\tau+t)-N_1(\tau))+(N_2(\tau+t)-N_2(\tau)):\mathcal{P}((\lambda_1+\lambda_2)t),$$

za svako $\tau, t \geq 0$. ■

Ovo tvrđenje možemo uopštiti i za više nezavisnih Poasonovih procesa. Obrnuto, možemo rastaviti Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ u j nezavisnih Poasonovih procesa sa stopama rasta λ_i, za $i = 1, 2, \ldots, j$, gde važi da je $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j$, kao što sledi.
Pretpostavimo da je svaki događaj koji se desi klasifikovan kao tip i sa verovatnoćom događaja p_i, $i = 1, 2 \ldots j$, nezavisno od ostalih događaja, a gde važi da je $p_1 + \ldots p_j = 1$. Neka je $N_i(t)$ broj događaja tipa i na intervalu $[0, t]$. Pokazaćemo sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.1.2 *Stohastički procesi $\{N_i(t), t \geq 0\}, i = 1, \ldots, j$ koji predstavljaju broj događaja tipa i na intervalu $[0, t]$, svaki sa verovatnoćom događaja p_i, gde je $p_1 + \ldots + p_j = 1$, jesu nezavisni Poasonovi procesi sa stopom rasta $\lambda_i := \lambda p_i$ za $i = 1, 2, \ldots, j$.*

Pošto je $N(t) = \sum_{i=1}^{j} N_i(t)$, možemo koristiti sledeći zapis:

$$\begin{aligned}P\{N_1 = n_1, \ldots, N_j = n_j\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N_1 = n_1, \ldots, N_j = n_j | N = k\} \cdot P\{N = k\} \\ &= P\{N_1 = n_1, \ldots, N_j = n_j | N = n_1 + \ldots + n_j\} \cdot P\{N = n_1 + \ldots + n_j\}.\end{aligned}$$

Neka je $n := n_1 + \ldots + n_j$. Dalje raspisujemo uslovnu verovatnoću:

$$P\{N_1 = n_1, \ldots, N_j = n_j | N = n\} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_j!} \prod_{i=1}^{j} p_i^{n_i}.$$

Ovo je primena multinomne raspodele koja uopštava binomnu raspodelu. Dalje sledi

$$\begin{aligned}P\{N_1 = n_1, \ldots, N_j = n_j\} &= \{\frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_j!} \prod_{i=1}^{j} p_i^{n_i}\} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \prod_{i=1}^{j} e^{-\lambda p_i t} \frac{(\lambda p_i t)^{n_i}}{n_i!},\end{aligned}$$

iz čega sledi da je

$$P\{N_i = n_i\} = e^{-\lambda p_i t}\frac{(\lambda p_i t)^{n_i}}{n_i!}, \text{ za } i = 1, \ldots, j,$$

i

$$P\{N_1 = n_1, \ldots, N_j = n_j\} = \prod_{i=1}^{j} P\{N_i = n_i\}.$$

Dakle, možemo zaključiti da slučajne promenljive $N_i(t)$ imaju Poasonovu raspodelu sa stopom rasta $\lambda p_i t$, za $i = 1, \ldots, j$ i da su one nezavisne. Dalje, pošto Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ima nezavisne i stacionarne priraštaje, važi da i procesi $\{N_i(t), t \geq 0\}$ imaju nezavisne i stacionarne priraštaje, za svako i, takođe. Sada možemo zaključiti da $N_i(\tau + t) - N_i(t) : \mathcal{P}(\lambda p_i t)$, za $i = 1, 2, \ldots, j$. Konačno, pošto je $N(0) = 0$, važi i da je $N_1(0) = \ldots = N_j(0) = 0$. Stoga možemo zaključiti da procesi $\{N_i(t), t \geq 0\}$ zadovoljavaju sve uslove iz definicije Poasonovog procesa i nezavisni su, čime je tvrđenje dokazano. ■

Napomena: Pošto je proizvoljan događaj klasifikovan kao tip i, on ne sme zavisiti od vremena u kojem se događaj desio.

Prеđašnje opisan Poasonov proces mogli smo objasniti na drugi način, računajući verovatnoću broja događaja na intervalu dužine δ. U tom smislu, imali bismo:

$$\begin{aligned} P\{N_i(\delta) = 1\} &= P\{N_i(\delta) = 1 | N(\delta) = 1\} \cdot P\{N(\delta) = 1\} \\ &\quad + P\{N_i(\delta) = 1 | N(\delta) > 1\} \cdot P\{N(\delta) > 1\} \\ &= p_i e^{-\lambda\delta}\lambda\delta + o(\delta) \\ &= p_i(\lambda\delta + o(\delta)) + o(\delta) \\ &= \lambda p_i \delta + o(\delta). \end{aligned}$$

Štaviše, možemo zapisati da

$$P\{N_i(\delta) = 0\} = 1 - \lambda p_i \delta + o(\delta),$$

jer je $N_i(\delta) \leq N(\delta)$, za svako i, što implicira da je

$$P\{N_i(\delta) \geq 2\} \leq P\{N(\delta) \leq 2\} = o(\delta).$$

Izvođenjem dokaza na ovaj način, može se pokazati da su procesi $\{N_i(t), t \geq 0\}$ zaista nezavisni Poasonovi procesi sa stopom rasta λp_i, za $i = 1, 2, \ldots, j$.

Pošto je Poasonov proces neprekidan slučaj lanaca Markova, možemo tvrditi da vreme τ_i koje proces provede u stanju $i \in \{0, 1, \ldots\}$ ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda_i > 0$, i da su slučajne promenljive $\tau_0, \tau_1, \ldots$ nezavisne. Dalje, obzirom da Poasonov proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje, sa tačke gledišta verovatnoće,proces može iznova da počne u bilo kom vremenskom trenutku. Sledi da svi τ_i, za $i = 0, 1, \ldots$ imaju istu raspodelu. Ostalo nam je još da nađemo zajednički parametar slučajnih promenljivih τ_i.
Važi da je

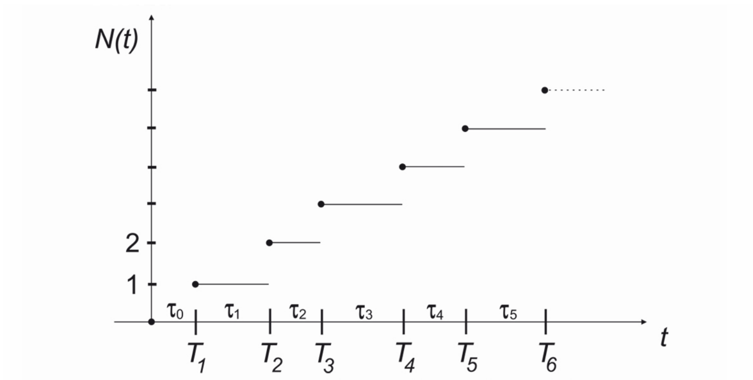
$$P\{\tau_0 > t\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t},$$

odakle sledi da je funkcija gustine ove slučajne promenljive

$$\varphi_{\tau_0}(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\lambda t}) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{za } t \geq 0.$$

To znači da $\tau_0 : \mathcal{E}(\lambda)$, pa možemo definisati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.1.3 *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ, a τ_i vreme koje proces provede u stanju i, za $i = 0, 1, \ldots$. Slučajne promenljive τ_i, $i = 0, 1, \ldots$ su nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ.*



Slika 2.1: Primer trajektorije Poasonovog procesa

Lema 2.1.1 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ, za svako i. Tada slučajna promenljiva $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ima gama raspodelu sa parametrima n i λ.*

Posledica 2.1.1 *U Poasonovom procesu sa stopom rasta λ, vreme potrebno da se desi svih n događaja, počev od bilo kog vremenskog trenutka, ima gama raspodelu sa parametrima n i λ.*

Dokaz: Vreme pojavljivanja n-tog događaja T_n može se predstaviti kao

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

jer je $\{N(t), t \geq 0\}$ neprekidan stohastički proces. Pošto su τ_i nezavisne slučajne promenljive, svaka sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ, zaista možemo tvrditi da

$$T_n : \Gamma(n, \lambda),$$

na osnovu Leme 2.1.1.
Štaviše, iz činjenice da Poasonov proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje zaključujemo da

$$P\{T_{n+k} \leq t + t_k | N(t_k) = k\} = P\{T_n \leq t\}, \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}_0.$$

To znači da, ukoliko znamo da se do trenutka t_k desilo tačno k događaja (od nekog početnog trenutka), onda vreme potrebno da se desi n dodatnih događaja od trenutka t_k ima istu raspodelu kao i T_n. ■

Predhodno tvrđenje i relacija

$$N(t) = n \Leftrightarrow T_n < t, \tag{2.3}$$

omogućavaju da na još jedan način definišemo Poasonov proces. Ova alternativna definicija može biti jednostavnija za pokazivanje u nekim slučajevima.

Tvrđenje 2.1.4 *Neka je $X_i : \mathcal{E}(\lambda)$, $i \in \mathbb{N}$, nezavisna slučajna promenljiva i neka je $T_0 := 0$ i*

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Ako definišemo $N_t = max\{T_n \leq t, n \geq 0\}$, onda je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces za parametrom λ.

Napomena:

i) Pošto je $P\{T_1 > 0\} = 1$, zaista važi

$$N(0) = max\{T_n \leq 0, n \geq 0\} = 0.$$

ii) Takođe,

$$N(t) = n \Leftrightarrow \{T_n \leq t\} \cap \{T_{n+1} > t\},$$

na osnovu čega sledi pokazana definicija Poasonovog procesa preko T_n.

iii) Da bismo izračunali verovatnoću događaja $\{N(t), t \geq 0\}$, potrebno je zaključiti da

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{T_n \leq t\} - P\{T_{n+1} \leq t\} \end{aligned}$$

i upotrebiti uopštenje kada slučajna promenljiva Y ima gama $\Gamma(n, \lambda)$ raspodelu:

$$P\{Y \leq y\} = 1 - P\{W \leq n-1\} = P\{W = n\}, \quad \text{gde je } W : \mathcal{P}(\lambda y).$$

Zaista, zaključujemo da

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{T_n \leq t\} - P\{T_{n+1} \leq t\} \\ &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{N(t) = n\}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da slučajne promenljive X_i imaju uniformnu raspodelu na intervalu $(0, 1]$, tj. $X_i : \mathcal{U}(0, 1]$, a ne eksponencijalnu raspodelu kako je navedeno u predhodnom tvrđenju. Da bismo definisali proces koji će biti Poasonov, moramo definisati novu slučajnu promenljivu Y_i, na sledeći način

$$Y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln X_i, \text{ za } i \in \mathbb{N}.$$

Za $y = 0$ imamo:

$$P\{Y_i \leq y\} = P\{\ln X \geq -\lambda y\} = P\{X_i \geq e^{-\lambda y}\} = 1 - e^{-\lambda y},$$

pa je funkcija gustine, stoga

$$\varphi_{Y_i}(y) = \lambda e^{-\lambda y} \text{ za } y \geq 0.$$

Dakle, stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$, definisan kao $N(t) = 0$ kad je $t < Y_1$ i

$$N(t) = max\{\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq t, n \geq 1\} \quad \text{kad je } t \geq Y_1,$$

jeste Poasonov proces sa stopom rasta λ.
Ako definišemo $Y_0 = 0$, tada možemo pisati

$$N(t) = max\{\sum_{i=0}^{n} Y_i \leq t, n \geq 0\}, \quad \text{za svako } t \geq 0.$$

Tvrđenje 2.1.5 *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ. Tada uslovna slučajna promenljiva $T_1|N(t) = 1$ ima uniformnu raspodelu na intervalu $(0, t]$, gde je T_1 vreme pojavljivanja prvog događaja ovog procesa.*

Dokaz: Za $0 < s \leq t$, koristeći Bajesovu teoremu za uslovnu verovatnoću, važi

$$\begin{aligned} P\{T_1 \leq s | N(t) = 1\} &= \frac{P\{T_1 \leq s \cap N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}} \\ &= \frac{P\{N(s) = 1 \cap N(t) - N(s) = 0\}}{P\{N(t) = 1\}} \\ &\overset{\text{nez.}}{=} \frac{(\lambda s e^{-\lambda s}) e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Napomena: Ovo tvrđenje sledi direktno iz osobine da su priraštaji Poasonovog procesa nezavisni i stacionarni. Zaista važi da verovatnoća da se događaj pojavi u proizvoljnom vremenskom intervalu mora zavisiti samo od dužine tog intervala. Opštije, ako T^* označava vreme pojavljivanja jedinog događaja na intervalu $(t_1, t_2]$, gde je $0 \leq t_1 < t_2$, tada je T^* uniformno raspoređeno na datom intervalu.

Primetimo sada da pojavljivanje događaja $\{N(t) = 1\}$ implicira pojavljivanje događaja $\{T_1 \leq t\}$. Međutim, važi i obrnuto,

$$\{T_1 \leq t\} \Rightarrow \{N(t) = 1\}.$$

Sa druge strane, možemo zapisati

$$T_1 | N(t) = 1 \equiv T_1 | \{T_1 \leq t \cap T_2 > t\}.$$

Želimo da uopštimo ovo tvrđenje tako što ćemo računati raspodelu verovatnoće za $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, kada se na intervalu $(0, t]$ pojavi tačno n događaja . Najpre razmatramo slučaj kada je $n = 2$.
Neka je $0 < t_1 < t_2 \leq t$. Da bismo odredili funkciju uslovne verovatnoće slučajnog vektora (T_1, T_2), gde je $N(t) = 2$, moramo izračunati

$$\begin{aligned} P\{T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, N(t) = 2\} &= \{N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) = 1, N(t) - N(t_2) = 0\} \\ &\quad + P\{N(t_1) = 2, N(t) - N(t_1) = 0\} \\ &= (\lambda t_1 e^{-\lambda t_1} \cdot \lambda(t_2 - t_1) e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)}) \\ &\quad \cdot (\frac{(\lambda t_1)^2}{2!} e^{-\lambda t_1} \cdot e^{-\lambda(t - t_1)}) \\ &= (\lambda^2 t_1(t_2 - t_1) + \frac{(\lambda t_1)^2}{2!}) \cdot e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Korišćenjem osobine da su priraštaji Poasonovog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ nezavisni i stacionarni, sledi

$$\begin{aligned} P\{T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2 | N(t) = 2\} &= \frac{P\{T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, N(t) = 2\}}{P\{N(t) = 2\}} \\ &= \frac{(\lambda^2 t_1(t_2 - t_1) + \frac{(\lambda t_1)^2}{2!}) \cdot e^{-\lambda t}}{\frac{1}{2}(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{2t_1(t_2 - t_1) + t_1^2}{t^2}, \end{aligned}$$

pa je funkcija gustine

$$\varphi_{(T_1, T_2)|N(t)}(t_1, t_2|2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left\{ \frac{2t_1(t_2 - t_1)}{t^2} + \frac{t_1^2}{t^2} \right\} = \frac{2}{t^2} + 0 = \frac{2}{t^2},$$

za $0 < t_1 < t_2 \leq t$.
Na osnovu ove jednakosti, možemo da izračunamo

$$\varphi_{T_1|N(t)}(t_1|2) = \int_{t_1}^{t} \frac{2}{t^2}\, dt_2 = \frac{2(t - t_1)}{t^2}, \quad \text{za } 0 < t_1 \leq t.$$

Primetimo da raspodela slučajne promenljive $T_1|N(t) = 2$ nije uniformna na intervalu $(0, t]$, za razliku od slučajne promenljive $T_1|N(t) = 1$.
Dalje, računamo

$$\varphi_{T_2|N(t)}(t_2|2) = \int_{0}^{t_2} \frac{2}{t^2}\, dt_1 = \frac{2t_2}{t^2}, \quad \text{za } 0 < t_2 \leq t.$$

Konačno, možemo da odredimo funkciju gustine

$$\varphi_{T_2|(T_1,N(t))}(t_2|t_1,2) = \frac{\varphi_{(T_1,T_2)|N(t)}(t_1,t_2|2)}{\varphi_{T_1|N(t)}(t_1|2)} = \frac{2/t^2}{2(t-t_1)/t^2} = \frac{1}{t-t_1},$$

za $0 < t_1 < t_2 \leq t$, gde slučajna promenljiva $T_2|T_1 = t_1 \cap N(t) = 2$ ima uniformnu raspodelu na intervalu $(t_1, t]$, odakle možemo zaključiti da i slučajna promenljiva $(T_2 - T_1)|T_1 = t_1 \cap N(t) = 2$ ima uniformnu raspodelu na intervalu $(0, t-t_1]$.

Da bismo razmatrali ovu jednakost u opštem obliku, a ne samo za slučaj $n = 2$, moramo uzeti u obzir sve moguće vrednosti slučajnih promenljivih $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$, gde je $T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \ldots, T_n \leq t_n$, $N(t) = n$. Ukupan broj slučajeva da se smesti n događaja u n intervala $(0, t_1], (t_1, t_2], \ldots, (t_{n-1}, t_n]$ dat je sa multinomijalnim koeficijentom (daje reči dužine k od n slova, bez ponavljanja). Štaviše, N_{t_1} mora biti veći ili jednak 1, N_{t_2} mora biti veći ili jednak 2, itd. Međutim, moramo primetiti da će jedini uslov različit od nule, posle diferenciranja funkcije uslovne verovatnoće po svakoj promenljivoj $t_1, t_2, \ldots, t_n$ biti onaj za koji se događaj

$$H = \{N(t_1) = 1, N(t_2) - N(t_1) = 1, \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = 1\}$$

desi. Neka je

$$G = \{N(t_1) > 1, N(t_2) \geq 2, \ldots, N(t_n) \geq n\}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} P\{T_1 \leq t_1, \ldots, T_n \leq t_n, N(t) = n\} &= P\{H, N(t) = n\} + P\{G, N(t) = n\} \\ &= P\{H, N(t) - N(t_n) = 0\} + P\{G, N(t) = n\} \\ &= \lambda t_1 e^{-\lambda t} \cdot \prod_{k=2}^{n} \lambda(t_k - t_{k-1}) e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} \cdot e^{-\lambda(t-t_n)} \\ &\quad + P\{G, N(t) = n\} \\ &= \lambda^n t_1 e^{-\lambda t} \prod_{k=2}^{n} (t_k - t_{k-1}) + P\{G, N(t) = n\}. \end{aligned}$$

Koristeći Bajesovu teoremu za uslovnu verovatnoću, sledi

$$\begin{aligned} P\{T_1 \leq t_1, \ldots, T_n \leq t_n | N(t) = n\} &= \frac{P\{T_1 \leq t_1, \ldots, T_n \leq t_n, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{\lambda^n t_1 e^{-\lambda t} \prod_{k=2}^{n} (t_k - t_{k-1})}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}/n!} + P\{G|N(t) = n\}. \end{aligned}$$

Pošto bar jedno t_i nije prisutno u uslovu $P\{G|N(t) = n\}$, funkciju gustine možemo pisati na sledeći način

$$\varphi_{(T_1,\ldots,T_n)|N(t)}(t_1,\ldots,t_n|n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} \frac{t_1 \prod_{k=2}^{n}(t_k - t_{k-1})}{t^n/n!} = \frac{n!}{t^n}, \tag{2.4}$$

za $0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t$, čime smo dokazali sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.1.6 *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ i neka je $N(t) = n$. Tada $(T_1,\ldots,T_n)$ ima zajedničku funkciju gustine koja je oblika*

$$\varphi_{(T_1,\ldots,T_n)|N(t)}(t_1,\ldots,t_n|n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} \frac{t_1 \prod_{k=2}^{n}(t_k - t_{k-1})}{t^n/n!} = \frac{n!}{t^n},$$

za $0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t$.

Drugi, (intuitivni) način definisanja zajedničke funkcije gustine slučajnog vektora $(T_1,\ldots,T_n)$, gde je $N(t) = n$, je da koristimo činjenicu da vreme pojavljivanja slučajnog događaja koji se javlja na intervalu $(0,t]$, ima uniformnu raspodelu na tom intervalu. Moramo uzeti u obzir pojavljivanje n događaja kao vrednosti n nezavisnih slučajnih promenljivih U_i, svaku sa $\mathcal{U}(0,t]$ raspodelom, poređane po rastućem poretku, jer je $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$, za šta postoji $n!$ načina. Zbog nezavisnosti, za $0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t$ funkciju gustine možemo pisati kao

$$\varphi_{(U_1,\ldots,U_n)}(t_1,\ldots t_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{U_i}(t_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{t} = \frac{1}{t^n}.$$

Dakle, na ovaj način ponovo bismo došli do jednakosti (2.4),

$$\varphi_{(T_1,\ldots,T_n)|N(t)}(t_1,\ldots,t_n|n) = n!\varphi_{(U_1,\ldots,U_n)}(t_1,\ldots t_n) = \frac{n!}{t^n},$$

za $0 < t_1 < \ldots < t_n \leq t$.

Napomena: Kada ređamo slučajne promenljive $X_1,\ldots,X_n$ u rastućem poretku, koristimo uopštenu notaciju $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$, gde je $X_{(i)} < X_{(j)}$, ako je $i < j$. Za slučajne promenljive poređane u rastućem poretku važi $X_{(1)} = min\{X_1,\ldots,X_n\}$, a $X_{(n)} = max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

Tvrđenje 2.1.7 *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *Poasonov proces sa stopom rasta* λ *koji se pojavljuje u trenutku s, nezavisno od drugih događaja, i tipa je i, sa verovatnoćom* $p_i(s)$*, gde je* $i = 1, 2, \ldots, j$ *i* $\sum_{i=1}^{j} p_i(s) = 1$*. Neka je* $N_i(t)$ *broj događaja tipa i na intervalu* $[0, t]$*. Tada su* $N_i(t)$ *nezavisne slučajne promenljive sa Poasonovom raspodelom sa parametrima*

$$\lambda_i(t) := \lambda \int_0^t p_i(s) ds, \quad za\, i = 1, 2, \ldots, j.$$

Dokaz: Znamo da je vreme pojavljivanja događaja slučajan događaj koji se javlja na intervalu $[0, t)$, i na ovom intervalu ima uniformnu raspodelu. Zbog toga možemo pisati da je verovatnoća da je ovaj događaj tipa i upravo p_i, data sa

$$p_i = \int_0^t p_i(s) \frac{1}{t}\, ds, \quad i = 1, 2, \ldots, j.$$

Kao i u dokazu Tvrđenja 2.1.2, slučajna promenljiva $N_i(t)$ ima Poasonovu raspodelu sa parametrom

$$\lambda_i(t) = \lambda p_i t = \lambda \int_0^t p_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \ldots, j,$$

a promenljive $N_1(t), \ldots, N_j(t)$ su nezavisne. ■

Napomena: Iako slučajne promenljive $N_i(t)$ imaju Poasonovu raspodelu, za svako i, stohastički procesi $\{N_i(t), t \geq 0\}$ nisu Poasonovi procesi ukoliko funkcije $p_i(s)$ ne zavise od s, za svako i.

Primer2.1.2. Klijenti koji stižu kod autodistributera čije je radno vreme od 9 do 21h mogu se klasifikovati u dve kategorije: oni koji nameravaju da kupe automobil (tip I) i oni koji samo razgledaju (tip II). Pretpostavimo da je data sledeća funkcija raspodele

$$P\{\text{klijent tipa I}\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{u periodu od 9 do 18h} \\ \frac{1}{4}, & \text{u periodu od 18 do 21h} \end{cases},$$

nezavisno od kupca do kupca, a dolasci obrazuju Poasonov proces sa stopom rasta λ po danu.

a) Odrediti disperziju za broj klijenata tipa I ako se zna da je stopa rasta procesa $\lambda = 50$.

b) Pretpostavimo da je prosečna zarada po prodatom automobilu 1000\$, a stopa rasta procesa $\lambda = 10$. Koji je prosečan profit tog distributera u periodu od 9 do 18h tog dana, ako se zna da je u ovom vremenskom periodu prodato najmanje dva automobila.

Rešenje:

a) Neka je $N_I(t)$ broj klijenata tipa I na intervalu $[0, t]$, gde je t izraženo u satima. Možemo pisati

$$N_I(12) : \mathcal{P}\left(\frac{50}{12}\int_9^{21} p_I(s)ds\right).$$

Računajući integral, dobijamo

$$\int_9^{12} p_I(s)ds = \int_9^{18} \frac{1}{2}ds + \int_{18}^{21} \frac{1}{4}ds = \frac{21}{4}.$$

Sada je

$$\mathcal{P}\left(\frac{50}{12}\cdot\frac{21}{4}\right) = \mathcal{P}(21.875).$$

Nas zanima

$$D(N_I(12)) = D(21.875) = 21.875.$$

b) Neka je $N_1(t)$ broj prodaja u toku t dana, u periodu od 9 do 18 h. Proces$\{N_1(t), t \geq 0\}$ je Poasonov, sa stopom rasta

$$\lambda = 10\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{1}{2} = 3.75.$$

Ako označimo $X = E(N_1(1)|N_1(1) \geq 2)$, onda nas interesuje $1000 \cdot X$. Znamo da je

$$E(N_1(1)) = 0 + E(N_1(1)|N_1(1)) \cdot P\{N_1(1) = 1\} + X \cdot P\{N_1(1) \geq 2\}.$$

Dalje, imamo

$$3.75 = 1 \cdot 3.75 \cdot e^{-3.75} + X \cdot (1 - e^{-3.75} \cdot (1 + 3.75)).$$

Rešavajući ovu jednačinu po X, dobijamo da je $x \simeq 4.12231$, pa je prosečan profit, približno,

$$1000\$ \cdot X = 1000\$ \cdot 4.12231 = 4122.31\$.$$

Tvrđenje 2.1.8 *Neka su* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *i* $\{N_2(t), t \geq 0\}$ *dva nezavisna Poasonova procesa sa stopama rasta* λ_1 *i* λ_2*, respektivno. Događaj* D_{n_1,n_2} *je definisan na sledeći način:* n_1 *događaja procesa* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *se desi pre nego što se pojavi* n_2 *događaja procesa* $\{N_2(t), t \geq 0\}$*. Tada je verovatnoća događaja* D_{n_1,n_2} *oblika*

$$P\{D_{n_1,n_2}\} = P\{X \geq n_1\},$$

gde je $X : \mathcal{B}(n,p)$*,* $n = n_1 + n_2 - 1$*, a* $\quad p := \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$*. Odnosno,*

$$P\{D_{n_1n_2}\} = \sum_{i=n_1}^{n_1+n_2-1} \binom{n_1+n_2-1}{i} (\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^i (\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n_1+n_2-1-i}. \qquad (2.5)$$

Dokaz: Neka je $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ i neka je E_j neki slučajan eksperiment koji se sastoji u posmatranju da li je j-ti događaj procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ ujedno i događaj procesa $\{N_1(t), t \geq 0\}$, ili nije. Pošto Poasonov proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje, eksperimenti E_j zapravo predstavljaju nezavisna ispitivanja za koje je verovatnoća da je j-to ispitivanje uspešno, jednaka za svako j. Tada slučajna promenljiva X koja broji uspehe u n ispitivanja, po definiciji, ima binomnu raspodelu sa parametrom n, i važi

$$p := P\{T_{1,1} < T_{2,1}\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},$$

gde su $T_{1,1} : \mathcal{E}(\lambda_1)$ i $T_{2,1} : \mathcal{E}(\lambda_2)$ nezavisne slučajne promenljive. Pošto se događaj D_{n_1,n_2} desi ako i samo ako postoji najmanje n_1 događaja procesa $\{N_1(t), t \geq 0\}$ u prvih $n_1 + n_2 - 1$ događaja procesa $\{N(t), t \geq 0\}$, odakle sledi jednakost (2.5). ■

Primer2.1.3. Neka je $\{X(t), t \in [0,1]\}$ stohastički proces definisan kao Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ, na sledeći način

$$X(t) = N(t) - t \cdot N_1, \quad \text{za } t \in [0,1].$$

Primetimo da je ovo stohastički proces za koji važi $X(0) = X(1) = 0$. Računamo sad očekivanje ovakvog procesa

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(N(t) - t \cdot N(1)) \\ &= E(N(t)) - t \cdot E(N(1)) \\ &= \lambda t - t \cdot (\lambda \cdot 1) = 0, \quad \text{za } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Možemo zaključiti da ako je $t_i \in [0,1]$ za $i = 1, 2, \ldots$, onda je funkcija autokovarijanse oblika

$$\begin{aligned} C_X(t_1,t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) - 0^2 \\ &= E[(N(t_1) - t_1N(1)) \cdot (N(t_2) - t_2N(1))] \\ &= E(N(t_1)N(t_2)) - t_1E(N(1)N(t_2)) - t_2E(N(t_1)N(1)) + t_1t_2E(N_1^2) \\ &= \lambda^2 t_1t_2 + \lambda min\{t_1,t_2\} - t_1(\lambda^2 t_2 + \lambda t_2) - t_2(\lambda^2 t_1 + \lambda t_1) + t_1t_2((\lambda^2 + \lambda) \\ &= \lambda \cdot min\{t_1,t_2\} - \lambda t_1t_2 \ , \end{aligned}$$

gde je korišćena već pokazana jednakost

$$R_N(t_1,t_2) = C_N(t_1,t_2) + E(N(t_1))E(N(t_2)) = \lambda min\{t_1,t_2\} + \lambda^2 t_1t_2.$$

Ovaj proces možemo uopštiti definišući stohastički proces $\{X(t), t \in [0,c]\}$, kao

$$X(t) = N(t) - \frac{t}{c}N(c), \quad \text{za } t \in [0,c] \quad c = const > 0.$$

Primer2.1.4. Znamo da Poasonov proces nije slabo stacionaran proces. Sa druge strane, njegovi priraštaji jesu stacionarni. Posmatramo proces $\{X(t), t \geq 0\}$, definisan na sledeći način

$$X(t) = N(t+c) - N(t), \quad \text{za } t \geq 0, \ c = const > 0,$$

gde je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces za stopom rasta λ.
Primetimo da je $X(0) = N(c) : \mathcal{P}(\lambda c)$. Dakle, početna vrednost procesa je slučajna. Dalje, imamo

$$N(t+c) - N(t) : \mathcal{P}(\lambda c) \Rightarrow E(X(t)) = \lambda c,$$

za svako $t \geq 0$. Koristeći jednakost za autokorelacionu funkciju iz prethodnog primera, za $s, t \geq 0$ možemo izračunati autokorelacionu i autokovarijansnu funkciju i za ovaj primer:

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= E[(N(t+c) - N(t)) \cdot (N(t+s+c) - N(t+s))] \\ &= E(N(t+c)N(t+s+c) - E(N(t+c)N(t+s)) \\ &\quad -E(N(t)N(t+s+c)) + E(N(t)N(t+s)) \\ &= \lambda((t+s) - t - min\{c,s\} - t + t) + \lambda^2((t+c)(t+s+c) \\ &\quad -(t+c)(t+s) - t(t+s+c) + t(t+s)) \\ &= \lambda \cdot (c - min\{c,s\}) + \lambda^2 c^2. \end{aligned}$$

Dalje, određujemo autokovarijansnu funkciju ovog procesa

$$\begin{aligned} C_X(t,t+s) &= R_X(t,t+s) - E(X(t))E(X(t+s)) \\ &= \lambda(c - min\{c,s\}) + \lambda^2 c^2 - (\lambda c)^2 \\ &= \lambda(c - min\{c,s\}) \\ &= \begin{cases} o, & c \leq s \\ \lambda(c-s), & c > s \end{cases}. \end{aligned}$$

Stoga možemo pisati da je $C_X(t,t+s) = C_X(s)$. Dakle, stohastički proces $\{X(t), t \geq 0\}$ jeste slabo stacionaran proces (jer je $E(X(t)) = \lambda c$), što sledi iz nezavisnosti priraštaja Poasonovog procesa. Štaviše, činjenica da je autokovarijansna funkcija $C_X(s)$ jednaka nuli za $c \leq s$ jeste posledica nezavisnosti priraštaja procesa $\{N(t), t \geq 0\}$.

Primer2.1.5. Neka je broj posetilaca nekog web sajta u intervalu $[0,t]$ Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ, po satu. Izračunati verovatnoću da je bilo više posetilaca sajta u periodu od 8 do 9 h nego u periodu od 9 do 10h, ako se zna da je u periodu od 8 do 10h bilo 10 posetilaca.

Rešenje:
Neka su $N(1)$ i $N(2)$ brojevi posetilaca sajta u periodu od 8 do 9h i od 9 do 10h, respektivno. Možemo reći da su slučajne promenljive $N(1) : \mathcal{P}(5)$ i $N(2) : \mathcal{P}(5)$ nezavisne. Možemo još zaključiti da slučajna promenljiva

$$(N(i)|N(1) + N(2) = 10) : \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{za} \quad i = 1,2.$$

Tražimo verovatnoću

$$X := P\{N(1) > N(2)|N(1) + N(2) = 10\}.$$

Zbog simetričnosti procesa možemo pisati

$$\begin{aligned} 1 &= X + P\{N(1) = N(2)|N(1) + N(2) = 10\} + X \\ &= 2 \cdot X + \binom{10}{5}\frac{1}{2}^2 \\ &\simeq 2 \cdot X + 0.2461. \end{aligned}$$

Rešavanjem ove jednakosti dobijamo da je $X \simeq 0.377$. Dakle, verovatnoća da u periodu od 8 do 9h bude više posetilaca nego u periodu od 9 do 10h je 37.7%.

Primer2.1.6. Proces $M(t)$ je dat sa

$$M(t) = N(t) - \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0,$$

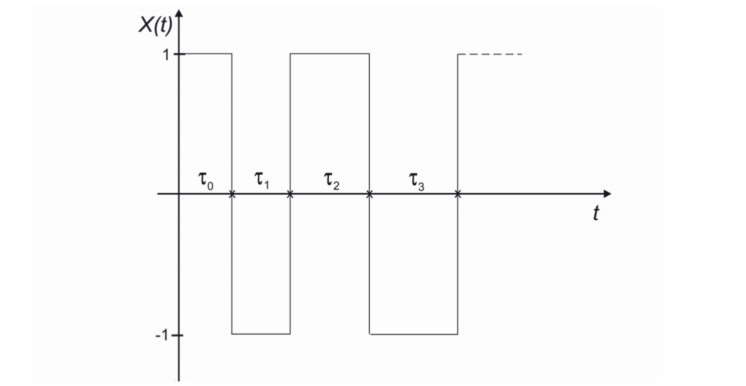
gde je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ. Izračunati verovatnoću $P\{1 < S(1) \leq \sqrt{2}\}$, gde je $S(1) := min\{M(t) \geq 1, t \geq 0, \}$.

Rešenje:
Priraštaji Poasonovog pocesa su nezavisni i stacionarni i možemo računati na sledeći način:

$$\begin{aligned} P\{1 < S(1) \leq \sqrt{2}\} &= P\{N(1) = 0, N(\sqrt{2}) - N(1) \geq 2\} + \\ &\quad P\{N(1) = 1, N(\sqrt{2}) - N(1) \geq 1\} \\ &= e^{-\lambda}(1 - e^{-(\sqrt{2}-1)\lambda}(1 + (\sqrt{2} - 1)\lambda) + \lambda e^{-\lambda}(1 - e^{-(\sqrt{2}-1)\lambda}). \end{aligned}$$

2.1.1 Primer telegrafskog signala

Zanimljiva transformacija Poasonovog procesa je telegrafski signal.



Slika 2.2: Primer trajektorije telegrafskog signala

Telegrafski signal je proces $\{X(t), t \geq 0\}$, koji se definiše na sledeći način:

$$X(t) = (-1)^{N(t)} = \begin{cases} 1, & \text{za } N(t) = 2k \\ -1, & \text{za } N(t) = 2k + 1 \end{cases}.$$

Primetimo da je $X(0) = 1$ jer je $N(0) = 0$. Dakle, početna vrednost procesa je deterministički određena. Da bi početna vrednost procesa bila stohastička, jednostavno možemo pomnožiti $X(t)$ sa slučajnom promenljivom Z koja je nezavisna od $X(t)$, za svako t, i koja sa verovatnoćom 0,5 uzima vrednosti -1 ili 1.

Proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, gde je $Y(t) := Z \cdot X(t)$, za svako $t \geq 0$, zove se *stohastički telegrafski signal.* Možemo zaključiti da važi $Z + Y(0)$. Da bismo bili precizniji, za proces $\{X(t), t \geq 0\}$ koristićemo izraz *polustohastički telegrafski signal.*

Da bismo odredili raspodelu slučajne promenljive $X(t)$, neophodno je izračunati

$$\begin{aligned} P\{X(t) = 1\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = 2k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2 k}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2}, \quad \text{za svako} \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

jer je

$$\cosh \lambda t := \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^2 k}{(2k)!}.$$

Sledi da je

$$P\{X(t) = -1\} = 1 - \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2} = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2}.$$

U slučaju procesa $\{Y(t), t \geq 0\}$, raspodela verovatnoće je sledeća:

$$\begin{aligned} P\{Y(t) = 1\} &= P\{Z \cdot X(t) = 1\} \\ &= P\{X(t) = 1 | Z = 1\} \cdot P\{Z = 1\} + \\ &\quad\; P\{X(t) = -1 | Z = -1\} \cdot P\{Z = -1\} \\ &\overset{\text{nez.}}{=} \frac{1}{2}(P\{X(t) = 1\} + P\{X(t) = -1\}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, $P\{Y(t) = 1\} = P\{Y(t) = -1\} = \frac{1}{2}$, za svako $t \geq 0$, tako da je očekivanje $E(Y(t)) = 0$, budući da je

$$E(X(t)) = 1 \cdot \frac{1 + e^{-\lambda t}}{2} + (-1) \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{2} = e^{-2\lambda t}, \text{ za svako } t \geq 0.$$

Da bismo definisali autokorelacionu funkciju polustohastičkog telegrafskog signala, koristićemo definiciju samog procesa, odnosno $X(t) = (-1)^{N(t)}$. Ako je $s > 0$, imamo

$$\begin{aligned} R_X(t, t+s) &= E(X(t)X(t+s)) = E((-1)^{N(t)} \cdot (-1)^{N(t+s)}) \\ &= E((-1)^{2N(t)} \cdot (-1)^{N(t+s)-N(t)}) = E((-1)^{N(t+s-N(t)}) \\ &= E((-1)^{N(s)}) = E(X(s)) \\ &= e^{-2\lambda s}, \end{aligned}$$

gde smo koristili osobinu da su priraštaji Poasonovog procesa stacionarni. Dalje određujemo autokovarijansnu funkciju procesa.

$$C_X(t, t+s) = e^{-2\lambda s} - e^{-2\lambda t} \cdot e^{-2\lambda(t+s)} = e^{-2\lambda s}(1 - e^{-4\lambda t}), \text{ za svako } s, t \geq 0.$$

Obzirom da je

$$\begin{aligned} Y(t) \cdot Y(t+s) &= (Z \cdot X(t)) \cdot (Z \cdot X(t+s)) \\ &= Z^2 \cdot X(t) \cdot X(t+s) \\ &= 1 \cdot X(t) \cdot X(t+s) = X(t)X(t+s), \end{aligned}$$

zaključujemo da je autokovarijansna funkcija oblika

$$C_Y(t, t+s) = R_Y(t, t+s) = R_X(t, t+s) = e^{-2\lambda s}, \text{ za svako } s, t \geq 0.$$

Iz gore pokazanog, možemo zaključiti da je proces $\{Y(t), t \geq 0\}$ slabo stacionaran proces. Može se pokazati da je proces ujedno i strogo stacionaran. Sa druge strane, proces $\{X(t), t \geq 0\}$ nije slabo stacionaran jer njegovo očekivanje zavisi od promenljive t, i $C_X(t, t+s) = C_X(t)$.

2.2 Nehomogeni Poasonov proces

U mnogim primenama Poasonovog procesa nije realno pretpostaviti da je prosečna stopa pojavljivanja događaja tog procesa konstantna. U praksi, ova stopa zavisi od vremena, odnosno od promenljive t. Na primer, prosečna stopa ulaska klijenata u supermarket nije ista u toku dana. Slično, prosečan broj automobila na autoputu različit je u toku saobraćajnog špica u odnosu na saobraćajno zatišje. U skladu sa ovim zaključcima, uopštićemo definiciju Poasonovog procesa.

Definicija 2.2.1 *Proces prebrajanja sa nezavisnim priraštajima* $\{N(t), t \geq 0\}$ *se zove nehomogen (nestacionaran) Poasonov proces sa funkcijom intenziteta* $\lambda(t) \geq 0$, *za* $t \geq 0$, *ako važi:*

1.) $N(0) = 0$;

2.) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$;

3.) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.

Napomena: Uslov 2.) ove definicije implicira da proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nema stacionarne priraštaje, osim ukoliko $\lambda(t) \equiv \lambda > 0$. U slučaju da proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ima stacionarne priraštaje, možemo zaključiti da je u pitanju homogen Poasonov proces sa stopom rasta λ, o kojem je bilo reči u predhodnom poglavlju.

Kao i u slučaju kada je prosečna stopa pojavljivanja događaja konstantna, važi da broj događaja koji se javljaju u datom intervalu ima Poasonovu raspodelu.

Tvrđenje 2.2.1 *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *nehomogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta* $\lambda(t)$. *Tada važi:*

$$N(s+t) - N(s) : \mathcal{P}(m(s+t) - m(s)), \qquad \text{za svako } s, t \geq 0,$$

gde je $m(s)$ *funkcija srednje vrednosti nehomogenog Poasonovog procesa:*

$$m(s) := \int_0^s \lambda(y)\, dy.$$

Dokaz: Neka je $p_n(s,t) := P\{N(s+t) - N(s) = n\}$, za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Koristeći osobinu da su priraštaji procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ nezavisni i uslove iz definicije, za $n = 1, 2, \ldots$ mošemo odrediti

$$\begin{aligned} p_n(s,t+h) &= P\{N(s+t) - N(s) = n \cap N(s+t+h) - N(s+t) = 0\} \\ &\quad + P\{N(s+t) - N(s) = n-1 \cap N(s+t+h) = 1\} + o(h) \\ &= p_n(s,t)(1 - \lambda(s+t)h + o(h)) \\ &\quad + p_{n-1}(s,t)(\lambda(s+t)h + o(h)) + o(h), \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$p_n(s,t+h) - p_n(s,t) = \lambda(s+t)h \cdot (p_{n-1}(s,t) - p_n(s,t)) + o(h).$$

Kada obe strane ove jednakosti podelimo sa h, i pustimo da $h \to 0$, dobijemo

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(s,t) = \lambda(s+t)(p_{n-1}(s,t) - p_n(s,t)). \tag{2.6}$$

Za $n = 0$ predhodna jednakost postaje

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(s,t) = -\lambda(s+t) p_0(s,t).$$

Promenljivu s možemo posmatrati kao konstantu. Stoga, ova jednakost postaje obična diferencijalna jednačina prvog reda, homogenog tipa. Njeno opšte rešenje je oblika

$$p_0(s,t) = c_0 exp\{-\int_s^{s+t} \lambda(y)\, dy\},$$

gde je c_0 konstanta. Koristeći granični uslov $p_0(s,0) = 1$, zaključujemo da je $c_0 = 1$, pa je predhodna jednakost oblika

$$p_0(s,t) = exp\{-\int_s^{s+t} \lambda(y)\, dy\} = e^{m(s)-m(s+t)}, \text{ za } s,t \geq 0.$$

Kada zamenimo ovo rešenje u jednakost (2.6), dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1(s,t) = \lambda(s+t)(e^{m(s)-m(s+t)} - p_1(s,t)).$$

Ovu jednakost drugačije možemo zapisati na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1(s,t) = e^{m(s)-m(s+t)} - p_1(s,t)) \frac{\partial}{\partial t}(m(s+t) - m(s)).$$

Lako se može proveriti da je rešenje ove nehomogene diferencijalne jednačine koja zadovoljava granični uslov $p_1(s,0)=0$ oblika

$$p_1(s,t)=(m(s+t)-m(s))e^{m(s)-m(s+t)},\ \text{za svako } s,t\geq 0.$$

Konačno, matematičkom indukcijom se može pokazati da je

$$p_n(s,t)=\frac{(m(s+t)-m(s))^n}{n!}e^{m(s)-m(s+t)},\ \text{za svako } s,t\geq 0, n\in N_0,$$

čime je tvrđenje dokazano. ■

Pretpostavimo da je $\lambda(t)$ dva puta diferencijabilna funkcija tako da je $\lambda(t)\leq\lambda$, za svako $t\geq 0$. Tada možemo posmatrati nehomogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$ uz pomoć homogenog Poasonovog procesa $\{N_1(t), t\geq 0\}$ sa stopom rasta λ, pretpostavljajući da je događaj koji se pojavljuje u trenutku t događaj sa verovatnoćom pojavljivanja $\dfrac{\lambda(t)}{\lambda}$. Neka F označava događaj da je izbrojan tačno jedan od događaja koji se pojavljuju na intervalu $(t,t+h]$, a neka $N(t)$ predstavlja ukupan broj događaja izbrojanih na intervalu $[0,t]$. Na osnovu Tvrđenja (2.1.7) imamo

$$\begin{aligned}
P\{N(t+h)-N(t)=1\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{(N_1(t+h)-N_1(h)=k)\cap F\}\\
&= (\lambda h+o(h))\int_t^{t+h}\frac{\lambda(u)}{\lambda}\cdot\frac{1}{h}du+o(h)\\
&= (\lambda h+o(h))\frac{\lambda(t+c\cdot h)}{\lambda}+o(h),
\end{aligned}$$

za neko $c\in(0,1)$, po teoremi srednje vrednosti za integrale.
Pošto je

$$\lambda(t+c\cdot h)=\lambda(t)+c\cdot h\cdot\lambda'(t)+o(h),$$

možemo odrediti

$$\begin{aligned}
P\{N(t+h)-N(t)=1\} &= (\lambda h+o(h))\frac{\lambda(t)+c\cdot h\cdot\lambda'(t)+o(h)}{\lambda}+o(h)\\
&= \lambda(t)h+o(h).
\end{aligned}$$

Ukoliko pretpostavimo da je

$$\int_{t_0}^{\infty}\lambda(t)\,dt=\infty\quad \text{za svako}\quad t_0\in[0,\infty), \tag{2.7}$$

tada je verovatnoća da se bar jedan događaj desi posle trenutka $t_0 = 1$ jednak

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} P\{N(t_0+s) - N(t_0) \geq 1\} &= 1 - \lim_{s\to\infty} P\{N(t_0+s) - N(t_0) = 0\} \\
&= 1 - \lim_{s\to\infty} exp\{-\int_{t_0}^{t_0+s} \lambda(t)\, dt\} \\
&= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

Primetimo da jednakost (2.7) važi kada je $\lambda(t) \equiv \lambda > 0$.

Neka je T_1 slučajna promenliva koja označava vreme pojavljivanja prvog događaja procesa $\{N(t), t \geq 0\}$. Sada ćemo odrediti raspodelu za slučajnu promenljivu T_1, ako je $N(t) = 1$, kao i u slučaju homogenog Poasonovog procesa.

Tvrđenje 2.2.2 *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *nehomogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta* $\lambda(t)$*. Funkcija gustine za slučajnu promenljivu*

$$S := T_1 | N(t) = 1,$$

je oblika

$$\varphi_S(s) = \frac{\lambda(s)}{m(t)}, \ \textit{za } s \in (0, t]. \tag{2.8}$$

Dokaz: Ako je $s \in (0, t]$ možemo odrediti funkciju raspodele na sledeći način

$$\begin{aligned}
P\{T_1 \leq s | N(t) = 1\} &= \frac{P\{N(s) = 1 \cap N(t) - N(s) = 0\}}{P\{N(t) = 1\}} \\
&\overset{\text{nez.}}{=} \frac{(m(s) \cdot e^{-m(s)}) \cdot e^{-m(t)+m(s)}}{m(t)e^{-m(t)}} \\
&= \frac{m(s)}{m(t)}.
\end{aligned}$$

Obzirom da je

$$\frac{d}{ds} m(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s \lambda(u) du = \lambda(s),$$

jednakost (2.8) je dokazana. ■

Funkcija raspodele za proces S koji predstavlja vreme pojavljivanja jednog događaja koji se javlja na intervalu $(\tau, \tau + t]$ je oblika

$$F_S(s) = \frac{m(s) - m(\tau)}{m(\tau + t) - m(\tau)}, \text{ za} 0 \leq \tau < s \leq \tau + t,$$

pa je funkcija gustine oblika

$$\varphi_S(s) = \frac{\lambda(s)}{m(\tau + t) - m(\tau)}, \text{ za } 0 \leq \tau < s \leq \tau + t,$$

gde je $S := T|\{N(\tau+t) - N(\tau) = 1\}$, a T vreme pojavljivanja prvog događaja nehomogenog Poasonovog procesa na intervalu $(\tau, \tau + t]$.

2.3 Složeni Poasonov proces

Definicija 2.3.1 *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom, i neka je N slučajna promenljiva čije su moguće vrednosti svi pozitivni celi brojevi, i ona je nezavisna od X_k-ova. Slučajna promenljiva*

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k \tag{2.9}$$

zove se složena slučajna promenljiva.

Tvrđenje 2.3.1 *Očekivanje i disperzija slučajne promenljive S_N koja je definisana kao jednakost (2.9) su oblika:*

$$\begin{aligned} E(S_N) &= E(N) \cdot E(X_1) \\ D(S_N) &= E(N) \cdot D(X_1) + D(N) \cdot (E(X_1))^2. \end{aligned}$$

Umesto X_1 može se uzeti bilo koje X_k jer su ove promenljive međusobno nezavisne i imaju jednaku raspodelu. Za ove osobine koristićemo oznaku NJR (Nezavisne i Jednako Raspoređene).

Dokaz: Najpre pokazujemo prvu jednakost

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n \cdot E(X_1).$$

Pošto je N nezavisno od X_k-ova, što zapisujemo na sledeći način

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k | N = n\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = n \cdot E(X_1),$$

dolazimo do jednakosti

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k | N\right) = N \cdot E(X_1).$$

Sledi da je

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = E\left(E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k | N\right)\right) = E(N \cdot E(X_1)) = E(N) \cdot E(X_1).$$

Napomena:
Da bi pokazana jednakost bila validna, nije neophodno da promenljive X_k budu međusobno nezavisne.
Jednakost za disperziju dokazujemo na sličan način, ali je tada neophodno da promenljive X_k budu nezavisne.

$$D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k | N = n\right) \overset{\text{NJR}}{=} n \cdot D(X_1),$$

što implicira

$$D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k | N\right) = N \cdot D(X_1).$$

Uz pomoć jednakosti za uslovno očekivanje

$$D(X) = E(D(X|Y)) + D(E(X|Y)),$$

dobijamo

$$D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = E\left(D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k|N\right)\right) + D\left(E\left(\sum_{k=1}^{N} X_k|N\right)\right),$$

pa onda možemo pisati

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) &= E(N \cdot D(X_1)) + D(N \cdot E(X_1)) \\ &= E(N) \cdot D(X_1) + D(N) \cdot (E(X_1))^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definicija 2.3.2 *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *Poasonov proces sa stopom rasta* λ, *a* $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne i jednako raspoređene slučajne promenljive (NJR), koje su nezavisne od procesa* $\{N(t), t \geq 0\}$. *Stohastički proces* $\{Y(t), t \geq 0\}$ *definisan je kao*

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad \textit{za svako } t \geq 0,$$

gde važi da je $Y(t) = 0$ *ako je* $N(t) = 0$, *zove se složen Poasonov proces.*

Ovo je još jedan od načina uopštavanja Poasonovog procesa. Ako bi važilo da su slučajne promenljive X_k konstantne i jednake 1, tada bi procesi

$\{Y(t), t \geq 0\}$ i $\{N(t), t \geq 0\}$ bili identični, tj. i $Y(t)$ bi bio homogen Poasonov proces.

Definišimo sada očekivanje i disperziju složenog Poasonovog procesa koristeći predhodno dokazano tvrđenje. Ako zamenimo oznake tako da je $S_N = Y(t)$ a $N = N(t)$, dobijamo

$$\begin{aligned} E(Y(t)) &= E(N(t)) \cdot E(X_1) = \lambda t \cdot E(X_1), \\ &\text{i} \\ D(Y(t)) &= E(N(t)) \cdot D(X_1) + D(N(t)) \cdot (E(X_1))^2 \\ &= \lambda t \cdot (D(X_1) + (E(X_1))^2) \\ &= \lambda t \cdot E(X_1^2). \end{aligned}$$

Lako se može odrediti funkcija generatrise momenta slučajne promenljive $Y(t)$. Neka je

$$M_1(s) \equiv M_{X_1}(s) = E(e^{sX_1}).$$

Računamo:

$$\begin{aligned} M_{Y(t)}(s) &= E(e^{sY(t)}) = E(e^{s(X_1+\ldots+X_{N(t)})}) \\ &= E(E(e^{s(X_1+\ldots+X_{N(t)})}|N(t))) \\ &\overset{\text{nez.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{s(X_1+\ldots+X_n)})e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &\overset{\text{NJR}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (M_1(s))^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \cdot e^{M_1(s)\lambda t} \\ &= exp\{\lambda t \cdot (M_1(s) - 1)\}. \end{aligned}$$

Ova jednakost nam omogućava da proverimo rezultate dobijene za očekivanje i disperziju složenog Poasonovog procesa.

$$\begin{aligned} E(Y(t)) = \frac{d}{ds}M_{Y(t)}(s)|_{s=0} &= M_{Y(t)}(s) \cdot M_1'(s)|_{s=0} \\ &= M_{Y(t)}(0) \cdot \lambda t \cdot M_1'(0) \\ &= 1 \cdot \lambda t \cdot E(X_1) \\ &= \lambda t \cdot E(X_1). \end{aligned}$$

U slučaju kada je X_1 diskretna slučajna promenljiva čije su moguće vrednosti $1, 2, \ldots, j$, proces možemo definisati na sledeći način:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{j} i \cdot N_i(t),$$

gde je $N_i(t)$ broj slučajnih promenljivih X_k (koje su povezane sa nekim slučajnim događajem) koje uzimaju vrednosti i na intervalu $[0, t]$. Na osnovu Tvrđenja 2.1.2, procesi $\{N_i(t), t \geq 0\}$ su nezavisni Poasonovi procesi sa stopom rasta $\lambda p_{x_i}(i)$, za $i = 1, \ldots, j$.

Funkcija generatrise momenta slučajne promenljive $Y(t)$ za ovakav slučaj biće

$$M_{Y(t)}(s) = exp\{\lambda t \cdot \sum_{i=1}^{j} (e^{si} - 1) \cdot p_{X_1}(i)\}.$$

Pošto $\lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$, na osnovu centralne granične teoreme zaključujemo da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.3.2 *Za t dovoljno veliko, važi da*

$$Y(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t \cdot E(X_1), \lambda t \cdot E(X_1^2)).$$

Napomena: Da bi predhodno tvrđenje važilo, broj promenljivih u sumi mora biti najmanje 30 u zavisnosti od stepena asimetrije raspodele slučajne promenljive X_1.

Neka su $\{Y_1(t), t \geq 0\}$ i $\{Y_2(t), t \geq 0\}$ nezavisni Poasonovi procesi, definisani na sledeći način

$$Y_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} X_{i,k}, \quad \text{za svako } t \geq 0,$$

i važi da je $Y_i(t) = 0$ ako je $N_i(t) = 0$, gde je $\{N_i(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ_i, za $i = 1, 2$. Znamo da je proces $\{N(t), t \geq 0\}$, gde je $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, za svako $t \geq 0$ takođe Poasonov proces sa parametrom $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ (jer su ova dva procesa nezavisna). Neka je X_k slučajna promenljiva povezana sa k-tim događajem procesa $\{N(t), t \geq 0\}$. Tada možemo pisati

$$X_k = \begin{cases} X_{1,k}, & \text{sa v-ćom } p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ X_{2,k}, & \text{sa v-ćom } q = 1 - p \end{cases} .$$

Drugim rečima, X_k ima istu raspodelu kao i $X_{1,k}$, odnosno $X_{2,k}$ sa verovatnoćom p, odnosno $1-p$.
Dakle, važi

$$\begin{aligned} P\{X_k \le x\} &= P\{X_{1,k} \le x\} \cdot P\{X_{1,k}\} + P\{X_{2,k} \le x\} \cdot P\{X_{2,k}\} \\ &= P\{X_{1,k} \le x\} \cdot p + P\{X_{2,k} \le x\} \cdot (1-p). \end{aligned}$$

Pošto su slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne, sa jednakom raspodelom i nezavisne od Poasonovog procesa $\{N(t), t \ge 0\}$, možemo zaključiti da proces $\{Y(t), t \ge 0\}$ definisan kao proces

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \text{ za } t \ge 0,$$

jeste složen Poasonov proces, takođe.

Primer2.3.7. Pretpostavimo da klijenti neke osiguravajuće kuće plaćaju premiju sa konstantnom stopom α (po jedinici vremena) i da ta kuća plaća obeštećenja svojim klijentima u skladu sa Poasonovim procesom sa parametrom λ. Želimo da odredimo kapital sa kojim ta osiguravajuća kuća raspolaže u trenutnku t.

Rešenje:
Ako je iznos isplaćen po zahtevu klijenta jedna slučajna promenljiva i ako su ti zahtevi zasebni, onda su te slučajne promenljive nezavisne i sa istom raspodelom, tada je kapital kojim osiguravajuća kuća raspolaže u trenutku t oblika

$$C(t) = C(0) + \alpha t - Y(t),$$

gde je $\{Y(t), t \ge 0\}$ složeni Poasonov proces (jer pretpostavljamo da iznosi odštete ne zavise od broja do tada isplaćenih odšteta). Važan zadatak je odrediti rizik da slučajna promenljiva $C(t) \le 0$, odnosno rizik da će osiguravajuća kuća bankrotirati.
Ako je količina isplaćenih obeštećenja veća nego količina uplaćenih premija, odnosno $\alpha < \lambda\mu$, gde je $\mu := E(X_1)$ prosečna odšteta koju je osiguravajuća kuća isplatila, tada možemo zaključiti da će osiguravajuća kuća bankrotirati sa verovatnoćom 1, skoro sigurno, što bi bio i logičan, intuitivni zaključak.

2.4 Dvostruko-stohastički Poasonov proces

Ranije, u odeljku 2.2 razmatrali smo nehomogeni Poasonov proces gde je prosečna stopa pojavljivanja događaja bila deterministička funkcija $\lambda(t)$. Sada ćemo dalje uopštiti osnovni Poasonov proces pretpostavljajući da je i funkcija $\lambda(t)$ zapravo slučajna promenljiva $\Lambda(t)$, za svako $t \geq 0$. Dakle, skup $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ jeste stohastički proces. Iz ovog razloga, proces $\{N(t), t \geq 0\}$ se zove *dvostuko-stohastički Poasonov proces.*

Najpre ćemo razmatrati slučaj kada slučajna promenljiva $\Lambda(t)$ ne zavisi od t.

Definicija 2.4.1 *Neka je Λ pozitivna slučajna promenljiva. Ako je proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ, gde je $\Lambda = \lambda$, tada stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$ zovemo mešoviti Poasonov proces.*

Tvrđenje 2.4.1 *Mešoviti Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ima stacionarne, ali ne i nezavisne priraštaje.*

Dokaz: Posmatraćemo slučaj kada je Λ diskretna slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa prirodnih brojeva. Dakle,

$$\begin{aligned} P\{N(\tau+t)-N(\tau)=n\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(\tau+t)-N(\tau)=n|\Lambda=k\}p_\Lambda(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}\frac{(kt)^n}{n!}p_\Lambda(k). \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Pošto je uslov $N(0) = 0$ zadovoljen za bilo koju vrednost Λ, dalje možemo računati

$$P\{N(\tau+t)-N(\tau)=n\} = P\{N(t)=n\}, \text{ za svako } \tau, t \geq 0, n \geq 0.$$

Dakle, priraštaji procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ jesu stacionarni.
Koristeći jednakost (2.10) i Bajesovu teoremu za uslovnu verovatnoću, dalje pokazujemo

$$\begin{aligned}
P\{\Lambda = j|N(t) = n\} &= \frac{P\{N(t) = n|\Lambda = j\} \cdot P\{\Lambda = j\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{e^{-jt}((jt)^n/n!) \cdot p_\Lambda(j)}{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} \frac{(kt)^n}{n!} \cdot p_\Lambda(k)} \\
&= \frac{e^{-jt} j^n \cdot p_\Lambda(j)}{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} k^n \cdot p_\Lambda(k)}.
\end{aligned}$$

Broj događaja koji se pojave na intervalu $[0, t]$ nam, dakle, daje određene informacije o verovatnoći da slučajna promenljiva Λ uzima vrednost j. Što je veće j, veći je i broj očekivanih događaja koji će se pojaviti na intervalu $(t, t+\tau)$, gde je $\tau > 0$. Kao posledica ovoga, možemo zaključiti da priraštaji procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ nisu nezavisni. ■

Posledica 2.4.1 *Mešoviti Poasonov proces nije Poasonov proces ukoliko Λ nije konstantna.*

Napomena: U slučaju homogenog Poasonovog procesa sa stopom rasta $\lambda > 0$ važi da je $p_\Lambda(\lambda) = 1$, pa je i

$$P\{\Lambda = \lambda|N(t) = n\} = \frac{e^{(-\lambda t)}((\lambda t)^n/n!)}{e^{(-\lambda t)}((\lambda t)^n/n!)} = 1, \quad \text{za } n \geq 0.$$

U slučaju da je stopa rasta λ homogenog Poasonovog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ nepoznata, možemo je proceniti na osnovu posmatranja slučajne promenljive $N(t)$, za proizvoljno $t > 0$. Neka je $\overline{X}$ prosečan broj događaja koji se pojave na intervalu $[0, t]$, tj

$$\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n},$$

gde je X_k k-to posmatranje događaja $N(t)$. Najbolji ocenjivač za parametar λ je

$$\widehat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{t}.$$

Dakle, što je veći broj događaja koji se jave na intervalu $[0, t]$, veća je i procenjena vrednost za parametar λ. Međutim, kada jednom procenimo ovaj parametar, počinjemo iznova sa procenom zbog osobine da su priraštaji ovakvog procesa nezavisni.

Kada je Λ neprekidna slučajna promenljiva, važi da je

$$\varphi_{\Lambda|N(t)}(\lambda|n) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot \lambda^n \cdot \varphi_\Lambda(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\mu t} \cdot \mu^n \cdot \varphi_\Lambda(\mu) d\mu}, \qquad \text{za svako } \lambda > 0.$$

Obzirom da je $E(N(t)|\Lambda) = \Lambda t$ i $D(N(t)|\lambda) = \Lambda t$, možemo izračunati očekivanje i disperziju ovakvog procesa.

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= E(E(N(t)|\Lambda)) = t \cdot E(\Lambda) \\ D(N(t)) &= E(D(N(t)|\Lambda)) + D(E(N(t)|\Lambda)) + E(\Lambda t) + D(\Lambda t) \\ &= t \cdot E(\Lambda) + t^2 \cdot D(\Lambda). \end{aligned}$$

Primer2.4.8. Pretpostavimo da je stopa rasta Poasonovog procesa neprekidna slučajna promenljiva Λ takva da je

$$\varphi_\Lambda(\lambda) = \frac{2}{\lambda^3}, \qquad \text{ako je } \lambda \geq 0.$$

Može se pokazati da je

$$P\{N(t) > n\} = \int_0^\infty P\{\Lambda = \lambda\} \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, d\lambda.$$

Rešenje:
Iskoristimo ovu jednakost za računanje verovatnoće da će se tokom proizvoljne jedinice vremena desiti više od dva događaja. Najpre računamo

$$P\{\Lambda > \lambda\} = \int_0^\infty \frac{2}{x^3} dx = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{za } \lambda \geq 1.$$

Nas interesuje $P\{N(1) > 2\}$. Računajući integral, dobijamo

$$\begin{aligned} P\{N(1) > 2\} &= \int_0^1 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2} d\lambda + \int_1^\infty \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda^2 e^{-\lambda} d\lambda + \frac{1}{2} e^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(2 - 5e^{-1} + e^{-1}) \\ &= 1 - 2 \cdot e^{-1} \\ &\simeq 0.2642. \end{aligned}$$

Primer2.4.9. Ukoliko Λ ima geometrijsku raspodelu sa parametrom $p \in (0,1)$, tada je, na osnovu jednakosti (2.10),

$$\begin{aligned} P\{N(t)=n\} &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} \cdot \frac{(kt)^n}{n!} \cdot q^{k-1} \cdot p \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-t} \cdot q)^k \cdot k^n. \end{aligned}$$

Dakle, za $n=0$, imamo

$$P\{N(t)=0\} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-t} \cdot q)^k = \frac{p}{q} \left(\frac{e^{-t} \cdot q}{1 - e^{-t} \cdot q} \right).$$

Neka je $r := e^{-t}q$. Uvrštavanjem ove smene u predhodnu jednakost,za $n=1$ dobijamo

$$\begin{aligned} P\{N(t)=1\} &= \frac{p}{q} t \sum_{k=1}^{\infty} k r^k = \frac{p}{q} tr \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dr} r^k \\ &= \frac{p}{q} tr \frac{d}{dr} \frac{r}{1-r} = \frac{p}{q} \frac{tr}{(1-r)^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Primer2.4.10. (Poljin[2] proces)
Pretpostavimo da Λ ima gama raspodelu sa parametrima $\alpha = k \in 1, 2, \ldots$ i $\beta > 0$. Određujemo verovatnoću ovakvog procesa

$$\begin{aligned} P\{N(t)=n\} &= \int_0^{\infty} P\{N(t)=n|\Lambda=\lambda\} \cdot \varphi_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\beta e^{-\beta\lambda}) \cdot \frac{(\beta\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} d\lambda \\ &= \frac{t^n}{n!} \frac{\beta^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-(t+\beta)\lambda} \lambda^{n+k-1} d\lambda \\ &= |\text{ smena: } x = (t+\beta)\lambda| \\ &= \frac{t^n}{n!} \frac{\beta^k}{(k-1)!} \frac{1}{(t+\beta)^{n+k}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n+k-1} dx \end{aligned}$$

[2] Gorge Polya (1887-1985), rođen u R.Mađarskoj, umro u SAD. Svoj doprinos dao je u nekoliko oblasti matematike, među kojima su i teorija verovatnoće, teorija brojeva i kompleksna analiza.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t^n}{n!}\frac{\beta^k}{(k-1)!}\frac{1}{(t+\beta)^{n+k}}\cdot\Gamma(n+k)\\
&= \frac{t^n}{n!}\frac{\beta^k}{(k-1)!}\frac{1}{(t+\beta)^{n+k}}(n+k-1)!\\
&= \binom{n+k-1}{n}\cdot p^k\cdot(1-p)^n, \qquad \text{za } n\geq 0,
\end{aligned}
$$

gde je $p := \frac{\beta}{t+\beta}$.
U ovom slučaju $N(t)$ ima negativnu binomnu raspodelu (ili Paskalovu raspodelu) sa parametrima k i p. Tada se proces $\{N(t), t\geq 0\}$ zove *negativni binomni proces* ili *Poljin proces.*

Postoje razni načini da se definiše negativna binomna raspodela. Pokazani način uopštava geometrijsku raspodelu kada je definišemo kao slučajnu promenljivu koja broji promašaje pre prvog uspeha, što se može proveriti ako za k uzmemo baš $k=1$. Dakle, ovde je $N(t)$ istovetan slučajnoj promenljivoj koja broji promašaje pre k-tog uspeha. Primetimo još i da, kada je $k=1$, tada Λ ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom β.

Definicija 2.4.2 *Neka je $\{\Lambda(t), t\geq 0\}$stohastički proces za koji je $\Lambda(t)$ nenegativna, za svako $t\geq 0$. Ako je za $\Lambda(t)=\lambda(t)$, za svako $t\geq 0$, a proces prebrajanja $\{N(t), t\geq 0\}$ nehomogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$, tada se proces $\{N(t), t\geq 0\}$ zove dvostruko-stohastički Poasonov proces ili Koksov [3]proces, a proces $\{\Lambda(t), t\geq 0\}$ se zove proces intenziteta.*

Napomena: Ukoliko slučajna promenljiva $\Lambda(t)$ ne zavisi od t, onda je reč o mešovitom Poasonovom procesu. Ako je $\Lambda(t)$ deterministička funkcija $\lambda(t)$, tada je $\{N(t), t\geq 0\}$ nehomogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$. Dakle, homogeni, nehomogeni i mešoviti Poasonovi procesi jesu specijalni slučajevi dvostruko-stohastičkog Poasonovog procesa.
Ukoliko slučajna promenljiva $\Lambda(t)$ nije konstantna za $\lambda>0$ i za svako $t\geq 0$, dvostruko-stohastički Poasonov proces nije Poasonov proces.

Želimo sada da odredimo očekivanje i disperziju dvostruko-stohastičkog Poasonovog procesa. Najpre određujemo očekivanje.
Za svako $0\leq t_1\leq t_2$ važi

$$N(t_2)-N(t_1)|\{\Lambda(t), 0\leq t_1\leq t_2\} : \mathcal{P}(m(t_2)-m(t_1)),$$

[3]Sir David Cox, profesor na Oksford Univerzitetu u Engleskoj.

gde je

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds.$$

Takođe, može se pokazati

$$P\{N(t_2) - N(t_1)|\{\Lambda(t), 0 \leq t_1 \leq t_2\}\} = e^{\int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t)dt} \cdot \frac{(\int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t)dt)^k}{k!}, \text{ za } k \geq 0.$$

Da bismo pojednostavili zapis, uvešćemo sledeću smenu oznaka:

$$N(t)|\{\Lambda(s), s \in [0,t]\} = N(t)|\Lambda(0,t).$$

Očekivanje ovakvog događaja je

$$E(N(t)|\Lambda(0,t)) = \int_0^t \Lambda(s)ds,$$

pa je očekivanje procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ oblika

$$E(N(t)) = E(E(N(t)|\Lambda(0,t))) = E(\int_0^t \Lambda(s)ds) = \int_0^t E(\Lambda(s))ds.$$

Na sličan način dobijamo

$$E(N^2(t)|\Lambda(0,t)) = \int_0^t \Lambda(s)ds + (\int_0^t \Lambda(s)ds)^2.$$

Pošto je

$$E[(\int_0^t \Lambda(s)ds)^2] = E(\int_0^t \int_0^t \Lambda(s)\Lambda(u)dsdu) = \int_0^t \int_0^t E(\Lambda(s)\Lambda(u))dsdu,$$

možemo reći da je

$$E(N^2(t)) = E(E(N^2(t)|\Lambda(0,t))) = \int_0^t E(\Lambda(s))ds + \int_0^t \int_0^t R_\Lambda(s,u)dsdu.$$

Pogledajmo sada kakvog su oblika očekivanje i disperzija dvostruko-stohastičkog Poasonovog procesa, tako što pretpostavimo da je $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ homogen Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda > 0$. U tom slučaju,

$$E(\Lambda(t)) = \lambda t,$$

i

$$R_\Lambda(s,u) = \lambda min\{s,u\} + \lambda^2 su.$$

Određujemo očekivanje

$$\begin{aligned}
E(N(t)) &= \int_0^t \lambda s ds = \lambda \frac{t^2}{2} \\
E(N^2(t)) &= \lambda \frac{t^2}{2} + \int_0^t \int_0^t (\lambda min\{s,u\} + \lambda^2 su) dsdu \\
&= \lambda \frac{t^2}{2} + \int_0^t \int_0^t \lambda min\{s,u\} + \lambda^2 \frac{t^4}{4} \\
&= \lambda \frac{t^2}{2} + \lambda \frac{t^3}{3} + \lambda^2 \frac{t^4}{4}.
\end{aligned}$$

Disperzija ovakvog procesa bi bila oblika:

$$D(N(t)) = \lambda \frac{t^2}{2} + \lambda \frac{t^3}{3} + \lambda^2 \frac{t^4}{4} - (\lambda \frac{t^2}{2})^2 = \lambda(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}).$$

2.5 Filtrirani Poasonovi procesi

Nakon što smo uopštili homogeni Poasonov proces na razne načine, sledi uopštavanje složenog Poasonovog procesa.

Definicija 2.5.1 *Neka su $X_1, X_2, \dots$ slučajne promenljive koje su nezavisne i sa jednakim raspodelama i nezavisne od Poasonovog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ sa stopom rasta $\lambda > 0$. Definišimo stohastički proces $\{Y(t), t \geq 0\}$ na sledeći način*

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \omega(t, T_k, X_k), \text{ za svako } t \geq 0,$$

gde je $Y(t) = 0$ ako je $N(t) = 0$, a T_k su trenuci pojavljuvanja događaja Poasonovog procesa. Funkcija $\omega(\cdot,\cdot,\cdot)$ je funkcija reakcije. Ovako definisan proces zove se filtrirani Poasonov proces.

Primetimo da je složeni Poasonov proces specijalan slučaj filtriranog Poasonovog procesa kada je $\omega(t, T_k, X_k) = X_k$.

Primer2.5.11. Neka slučajna promenljiva $Y(t)$ predstavlja tok neke reke u trenutku t (od početka nekog perioda, na primer, od početka proleća), T_k su trenuci početka padavina (kiše ili snega), X_k su količina padavina posmatrana u trenutku T_k, i mere se u inčima vode ili vodenim ekvivalentima snega. Realno posmatrano, u praksi se ne desi da padavine istog trenutka padnu na tlo, već je potreban izvesni vremenski period. Međutim, moramo i diskretizovati vreme, jer se tok reka ne meri neprekidno, nego, u mnogim slučajevima, samo jednom dnevno. Zato indeks k predstavlja k-ti dan od početka posmatranja, a X_k je količina padavina u k-tom danu. Klasična funkcija reakcije za ovaj primer je oblika

$$\omega(t, T_k, X_k) = X_k \cdot e^{-(t-T_k)/c}, \text{ za } t \geq T_k, \tag{2.11}$$

gde je c pozitivna konstanta koja zavisi od svake reke i treba se posebno oceniti.

Pretpostavimo sada da slučajnu promenljivu T_k zamenimo sa determinističkom promenljivom s u funkciji $\omega(t, T_k, X_k)$. Neka je $f_\omega(\theta)$ karakteristična funkcija slučajne promenljive $\omega(t, T_k, X_k)$. Ona je oblika:

$$f_\omega(\theta) = f_\omega(\theta, t, s) = E\left(e^{j\theta\omega(t,s,X_k)}\right).$$

Koristeći Tvrđenje 2.1.6 , možemo pokazati da je karakteristična funkcija procesa $Y(t)$ oblika

$$f_{Y(t)}(\theta) = exp\{-\lambda t + \lambda \int_0^t f_\omega(\theta) ds\},$$

odakle sledi naredno tvrđenje.

Tvrđenje 2.5.1 *Ako je $E(\omega^2(t, s, X_k)) < \infty$, tada su očekivanje i disperzija procesa $Y(t)$ oblika*

$$\begin{aligned} E(Y(t)) &= \lambda \int_0^t E(\omega(t, s, X_k))ds \\ D(Y(t)) &= \lambda \int_0^t E(\omega^2(t, s, X_k))ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Napomena: U slučaju da je X_k neprekidna slučajna promenljiva, očekivanje $E(\omega^n(t, s, X_k))$ za $n = 1, 2$ računa se na sledeći način

$$E(\omega^n(t, s, X_k)) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n(t, s, X_k)\varphi_{X_k}(x)dx.$$

Može se pokazati da je

$$Cov(Y(t_1), Y(t_2)) = \lambda \int_0^{min\{t_1,t_2\}} E(\omega(t_1, s, X_k)\omega(t_2, s, X_k))ds,$$

za svako $t_1, t_2 \geq 0$.

Možemo uopštiti pojam filtriranog Poasonovog procesa ukoliko ga definišemo na sledeći način

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} W_k(t, T_k), \quad \text{za svako } t \geq 0,$$

gde važi da je $Y(t) = 0$ ako je $N(t) = 0$, i gde je $\{W_k(t, s), t, s \geq 0\}$ stohastički proces sa dva vremenska parametra.
Pretpostavimo da su procesi $\{W_k(t, s), t, s \geq 0\}$ nezavisni i sa jednakim raspodelama i nezavisni od Poasonovog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ sa stopom λ. Pri ovakvim uslovima, proces $\{Y(t), t \geq 0\}$ zovemo *uopšteni filtrirani*

Poasonov proces.
Može se pokazati da su očekivanje i disperzija ovakvog procesa oblika

$$
\begin{aligned}
E(Y(t)) &= \lambda \int_0^t E(W_1(t,s))ds, \\
D(Y(t)) &= \lambda \int_0^t E(W_1^2(t,s))ds.
\end{aligned}
$$

2.6 Procesi obnavljanja

Ključna karakteristika Poasonovog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ je da je vreme između uzastopnih događaja slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ, bez obzira na stanje u kojem se proces nalazi. Druga bitna karakteriskita je da su slučajne promenljive τ_i, vreme koje Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ provede u stanju i, nezavisne. Takođe smo definisali Poasonov proces kao neprekidan lanac Markova.
Još jedan način uopštavanja Poasonovog procesa je da pretposavimo da su nenegativne slučajne promenljive τ_i nezavisne, i sa istom raspodelom, pa stoga mogu imati ma koju raspodelu bilo diskretnu ili apsolutno neprekidnu.

Definicija 2.6.1 *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces prebrajanja i τ_i slučajna promenljiva koja označava vreme koje proces provede u stanju i, za $i \geq 0$. Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ zovemo proces obnavljanja ako su nenegativne slučajne promenljive τ_i nezavisne i sa istom raspodelom, za $i \geq 0$. Kažemo da se proces javi svaki put kada se javi i proces prebrajanja.*

Napomena: Moguće je transformisati proces obnavljanja u Poasonov proces za koji vreme provedeno u stanjima $0, 1, \ldots$ nema eksponencijalnu raspodelu.

Gornja definicija može se uopštiti ukoliko pretpostavimo da je slučajna promenljiva τ_0 nezavisna od ostalih promenljivih $\tau_1, \tau_2 \ldots$, ali ne mora striktno da znači da ima i istu raspodelu kao i te promenljive. U ovom slučaju, Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ zove se *modifikovan ili odložen proces obnavljanja.*

Vreme T_n n-tog ponavljanja neprekidnog stohastičkog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ definisanog kao

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i, \quad n = 1, 2 \ldots$$

zadovoljava relaciju

$$T_n \leq t \Leftrightarrow N(t) = n.$$

Ako uzmemo da je $T(0) = 0$, onda, kao i u Tvrđenju 2.1.4, možemo pisati kao

$$N(t) = max\{T_n \leq t, n \geq 0\}. \tag{2.13}$$

U opštem slučaju, veoma je teško naći tačnu funkciju raspodele za promenljivu T_n. Evo nekoliko slučajeva kada je poznata raspodela za slučajnu promenljivu τ_i.

- Ako $\tau_i : \mathcal{E}(\lambda)$, tada $T_n : \Gamma(n, \lambda)$
- Ako $\tau_i : \mathcal{P}(\lambda)$, tada $T_n : \mathcal{P}(n\lambda)$

Ukoliko je n dovoljno veliko, na osnovu centralne granične teoreme možemo zaključiti da

$$T_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2),$$

gde je $\mu_i = E(\tau_i)$ i $\sigma^2 = D(\tau_i)$, za svako i.

Primer2.6.12. Iskoristiti jednakost

$$P\{N(t) = n\} = P\{T_n \geq t\} - P\{T_{n+1} \geq t\}$$

za proveru da li za Poasonov proces sa stopom λ važi

$$P\{N(t) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad t, n \geq 0.$$

Rešenje:
U ovo slučaju, kao što je navedeno, važi

$$T_n : \Gamma(n, \lambda),$$

što implicira

$$P\{T_n \leq t\} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}dx.$$

Neka je $I_n := \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} x^n dx$, za $n \geq 0$. Kada uradimo parcijalnu integraciju, dobijemo

$$\begin{aligned}
I_n &= -x^n \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}|_0^t + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} = \ldots \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k+1)!} x^{n-k+1} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^k}|_0^t + \frac{n!}{\lambda^n} I_0 \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k+1)!} t^{n-k+1} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^k} + \frac{n!}{\lambda^n} I_0
\end{aligned}$$

gde je $I_0 := \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$.

Sledi da je

$$
\begin{aligned}
P\{T_{n+1} \leq t\} &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k+1)!} t^{n-k+1} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^k} + \frac{n!}{\lambda^n}\left(\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)\right) \\
&= 1 - e^{-\lambda t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lambda t)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Slično,

$$P\{T_n \leq t\} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

Sređujući jednakost

$$P\{N(t) = n\} = \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}\right) - \left(1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}\right),$$

konačno dobijamo da je

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

a što je i trebalo pokazati.

Kada je τ_i diskretna slučajna promenljiva, verovatnoća $P\{\tau_i = 0\}$ može biti strogo pozitivna. To znači da vreme potrebno da se neka pojava dogodi može biti i jednaka nuli. Na primer, ako je $\tau_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$, tada je $P\{\tau_i = 0\} = e^{-\lambda} > 0$. Međutim, ako nenegativna slučajna promenljiva τ_i nije stalno jednaka 0, možemo pisati da je $\mu > 0$. Ako pretpostavimo da je $\mu < \infty$ i $\sigma^2 < \infty$, na osnovu jakog zakona velikih brojeva, imamo

$$1 = P\{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \tau_i}{n} = \mu\} = P\{\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mu\},$$

na osnovu čega sledi da je

$$P\{\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\} = 1,$$

odakle zaključujemo, na osnovu jednakosti (2.13), da je

$$P\{N(t) = \infty\} = 0, \qquad \text{za svako} \quad t < \infty,$$

jer će slučajna promenljiva T_n na kraju biti veća od bilo kog konačnog t. To znači da ne postoji beskonačan broj ponavljanja nekog procesa u konačnom vremenskom intervalu. Međutim, obzirom da je $P\{T_n = \infty\} = 0$, možemo zaključiti da je

$$P\{\lim_{n\to\infty} N(t) = \infty\} = 1.$$

Pošto je u većini slučajeva veoma teško odrediti verovatnoću događaja $\{N(t) = n\}$, u opštem slučaju moramo da se bavimo nalaženjem očekivanja slučajne promenljive $N(t)$.

Definicija 2.6.2 *Funkcija $m_N(t) = E(N(t))$ zove se funkcija obnavljanja ili funkcija srednje vrednosti procesa obnavljanja $\{N(t), t \geq 0\}$.*

Tvrđenje 2.6.1 *Funkcija obnavljanja $m_N(t)$ može se definisati na sledeći način*

$$m_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \leq t\}. \tag{2.14}$$

Dokaz: Pošto je $N(t)$ slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa $\{0, 1, \ldots\}$, koristeći relaciju

$$T_n \leq t \Leftrightarrow N(t) = n,$$

možemo pisati

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P\{N(t) = i\} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P\{N(t) = i\} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{i} P\{N(t) = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P\{N(t) = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \leq t\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Napomena: Obzirom da je u praksi teško izračunati i verovatnoću $P\{T_n \leq t\}$, ovo tvrđenje nam uglavnom ne omogućava da izračunamo $m_N(t)$. Ako, eventualno, i uspemo da izračunamo $P\{N(t) = n\}$, za svako n, česti su slučajevi da je jednostavnije odrediti očekivanje procesa $N(t)$ direktnim korišćenjem definicije $E(N(t))$.

U nastavku ćemo razmatrati drugu tehniku izračunavanja $m_N(t)$, rešavajući integralnu jednačinu kada su τ_i-ovi neprekidne slučajne promenljive.

Primer2.6.13. Posmatramo slučaj kada τ_i ima Bernulijevu raspodelu sa parametrom $p \in (0,1)$. Tada važi

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i : \mathcal{B}(n,p),$$

tako da

$$P\{T_n \leq t\} = \sum_{k=0}^{[t]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gde je $[t]$ najveći ceo deo broja t. Teoretski, možemo odrediti vrednost sume

$$S(n,p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{[t]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gde važi da je $\binom{n}{k} = 0$, ako je $k > n$.

Posmatramo sada poseban slučaj, kada je $p = \frac{1}{2}$. Tada je

$$S\left(t, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(\frac{1}{2})^n \sum_{k=0}^{[t]} \binom{n}{k} \Big].$$

Računanjem dobijamo se sledeće rezultate:

$$\begin{aligned} S\left(0, \frac{1}{2}\right) &= 1, \\ S\left(1, \frac{1}{2}\right) &= 3, \\ S\left(2, \frac{1}{2}\right) &= 5, \\ S\left(3, \frac{1}{2}\right) &= 7, \text{ itd,} \end{aligned}$$

odakle sledi jednakost

$$S\left(t, \frac{1}{2}\right) = 2[t] + 1 \quad \text{za svako } t \geq 0.$$

Neka je sada $t = r \in \{0, 1, \ldots\}$. Obzirom da je $\tau_i = 0$ ili $\tau_i = 1$, za svako i, možemo zaključiti da je $N(r) \geq r$, pa tako dobijamo sledeću raspodelu

$$N(r) = \begin{cases} r, & \text{sa v-ćom} \quad p^{r+1} \\ r+1, & \text{sa v-ćom} \quad \binom{r+1}{n} p^{r+1}(1-p) \\ r+2, & \text{sa v-ćom} \quad \binom{r+2}{n} p^{r+1}(1-p)^2 \\ \ldots, & \ldots \end{cases}.$$

Uopšteno, imamo jednakost

$$P\{N(r) = r + k\} = \binom{r+k}{k} p^{r+1}(1-p)^k, \quad \text{za } k \geq 0.$$

Napomena: Koristimo jednakost $P\{N(r) = r\} = p^{r+1}$, a ne $P\{N(r) = r\} = p^r$, jer je $N(r) = r$ ako i samo ako svaki od prvih $r + 1$ ponavljanja zauzima jednu vremensku jedinicu. Konkretno,

$$\begin{aligned} N(0) = 0 &\Leftrightarrow \tau_0 = 1, \\ N(1) = 1 &\Leftrightarrow \tau_0 = 1 \quad \text{i} \quad \tau_1 = 1, \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Ako definišemo slučajnu promenljivu $X := N(r) + 1$, tada možemo tvrditi da X ima negativnu binomnu raspodelu sa parametrima $r + 1$ i p. Dakle, očekivanje ove slučajne promenljive je oblika $\dfrac{r+1}{p}$, odakle sledi

$$E(N(r)) = \frac{r+1}{p} - 1 \Rightarrow E(N(t)) = \frac{[t]+1}{p} - 1.$$

Primetimo da za $p = \dfrac{1}{2}$, ponovo dobijamo jednakost

$$S\left(t, \frac{1}{2}\right) = 2[t] + 1 \quad \text{za svako } t \geq 0,$$

koju smo već objasnili.

Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza.

Tvrđenje 2.6.2 *Između funkcije raspodele slučajne promenljive τ_i i funkcije obnavljanja $m_N(t)$ postoji preslikavanje "1-1".*

Pošto u slučaju Poasonovog procesa važi $m_N(t) = \lambda t$, sledi tvrđenje koje je posledica predhodnog tvrđenja.

Posledica 2.6.1 *Poasonov proces je jedini proces obnavljanja čija je funkcija obnavljanja linearna funkcija.*

Napomena: Poasonov proces je takođe i jedini Markovski proces obnavljanja.

U slučaju kada su slučajne promenljive τ_i apsolutno neprekidne, važi sledeća jednakost.

$$\begin{aligned} m_N(t) &= E(N(t)) = E(E(N(t)|\tau_0)) \\ &= \int_0^\infty E(N(t)|\tau_0 = \tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Dalje, na osnovu relacije $\tau_0 > t \Leftrightarrow N(t) = 0$ sledi da je

$$m_N(t) = \int_0^t E(N(t)|\tau_0 = \tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau.$$

Pošto su slučajne promenljive τ_i nezavisne i sa istom raspodelom, možemo pisati da je

$$E(N(t)|\tau_0 = \tau) = 1 + E(N(t-\tau)) = 1 + m_N(t-\tau), \quad \text{za } \tau \in [0, t].$$

Sledi da je

$$m_N(t) = \int_0^t (1 + m_N(t-\tau))\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau, \tag{2.15}$$

odnosno,

$$m_N(t) = F_{\tau_0}(t) + \int_0^t m_N(t-\tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau, \quad \text{za } t \geq 0. \tag{2.16}$$

Definicija 2.6.3 *Jednakost*

$$m_N(t) = F_{\tau_0}(t) + \int_0^t m_N(t-\tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau, \quad \textit{za } t \geq 0$$

zove se jednačina obnavljanja (za funkciju obnavljanja) procesa $\{N(t), t \geq 0\}$.

Da bismo tačno izračunali funkciju obnavljanja, često je lakše i jednostavnije rešiti integralnu jednačinu (2.16). Kada uvedemo smenu $s = t - \tau$, možemo je zapisati na sledeći način

$$m_N(t) = F_{\tau_0}(t) + \int_0^t m_N(s)\varphi_{\tau_0}(t-s)ds, \quad \text{za } t \geq 0.$$

Kada diferenciramo ovu jednakost, dobijemo

$$m'_N(t) = \varphi_{\tau_0}(t) + m_N(t)\varphi_{\tau_0}(0) + \int_0^t m_N(s)\varphi'_{\tau_0}(t-s)ds. \tag{2.17}$$

Kada je $\varphi_{\tau_0}(t-s)$ polinom, možemo je diferencirati po svim promenljivim dok ne dobijemo diferencijalnu jednačinu za funkciju $m_N(t)$. U tom slučaju, granični uslov bi bio $m_N(0) = 0$. Takođe, može se posmatrati funkcija $\varphi_{\tau_0}(t-s)$, iako nije polinomna funkcija.

Primer2.6.14. Odrediti funkciju obnavljanja za slučajnu promenljivu čija je funkcija gustine oblika

$$\varphi_{\tau_0}(t) = 4t^3, \quad \text{za } t \in [0,1].$$

Rešenje:
Na osnovu jednakosti (2.17), imamo:

$$\begin{aligned} m'_N(t) &= 4t^3 + m_N(t)\cdot 0 + \int_0^t m_N(s)12(t-s)^2 ds \\ &= 4t^3 + \int_0^t m_N(s)12(t-s)^2 ds, \quad \text{za } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Primetimo da ova jednačina implicira da je $m'_N(0) = 0$. Ukoliko gornju jednakost diferenciramo još jednom, dobijamo

$$m''_N(t) = 12t^2 + \int_0^t m_N(s)24(t-s)ds,$$

odakle zaključujemo da je $m''_N(0) = 0$. Dalje, diferenciramo pa je rezultat

$$m'''_N(t) = 24t + 24\int_0^t m_N(s)ds,$$

tako da je $m'''_N(0) = 0$. Konačno, nakon četvrtog diferenciranja dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$m^{iv}_N(t) = 24t + 24m_N(t)ds.$$

Opšte rešenje ove jednačine je oblika

$$m_N(t) = -1 + c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + c_3 e^{kt} + c_4 e^{-kt},$$

gde je $k = (24)^{1/4}$, i $c_1, \ldots c_4$ konstante. Rešenje koje zadovoljava uslove

$$m_N(0) = m'_N(0) = m''_N(0) = m'''_N(0) = 0,$$

je

$$m_N(t) = -1 + \frac{1}{2} \cos kt + \frac{1}{4}(e^{kt} + e^{-kt}), \quad \text{za } t \in [0, 1].$$

Ovo rešenje važi samo ako je $t \in [0, 1]$. Pošto slučajna promenljiva τ_0 uzima vrednosti iz intervala $[0, 1]$, očekivanje $M_N(1)$ mora biti veće od 1. Računamo, najzad,

$$m_N(1) = -1 + \frac{1}{2} \cos k + \frac{1}{4}(e^{k} + e^{-k}) \simeq 1.014.$$

Jednakost (2.16) predstavlja specijalan slučaj opšte jednačine obnavljanja

$$g(t) = h(t) + \int_0^\infty g(t - \tau) dF_{\tau_0}(\tau), \quad \text{za svako } t \geq 0, \tag{2.18}$$

gde su $h(t)$ i $F_{\tau_0}(\tau)$ funkcije koje su definisane za svako $t \geq 0$.

Može se dokazati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.6.3 *Funkcija $g(t)$ definisana kao*

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t - \tau) dm_N(\tau), \quad \textit{za svako} \quad t \geq 0,$$

jeste rešenje jednačine obnavljanja.

Napomena: Umesto $dm_N(\tau)$ može se koristiti i oznaka $m'_N(\tau)$.

Jednakost (2.16) zapravo sledi iz jednakosti (2.18), kada je $g(t) = m_N(t)$ i $h(t) = F_{\tau_0}(\tau)$, uz uslov $m_N(t) = 0$, ako je $t < 0$, ukoliko je funkcija $h(t)$ ograničena na konačnim intervalima. Ujedno, funkcija $g(t)$ jeste jedinstveno rešenje jednačine (2.17) sa ovakvom osobinom. Primetimo još i da je funkcija raspodele $F_{\tau_0}(\tau) = h(t)$ ograničena funkcija, jer je $F_{\tau_0}(\tau) \in [0, 1]$, za svako $t \geq 0$.

Posledica 2.6.2 *Ako je τ_0 neprekidna slučajna promenljiva, tada je momenat drugog reda za slučajnu promenljivu $N(t)$, $E(N^2(t))$, oblika*

$$E(N^2(t)) = m_N(t) + 2\int_0^t m_N(t)(t-\tau)dm_N(\tau), \quad \textit{za svako} \quad t \geq 0,.$$

Dokaz: Računamo, po definiciji.

$$\begin{aligned}
E(N^2(t)) &= \int_0^\infty E(N^2(t)|\tau_0 = \tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t E(N^2(t)|\tau_0 = \tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t E((1 + N_{t-\tau})^2)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t (1 + E(N_{t-\tau}) + E(N^2_{t-\tau}))\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau \\
&= F_{\tau_0}(t) + 2\int_0^t m_N(t-\tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau + \\
&\quad \int_0^t E(N^2_{t-\tau}))\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Koristeći jednakost (2.16), dobijamo rezultat:

$$E(N^2(t)) = 2m_N(t) - F_{\tau_0}(t) + \int_0^t E(N^2_{t-\tau}))\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau.$$

Ova jednakost je istog oblika kao i jednakost (2.18), gde je $g(t) = E(N^2(t))$, a $h(t) = 2m_N(t) - F_{\tau_0}(t)$, jer je $g(t) = 0$, ako je $t < 0$. Dalje, na osnovu Tvrđenja 2.6.3 sledi da je

$$E(N^2(t)) = 2m_N(t) - F_{\tau_0}(t) + \int_0^t (2m_N(t-\tau) - F_{\tau_0}(t-\tau))dm_N(\tau).$$

Dalje, sređivanjem dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_0^t F_{\tau_0}(t-\tau))dm_N(\tau) &= F_{\tau_0}(t-\tau))m_N(\tau)|_0^t + \int_0^t \varphi_{\tau_0}(t-\tau)m_N(\tau)d\tau \\
&= 0 + \int_0^t \varphi_{\tau_0}(\tau)m_N(t-\tau)d\tau \\
&\overset{(2.16)}{=} m_N(t) - F_{\tau_0}(t),
\end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje. ■

Primer2.6.15. Ukoliko je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ, tada je

$$E(N^2(t)) = D(N(t)) + (E(N(t)))^2 = \lambda t + (\lambda t)^2,$$

što je zaista ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} m_N(t) + 2\int_0^t m_N(t-\tau)dm_N(\tau) &= \lambda t + 2\int_0^t \lambda(t-\tau)\lambda d\tau \\ &= \lambda t + 2\lambda^2(t^2 - \frac{t^2}{2}). \end{aligned}$$

Primer2.6.16. Kada je $\varphi_{\tau_0}(t) = 1$ za $t \in [0,1]$, tada je

$$E(N(t)) = e^t - 1, \quad \text{za} \quad t \in [0,1].$$

Odavde sledi da je

$$\begin{aligned} E(N^2(t)) &= e^t - 1 + 2\int_0^t (e^{t-\tau} - 1)e^\tau d\tau \\ &= e^t - 1 + 2\int_0^t (e^t - e^\tau)d\tau \\ &= e^t - 1 + 2(te^t - (e^t - 1)) \\ &= e^t(2t-1) + 1, \qquad \text{za } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Kao i u Primeru 6.14 uslov $\tau_0 \in [0,1]$ implicira da je $E(N^k(1)) > 1$ za $k = 1, 2 \ldots$. Sledi

$$E(N(1)) = e - 1 \qquad \text{i} \qquad E(N^2(1)) = e + 1.$$

Znamo da je suma dva nezavisna Poasonova procesa sa stopama rasta λ_1 i λ_2 takođe Poasonov proces sa stopom $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Može se pokazati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.6.4 *Neka su* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *i* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *nezavisni procesi obnavljanja. Proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *, definisan kao*

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad \text{za } t \geq 0$$

je proces obnavljanja ako i samo ako je $\{N_i(t), t \geq 0\}$ *Poasonov proces, za* $i = 1, 2$.

Sledeće tvrđenje takođe navodimo bez dokaza.

Tvrđenje 2.6.5 *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces obnavljanja. Momenat k-tog reda za promenljivu $N(t)$ postoji i konačan je, odnosno za svako $k \in \{1, 2 \ldots\}$ važi*

$$E(N^k(t)) < \infty, \qquad \textit{za svako } t < \infty.$$

Napomena: Na osnovu ovog tvrđenja sledi da je i $m_N(t) < \infty$, za svako $t < \infty$. To znači da, ne samo da broj ponavljanja nekog događaja na konačnom intervalu ne može biti beskonačan, nego da ni očekivanje broja ponavljanja na tom intervalu takođe ne može biti beskonačno.

2.6.1 Granične teoreme

Označimo sa $T_{N(t)}$ vreme proteklo od poslednjeg ponavljanja događaja koje se dogodilo pre ili u trenutku t. Analogno, $T_{N(t+1)}$ predstavlja vreme proteklo od prvog ponavljanja događaja nakon trenutka t.

Najpre ćemo pokazati da prosečan broj ponavljanja događaja po jedinici vremena, $N(t)/t$, teži ka $1/\mu$, kada $t \to \infty$, uz pretpostavku da je $\mu = E(\tau_i)$ konačno, za svako i. Konstanta $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ zove se *stopa procesa.*

Tvrđenje 2.6.6 *Za prosečan broj događaja po jedinici vremena važi sledeće:*

$$P\{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda\} = 1,$$

gde je $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$.

Dokaz: Na osnovu same definicije, važi

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t+1)},$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t+1)}}{N(t)}.$$

Na osnovu jakog zakona velikih brojeva, pošto je $E(\tau_i) < \infty$, za $N(t) > 0$ imamo:

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \sum_{i=0}^{N(t)-1} \frac{\tau_i}{N(t)} \to \mu,$$

kada $N(t) \to \infty$, sa verovatnoćom 1, što će biti samo u slučaju kada $t \to \infty$. Odnosno važi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \mu.$$

Konačno, pošto važi jednakost

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \frac{T_{N(t+1)}}{N(t)+1}(1 + \frac{1}{N(t)}),$$

zaključujemo da je

$$\mu \leq \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \mu,$$

odnosno,

$$\frac{1}{\mu} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Drugačije zapisano,

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right\} = 1. \qquad \blacksquare$$

Sledeća je teorema se odnosi na očekivani broj ponavljanja događaja po jedinici vremena, a koji takođe konvergira ka λ. Ova teorema nije posledica predhodnog tvrđenja jer osobina da niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konavergira ka konstanti c ne implicira da i niz $\{E(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira ka konstanti c.

Teorema 2.6.1 (Osnovna teorema obnavljanja) *Ako je očekivanje $E(\tau_i)$ konačno, tada važi da je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \lambda.$$

Napomena: Ova teorema važi i ako je $\mu = \infty$, jer je onda $\lambda = \frac{1}{\mu} = 0$. Tvrđenje 2.6.6 takođe važi kada je $\mu = \infty$.

U predhodnoj teoremi ne pominje se verovatnoća jer je $E(N(t))$ deterministička funkcija od t, dok je $N(t)$ slučajna promenljiva.

Sledeće dve teoreme navodimo bez dokaza.

Teorema 2.6.2 *Ako je $\mu = E(\tau_0) < \infty$ i $\sigma^2 = D(\tau_0) < \infty$, tada je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(N(t))}{t} = \sigma^2\lambda^3.$$

Teorema 2.6.3 (Centralna granična teorema za proces obnavljanja) *Ako je $E(\tau_0^2)$ konačno, tada je*

$$N(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{t}{\mu}, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right),$$

odnosno

$$N(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t, \sigma^2\lambda^3 t),$$

ako je t dovoljno veliko.

Tvrđenje koje sledi može se iskoristiti u dokazu Teoreme 2.6.1.

Tvrđenje 2.6.7 *Važi jednakost*

$$E(T_{N(t+1)}) = E(\tau_0)(E(_{N(t)}) + 1).$$

Dokaz: Uslovljavanjem vrednosti koje uzima slučajna promenljiva τ_0 koja je po pretpostavci neprekidna, dobijamo

$$\begin{aligned}
E(T_{N(t+1)}) &= \int_0^\infty E(T_{N(t+1)}|\tau_0 = \tau)\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t (\tau + E(T_{N(t-\tau)+1}))\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau + \int_0^\infty \tau\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty \tau\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau + \int_0^t E(T_{N(t-\tau)+1}))\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau \\
&= E(\tau_0) + \int_0^t E(T_{N(t-\tau)+1}))\varphi_{\tau_0}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Ova jednakost predstavlja specijalan slučaj jednačine obnavljanja (2.18), gde je $g(t) = E(T_{N(t+1)})$ i $h(t) = E(\tau_0)$. Kada oba člana jednakosti podelimo sa $E(\tau_0)$ i oduzmemo konstantu 1, dobijamo

$$\begin{aligned} g^*(t) : &= \frac{E(T_{N(t+1)})}{E(\tau_0)} - 1 \\ &= \int_0 t \frac{E(T_{N(t-\tau)+1})}{E(\tau_0)} \varphi_{\tau_0}(\tau) d\tau \\ &= \int_0 t (g^*(t-\tau) + 1) \varphi_{\tau_0}(\tau) d\tau \\ &= F_{\tau_0}(t) + \int_0 t g^*(t-\tau) \varphi_{\tau_0}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ova jednakost ekvivalentna je se jednakosti (2.16). Zbog jedinstvenosti rešenja važi

$$m_N(t) = \frac{E(T_{N(t+1)})}{E(\tau_0)} - 1,$$

što je ekvivalentno sa jednakosti

$$E(T_{N(t+1)}) = E(\tau_0)(m_N(t) + 1). \qquad \blacksquare$$

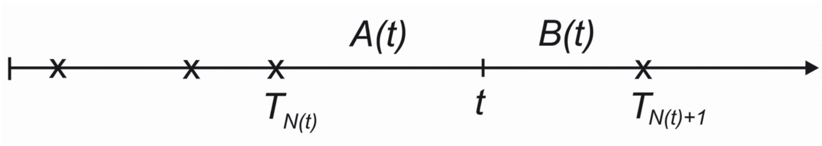
Definicija 2.6.4 *Neka je t fiksirani vremenski trenutak. Slučajna promenljiva*

$$A(t) := t - T_{N(t)}$$

zove se starost procesa obnavljanja u trenutku t, dok je

$$B(t) := T_{N(t)+1} - t$$

preostali vek trajanja procesa u trenutku t.



Slika 2.3: Starost i preostali vek trajanja procesa obnavljanja

Može se pokazati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.6.8 *Funkcija raspodele za $B(t)$ je oblika*

$$F_{B(t)} = F_{\tau_0}(t+r) - \int_0^t (1 - F_{\tau_0}(t+r-\tau))dm_N(\tau), \quad r \geq 0.$$

Funkcija raspodele za $A(t)$ je oblika

$$P\{A(t) \geq a\} = 1 - F_{\tau_0}(t) - \int_0^{t-a} (1 - F_{\tau_0}(t-\tau))dm_N(\tau), \quad a \in [0,t].$$

i

$$P\{A(t) \geq a\} = 0, \qquad a > t.$$

Kada je t dovoljno veliko i τ_0 neprekidna slučajna promenljiva, funkcija gustine je oblika

$$\varphi_{B(t)}(r) \simeq \frac{1}{E(\tau_0)}(1 - F_{\tau_0}(r)), \qquad \text{za } r \geq 0.$$

Zapravo, ova jednakost za funkciju gustine za $B(t)$ je tačna ako je proces obnavljanja $\{N(t), t \geq 0\}$ stacionaran.

Pretpostavimo sada da u momentu n-tog ponavljanja procesa $\{N(t), t \geq 0\}$ primimo nagradu R_n (koja može biti i trošak!). Pretpostavimo , takođe da su nagrade $\{R_N\}_{n=1}^{\infty}$ nezavisne i sa istom raspodelom slučajne promenljive. U opštem slučaju, R_n zavisi od τ_{n-1}, odnosno od dužine perioda n-tog ponavljanja koji se zove *ciklus*. Neka je $R(t)$ ukupna nagrada primljena na intervalu $[0, \tau]$. To znači da je

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n,$$

i važi da je $R(t) = 0$ ako je $N(t) = 0$. Pokazaćemo da je prosečna nagrada primljena po jedinici vremena, u graničnom smislu, jednaka prosečnoj nagradi primljenoj tokom ciklusa podeljenoj sa prosečnom dužinom trajanja ciklusa.

Tvrđenje 2.6.9 *Ako je $E(R_1) < \infty$ i $E(\tau_0) < \infty$, tada važi da je*

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R_1)}{E(\tau_0)}\right\} = 1.$$

Dokaz: Koristimo zakon velikih brojeva i Tvrđenje (2.6.6). Pošto $N(t) \to \infty$ kada $t \to \infty$, možemo pisati

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{N(t)}\frac{R_n}{N(t)} = E(R_1)\right\} = 1,$$

odakle je

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{N(t)} R_n \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)}\right)\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\frac{N(t)}{t}\right) \\
&= E(R_1)\cdot\frac{1}{E(\tau_0)},
\end{aligned}$$

sa verovatnoćom 1, čime smo dokazali tvrđenje. ■

Vrednost nagrade može biti i pozitivna i negativna, pa je potrebno pretpostaviti da je $E(|R_1|) < \infty$.

Takođe se može pokazati da važi

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E(R(t))}{t} = \frac{E(R_1)}{E(\tau_0)}.$$

Uz pomoć predhodnog tvrđenja dokazaćemo naredno.

Tvrđenje 2.6.10 *Ako je τ_0 neprekidna slučajna promenljiva, tada sa verovatnoćom 1 važi*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t A(\tau)d\tau}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t B(\tau)d\tau}{t} = \frac{E({\tau_0}^2)}{2E(\tau_0)}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je nagrada primljena u trenutku t data sa $A(t)$. Tada dobijamo da je

$$E(R_1) = E(\int_0^{\tau_0}\tau d\tau) = E\left(\frac{\tau_0^2}{2}\right) = \frac{E({\tau_0}^2)}{2}.$$

Analogno se pokazuje i drugi deo jednakosti, kada nagradu primljenu u trenutku t označimo sa $B(t)$, a u integralu promenljivu τ zamenimo sa $\tau_0 - \tau$.
■

Na ovaj način smo odredili prosečnu vrednost preostalog životnog ciklusa procesa rokom dugog vremenskog perioda, što predstavlja vremensku sredinu (ili sredinu vremena), a ne očekivanje.
Ako je $E(\tau_0^2) < \infty$, takođe se može pokazati da važi jednakost

$$\lim_{t\to\infty} E(A(t)) = \lim_{t\to\infty} E(B(t)) = \frac{E({\tau_0}^2)}{2E(\tau_0)}.$$

Primer2.6.17. Ako je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces, koristeći osobinu da su priraštaji nezavisni i stacionarni, možemo zaključiti da $B(t)$ ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ. Stoga važi da je

$$E(B(t)) = \frac{1}{\lambda}.$$

Pošto je $\tau_0 : \mathcal{E}(\lambda)$, važi i

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t B(\tau)d\tau}{t} = \frac{1/\lambda^2 + (1/\lambda)^2}{2/\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

pa su, u ovom slučaju sredina vremena i očekivanje jednaki, za svako $t \geq 0$.

Primer2.6.18.

a) Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces brojanja za koje vreme između dva događaja ima uniformnu raspodelu na intervalu $[0, s]$, gde je

$$S : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Objasniti zašto $\{N(t), t \geq 0\}$ nije proces obnavljanja.

b) Ako u zadataku a) pretpostavimo da je s slučajna promenljiva čija je vrednost određena u trenutku $t = 0$, i nakon svakog događaja baca se ispravan novčić, pa je tada promenljiva S oblika

$$S = \begin{cases} 1, & \text{ako padne "pismo"} \\ 2, & \text{ako padne "glava"} \end{cases}.$$

U ovom slučaju stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$ jeste proces obnavljanja.

i) Izračunati $m_N(t)$, za $t \in [0, 1]$.

ii) Pretpostavimo da dobijemo nagradu 1$ ukoliko je dužina ciklusa veća od 1 (i 0$ u suprotnom). Izračunati prosečnu nagradu po jedinici vremena tokom dugog vremenskog perioda.

Rešenje:

a) $\{N(t), t \geq 0\}$ nije proces obnavljanja jer vremena između sukcesivnih događaja nisu nezavisne slučajne promenljive. Zaista, što je τ_0 manje, veća je verovatnoća da je $s = 1$. Dakle, τ_k-ovi zavise od τ_0, za $k \geq 1$.

b) i) Neka je τ dužina ciklusa. Računamo

$$\begin{aligned}
F(t) &= P\{\tau \leq t\} \\
&= P\{\tau \leq t|S = 1\} \cdot P\{S = 1\} + P\{\tau \leq t|S = 2\} \cdot P\{S = 2\},
\end{aligned}$$

odnosno,

$$F(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{t}{2}) = \frac{3t}{4}, \quad \text{za } t \in [0, 1].$$

Sledi da je jednačina obnavljanja jednaka

$$\begin{aligned}
m_n(t) &= \frac{3t}{4} + \int_0^t m(t-x)\frac{3}{4}dx \\
&= |\text{smena: } y = t - x| \\
&= \frac{3t}{4} + \frac{3}{4}\int_0^t m_N(y)dy,
\end{aligned}$$

odakle sledi

$$m'_N(t) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}m_N(t).$$

Na osnovu početnog uslova $m_N(0) = 0$ i na osnovu opšteg rešenja obične diferencijalne jednačine

$$F(x) = e^{-cx}(F(0) + \int_0^x e^{cy}G(y)dy), \quad x \geq 0, \ c\text{=const.}$$

dobijamo da je

$$m_N(t) = e^{3t/4}(0 + \int_0^t e^{-3y/4}\frac{3}{4}dy) = e^{3t/4} - 1, \qquad \text{za } t \in [0, 1].$$

ii) Na osnovu teoreme o totalnoj verovatnoći imamo

$$\begin{aligned} E(\tau_0) &= E(\tau_0|S=1)\cdot P\{S=1\}+E(\tau_0|S=2)\cdot P\{S=2\} \\ &= \frac{1}{4}\cdot 12=\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

i

$$E(R_1) \quad = \quad E(R_1|S=1)\cdot P\{S=1\}+E(R_1|S=2)\cdot P\{S=2\}=\frac{1}{4}.$$

Zato je očekivana nagrada po jedinici vremena (tokom dugog vremenskog perioda)

$$\frac{E(R_1)}{E(\tau_0)}=\frac{1}{3}.$$

2.6.2 Regenerativni procesi

Znamo da Poasonov proces $\{N(t), t\geq 0\}$ startuje iznova u bilo kom vremenskom trenutku jer ima nezavisne i stacionarne priraštaje. Međutim, pošto je to proces prebrajanja, kada se desi prvi događaj, $N(t)$ više nikad neće imati vrednost 0. U ovom delu bavićemo se procesima koji će se na kraju vratiti u početno, inicijalno stanje i u tom momentu povratka proces će startovati iznova. Ovakav tip stohastičkog procesa zove se *regenerativni proces.*

Definicija 2.6.5 *Neka je τ_0 vreme koje diskretni stohastički proces $\{X(t), t\geq 0\}$ provede u početnom stanju $X(0)$. Pretpostavimo da važi*

i) $P\{X(t)=X(0), t>\tau_0\}=1$,

ii) Procesi $\{X(t)-X(0), t\geq 0\}$ i $\{Y(t), t\geq 0\}$, gde $Y(t)=X(t+T_1)-X(T_1)$ i T_1, vreme prvog povratka u početno stanje, imaju istu raspodelu.

iii) Stohastički proces $\{Y(t), t\geq 0\}$ je nezavisan od procesa $\{X(t), t\in [0,T_1]\}$.

Tada se proces $\{X(t), t\geq 0\}$ zove regenerativni proces.

Ako označimo sa T_n vreme n-tog povratka u početno stanje za $n\in \{1,2,\ldots\}$, i ako pretpostavimo da je $P\{T_1<\infty\}=1$, tada sledi da vremenski trenuci $T_2, T_3, \ldots$ takođe postoje i konačni su, sa verovatnoćom 1.

Definicija 2.6.6 *Ciklusi regenerativnog procesa su procesi*

$$\{C_0(t), t \in [0, T_1]\} \quad i \quad \{C_n(t), t \in [T_n, T_{n+1}]\},$$

za $n \in \mathbb{N}$, gde su stohastički procesi nezavisni i sa istom raspodelom za $n \in \mathbb{N}_0$.

Prema Definiciji 2.6.5 proces obnavljanja nije regenerativan jer je to specijalan proces prebrajanja. Međutim, možemo povezati proces obnavljanja $\{N(t), t \geq 0\}$ sa regenerativnim procesom $\{X(t), t \geq 0\}$ tako što ćemo označiti sa $N(t)$ broj slučajeva kada se $\{X(t), t \geq 0\}$ vratio u početno stanje i startovao iznova, na intervalu $[0, t]$. Tada $N(t)$ zapravo predstavlja broj završenih ciklusa na ovom intervalu. Obrnuto, možemo definisati regenerativni proces $\{X(t), t \geq 0\}$ iz procesa obnavljanja $\{N(t), t \geq 0\}$, za koji je $N(0) = 0$, kao što sledi

$$X(t) = \begin{cases} N(t), & t \in [0, T_k^*) \\ N(t) - k, & t \in [T^*k, T_{2k}^*) \\ N(t) - 2k, & t \in [T_{2k}^*, T_{3k}^*) \\ \ldots, & \ldots \end{cases} \tag{2.19}$$

za neko $k \in \{2, 3, \ldots\}$, gde su T_1^*, T_2^* vremena kada se desi ponavljanje. Primetimo da za $k = 1$ imamo da je $X(t) = 0$. Tada je $T_1 = T_k^*$.

Primer2.6.19. Neka je $\{X(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ diskretni lanac Markova, čije stanje pripada skupu $\{0, 1\}$, i čija je matrica prelaza za jedan korak data sa

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je $X(0) = 0$. Pošto je ovakav lanac nepovratan i ima konačan broj stanja, možemo reći da je rekurentan. Zato je verovatnoća da će proces ponovo doći u početno stanje 0 jednaka 1. Sledi da je ovakav lanac Markova regenerativan proces. Ako pretpostavimo da se svaki prelaz ovog lanca iz jednog stanja u drugo, dešava u jednoj vremenskoj jedinici, tada možemo pisati da je

$$P\{T_1 = 1\} = P\{T_1 = 2\} = 0.5.$$

Konačno , neka je $N(0) = 0$, i $N(t)$ broj vraćanja u stanje 0 na intervalu $(0, t]$, za $t > 0$. Tada je proces $\{N(t), t \geq 0\}$ proces obnavljanja.

Tvrđenje 2.6.11 *Ako je $E(T_1) < \infty$, tada je π_k, deo vremena koje regenerativni proces provede u stanju k, jednak*

$$\pi_k = \frac{E(\textit{vreme provedeno u stanju } k \textit{ na intervalu } [0, T_1])}{E(T_1)}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da primimo nagradu od 1\$ po jedinici vremena kada je proces $\{X(t), t \geq 0\}$ u stanju k, i 0\$ u suprotnom. Tada je ukupna nagrada primljena na intervalu $[0, t]$ data sa

$$R(t) = \int_0^t I_{\{X(\tau)=k\}} d\tau,$$

gde je $I_{\{X(\tau)=k\}}$ indikator slučajne promenljive za događaj $\{X(\tau) = k\}$. Ako je $E(T_1) < \infty$, na osnovu Tvrđenja 2.6.9 sledi da je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R_1)}{E(T_1)},$$

sa verovatnoćom 1, gde je R_1 vreme koje je proces proveo u stanju k na intervalu $[0, T_1]$. Onda je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t}$$

deo vremena koje je proces proveo u stanju k, pa jednakost važi. ■

Ovo tvrđenje važi za bilo koji tip slučajne promenljive T_1. Ako je T_1 apsolutno neprekidna slučajna promenljiva, može se pokazati da je

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) = k\} = \pi_k.$$

Drugim rečima, π_k je granična verovatnoća da će proces u trenutku t takođe biti u stanju k.

Ukoliko je proces $\{X(t), t \geq 0\}$ definisan kao jednakost (2.19), možemo zaključiti da je

$$\pi_0 = \pi_1 = \ldots = \pi_{k-1} = \frac{1}{k},$$

jer su $T_1^*, T_2^*, \ldots$ nezavisne i sa istom raspodelom.

Primer2.6.20. Posmatramo diskretan lanac Markova $\{X(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ sa mogućim stanjima $\{0, 1, 2\}$, i matricom prelaza koja je oblika

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je početno stanje 0 i važi da kada proces uđe u stanje, ostane u njemu dok slučajna promenljiva vremena (ili vreme?) ima očekivanje μ_i, za $i \in \mathbb{N}_0$, nezavisno od stanja. Izračunati vreme koje proces provede u stanju 0 posle dugog vremenskog perioda.

Rešenje:
Lanac Markova je rekurentan jer je nepovratan i ima konačan broj stanja. Tada je proces $\{X(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ regenerativan.
Neka je T_1 trenutak prvog vraćanja u stanje 0, i N broj prelazaka potrebnih da se proces vrati u stanje 0. Tada važi

$$E(T_1|N=n) = \mu_0 + \mu_1 + (n-2)\mu_2, \qquad \text{za } n = 2, 3 \ldots .$$

Pošto je

$$P\{N=n\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{za } n = 2, 3 \ldots ,$$

sledi da je

$$\begin{aligned} E(T_1) &= E(E(T_1|N)) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (\mu_0 + \mu_1 + (n-2)\mu_2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} . \end{aligned}$$

Konačno, možemo pisati da je

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 1,$$

tako da je

$$E(T_1) = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2.$$

Dakle, vreme koje proces provede u stanju 0 nakon dugog vremenskog perioda je oblika

$$\frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2}.$$

Vrlo važan specijalan slučaj regenerativnog procesa jeste onaj proces $\{X(t), t \geq 0\}$koji može da se nađe samo u dva stanja koja možemo označiti sa 0 i 1.
Posmatrajmo takav primer. Neka je $X(t) = 0$ ako je neka mašina u trenutku t u kvaru, a $X(t) = 1$ ako je mašina u trenutku t ispravna. Pretpostavimo još i da je u početnom trenutku 0 mašina potpuno nova, tako da je $X(0) = 1$, i da je vreme tokom kojeg je mašina ispravna dok se prvi put ne pokvari

slučajna promenljiva S_1. Pretpostavimo dalje, da majstor popravlja mašinu tokom slučajnog perioda U_1 nakon čega je mašina ponovo ispravna, a proces startuje iznova. Neka je

$$T_n = S_n + U_n,$$

za $n = 1, 2, \ldots$, gde je S_n period kada je mašina ispravna, između $(n-1)$-og i n-tog kvara, a U_n je period popravke n-tog kvara, za $n = 2, 3, \ldots$. Pretpostavićemo da su slučajne promenljive $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezavisne i sa istom raspodelom, što ćemo pretpostaviti i za slučajne promenljive $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Međutim, može se pretpostaviti i da su slučajne promenljive S_n i U_n međusobno zavisne. Ovakav slučaj stohastičkog procesa zove se *naizmeničan proces ponavljanja.*

Napomena: Ako pretpostavimo da je $N(t)$ broj popravljanja mašine na intervalu $[0, t]$. Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ jeste proces obnavljanja, a T_n-ovi jesu trenuci nastanka obnavljanja. Međutim, ovako definisan proces $\{X(t), t \geq 0\}$ nije proces obnavljanja, jer nije ni proces prebrajanja.

Koristeći jednačinu obnavljanja, možemo formulisati sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.6.12 *Neka je $\pi_1(t)$ verovatnoća da je $X(t) = 1$. Tada je*

$$\pi_1 = 1 - F_{S_1}(t) + \int_0^t (1 - F_{S_1}(t-\tau))dm_N(t).$$

Na osnovu Tvrđenja 2.6.11 važi da je

$$\pi_1 = 1 - \pi_0 = \frac{E(S_1)}{E(S_1) + E(U_1)} = \frac{E(S_1)}{E(T_1)}.$$

Ako je T_1 slučajna promenljiva, tada je

$$\lim_{t\to\infty} = \pi_1(t) = \pi_1.$$

Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces obnavljanja, i

$$X(t) = \begin{cases} 1, & A(t) < a \\ 0, & A(t) \geq a \end{cases}, \tag{2.20}$$

gde je $a > 0$ konstantno, a $A(t)$ starost procesa obnavljanja u trenutku t. Proces $\{X(t), t \geq 0\}$je naizmeničan proces ponavljanja, i iz jednakosti

$$\pi_1 = 1 - \pi_0,$$

sledi da je

$$\pi_1 = \frac{E(S_1)}{E(T_1)} = \frac{E(min\{T_1^*, a\})}{E(T_1^*)}, \tag{2.21}$$

gde je T_1^* vreme prvog ponavljanja stohastičkog procesa $\{N(t), t \geq 0\}$.

Napomena: Ukoliko je $T_1^* < a$, tada je $U_1 = 0$.

U apsolutno neprekidnom slučaju važi:

$$\begin{aligned} E(min\{T_1^*, a\}) &= \int_0^\infty min\{t, a\}\varphi_{T_1^*}(t)dt \\ &= \int_0^a t \cdot \varphi_{T_1^*}(t)dt + \int_a^\infty a \cdot \varphi_{T_1^*}(t)dt. \end{aligned}$$

Dalje računamo

$$\begin{aligned} \int_0^a t \cdot \varphi_{T_1^*}(t)dt &= t \cdot F_{T_1^*}(t)|_0^a - \int_0^a F_{T_1^*}(t)dt \\ &= a \cdot F_{T_1^*}(a) - \int_0^a F_{T_1^*}(t)dt, \end{aligned}$$

odakle sledi jednakost

$$\begin{aligned} E(min\{T_1^*, a\}) &= a \cdot F_{T_1^*}(a) - \int_0^a F_{T_1^*}(t)dt + aP\{T_1^* > a\} \\ &= a - \int_0^a F_{T_1^*}(t)dt. \end{aligned}$$

Stoga, možemo pisati da je

$$\pi_1 = \frac{\int_0^a P\{T_1^* > t\}dt}{E(T_1^*)}.$$

Napomena: Ukoliko u jednakosti (2.20) $A(t)$ zamenimo sa $B(t)$, dobijamo ekivalentnu jednakost.

Primer2.6.21. Ako je $T_1^* : \mathcal{E}(\lambda)$, tada je

$$P\{T_1^* > t\} = e^{-\lambda t}.$$

Onda je i vreme koje proces provede u stanju 1 jednak

$$\pi_1 = \frac{\int_0^a e^{-\lambda t}dt}{1/\lambda} = 1 - e^{-\lambda a}.$$

Prilog A

Prilog

A.1 Neki pojmovi iz teorije verovatnoće

- Funkcija raspodele $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ slučajne promenljive X je definisana kao
$$F_X(x) = P\{X < x\}.$$
Ona jedinstveno određuje slučajnu promenljivu.

  Veza između funkcija raspodele i gustine slučajne promenljive X :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)dx.$$
U svakoj tački neprekidnosti gustine $\varphi_X(x)$ važi
$$\varphi_X(x) = F'_X(x).$$

- Karakteristična funkcija slučajne promenljive X, $f_X(t)$ definisana je na sledeći način:
$$f_X(t) = E(e^{itx}), \text{ gde je } t \in \mathbb{R}, i^2 = -1.$$
Ako je slučajna promenljiva X diskretnog tipa, karakteristična funkcija je oblika
$$f_X(t) = \sum_k e^{itx_k} P\{X = x_k\},$$

a ako je X apsolutno - neprekidnog tipa, onda je

$$f_X(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_X(x) dx.$$

U oba ova slučaja, karakteristična funkcija uvek postoji.

- Funkcija generatrise momenata slučajne promenljive X je definisana kao
$$M_X(t) = E(e^{tx}),$$
ako matematičko očekivanje slučajne promenljive postoji.

Diskretne slučajne promenljive			
Naziv raspodele	Očekivanje	Disperzija	Karkakter. f-ja
Bernulijeva	p	$p(1-p)$	pe^{it}
Binomna	np	$np(1-p)$	$((1-p)+pe^{it})^n$
Geometrijska	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Poasonova	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Paskalova	$r\frac{p}{1-p}$	$r\frac{p}{(1-p)^2}$	

Apsolutno - neprekidne slučajne promenljive			
Naziv raspodele	Očekivanje	Disperzija	Karkakter. f-ja
Uniformna	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ita}-e^{itb}}{it(b-a)}$
Eksponencijalna	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$
Gama	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$(\frac{\lambda}{\lambda-it})^\alpha$
Normalna	μ	σ^2	$e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

A.2 Zakoni velikih brojeva

Tvrđenje A.2.1 *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnim očekivanjem, i neka je $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.*

a) Slabi zakon velikih brojeva
Ako je $E(X_1) = \mu < \infty$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - \mu| < c) = 1, c > 0.$$

b) Jaki zakon velikih brojeva
Ako je $E(X_1^2) < \infty$, tada je

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu) = 1.$$

c) Centralna granična teorema
Ako je $E(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$ i $D(X_1) = \sigma^2 < \infty$, tada važi

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$

Napomena: Uslov $E(X_1^2) < \infty$ kod jakog zakona velikih brojeva može se zameniti slabijim uslovom $E(|X_1|) < \infty$.

Literatura

[1] Mario Lefebvre, *Applied Stochastic Processes*, Springer, 2007.

[2] Sheldon M. Ross, *Introduction to PROBABILITY MODELS*, Academic Press, 2003.

[3] Dr Zoran Ivković *Uvod u teoriju verovatnoće, slučajne procese i matematičku statistiku*, Građevinska knjiga, 1970.

[4] Mališić Jovan, *Slučajni procesi*, Građevinska knjiga, Beograd 1989.

[5] J.F.C. Kingman *Poisson Processes*, Oxford Univercity Press, 1993.

[6] *Encyclopedia Britannica*, Eleventh edition.

[7] http://en.wikipedia.org

Biografija

Rođena sam 09. jula 1984. godine u Novom Sadu. Završila sam Osnovnu školu "Zdravko Gložanski" u Bečeju kao nosilac "Vukove diplome", a potom i Gimnaziju u Bečeju, takođe kao nosilac "Vukove diplome". Po završetku gimnazije, 2003. godine, upisala sam studije na Prirodno-Matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Osnovne studije sam završila 2007. godine nakon čega sam upisala master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer master matematike finansija. Do oktobra 2009. godine položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom.

Novi Sad, 18.08.2010. Milana Vujkov

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Milana Vujkov
AU
Mentor: Dr Danijela Rajter-Ćirić
MN
Naslov rada: Poasonov proces
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2010.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 2/87/0/2/3/0/1
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Stohastička analiza
ND
Ključne reči: Poasonov proces, Nehomogeni Poasonov proces, Složeni Poasonov proces, Dvostruko - stohastički Poasonov proces, Filtrirani Poasonov proces, proces obnavljanja, granične teoreme, regenerativni procesi, stohastički procesi, Lanci Markova
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena: nema
VN
Izvod: U ovom radu proucavano je nekoliko tipova Poasonovog procesa. Najdetaljnije je predstavljen homogen Poasonov proces koji je u praksi u najširoj upotrebi. Pored ovog procesa prikazani su i nehomogeni Poasonovi procesi, složeni Poasonovi procesi, dvostruko - stohastički Poasonovi procesi, filtrirani Poasonovi procesi kao i procesi obnavljanja. Za svaki od ovih procesa predstavljena su osnovna svojstva i osobine. Pored toga, svaki od procesa ilustrovan je primerima.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 24.09.2009.
DP
Datum odbrane: 30.09.2010.
DO

Članovi komisije:
Predsednik: Dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Danijela Rajter-Ćirić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: Dr Dora Seleši, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Milana Vujkov
AU
Mentor: Danijela Rajter-Ćirić, PhD
MN
Title: Poisson Processes
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2010.
PY
Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 2/87/0/2/3/0/1
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Stochastic analysis
SD
Key words: Homogeneous Poisson processes, Nonhomogeneous Poisson processes, Compound Poisson processes, Doubly stochastic Poisson processes, Filtered Poisson processes, Renewal processes, Limit theorems, Regenerative processes, Stochastic processes, Markov chains.
SKW
UC:
Holding data: library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note: none
N
Abstract: In this thesis we study several types of Poisson processes. Homogeneous Poisson processes are presented in detail due to wide application. We also present nonhomogeneous Poisson processes, Compound Poisson processes, Doubly stochastic Poisson processes, Filtered Poisson processes and Renewal processes. For each and every process the mean and the variance are described. Every process is illustrated with examples.
AB
Accepted by Scientific Board on: September 24, 2009
ASB
Defended:
DE
September 30, 2010.

Thesis defend board:
President: Zorana Lužanin , PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Danijela Rajter-Ćirić, PhD, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, menthor

Member: Dora Seleši, PhD, Assistent Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
DB