UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI

FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Milana Veličkov

Metrički i generalizovani metrički prostori

-Master rad-

Mentor: Prof. dr Ljiljana Gajić

Novi Sad,

Decembar 2010.

Sadržaj

Uvod

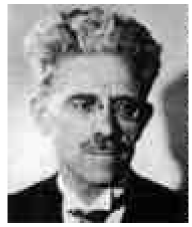
Ovaj rad predstavlja moj završni rad na master studijama Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Rad se bavi metričkim i generalizovanim metričkim prostorima koji predstavljaju veoma bitan deo funkcionalne analize.

Prva glava ima za cilj upoznavanje sa opštom teorijom metričkih prostora koje je uveo Moris Freše još 1906. godine, kao i najčešće korišćenim metričkim prostorima. Detaljno je, zatim, analizirana topologija koju metrika generiše (indukuje) na nekom skupu, kao i pojmovi ekvivalentnih metrika, potprostora metričkog prostora, proizvoda konačnog broja metričkih prostora, izometričnih metričkih prostora, aksiome separacije u metričkim prostorima. Posebna pažnja posvećena je kompletiranju metričkih prostora, kao i pojmu kompaktnosti u metričkim prostorima. Druga glava sadrži nekoliko uopštenja metričkih prostora koja su nastala izostavljanjem ili slabljenjem nekog od uslova koje metrika mora da ispunjava. Tako su ispitivani premetrički prostori, kvazimetrički prostori, pseudometrički prostori i semimetrički prostori. Na kraju rada izneta je jedna od najnovijih generalizacija metričkih prostora, takozvani G-metrički prostori, i analizirane osobine G-metrike, topologije u tim prostorima i konvergencija nizova.

Ovom prilikom se zahvaljujem prof.dr Zagorki Lozanov-Crvenković i prof.dr Nenadu Teofanov na korisnim sugestijama i primedbama. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, prof. dr Ljiljani Gajić za stručno i profesionalno usmeravanje pri izradi ovog rada i za svo znanje koje sam stekla radivši sa njom.

Posebno želim da se zahvalim svojoj porodici na razumevanju, podršci i ljubavi.

1. Moris Freše (Maurice Frechet)



Moris Freše (Maurice Frechet) je rođen 2. septembra 1878. godine, u Francuskoj. Od malena je bio zainteresovan za matematiku i fiziku. Posebno se zainteresovao za ove nauke u srednjoj školi koju je pohađao u Parizu. Njegov profesor matematike je uvideo potencijal koji je Freše imao za prirodne nauke, pa mu je čak i u slobodno vreme davao da čita naučne radove o temama koje su ga interesovale. Po završetku srednje škole, slao je profesoru razne matematičke probleme kako bi se konsultovao o rešavanju istih. A, kako je sam priznao, često se bojao da određene probleme neće uspeti da reši. Već 1903. godine počeo je sa objavljivanjem kraćih radova, dok 1906. objavljuje izuzetnu doktorsku disertaciju na Univerzitetu u Parizu, u kojoj prvi put uvodi koncept metričkih prostora, mada ne pod tim imenom. U toj disertaciji prvi put počinje da istražuje potpuno novu oblast u matematici u kojoj definiše pojam funkcionela na metričkom prostoru i formuliše apstraktne ideje kompaktnosti metričkih prostora. Termin „metrički prostor" kasnije uvodi Hauzdorf.

Posle rata, 1918. godine, odlazi da radi kao profesor na Univerzitet u Salzburg, gde počinje da se interesuje za statistiku i verovatnoću. Međutim, iako je njegovo interesovanje zaokupila neka druga oblast matematike, on se i dalje u većini svojih radova bavi analizom i topologijom.

1942. je držao predavanja u Portugalu, gde ga je portugalsko društvo matematičara priznalo za počasnog člana. Tamo su Frešeu kao četiri glavna dostignuća priznali:

1. Veliki uticaj u savremenoj matematici.
2. Stvaranje teorije apstraktnog prostora, na početku veka, je neophodna polazna osnova za razvoj mnogih matematičkih teorija.
3. Apstraktne ideje omogućile su mnoga razjašnjenja u matematičkim naukama u poslednjih trideset godina.
4. Dostignuća koja je Freše sproveo u najrazličitijim oblastima čiste i primenjene matematike su osnova koja je omogućila da se matematika toliko razvije.

Umro je 4. juna 1973. godine, u Parizu.

2. Metrički prostori

Pojam granice, po svom istorijskom razvoju, je dugo bio vezan za pojam rastojanja dve tačke. Zato su gotovo svi klasični prostori snabdeveni definicijom rastojanja dva elementa. Takav je slučaj sa skupom realnih i kompleksnih brojeva, skupom uređenih n-torki, skupom ograničenih realnih funkcija...

Na skupu R, realnih brojeva, rastojanje d dve tačke x i y merili smo apsolutnom vrednošću razlike odgovarajućih brojeva $d(x,y) = |x - y|$. U n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru, rastojanje d između tačaka $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definišemo sa

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

U skupu ograničenih funkcija, definisanih nad intervalom (a,b), definišemo rastojanje između dva elementa f i g kao $d(f,g) = \sup\ |f(x) - g(x)|\ ,\ x \in (a,b)$.

Naveli smo samo neke primere rastojanja i interesovaće nas koje su njihove najvažnije zajedničke osobine.

Vidimo da je rastojanje u nekom skupu definisano za po dva elementa. Za svaka dva elementa u datom skupu X opredeljujemo jedan broj $d(x,y)$ koji nazivamo rastojanjem. U stvari, svakom uređenom paru (x,y) opredeljujemo realan broj. Traženje rastojanja je, dakle, operacija preslikavanja skupa X^2 u skup realnih brojeva.

Definicija 2.1. Neka je $X \neq \emptyset$ i $d: X \times X \to R$ tako da važe sledeći uslovi:

1. $d(x,y) \geq 0$ (nenegativnost),
2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
3. Za sve $x, y \in X$ je $d(x,y) = d(y,x)$ (simetričnost),
4. Za sve $x, y, z \in X$ je $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (nejednakost trougla).

Tada kažemo da je preslikavanje d metrika na skupu X. Uređeni par (X,d) je metrički prostor, a broj $d(x,y)$ rastojanje elemenata x i y.

Ovi uslovi iskazuju prirodne ideje o pojmu rastojanja. Na primer, rastojanje između dve različite tačke je uvek pozitivno i rastojanje između tačaka x i y je uvek isto kao i rastojanje između y i x. Nejednakost trougla govori da rastojanje između tačaka x i y nije duže od rastojanja između x i z, a zatim od z do y.

Napomena:

Uslov 1. sledi iz uslova 2., 3., 4., i nije neophodno, ali je uobičajeno, da se odvojeno navodi.

Primetimo da iz navedena četiri uslova sledi još jedna važna osobina rastojanja koja se često koristi:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z) .$$

Dokaz:

Iz uslova 3. je $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, odakle sledi da je

$$d(x,y) - d(z,y) \leq d(x,z),$$

a iz simetričnosti sledi da je $\boldsymbol{d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)}$.

Zamenimo x i z, pa je $d(z,y) - d(y,x) \leq d(x,z)$,

$$d(y,x) - d(z,y) \geq -d(x,z),$$

$$\boldsymbol{d(x,y) - d(y,z) \geq -d(x,z)} ,$$

čime je dokaz završen.

•

2.1. Primeri važnijih metričkih prostora

2.1.1. Pokažimo da je (R^n, d_p) metrički prostor, za $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ $(p > 1)$, gde je
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

1) $d_p(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} = 0 \quad \Leftrightarrow$
$|x_i - y_i| = 0$, za svako i $\quad \Leftrightarrow \quad$ $x_i = y_i$, za svako i .

2) $d_p(x,y) =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^p\right)^{1/p} = d_p(y,x) .$$

3) Neka su $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ i $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ proizvoljni elementi iz R^n. Dokazaćemo da važi nejednakost

$$\begin{aligned}
&(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p)^{1/p} \\
&\leq (|x_1 - z_1|^p + |x_2 - z_2|^p + \cdots + |x_n - z_n|^p)^{1/p} \\
&+(|z_1 - y_1|^p + |z_2 - y_2|^p + \cdots + |z_n - y_n|^p)^{1/p}
\end{aligned} \tag{1}$$

Dokažimo prvo da važi Helderova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q} , \tag{2}$$

gde su a_i, b_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, realni ili kompleksni brojevi, $p > 1$ i

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad . \tag{3}$$

Neka je

$$a_i{}' = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}}, \qquad b_i{}' = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}}, \qquad i \in \{1,2,\dots,n\}$$

gde je bar jedan elemenat a_i i b_i različit od nule. Relacija (2) će važiti ako pokažemo da je

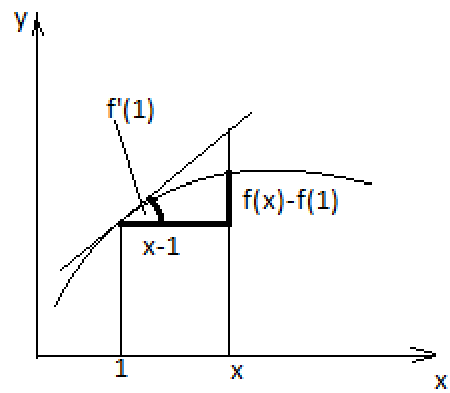
$$\sum_{i=1}^{n}|a_i{}'b_i{}'| \leq 1 \tag{4}$$

Ovo ćemo pokazati da važi tako što ćemo pokazati da je

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \;\; a \geq 0\,, b \geq 0,$$

gde za p i q važi (3). Funkcija $y = x^m$, za $0 < m < 1$ i $x \geq 0$, je konkavna, pa na osnovu toga je

$$x^m \leq 1 + m(x-1).$$



Ovo se može pokazati tako što ćemo povući tangentu na datu konkavnu funkciju. Tada je $f(x) - f(1) \leq f'(1)(x-1)$, odnosno $x^m - 1 \leq m(x-1)$, odakle sledi tražena nejednakost.

Uzimajući da je $x = \frac{a^p}{b^q}$, $m = \frac{1}{p}$ $(a, b > 0)$ sledi da važi (4).

Stavljajući da je u (4) $a = a_i{}'$ i $b = b_i{}'$ i sumirajući po i od 1 do n dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i{}'||b_i{}'| \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}|a_i{}'|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}|b_i{}'|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

čime je dokazana relacija (4), a time i relacija (2).

Dokazaćemo, primenom (2), da važi nejednakost (1).

Pokazaćemo da važi nejednakost Minkovskog

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}$$

odakle će se dobiti, uzimajući da je

$$a_i = x_i - z_i, \qquad b_i = z_i - y_i, \qquad i \in \{1,2,\dots,n\}$$

relacija (1).

Koristeći Helderovu nejednakost dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \le \sum_{i=1}^{n}|a_i||a_i+b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|b_i||a_i+b_i|^{p-1}$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{qp-q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{qp-q}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/q}\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}\right)$$

te koristeći (3) zaključujemo da važi nejednakost Minkovskog.

Komentar:

U specijalnom slučaju, kada uzmemo da je $n=1$, dobijamo skup realnih brojeva u kome je rastojanje definisano sa

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Za $n=2$ dobijamo uobičajenu, Euklidsku metriku.

2.1.2. Obeležimo sa $C[a,b]$ skup neprekidnih funkcija nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Rastojanje d u ovom skupu definisano je sa

$$d(f,g) = \max\ |f(x)-g(x)|\ ,\ x \in [a,b]\ .\ \text{Proverimo!}$$

Ova funkcionela je uvek pozitivna, a jednaka nuli samo ako su f i g identički jednake na intervalu $[a, b]$. Simetričnost važi, jer $d(f,g) = \max|f(x) - g(x)| = \max\left|(-1)\big(g(x) - f(x)\big)\right| = \max|g(x) - f(x)| = d(g,f)$.

Treba još pokazati da važi nejednakost trougla. Iz

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|$$
$$\leq \max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|\}$$
$$\leq \max_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)| + \max_{x\in[a,b]}|h(x)-g(x)|\,,$$

sledi da je $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, za sve $f, g, h \in C[a,b]$, što je i trebalo dokazati.

2.1.3. Neka je l^∞ prostor ograničenih nizova u R ili u C. Ako je, za $x, y \in l^\infty$,

$$d(x,y) = \underbrace{sup}_{i}\, |x_i - y_i|,$$

gde je $x = \{x_i\}_{i\in N} = (x_i)$, $y = \{y_i\}_{i\in N} = (y_i)$, tada je (l^∞, d) metrički prostor.

Da proverimo!

1) $d(x,y) \geq 0$, za sve $x, y \in l^\infty$, po definiciji apsolutne vrednosti.

2) $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow$
$\sup|x_i - y_i| = 0 \quad \Leftrightarrow$
$|x_i - y_i| = 0$ za svako i $\quad \Leftrightarrow$
$x_i = y_i$ za svako i

3) $d(x,y) = \sup|x_i - y_i| =$
$= \sup|y_i - x_i|$
$= d(y,x)$

4) $d(x,y) = \sup|x_i - y_i| =$
$= \sup|x_i - z_i + z_i - y_i|$
$\leq \sup(|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)$
$\leq \sup|x_i - z_i| + \sup|z_i - y_i|$
$= d(x,z) + d(z,y)$

2.1.4. Prostor $l^p = \{(x_i) \in R^N \ ; \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}\ ,\ p \geq 1$, sa funkcionelom

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

je takođe metrički prostor.

2.1.5. Neka je $X \neq \emptyset$. Tada je sa

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

definisana metrika na X.

Proverimo!

1) $d(x,y) \geq 0,\ \ x, y \in X$, jer je funkcionela d tako definisana da je uvek nenegativna.
2) $d(x,y) = 0$ samo ako je $x = y$,
3) $d(x,y) = d(y,x)$,
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Ukoliko je $d(x,y) = 0$, tada je desna strana nejednakosti sigurno veća ili jednaka nuli, pa važi uslov. Ako je $d(x,y) = 1$, desna strana opet mora biti veća ili jednaka jedinici, jer ukoliko bi bila nula, tada je i $x = z$ i $z = y$ odakle je $x = y$, što je kontradikcija sa pretpostavkom.

Dakle, važe svi uslovi, pa je ovo metrika, koja se naziva i diskretna metrika.

2.2. Topologija metričkog prostora

Definicija 2.2.1. U metričkom prostoru (X, d) otvorena lopta sa centrom u tački $a \in X$, poluprečnika $r > 0$, je skup $L(a, r)$ svih tačaka $x \in X$ takvih da je $d(a, x) < r$, tj.

$$L(a, r) = \{x: x \in X, d(a, x) < r\} \ .$$

Ako u ovoj definiciji stavimo $\leq$ umesto $<$ dobijamo zatvorenu loptu,

$$B(a, r) = \{x: d(a, x) \leq r\}.$$

Da se podsetimo.

Definicija 2.2.2. Neka je $X \neq \emptyset$ i τ neka familija podskupova skupa X sa sledećim osobinama:

(O_1) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$,

(O_2) Ako je za sve $i \in I$ (I proizvoljan skup) $O_i \in \tau$ tada je

$$\bigcup_{i \in I} O_i \ \in \tau \ ,$$

(O_3) Ako su $O_1, O_2, \ldots, O_n \ \in \tau$ (n je proizvoljan prirodan broj), tada je

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau \ .$$

Tada je uređeni par (X, τ) topološki prostor, a elementi familije τ su otvoreni skupovi. τ se zove topologija na prostoru X.

Neka je (X, d) metrički prostor. Definišemo familiju τ_d podskupova od X na sledeći način:

$$\emptyset \in \tau \text{ i } O \in \tau \text{ ako i samo ako važi } (\forall x \in O)(\exists r_x > 0\ )(L(x, r_x) \subset O).$$

<u>Teorema 2.2.1.</u>

Familija τ_d definiše topologiju u metričkom prostoru (X, d).

Dokaz:

Po definiciji, prazan skup i prostor X pripadaju kolekciji τ_d. Neka su skupovi O_1 i O_2 elementi iz τ_d. Pokažimo i da je $O_1 \cap O_2$ elemenat iz τ_d. Ako je $x \in O_1 \cap O_2$, tada postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je $L(x, r_1) \subset O_1$ i $L(x, r_2) \subset O_2$. Pošto x pripada preseku skupova O_1 i O_2, a lopte imaju isti centar, tada za $r = min\{r_1, r_2\}$ je $L(x,r) \subset O_1 \cap O_2$. Pošto je x proizvoljno iz $O_1 \cap O_2$, to znači da $O_1 \cap O_2 \in \tau_d$.

Neka je $O_i (i \in I)$ familija skupova iz τ_d. Pokazaćemo da je i skup $\bigcup_{i \in I} O_i$ elemenat familije τ_d.

Ako je $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$, tada postoji $i_o \in I$ tako da je $x \in O_{i_o}$. Odavde sledi da postoji $r > 0$ tako da je

$$L(x,r) \subset O_{i_o} \subset \bigcup_{i \in I} O_i \ .$$

•

Time smo pokazali da je familija τ_d topologija na X. Skupove iz τ_d nazivamo otvorenim skupovima.

Za topologiju $\tau = \tau_d$ kažemo da je indukovana (generisana) metrikom d.

U daljem radu posmatraćemo metričke prostore sa topologijom generisanom njihovom metrikom.

Definicija 2.2.3. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Tada:

1) Tačka x je unutrašnja tačka za skup A ako postoji $r_x > 0$ tako da je
$$L(x, r_x) \subset A \ ;$$
2) Tačka x je adherentna tačka za skup A ako je za svako $r > 0$
$$L(x,r) \cap A \neq \emptyset \ ;$$
3) Tačka x je tačka nagomilavanja za skup A ako u svakoj lopti sa centrom u x ima tačaka iz A različitih od x, odnosno ako za svako $r > 0$
$$L(x,r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \ .$$

Neka je (X, d) metrički prostor. U topologiji generisanoj metrikom, podskup V skupa X je okolina tačke $x_0 \in X$ ako je za neko $r > 0$

$$L(x_0, r) \subset V \ .$$

U toj topologiji_ familija

$$\mathcal{B}(x_0) = \{L(x_0, r) : r > 0\} \ ,$$

$x_0 \in X$, je baza okolina tačke x_0, jer za svaku okolinu V tačke x_0 postoji $L(x_0, r) \in \mathcal{B}(x_0)$ tako da je $L(x_0, r) \subset V$.

U metričkom prostoru (X,d) jedna od baza okolina tačke $x_0 \in X$ je i familija

$$\mathcal{B}^*(x_0) = \left\{L\left(x_0, \frac{1}{n}\right) : n \in N\right\}.$$

Familija $\mathcal{B}^*(x_0)$ ima prebrojivo mnogo elemenata, jer je $\frac{1}{n} \in Q$, a Q je prebrojiv skup.

Dakle, u metričkom prostoru (X,d) za svaku tačku $x_0 \in X$ postoji prebrojiva baza okolina tačke x_0: $\left\{L\left(x_0, \frac{1}{n}\right) : n \in N\right\}$.

Upravo smo dokazali sledeće tvrđenje, koje je važna osobina metričkih prostora.

Teorema 2.2.2.

Metrički prostor (X,d) ima prebrojivu bazu okolina svake svoje tačke što znači da metrički prostori zadovoljavaju I Aksiom prebrojivosti.

•

Baza topologije je familija

$$\mathcal{B} = \{L(x,r) : x \in X, r > 0\}.$$

Definicija 2.2.4. Ako je $card(\mathcal{B}) \leq card(N)$ tada kažemo da (X,d) ima prebrojivu topološku bazu.

Definicija 2.2.5. Metrički prostor ispunjava II Aksiom prebrojivosti ako ima prebrojivu topološku bazu.

Komentar:

Iz II Aksioma prebrojivosti sledi da metrički prostor ispunjava i I Aksiom prebrojivosti, dok obrnuto ne važi.

Definicija 2.2.6. Neka je (X,d) metrički prostor. Skup $A \subset X$ je gust u X ako je svaka tačka iz X adherentna za A, tj. $\bar{A} = X$.

Definicija 2.2.7. Metrički prostor (X,d) je separabilan ako postoji $A \subset X$ takav da je $card(A) \leq card(N)$ i A je gust skup u X.

Teorema 2.2.3.

Neka je (X,d) metrički prostor. Topologija τ prostora X ima prebrojivu topološku bazu ako i samo ako je prostor (X,d) separabilan.

Dokaz:

Videti [1].

Komentar:

Proizvoljan metrički prostor ne mora imati prebrojivu topološku bazu, ali ako je separabilan, onda je to tačno.

2.3. Ekvivalentne i ograničene metrike

Definicija 2.3.1. Metrike d_1 i d_2 su ekvivalentne ako indukuju istu topologiju. Tada pišemo $d_1 \sim d_2$.

Da se podsetimo!

Definicija 2.3.2. Dve topologije su jednake ako je svaki otvoren skup u prvoj, otvoren i u drugoj, i obrnuto.

Teorema 2.3.1.

Ako za metrike $d_1, d_2 : X \times X \to R$ postoje realni brojevi $\lambda > 0$, $\mu > 0$, takvi da za svako $x, y \in X$ važi:

$$d_1(x,y) \leq \lambda \cdot d_2(x,y),$$

$$d_2(x,y) \leq \mu \cdot d_1(x,y),$$

tada su metrike d_1 i d_2 ekvivalentne.

Dokaz:

Neka je $L_1(a, r_1)$ proizvoljna otvorena lopta u metričkom prostoru (X, d_1). Uzmimo proizvoljnu tačku x iz otvorene lopte $L_2\left(a, \frac{r_1}{\lambda}\right) = \left\{x \in X:\ d_2(a,x) < \frac{r_1}{\lambda}\right\}$ metričkog prostora (X, d_2). Tada je $d_2(a,x) < \frac{r_1}{\lambda}$, pa kako je $d_1(a,x) \leq \lambda \cdot d_2(a,x)$, sledi da je $d_1(a,x) < r_1$, odnosno $L_2\left(a, \frac{r_1}{\lambda}\right) \subset L_1(a, r_1)$.

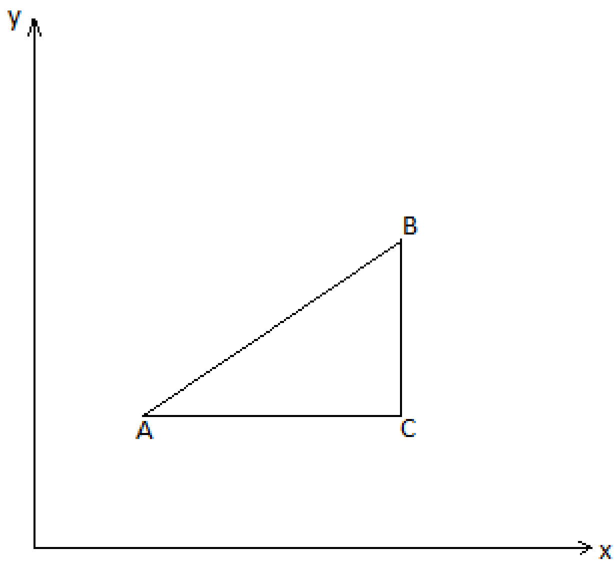
Slično se pokazuje da je $L_1\left(a, \frac{r_2}{\mu}\right) \subset L_2(a, r_2)$. Kako ove dve metrike indukuju istu topologiju, sledi da su one ekvivalentne.

•

Na osnovu prethodne teoreme, metrike na R^n date sa

- $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
- $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i \leq n\}$

gde je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, su ekvivalentne.



$d_2(A,B)$ je dužina duži AB, to je uobičajeno-Euklidsko rastojanje. $d_1(A,B)$ je zbir dužina kateta, dok je $d_\infty(A,B)$ dužina veće od tih kateta.

Kako je $d_\infty \leq 1 \cdot d_1$ i $d_1 \leq n \cdot d_\infty$, sledi da je $d_1 \sim d_\infty$.

A, na osnovu toga što je $d_\infty \leq 1 \cdot d_2$ i $d_2 \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty$, sledi i da je $d_2 \sim d_\infty$.

Možemo zaključiti da je i $d_1 \sim d_2$, pa su sve tri metrike ekvivalentne.

Definicija 2.3.3. Neka je d metrika na X. Za nju kažemo da je ograničena ako postoji $M > 0$ tako da je

$$d(x,y) \leq M,$$

za svako $x, y \in X$.

Komentar:

Ako je $d(x,y)$, $x,y \in X$, metrika, tada su i

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad \text{i} \quad \min\{1, d(x,y)\},$$

za svako $x,y \in X$, takođe metrike, i to ograničene metrike, ekvivalentne sa d.

Da bi ovo pokazali, kao i to da su topologije indukovane metrikama $d(x,y)$ i $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, kao i $d(x,y)$ i $\min\{1, d(x,y)\}$ jednake, dokazaćemo sledeće tvrđenje.

Teorema 2.3.2.

Neka je (X,d) metrički prostor, a $f: R_+ \cup \{0\} \to R_+ \cup \{0\}$ monotono neopadajuća funkcija koja ima sledeće osobine:

1) $f(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$;
2) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ (subaditivnost).

Tada je funkcija $g: X \times X \to R_+ \cup \{0\}$, takva da je $g(x,y) = f\big(d(x,y)\big)$, metrika na X.

Dokaz:

Treba ispitati da li funkcija $g(x,y)$ zadovoljava uslove metrike:

1) $g(x,y) \geq 0$, $x,y \in X$,
2) $g(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f\big(d(x,y)\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
3) $g(x,y) = f\big(d(x,y)\big) = f\big(d(y,x)\big) = g(y,x)$,
4) $g(x,y) = f\big(d(x,y)\big) \leq f\big(d(x,z) + d(z,y)\big) \leq f\big(d(x,z)\big) + f\big(d(z,y)\big) = g(x,z) + g(z,y)$.

Kako su ispunjeni svi uslovi, može se zaključiti da je ovako definisano g metrika na X.

•

Teorema 2.3.3.

Neka je (X,d) metrički prostor. Tada je i funkcija $g: X \times X \to R$ data sa $g(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metrika na X. U (X,g) svaki skup je ograničen i topologije indukovane sa d i g su jednake.

Dokaz:

Neka je $f(u) = \frac{u}{1+u}, u \geq 0$. Da bismo mogli primeniti prethodnu teoremu, moramo proveriti da li funkcija f zadovoljava uslove iz iste.

- Kako je $u \geq 0$, sledi da $f: R_+ \cup \{0\} \to R_+ \cup \{0\}$,
- Ako je $u = 0$, sledi da je i $f(u) = 0$ i važi i obrnuto,
- $f'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$. Kako je prvi izvod funkcije f uvek pozitivan za bilo koju vrednost u, sledi da je f rastuća na $[0,\infty)$,
- $\frac{u+v}{u+v+1} = \frac{u}{u+v+1} + \frac{v}{u+v+1} \leq \frac{u}{u+1} + \frac{v}{v+1}$, $v \geq 0$, pa važi i subaditivnost.

Kako f zadovoljava sve uslove, sledi da je $g(x,y) = f\big(d(x,y)\big) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metrika na skupu X.

$$g(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq 1, \text{ za sve } x,y \in X.$$

To znači da svaki podskup od X leži u zatvorenoj lopti poluprečnika $r \leq 1$ sa centrom u $x \in X$.

Neka je L_d lopta indukovana metrikom d, a L_g metrikom g. Kako je $g(x,y) \leq d(x,y)$, za svako $x,y \in X$, to znači da je, za sve $r > 0$,

$$L_d(x,r) \subset L_g(x,r). \qquad (1)$$

Znamo da ako za neko $y \in X$, $d(x,y) < r$, tada i $g(x,y) < r$.

Za $d(x,y) < 1$ je $g(x,y) \geq \frac{d(x,y)}{2}$, odakle sledi da je $d(x,y) \leq 2g(x,y)$.

Tada je

$$L_g\left(x,\frac{r}{2}\right) \subset L_d(x,r) \qquad (2)$$

Na osnovu (1) i (2) sledi da su topologije indukovane metrikama d i g jednake.

∙

Teorema 2.3.4.

Neka je (X, d) metrički prostor i $g: X \times X \to R_+ \cup \{0\}$ tako da je $g(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Tada je g metrika na X i d i g indukuju jednake topologije u X.

Dokaz:

Definišemo funkciju $f(x) = x,\ 0 \leq x \leq 1$ i $f(x) = 1,\ x > 1$.

Može se pokazati da ova funkcija zadovoljava uslove da bi $g\big(f(x)\big)$ bila metrika.

Neka je L_d lopta indukovana metrikom d, a L_g metrikom g.

Kada je $r \leq 1$, tada je $L_d(x, r) = L_g(x, r)$. Ako je $r > 1$, tada $L_d(x, r) \supset L_d(x, 1) = L_g(x, 1)$ i $L_g(x, r) = L_g(x, 1) = L_d(x, 1)$. Odavde sledi da d i g indukuju jednake topologije.

•

Komentar:

Svaka metrika može se zameniti drugom, koja indukuje topologiju jednaku sa topologijom koju indukuje prva metrika, i to takvom da u tom drugom metričkom prostoru su svi skupovi ograničeni.

2.4. Konvergencija niza, granična vrednost i neprekidnost funkcije u metričkim prostorima

Pošto metrički prostori zadovoljavaju I Aksiom prebrojivosti njihova topologija se može opisati preko nizova.

Definicija 2.4.1. Niz elemenata skupa A je svaka funkcija $a: N \to A$. Vrednost $a(n)$ funkcije a u tački $n \in N$ označavamo sa a_n i zovemo n-tim članom tog niza, a sam niz označavamo sa $\{a_n\}_{n\in N}$.

Definicija 2.4.2. U metričkom prostoru (X, d) kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in N}$ u X konvergira ka $a \in X$ i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ako je $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

To znači da niz $\{a_n\}_{n\in N}$ u X konvergira ka $a \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in N$ tako da je $a_n \in L(a, \varepsilon)$, za sve $n > n_0(\varepsilon)$.

Teorema 2.4.1.

Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subset X$ i a tačka nagomilavanja skupa A. Tada postoji niz $\{a_n\}_{n\in N}$ u $A \setminus \{a\}$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a .$$

Dokaz:

Neka je $\{\varepsilon_n\}$ niz pozitivnih brojeva koji teži ka 0, tj. $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Tada, postoji niz $\{a_n\}_{n\in N}$ u $A \setminus \{a\}$ takav da je $d(a_n, a) < \varepsilon_n$, za sve $n \in N$, odnosno

$$a_n \in L(a, \varepsilon_n) \cap A, \text{ za sve } n \in N.$$

Sledi, $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$, što znači da važi $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

•

Teorema 2.4.2.

Neka je (X, d) metrički prostor.

a) $O \subset X$ je otvoren ako i samo ako iz $x_n \to x \in O$ sledi da se u O nalaze svi sem konačno mnogo članova niza $\{x_n\}$;
b) $F \subset X$ je zatvoren ako i samo ako iz $\{x_n\} \subset F$ i $x_n \to x$ sledi da i $x \in F$;

Dokaz:

a) Neka je O otvoren i $x_n \to x \in O$. Sledi da je O okolina svake svoje tačke, pa i tačke x, što, po definiciji, znači da se u njemu nalaze svi članovi niza $\{x_n\}$, osim njih konačno mnogo.
Obrnuto, neka se u O nalaze svi sem konačno mnogo članova niza $\{x_n\}$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $x_0 \in O$ takvo da, za sve $n \in N$,

$$L\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap CO \neq \emptyset.$$

Formirajmo niz $\{x_n\}$ birajući tako da $x_n \in L\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap CO$. Tada $x_n \to x_0$, pri čemu $\{x_n\} \subset CO$, što je kontradikcija.

b) Neka $x_n \to x$. Pošto je F zatvoren, on sadrži sve svoje adherentne tačke, pa sledi da $x \in F$.
Obrnuto, neka je x adherentna tačka za F. Tada je x ili izolovana (što znači $x \in F$) ili je tačka nagomilavanja, te postoji $\{x_n\} \subset F, x_n \to x$, što znači da $x \in F$. Dakle, F je zatvoren.

•

Definicija 2.4.3. Neka su (X_1, d_1) i (X_2, d_2) metrički prostori, $f: X_1 \to X_2$, $A \subset X_1$ i $a \in X_1$ tačka nagomilavanja skupa A. Kažemo da je $b \in X_2$ granična vrednost funkcije f, kada x teži ka a i $x \in A$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da je

$$f\left(\left(L^{d_1}\big(a, \delta(\varepsilon)\big) \cap A\right) \setminus \{a\}\right) \subset L^{d_2}(b, \varepsilon).$$

Ako je $b \in X_2$ granična vrednost funkcije f kad x teži ka a i $x \in A$, pišemo

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$$

Dakle,
$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ ako i samo ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in A)(0 < d_1(x, a) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow d_2(f(x), b) < \varepsilon)\,.$$

Definicija 2.4.4. Neka su (X_1, d_1) i (X_2, d_2) metrički prostori, $f: X_1 \to X_2$, $x_0 \in X_1$ i $f(x_0) = y_0$. Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da je

$$f\left(L^{d_1}\big(x_0, \delta(\varepsilon)\big)\right) \subset L^{d_2}(y_0, \varepsilon)$$

Dakle, funkcija $f: X_1 \to X_2$ je neprekidna u tački $x_0 \in X_1$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svako $x \in X_1$ važi implikacija

$$d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \implies d_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Teorema 2.4.3.

Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori. Funkcija $f: X \to Y$ je neprekidna u tački x ako i samo ako iz $x_n \to x$ u X sledi da $f(x_n) \to f(x)$ u Y.

Dokaz:

$(\Longrightarrow)$ Pretpostavimo da je f neprekidna, ali da ne važi da $f(x_n) \to f(x)$ u Y.

$$f(x_n) \to f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\big(\forall n \geq n_0 \implies f(x_n) \in L(f(x), \varepsilon)\big),$$

A suprotno je

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in N)\left(\exists n_1 > n_0 \Longrightarrow f\left(x_{n_1}\right) \notin L(f(x), \varepsilon)\right).$$

Kada $n_0 \to \infty$, dobijamo odgovarajući niz $\{x_{k_n}\} \prec \{x_n\}$, takav da $f\left(x_{k_n}\right) \notin L(f(x), \varepsilon)$.

Kako je f neprekidna, sledi da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)\left(y \in L^{d_1}\big(x, \delta(\varepsilon)\big) \Longrightarrow f(y) \in L^{d_2}(f(x), \varepsilon)\right).$$

Za $\varepsilon = \varepsilon_0$ označimo odgovarajuće $\delta = \delta_0$.

$$y \in L^{d_1}\big(x, \delta_0(\varepsilon)\big) \Longrightarrow f(y) \in L^{d_2}(f(x), \varepsilon_0), \qquad \text{gde} \quad x_{k_n} \to x.$$

Tada za $n > n_0 \Longrightarrow d_1\left(x_{k_n}, x\right) < \delta_0$, pa $f\left(x_{k_n}\right) \in L^{d_2}(f(x), \varepsilon_0)$.

Ovo je kontradikcija sa konstrukcijom niza $\{x_{k_n}\}$, pa sledi da mora važiti da $f(x_n) \to f(x)$ u Y.

$(\Longleftarrow)$ Pretpostavimo sada da $f(x_n) \to f(x)$ u Y, a da f nije neprekidna.

To znači da $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta(\varepsilon) > 0)\left(\exists x_\delta \in L^{d_1}\big(x, \delta(\varepsilon)\big) \Longrightarrow f(x_\delta) \notin L(f(x), \varepsilon)\right)$

Kada $\delta_n \to 0$, nalazimo niz takav da $x_{\delta_n} \in L^{d_1}\big(x, \delta_n(\varepsilon)\big)$, gde $x_{\delta_n} \to x$, pa dobijamo da $f\left(x_{\delta_n}\right) \notin L(f(x), \varepsilon)$, tj. $f\left(x_{\delta_n}\right) \nrightarrow f(x)$, što je kontradikcija sa pretpostavkom.

•

2.5. Osobine separacije u metričkim prostorima

Definicija 2.5.1. Topološki prostor (X,τ) je Hauzdorfov ako za svake dve različite tačke $a,b \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 u X takvi da je $a \in O_1$ i $b \in O_2$.

Teorema 2.5.1.

Svaki metrički prostor je Hauzdorfov.

Dokaz:

Neka je (X,d) metrički prostor. Ako je $a,b \in X$ i $a \neq b$, tj. $d(a,b) \neq 0$ pokazaćemo da je

$$L\left(a\,,\frac{d(a,b)}{2}\right) \cap L\left(b\,,\frac{d(a,b)}{2}\right) = \emptyset$$

Neka je $x \in\ L\left(a,\frac{d(a,b)}{2}\right)$. Tada je $d(a,x) < \frac{d(a,b)}{2}$, te je

$$d(x,b) \geq |d(a,b) - d(a,x)| > \frac{d(a,b)}{2}\,.$$

Odavde sledi

$$x \notin\ L\left(b,\frac{d(a,b)}{2}\right),$$

što znači da je

$$L\left(a,\frac{d(a,b)}{2}\right) \cap L\left(b,\frac{d(a,b)}{2}\right) = \emptyset\,.$$

•

Šta više, otvoreni skupovi razdvajaju ne samo tačke nego i zatvorene disjunktne skupove.

Da se podsetimo.

Definicija 2.5.2. Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subset X$ proizvoljan skup. Rastojanje $d(a,A)$ tačke $a \in X$ od podskupa $A \neq \emptyset$ definišemo sa

$$d(a,A) = \inf\,\{d(a,x)\,;x \in A\}\,.$$

Teorema 2.5.2.

Neka je $d(a, A)$ rastojanje tačke a od skupa A. Tada važi:

1) $d(a, A) \geq 0$,
2) Ako je skup A zatvoren tada važi $d(a, A) = 0$ ako i samo ako $a \in A$,
3) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad x, y \in X$.

Dokaz:

1) $d(a, A) \geq 0$, na osnovu definicije rastojanja,
2) Ako tačka a pripada skupu A, to znači da je rastojanje između njih nula. Ako je skup A zatvoren, važi i obrnuto, na osnovu Teoreme 2.4.2. b). Dakle, $a \in A$.
3) Neka je $x, y \in X$. Važi da je
$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$
za svako $a \in A$. Odavde je
$$inf_{a \in A}\, d(x, a) \leq inf_{a \in A}\, d(y, a) + d(x, y).$$
To znači da je $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Analogno je $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$, te važi da je
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$
što je i trebalo pokazati.

•

Teorema 2.5.3.

Neka je A neprazan skup metričkog prostora (X, d). Funkcija koja preslikava (X, d) u R definisana sa $x \to d(x, A)$ je uniformno neprekidna na X.

Dokaz:

Direktna posledica osobine 3) prethodne teoreme.

•

Definicija 2.5.3. Neka je (X, τ) topološki prostor. Ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa Z_1 i Z_2 u X postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 u X tako da je

$$Z_1 \subset O_1\ ,\ Z_2 \subset O_2,$$

kažemo da je X normalan topološki prostor.

Teorema 2.5.4.

Svaki metrički prostor (X, d) je normalan.

Dokaz:

Neka su A i B proizvoljni, disjunktni, zatvoreni skupovi. Pokazaćemo da postoje disjunktni, otvoreni skupovi U i V u X takvi da je

$$A \subset U \qquad , \qquad B \subset V.$$

Neka je

$$U = \{x; x \in X, d(x, A) < d(x, B)\},$$

$$V = \{x; x \in X, d(x, B) < d(x, A)\}.$$

Jasno je da važi $U \cap V = \emptyset$. Pokazaćemo da je $A \subset U$ i $B \subset V$.

Neka je $x \in A$. Tada je $d(x, A) = 0$. Ako pokažem da je

$$d(x, B) > 0\,,$$

slediće da je $d(x, A) = 0 < d(x, B)$ te $x \in U$. Ako ne bi važilo da je $d(x, B) > 0$, sledilo bi $d(x, B) = 0$ te iz zatvorenosti skupa B sledi $x \in B$. Kako je $x \in A$ sledi $x \in A \cap B$ što je u suprotnosti sa uslovom $A \cap B = \emptyset$. Analogno se pokazuje da je $B \subset V$.

Dokazaćemo da su skupovi U i V otvoreni.

Neka je preslikavanje $h: X \to R$ definisano na sledeći način:

$$h(x) = d(x, A) - d(x, B), \qquad x \in X.$$

Preslikavanje h je neprekidno i važe ekvivalencije:

$$x \in U \Leftrightarrow h(x) < 0$$

$$x \in V \Leftrightarrow h(x) > 0$$

Dakle, $U = h^{-1}\big((-\infty, 0)\big)$ i $V = h^{-1}\big((0, \infty)\big)$. Kako je $(-\infty, 0) \in \tau_R$ i $(0, \infty) \in \tau_R$, a h je neprekidno preslikavanje, sledi da su U i V otvoreni skupovi.

•

2.6. Indukovana topologija na podskupu metričkog prostora

Definicija 2.6.1. Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subset X$. Indukovana metrika na skupu A, u oznaci d_A, je data sa:

$$d_A(x,y) = d(x,y)\,,\ \text{ za sve } (x,y) \in A \times A.$$

Funkcija d_A je metrika, te je uređeni par (A, d_A) metrički prostor, koji je potprostor prostora (X,d) u topologiji indukovanoj metrikom d.

Iz definicije sledi da za $L_A(a,r) = \{y : y \in A,\ d_A(a,y) < r\}$ $(a \in A)$ važi

$$L_A(a,r) = L(a,r) \cap A\ .$$

Na A ćemo definisati topologiju τ_A (indukovanu topologiju) na sledeći način:

$$\big((O_1 \in \tau_A) \Leftrightarrow (\exists O \in \tau)(O_1 = O \cap A)\big)\,,$$

gde je $\tau = \tau_d$. Dakle, skup O_1 je otvoren u indukovanoj topologiji τ_A ako i samo ako je jednak preseku otvorenog skupa O iz τ i A.

Na metričkom prostoru (A, d_A) imamo indukovanu topologiju τ_A i topologiju određenu metrikom d_A, τ_{d_A}. Pokazaćemo da važi sledeće tvrđenje.

<u>Teorema 2.6.1.</u>

Važi jednakost $\tau_A = \tau_{d_A}$.

Dokaz:

Neka je $O_1 \in \tau_A$. Pokazaćemo da je $O_1 \in \tau_{d_A}$.

Ako je $O_1 \in \tau_A$, na osnovu definicije indukovane topologije sledi da je

$$O_1 = O \cap A, \qquad \text{za neko } O \in \tau.$$

Za proizvoljno $x \in O_1$ postoji $r > 0$ tako da je $x \in L(x,r) \subset O$. Tada je $x \in L(x,r) \cap A = L_A(x,r) \subset O \cap A = O_1$ te je $O_1 \in \tau_{d_A}$.

Pokažimo da važi i obrnuto:

$$O_1 \in \tau_{d_A} \Longrightarrow O_1 \in \tau_A\ .$$

Treba pokazati da:

ako je O_1 unija lopti iz (A, d_A) tada postoji $O \in \tau$ tako da je $O_1 = O \cap A$.

Neka je

$$O_1 = \bigcup_{i \in I} L_A(x_i, r_i) = \bigcup_{i \in I} (L(x_i, r_i) \cap A)\,.$$

Tada je

$$O_1 = \left(\bigcup_{i \in I} L(x_i, r_i) \right) \cap A = O \cap A\,,$$

gde je

$$O = \bigcup_{i \in I} L(x_i, r_i) \in \tau.$$

Dakle, $O_1 \in \tau_A$, jer je $O_1 = O \cap A, O \in \tau$. Na osnovu dokazanog sledi

$$\tau_A = \tau_{d_A}\,.$$

•

2.7. Proizvod metričkih prostora

Neka su $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ metrički prostori i

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i\,, i \in \{1,2, \dots, n\}\}$$

proizvod skupova $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Definišemo preslikavanje

$$D: (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \times (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \to [0,\infty)$$

na sledeći način:

$$D\big((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = \max_{1 \le i \le n} d_i(x_i\,, y_i)\,,$$

za sve $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Lema 2.7.1.

D je metrika nad $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Dokaz:

Važe sledeće ekvivalencije:

$$D\big((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\max_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$d_i(x_i, y_i) = 0 \text{ za sve } i \in \{1,2, \dots, n\} \Leftrightarrow$$

$$x_i = y_i \text{ za sve } i \in \{1,2, \dots, n\} \Leftrightarrow$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)\,.$$

Simetričnost funkcije D sledi iz

$$D\big((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = \max_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i) =$$

$$= \max_{1 \le i \le n} d_i(y_i, x_i) = D\big((y_1, y_2, \dots, y_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)\big)\,.$$

Kako je $d_i(x_i, z_i) \le d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$, za sve $i \in \{1,2, \dots, n\}$, sledi

$$\max_{1\le i\le n} d_i\big(x_{i,}z_i\big) \le \max_{1\le i\le n}\Big(d_i\big(x_{i,}y_i\big)+d_i\big(y_{i,}z_i\big)\Big)$$

$$\le \max_{1\le i\le n} d_i\big(x_{i,}y_i\big)+\max_{1\le i\le n} d_i\big(y_{i,}z_i\big)\,,$$

što znači da za D važi nejednakost trougla.

•

Proizvod metričkih prostora $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\dots,(X_n,d_n)$ je metrički prostor

$$(X_1\times X_2\times\dots\times X_n,D),$$

sa gore navedenom metrikom.

Teorema 2.7.1.

Neka su $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\dots,(X_n,d_n)$ metrički prostori. Tada važi sledeće:

a) $L^D\big((x_1,x_2,\dots,x_n),r\big)=L^{d_1}(x_1,r)\times L^{d_2}(x_2,r)\times\dots\times L^{d_n}(x_n,r)$, za sve $x_1\in X_1,\ x_2\in X_2,\dots,\ x_n\in X_n,\ r>0$.
b) Otvorene lopte $\{L^D(x,r): x\in X_1\times X_2\times\dots\times X_n, r>0\}$ čine bazu B_D topologije τ_D na $X_1\times X_2\times\dots\times X_n$.
c) Familija $B=\Big\{L^{d_1}(x_1,r_1)\times L^{d_2}(x_2,r_2)\times\dots.\times L^{d_n}(x_n,r_n):\ x_i\in X_i, r_i>0,$ za sve $i\in\{1,2,\dots,n\}\Big\}$ je takođe baza topologije τ_D.

Dokaz:

a) Važe ekvivalencije:
$(z_1,z_2,\dots,z_n)\in L^D\big((x_1,x_2,\dots,x_n),r\big)\ \Leftrightarrow d_i(z_i,x_i)<r$, za sve $i\in\{1,2,\dots,n\}\ \Leftrightarrow$
$z_i\in L^{d_i}(x_i,r)$, za sve $i\in\{1,2,\dots,n\}\ \Leftrightarrow$

$$(z_1,z_2,\dots,z_n)\in L^{d_1}(x_1,r)\times L^{d_2}(x_2,r)\times\dots\times L^{d_n}(x_n,r).$$

b) U proizvoljnom metričkom prostoru (X,d) otvorene lopte $\{L^d(a,r); a\in X, r>0\}$ čine bazu topologije, pa to važi za metrički prostor $(X_1\times X_2\times\dots\times X_n,D)$.
c) Koristeći relaciju
$$L^D\big((x_1,x_2,\dots,x_n),r\big)\subset L^{d_1}(x_1,r_1)\times L^{d_2}(x_2,r_2)\times\dots.\times L^{d_n}(x_n,r_n)\,,$$
gde je $r=\min\{r_{1,}r_2,\dots,r_n\}$, pokazuje se da je $B\subset\tau_D$. Neka je $O\in\tau_D$. Tada je O unija neke potkolekcije kolekcije B_D, pa i potkolekcija kolekcije B, jer $B_D\subset B$.

Dokažimo sada vrlo važnu osobinu metrike.

Teorema 2.7.2.

Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je preslikavanje $d: X \times X \to R$ neprekidno.

Dokaz:

Neka je $f(x, y) = d(x, y)$, za sve $x, y \in X$, $(x_0, y_0) \in X \times X$ i $f(x_0, y_0) = z_0$. Pokazaćemo neprekidnost f u tački (x_0, y_0). Treba pokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f\big(L(x_0, \delta) \times L(y_0, \delta)\big) \subset L(z_0, \varepsilon). \qquad (1)$$

Kako je

$$L(z_0, \varepsilon) = \{z: z \in [0,\infty), |z - z_0| < \varepsilon\},$$

treba pokazati da postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta, d(y, y_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - z_0| < \varepsilon\,.$$

Kako je

$$|f(x, y) - z_0| = |d(x, y) - d(x_0, y_0)| = |d(x, y) - d(x_0, y) + d(x_0, y) - d(x_0, y_0)|$$
$$\leq d(x, x_0) + d(y, y_0),$$

sledi implikacija

$$d(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \ d(y, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - z_0| < \varepsilon\ ,$$

te je u (1) $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

•

2.8. Izometrija

Definicija 2.8.1. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f: X \to Y$ kažemo da je izometrija ako i samo ako za svako $x_1, x_2 \in X$ važi:

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) .$$

Prostori X i Y su izometrični, u oznaci $X \cong_i Y$, ako i samo ako postoji sirjektivna izometrija $f: X \to Y$.

U nastavku pokazujemo da je $\cong_i$ relacija ekvivalencije u klasi svih metričkih prostora.

Teorema 2.8.1.

Ako su (X, d_X), (Y, d_Y) i (Z, d_Z) metrički prostori, onda važi:

a) $X \cong_i X$
b) $X \cong_i Y \Rightarrow Y \cong_i X$
c) $X \cong_i Y \wedge Y \cong_i Z \Rightarrow X \cong_i Z$

Dokaz:

a) Identičko preslikavanje $id_X: X \to X$ je, evidentno, izometrija.
b) Neka je $X \cong_i Y$ i $f: X \to Y$ proizvoljna sirjektivna izometrija. Ako su tačke $x_1, x_2 \in X$ takve da je $f(x_1) = f(x_2)$, onda je $d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) = 0$, odakle sledi $d_X(x_1, x_2) = 0$, to jest, $x_1 = x_2$. Dakle, preslikavanje f je bijekcija, pa postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}: Y \to X$.
Za proizvoljne tačke $y_1, y_2 \in Y$ postoje tačke $x_1, x_2 \in X$ takve da je $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$, to jest $x_1 = f^{-1}(y_1)$ I $x_2 = f^{-1}(y_2)$, pa imamo
$$d_Y(y_1, y_2) = d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d_X(x_1, x_2) = d_X\big(f^{-1}(y_1)\,, f^{-1}(y_2)\big) .$$
Zato je i preslikavanje f^{-1} izometrija, odakle sledi $Y \cong_i X$.
c) Neka su $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ sirjektivne izometrije. Tada je i kompozicija $g \circ f: X \to Z$ sirjekcija i za proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in X$ važi:
$$d_X(x_1, x_2) = d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d_Z\big(g\big(f(x_1)\big), \big)g\big(f(x_2)\big) ,$$
pa je i $g \circ f$ sirjektivna izometrija, odakle sledi $X \cong_i Z$.

•

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da relacija $\cong_i$ vrši razbijanje klase svih metričkih prostora na klase izometričnih prostora.

2.9. Kompaktnost u metričkom prostoru

Definicija 2.9.1. Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subset X$. Skup A je kompaktan ako iz svake familije otvorenih skupova $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ za koju važi:

$$A \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$$

može da se izdvoji konačna familija skupova $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_s}$ tako da je

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{s} O_{\alpha_i}\,.$$

Ako je $A = X$ kažemo da je (X,d) kompaktan metrički prostor.

Teorema 2.9.1.

Neka je (X,d) metrički prostor i A kompaktan podskup od X. Tada je A zatvoren i ograničen.

Dokaz:

Neka je podskup A kompaktan, odnosno iz svake familije otvorenih skupova $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, takve da je $A \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$, može da se izdvoji konačna familija $\{O_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ takva da je $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\alpha_i}$.

Dokazaćemo da je skup A zatvoren tako što ćemo pokazati da je njegov komplement CA otvoren. CA će biti otvoren skup ako pokažemo da za svaku tačku $y \in CA$ postoji lopta $L(y, r_y)$ takva da je

$$L(y, r_y) \subset CA.$$

Neka je $y \in CA$. Metrički prostor (X,d) je Hauzdorfov, što znači da za proizvoljne dve tačke $a, b \in X, a \neq b,$ postoje lopte $L(a, r_a)$ i $L(b, r_b)$ takve da je

$$L(a, r_a) \cap L(b, r_b) = \emptyset\,.$$

Dakle, i za svako $x \in A$ postoje $L(x, r_x)$ i $L(y, \overline{r_x})$ tako da je

$$L(x, r_x) \cap L(y, \overline{r_x}) = \emptyset$$

Kako je $A \subset \bigcup_{x\in A} L(x, r_x)$, a A je kompaktan skup, postoji konačan skup $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ takav da je

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} L(x_i, r_{x_i}) \qquad (1)$$

Skup $\bigcap_{i=1}^{n} L(y, \overline{r_{x_i}}) = O$ je takav da je

$$O \cap L(x_i, r_{x_i}) = \emptyset, \tag{2}$$

za sve $i \in \{1,2, \dots, n\}$, jer je $L(x_i, r_{x_i}) \cap\ L(y, \overline{r_{x_i}}) = \emptyset$, za sve $i \in \{1,2, \dots, n\}$ po konstrukciji, a $A \cap L\left(y, \overline{r_{x_j}}\right) \subset\ L(y, \overline{r_{x_i}})$ za sve $i \in \{1,2, \dots, n\}$.

Kako je, na osnovu (1) i (2),

$$A \cap O \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(L(x_i, r_{x_i}) \cap O\right) = \emptyset,$$

sledi da je, za $r = min\left\{\overline{r_{x_i}}\ ;\ \ i \in \{1,2, \dots, n\}\right\}$,

$$L(y, r) = O \subset CA\,,$$

odakle se može zaključiti da je CA otvoren skup, odnosno A je zatvoren.

Treba još pokazati da je A ograničen. To ćemo uraditi tako što ćemo pokazati da postoji lopta $L(x_0, r)$ takva da je $A \subset\ L(x_0, r)$.

Neka je $x_0 \in X$ proizvoljno. Tada je $A \subset X = \bigcup_{n \in N} L(x_0, n)$, te postoji konačan pokrivač $\left\{L(x_0, n_i)\,; i \in \{1,2, \dots, k\}\right\}$ skupa A . Tada je $A \subset L(x_0, m)$, gde je $m = \max_{1 \le i \le k} n_i$.

•

S' obzirom na teoreme koje daju potreban i dovoljan uslov za kompaktnost u metričkim prostorima, mogu se dati sledeće ekvivalentne definicije kompaktnosti u metričkim prostorima.

Definicija 2.9.2. Metrički prostor je kompaktan ako svaki niz iz X ima konvergentan podniz.

Definicija 2.9.3. Metrički prostor je kompaktan ako svaki beskonačan podskup od X ima tačku nagomilavanja koja mu pripada.

2.10. Kompletnost u metričkom prostoru

Posmatraćemo sada jednu posebnu klasu nizova – Košijeve nizove.

Definicija 2.10.1. Niz $\{x_n\}_{n\in N}$ iz X je Košijev ako važi sledeći uslov:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n, p \in N)\big(n > n_0(\varepsilon) \Longrightarrow d\big(x_{n+p}, x_n\big) < \varepsilon\big),$$

što je ekvivalentno sa

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n, m \in N)(n, m > n_0(\varepsilon) \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Teorema 2.10.1.

Ako je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ iz X konvergentan, on je i Košijev.

Dokaz:

Neka je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ konvergentan, što znači da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, odnosno

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n \in N)(n > n_0(\varepsilon) \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Za ${}^{\varepsilon}/_{2}$ postoji n_0 takvo da je

$$d(x_n, x) < {}^{\varepsilon}/_{2}, \quad \text{za sve } n > n_0\big({}^{\varepsilon}/_{2}\big),$$

odakle sledi da za $m, n > n_0\big({}^{\varepsilon}/_{2}\big) = n_0'(\varepsilon)$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon,$$

što znači da je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ Košijev.

•

U proizvoljnom metričkom prostoru, obrnuto ne mora da važi.

Primer 2.10.1.

Posmatraćemo metrički prostor (Q, d), gde je Q skup racionalnih brojeva. Košijev niz elemenata iz Q ne mora da konvergira u Q.

Neka je niz $\{a_n\}_{n\in N}$ definisan na sledeći način:

$$a_1 = 1{,}4$$

$$a_2 = 1{,}41$$

$$\ldots$$

$$a_n = \underbrace{1{,}414\ldots}_{\text{n - decimala broja } \sqrt{2}} \quad , \quad n \in N.$$

Niz $\{a_n\}_{n\in N} \subseteq Q$ i za sve $n \in N$ i $p \in N$ je

$$|a_{n+p} - a_n| < 10^{-n}$$

što znači da je Košijev, ali nema graničnu vrednost u Q $\left(\sqrt{2} \in R \setminus Q\right)$.

Primer 2.10.2.

Posmatramo metrički prostor $\left((0,1), d\right)$.

Niz $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.\right)$ je Košijev, ali nema graničnu vrednost u intervalu $(0,1)$, pa prema tome nije konvergentan.

Definicija 2.10.2. Ako u metričkom prostoru (X, d) za svaki Košijev niz $\{x_n\}_{n\in N}$ u X postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$, kažemo da je (X, d) kompletan metrički prostor.

Da se podsetimo , u metričkom prostoru $A \subset X$ je ograničen ako postoji realan broj

$$d(A) = sup\ \{d(a,b), a, b \in A\},$$

koji zovemo dijametar skupa A u metričkom prostoru (X, d).

<u>Teorema 2.10.2.</u>

Potreban i dovoljan uslov da (X, d) bude kompletan prostor jeste da je presek svakog opadajućeg niza nepraznih, zatvorenih skupova u X, čiji niz dijametara teži nuli, jednočlan skup.

Dokaz:

<u>Potreban uslov.</u> Neka je (X, d) metrički prostor, $\{A_n\}$ opadajući niz nepraznih zatvorenih skupova u (X, d) čiji niz dijametara teži nuli. Ako taj niz teži nuli, to znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in N$ takvo da je $diam\ A_{n_0} < \varepsilon$. Izdvojimo iz svakog skupa $\{A_n\}$ elemenat a_n. Kako $a_n \in A_n$, sledi da $a_n \in A_n \subset A_{n_0}, n \geq n_0$, pa je niz $\{A_n\}$ Košijev. Neka je a granica Košijevog niza. Kako su skupovi A_n zatvoreni, to $a \in A_n$, a samim tim i $a \in \bigcap_{n\in N} A_n$. Ako bi postojala

još jedna granica $b, a \neq b$, tada bi $d(a,b) \neq 0$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da niz dijametara teži nuli.

<u>Dovoljan uslov.</u> Neka je $\{x_m\}$ Košijev niz. To znači, da za svako $n \in N$, postoji $m(n)$ takvo da je $d\left(x_{m(n)}, x_m\right) < \frac{1}{n}$, za sve $m > m(n)$. Neka je $B\left(x_{m(n)}, {}^1\!/_n\right)$ zatvorena lopta. Tada, $x_m \in B$, jer se nalazi na rastojanju manjem od ${}^1\!/_n$ u odnosu na $x_{m(n)}$. Formirajmo opadajući niz zatvorenih skupova A_n na sledeći način:

$$A_1 = B\left(x_{m(1)}, 1\right),\ A_2 = A_1 \cap B\left(x_{m(2)}, \frac{1}{2}\right), \dots,\ A_n = A_{n-1} \cap B\left(x_{m(n)}, \frac{1}{n}\right), \dots$$

Niz $\{diam\ A_n\}$ teži nuli, pa $\cap A_n$ sadrži jednočlan skup $\{a\}$. Košijev niz $\{x_m\}$ konvergira ka a,

$$d(x_m, a) \leq d\left(x_m, x_{m(n)}\right) + d\left(x_{m(n)}, a\right) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \quad za\ m \geq m(n).$$

•

<u>Primeri kompletnog metričkog prostora:</u>

<u>Komentar:</u>

Od navedenih primera metričkih prostora koji su dati na početku, sledeći prostori su kompletni:

$$R^n\ , l^\infty,\ \ l^p\ , C[a,b],$$

a samo ćemo za neke to pokazati.

Primer 2.10.3.

(R, d) je kompletan metrički prostor, gde je

$$d(x,y) = |x - y|\,.$$

Ovo će biti dokazano ukoliko pokažem da svaki Košijev niz u R konvergira.

Pošto smo pokazali da je svaki konvergentan niz Košijev, dalje treba pokazati da je svaki Košijev niz ograničen.

Za $\varepsilon = 1$, odredimo $n_0 \in N$ takvo da je za sve $m, n \geq n_0$, $|x_m - x_n| < 1$.

Za $m = n_0$ dobijamo da je $\left|x_{n_0} - x_n\right| < 1$.

Ako uzmemo $l = \max\{1, \left|x_{n_0} - x_1\right|\ , \dots, \left|x_{n_0} - x_{n_0-1}\right|\}$, važi $\left|x_{n_0} - l\right| < x_n < \left|x_{n_0} + l\right|$, za svako $n \in N$, što znači da je niz $\{x_n\}_{n \in N}$ ograničen.

Dalje, treba pokazati da svaki Košijev niz ima najviše jednu tačku nagomilavanja.

Pretpostavićemo da postoje dve tačke nagomilavanja x i $y, x \neq y$ i one moraju biti u R, jer je niz ograničen. Neka je $d = |x - y|$. Niz $\{x_n\}$ je Košijev, te postoji $n_0 \in N$ takvo da je $|x_m - x_n| < \frac{d}{3}$. Pošto je x tačka nagomilavanja niza $\{x_n\}_{n\in N}$, postoji $m_1,\ m_1 > n_0$ takvo da je $\left|x_{m_1} - x\right| < \frac{d}{3}$.

$$|x - x_n| \leq \left|x - x_{m_1}\right| + \left|x_{m_1} - x_n\right| < \frac{2d}{3},$$

što znači da izvan $\frac{2d}{3}$ - okoline tačke x ima najviše konačno mnogo članova niza. Najviše konačno mnogo ih ima i u $\frac{d}{3}$ - okolini tačke y, jer je ova disjunktna sa $\frac{2d}{3}$ - okolinom tačke x, pa y ne može biti tačka nagomilavanja niza $\{x_n\}_{n\in N}$. Znači, ukoliko Košijev niz ima tačku nagomilavanja, ona je jedinstvena.

Pošto, na osnovu Bolcano-Vajerštrasove teoreme, svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja u R, znači da Košijev niz ima tačku nagomilavanja, pa je ona, na osnovu prethodne priče, jedinstvena. Zaključujemo da se klase konvergentnih i Košijevih nizova u skupu R poklapaju.

Primer 2.10.4.

(R^n, d) je kompletan metrički prostor , gde je za elemente $x, y \in R^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|\,.$$

Pokazaćemo da u R^n svaki Košijev niz konvergira. Neka je $\{x_\upsilon\}_{\upsilon\in N}$ Košijev niz u ^{n} i

$$x_\upsilon = (x_\upsilon^1, x_\upsilon^2, \dots x_\upsilon^n)\,,\ \ \upsilon \in N.$$

Dakle,

$$x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)\,,$$

$$x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)\,,$$

$$\vdots$$

$$x_\upsilon = (x_\upsilon^1, x_\upsilon^2, \dots x_\upsilon^n),$$

$$\vdots$$

To znači da imamo n nizova u R:

$\{x_\upsilon^1\}_{\upsilon\in N}$, niz prvih koordinata,

$\{x_\upsilon^2\}_{\upsilon\in N}$, niz drugih koordinata,

$$\vdots$$

$\{x_\upsilon^n\}_{\upsilon\in N}$, niz n-tih koordinata.

Kako je, po pretpostavci, niz $\{x_\upsilon^n\}_{\upsilon\in N}$ Košijev, sledi da

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\upsilon_0(\varepsilon)\in N)(\forall\upsilon,\mu\in N)\big(\upsilon,\mu>\upsilon_0(\varepsilon)\Rightarrow d\big(x_\upsilon,x_\mu\big)<\varepsilon\big),$$

gde je $d(x,y)=max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$.

Dakle,

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\upsilon_0(\varepsilon)\in N)(\forall\upsilon,\mu\in N)\left(\upsilon,\mu>\upsilon_0(\varepsilon)\Rightarrow \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|<\varepsilon\right).$$

Sledi da je, za svako fiksirano $i\in\{1,2,\dots,n\}$, niz i-tih koordinata

$$\{x_\upsilon^i\}_{\upsilon\in N}$$

Košijev niz u R, te postoji

$$lim_{\upsilon\to\infty}x_\upsilon^i=x^i,\ \text{za sve } i\in\{1,2,\dots,n\},$$

jer je R kompletan metrički prostor.

Kako za svako $\varepsilon>0$, postoji $\upsilon_0(\varepsilon)\in N$ tako da za sve $\upsilon,\mu\in N$ važi

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_\upsilon^i-x_\mu^i\right|<\varepsilon,$$

ako je $\upsilon,\mu>\upsilon_0(\varepsilon)$, kada $\mu\to\infty$ iz prethodne nejednakosti sledi

$$max_{1\le i\le n}\left|x_\upsilon^i-x^i\right|<\varepsilon,\ \text{za sve } \upsilon>\upsilon_0(\varepsilon),$$

Odakle je prema zadatoj metrici,

$$d(x_\upsilon,x)<\varepsilon,\ \text{za sve } \upsilon>\upsilon_0(\varepsilon),$$

gde je $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$.

Dakle, $lim_{n\to\infty}x_n=x$, što je i trebalo pokazati.

Primer 2.10.5.

Pokazaćemo da je prostor l^{∞}ograničenih realnih ili kompleksnih nizova sa metrikom

$$d(x,y) = sup_{i\in N}|x_i - y_i|, \qquad x = (x_n) \in l^{\infty}, \qquad y = (y_n) \in l^{\infty}$$

kompletan.

Neka je $\{(x_{\mu}^{n})\}_{\mu\in N}$ Košijev niz u l^{∞}. Tada sledi da je za svako $n \in N$, niz $\{x_{\mu}^{n}\}_{\mu\in N}$ Košijev niz u R i neka je

$$\lim_{\mu\to\infty} x_{\mu}^{n} = x^{n}, n \in N.$$

Pokazaćemo da je $(x^n) \in l^{\infty}$ i da je $lim_{\mu\to\infty}\, d\left((x_{\mu}^{n}),(x^n)\right) = 0.$

Kako je svaki Košijev niz i ograničen, sledi da postoji $M > 0$ tako da je

$d\left(0,(x_{\mu}^{n})\right) \leq M,$ za sve $\mu \in N.$

Odavde je $sup_{n\in N}|x_{\mu}^{n}| \leq M$, za sve $\mu \in N$, te je i $sup_{n\in N}|x^n| \leq M.$

To znači da je $(x^n) \in l^{\infty}$. Kako je niz $\{(x_{\mu}\ )\}_{\mu\in N}$ Košijev, sledi da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\nu_0(\varepsilon) > 0$ tako da je

$$sup_{n\in N}|x_{\mu}^{n} - x_{\nu}^{n}| < \varepsilon \ za\ sve\ \nu, \mu > \nu_0(\varepsilon).$$

Kada $\mu \to \infty$ sledi da je $d\left((x_{\nu}^{n}),(x^n)\right) < \varepsilon$, za sve $\nu > \nu_0(\varepsilon)$. Dakle,

$$\lim_{\nu\to\infty} d\left((x_{\nu}^{n}),(x^n)\right) = 0\ .$$

2.11. Kompletiranje nekompletnih metričkih prostora

Posmatrajmo nekompletne metričke prostore. Jedan od primera je metrički prostor racionalnih brojeva. On je vrlo neefikasan aparat. Kada bismo se na njemu zadržali ne bismo mogli izračunati gotovo nijednu jedinu površinu površi ograničene proizvoljnom krivom linijom u ravni. To je razlog što se sa racionalnih brojeva prešlo na širi skup – realne brojeve. Granica proizvoljnog niza racionalnih brojeva je uvek realan broj, ali i granica proizvoljnog niza realnih brojeva je realan broj. Skup realnih brojeva je kompletan, kao što smo dokazali.

Dakle, skup realnih brojeva kompletira skup racionalnih brojeva. Postavlja se pitanje da li je moguće kompletirati bilo koji metrički prostor.

Teorema 2.11.1.

Svakom nekompletnom metričkom prostoru A odgovara jedan metrički prostor X, čiji je potprostor B izometričan sa A i koji je svuda gust u X. Ako postoji više takvih prostora X, onda su oni izometrični.

Dokaz:

Posmatrajmo skup svih Košijevih nizova iz A. U taj skup definišimo relaciju ekvivalencije na sledeći način. Za dva Košijeva niza $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ reći ćemo da su ekvivalentna ako je $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Skup količnik u odnosu na ovu relaciju obeležićemo sa $\tilde{A}$. Njegovi elementi, obeležićemo ih sa $\tilde{x}$, su klase ekvivalencije Košijevih nizova, u odnosu na navedenu relaciju ekvivalencije.

Stacionarnim nizom zvaćemo niz čiji su svi elementi jednaki $(x, x, x, \dots, x, \dots)$. Svaki stacionaran niz je i Košijev. Svakoj klasi može pripadati samo jedan stacionaran niz.

U skupu $\tilde{A}$ definisaćemo rastojanje na sledeći način:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,,$$

gde su $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ proizvoljni nizovi iz klase $\tilde{x}$, odnosno $\tilde{y}$.

Da bi ova definicija imala smisla, treba pokazati da $\tilde{d}$ postoji za svako $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{A}$ i da ne zavisi od izbora niza iz klase.

Prvo ćemo pokazati da $\tilde{d}$ postoji:

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_n, y_m)\,,$$

odakle je

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) .$$

Izmenimo mesta za indekse m i n i dobijamo

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Iz poslednje dve nejednakosti sledi da je

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Nizovi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ su Košijevi, pa desna strana u poslednjoj relaciji teži 0. To znači da je niz brojeva $d(x_n, y_n)$ Košijev niz, a time i konvergentan, jer je R kompletan prostor.

Pokažimo sada da ovako definisano rastojanje $\tilde{d}$ ne zavisi od izbora niza iz datih klasa. Uzmimo po dva niza iz iste klase:

$\{x_n\}$ i $\{x_n'\} \in \tilde{x}$, a $\{y_n\}$ i $\{y_n'\} \in \tilde{y}$.

Na osnovu toga dobijamo da je

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_n') + d(x_n', y_n') + d(y_n', y_n) ,$$

odakle je

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n') .$$

U prethodnoj nejednakosti izmenimo x_n sa x_n' i y_n sa y_n' i kad pređemo granici, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n') \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) .$$

Dve poslednje relacije sa limesom nam daju da je

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n') = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) .$$

Sada ćemo pokazati da je $\tilde{A}$ kompletan prostor. Izaberimo jedan Košijev niz $\{\widetilde{x_n}\}$ iz prostora $\tilde{A}$. Iz svake klase $\widetilde{x_n}$ izaberimo jedan niz $\{x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots\}$. Odredimo indeks k_n tako da je $d\left(x_m^n, x_{k_n}^n\right) \leq \frac{1}{n}$ za sve $m \geq k_n$. Pokazaćemo da je i niz $\left\{x_{k_1}^n, x_{k_2}^n, \dots\right\}$ Košijev niz. Obeležimo sa $\tilde{x}_{k_n}^n$ i $\tilde{x}_{k_m}^m$ odgovarajuće stacionarne nizove, čiji su članovi $x_{k_n}^n$ odnosno $x_{k_m}^m$. Tada je

$$d\left(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m\right) = \tilde{d}\left(\tilde{x}_{k_n}^n, \tilde{x}_{k_m}^m\right) \leq \tilde{d}\left(\tilde{x}_{k_n}^n, \tilde{x}_n\right) + \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \tilde{d}\left(\tilde{x}_m, \tilde{x}_{k_m}^m\right) .$$

Prema konstrukciji niza $\left\{x_{k_n}^n\right\}$, desna strana ove nejednačine teži 0 kada $m, n \to \infty$, a time i leva. Pokazali smo da je navedeni niz Košijev, pa pripada nekoj klasi $\tilde{x}$.

Pokazaćemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}$.

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \le \tilde{d}\left(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_n}^{n}\right) + \tilde{d}\left(\tilde{x}_{k_n}^{n}, \tilde{x}_n\right) \le \lim_{p\to\infty} \mathrm{d}\left(x_{k_p}^{p}, x_{k_n}^{n}\right) + \frac{1}{\mathrm{n}} = \frac{1}{\mathrm{n}} + \varepsilon_{\mathrm{n}} ,$$

gde $\varepsilon_{\mathrm{n}} \to 0, \mathrm{n} \to \infty$.

Posmatrajmo sada podskup B skupa $\tilde{A}$ koji se sastoji od onih elemenata skupa $\tilde{A}$ koji u okviru klase sadrže stacionarne nizove oblika $\tilde{a} = \{a, a, a, \dots, a, \dots\}$. Skup B je izometričan sa A. Naime, svakom elementu $a \in A$ odgovara jedan elemenat $\tilde{a} \in B$ koji sadrži stacionaran niz $\{a, a, a, \dots, a, \dots\}$. Važi i obrnuto, jer svaka klasa sadrži samo jedan stacionaran niz, svakom elementu $\tilde{a} \in B$ odgovara onaj elemenat iz A koji definiše stacionaran niz iz klase $\tilde{a}$.

Prema definiciji $\tilde{d}$, iz klase $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ možemo izabrati baš stacionaran niz , pa je $\tilde{d}\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) = d(a, b)$. Time je dokazana izometrija A i B.

Pokazaćemo sada da je B svuda gust skup u $\tilde{A}$. Neka je $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ niz koji pripada klasi $\tilde{x} \in \tilde{A}$. Možemo odrediti n_0 tako da je $d\left(x_m, x_{n_0}\right) < \varepsilon$, za sve $m > n_0$. Formirajmo stacionarni niz $\left\{\tilde{x}_{n_0}\right\}$. On pripada skupu B, a $\tilde{d}\left(\tilde{x}, \tilde{x}_{n_0}\right) < \varepsilon$.

Ostaje da se pokaže da ako postoji neki drugi skup $\tilde{A}'$ sa istim svojstvom kao i $\tilde{A}$ da je on izometričan sa $\tilde{A}$. Neka je dakle $\tilde{A}'$ takav skup koji sadrži podskup B' izometričan sa A, a koji je svuda gust u $\tilde{A}'$.

Neka je $x' \in \tilde{A}'$. Postoji niz $\{\xi_n'\} \subset B'$ takav da je $x' = \lim \ \xi_n'$, jer je B' svuda gust u $\tilde{A}'$. Zbog izomorfizma B' i A postoji niz $\{a_n\} \subset A$ koji ovim izomorfizmom odgovara nizu $\{\xi_n'\} \subset B'$. Nizu $\{a_n\} \subset A$ odgovara izomorfizmom niz $\{\xi_n\} \subset B$ i postoji $\lim \xi_n = x \in \tilde{A}$. Tako smo dobili preslikavanje $\tilde{A}'$ na $\tilde{A}$. To preslikavanje je obostrano jednoznačno. Naime, da smo uzeli drugi niz $\{\mu_n'\}$ koji konvergira ka x' važilo bi $d(\xi_n', \mu_n') \to 0, n \to \infty$. Odgovarajući niz u A za $\{\mu_n'\}$ padao bi u istu klasu sa $\{a_n\}$.

Ostaje još da pokažemo da je dobijeno preslikavanje $\tilde{A}'$ na $\tilde{A}$ izometrija.

Neka elementu $x' \in \tilde{A}'$, preko $\{\xi_n'\} \subset B', \{a_n\} \subset A , \{\xi_n\} \subset B$ odgovara elemenat $x \in \tilde{A}$. Isto tako elementu $y' \in \tilde{A}'$ preko $\{\eta_n'\} \subset B', \{b_n\} \subset A , \{\eta_n\} \subset B$ odgovara $y \in \tilde{A}$. Tada je zbog neprekidnosti rastojanja:

$$\tilde{d}(x', y') = \lim d'(\xi_n', \eta_n') = \lim d(a_n, b_n) = \lim d(\xi_n, \eta_n) = \tilde{d}(x, y) .$$

•

3. Normirani prostori

Posmatraćemo sada jednu, u primeni, posebno važnu klasu metričkih prostora.

Pretpostavimo sada da skup X ima i algebarsku strukturu, tj. da je X vektorski prostor nad poljem $F \in \{R, C\}$.

Definicija 3.1. Neka je $\nu : X \to [0, \infty)$ tako da važe sledeći uslovi:

1) $\nu(x) = 0 \iff x = 0$;
2) $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$, za sve $\lambda \in F$ i sve $x \in X$;
3) $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$, za sve $x, y \in X$.

Tada kažemo da je preslikavanje ν norma nad X, a uređeni par (X, ν) je normiran prostor.

Normu ν ćemo u daljem tekstu obeležavati sa $\|\cdot\|$ ili $\|\cdot\|_X$.

Svaki normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ je i metrički prostor (X, d) sa metrikom d koja je definisana na sledeći način:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ za sve } x, y \in X.$$

Proverićemo da d ima osobine metrike.

1) $d(x,y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;

2) Kako je $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\|$

   sledi da je $d(x, y) = d(y, x)$, za sve $x, y \in X$;

3) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$

   za sve $x, y, z \in X$.

Pošto su svi uslovi zadovoljeni, pokazali smo da je d metrika na X.

U normiranom prostoru algebarska i topološka struktura su saglasne, jer su:

a) $(x, y) \to x + y$, $x, y \in X$,
b) $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$, $x \in X, \lambda \in F$,

neprekidne operacije, što znači da je svaki normirani prostor i vektorsko-topološki prostor.

4. Uopštavanja metrike

Modifikovanjem postojećih uslova iz definicije metrike ili uvođenjem snažnijih uslova u istu, mogu se dobiti različite "metrike".

4.1. Premetrika

Definicija 4.1.1. Preslikavanje $d: X \times X \to [0,\infty)$ koje zadovoljava sledeće uslove:

1) $d(x, y) \geq 0$,
2) $d(x, x) = 0$,

za sve $x, y \in X$, naziva se premetrika.

Ovo nije standardni termin. Nekad se koristi kako bi ukazao na druge generalizacije metrika, kao što je pseudometrika. U prevodima ruskih knjiga, za ovu generalizaciju metrike , često se koristi termin „prametrika".

Za pozitivan, realan broj r, otvorena r-lopta sa centrom u tački p se definiše kao

$$B_r(p) = \{x: d(x, p) < r\}.$$

Skup je otvoren ako za bilo koju tačku p iz tog skupa, postoji r-lopta sa centrom u tački p koja se takođe nalazi u tom skupu. Time je indukovana topologija na X. U opštem slučaju, otvorene r-lopte ne moraju da budu otvoreni skupovi u odnosu na datu topologiju. Ustvari, unutrašnjost r-lopte može biti prazna.

4.2. Pseudometrika

U matematici, pseudometrički prostor je uopšten metrički prostor u kom rastojanje između dve različite tačke može biti nula.

Definicija 4.2.1. Preslikavanje $d: X \times X \to [0,\infty)$ je pseudometrika, ako za svako $x, y, z \in X$ važi:

1) $d(x, x) = 0$,
2) $d(x, y) = d(y, x)$,
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada je par (X, d) pseudometrički prostor.

Primer 4.2.1.

Trivijalna pseudometrika

$$d(x, y) = 0 \,,$$

za sve $x, y \in X$, je pseudometrika na svakom nepraznom skupu X.

Primer 4.2.2.

Neka je $X = R^2$ i $d: X \times X \to R^+$ dato sa

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = |x_1 - y_1| \,.$$

Proveravanje uslova:

1) $d(x, x) = |x_1 - x_1| = 0$,
2) $d(x, y) = |x_1 - y_1| = |y_1 - x_1| = d(y, x)$,
3) $d(x, y) = |x_1 - y_1| = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| = d(x, z) + d(z, y)$.

Ovo je primer pseudometrike, ali ne i metrike, jer ukoliko uzmemo tačke $(2,3)$ i $(2,5)$, rastojanje, po ovom primeru je 0, jer

$$d\big((2,3), (2,5)\big) = |2 - 2| = 0.$$

Primer 4.2.3.

Skup svih funkcija $\varphi, \phi: R \to R$, takvih da je

$$d(\phi, \varphi) = |\phi(0) - \varphi(0)|.$$

1) $d(\phi, \phi) = |\phi(0) - \phi(0)| = 0$,
2) $d(\phi, \varphi) = |\phi(0) - \varphi(0)| = |\varphi(0) - \phi(0)| = d(\varphi, \phi)$,
3) $(\phi, \varphi) = |\phi(0) - \varphi(0)| = |\phi(0) - \psi(0) + \psi(0) - \varphi(0)| \leq |\phi(0) - \psi(0)| +$ $|\psi(0) - \varphi(0)| = d(\phi, \psi) + d(\psi, \varphi)$

Ovo jeste pseudometrika, ali ne i metrika, jer ukoliko uzmemo da je $\phi = \sin x$, a $\varphi = sin^2\, x$, dobijamo da je

$$d(\phi, \varphi) = d(\sin x, sin^2 x) = |\sin 0 - sin^2 0| = 0.$$

4.2.1. Topologija pseudometričkog prostora

Neka je (X, d) pseudometrički prostor. Skup

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X\,; d(x, y) < \varepsilon\},$$

za $x \in X, \varepsilon > 0,$ naziva se otvorena lopta sa centrom u x, polupre{\v c}nika ε.

Pokazaćemo da je

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x)\,;\ \varepsilon > 0, x \in X\}$$

baza topologije na X. Ovu topologiju zovemo pseudometrična topologija na X indukovana pseudometrikom d.

Teorema 4.2.1.1.

$\mathcal{B}$ je baza topologije na X.

Dokaz:

Pretpostavimo da $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $z \in B_1 \cap B_2$. Pokazaćemo da postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takvo da

$$z \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2\,.$$

Prema definiciji $B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1)$ i $B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$, za neke $x_1, x_2 \in X$ i $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Tada

$$d(x_1, z) < \varepsilon_1\ ,\quad d(x_2, z) < \varepsilon_2\,.$$

Sada možemo definisati $\delta = \min\{\varepsilon_1 - d(x_1, z), \varepsilon_2 - d(x_2, z)\}$ i $B_3 = B_\delta(z)$.

Ako $y \in B_3$, $k = 1,2$, tada je

$$\begin{aligned} d(x_k, y) &\leq d(x_k, z) + d(z, y) \\ &< d(x_k, z) + \delta \\ &\leq \varepsilon_k, \end{aligned}$$

Tako da $B_3 \subseteq B_k$, za $k = 1,2$, pa važi $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

•

Neka je (X, d) pseudometrički prostor. Uvođenjem relacije ekvivalencije, pseudometrički prostor se može pretvoriti u dobro definisan metrički prostor. Ta relacija ekvivalencije naziva se *metrička identifikacija*.

Definišimo relaciju $x \sim y$ ako je $d(x, y) = 0$. Lako se proverava da je to relacija ekvivalencije.

To znači da u jednu klasu ekvivalencije stavimo sve tačke koje su na rastojanju jednakom nuli.

Definicija 4.2.1.1. Neka je $X^* = X/^\sim$ i neka je

$$d^*([x], [y]) = d(x, y) .$$

Tada je d^* metrika na X^* i (X^*, d^*) je metrički prostor.

Hoćemo da pokažemo da je ovako definisana funkcionela, metrika na X^*.

1) $d^*([x], [y]) \geq 0$,
2) $d^*([x], [y]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad [x] = [y]$,
3) $d^*([x], [y]) = d(x, y) = d(y, x) = d^*([y], [x])$,
4) $d^*([x], [y]) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d^*([x], [z]) + d^*([z], [y])$.

Kako su zadovoljeni uslovi iz definicije metrike, za svako $x, y, z \in X^*$, možemo zaključiti da je d^* metrika na X^*.

4.3. Semimetrika

U matematici, semimetrički prostor uopštava pojam metričkog prostora tako što isključuje osobinu nejednakosti trougla.

Definicija 4.3.1. Neka je $X \neq \emptyset$ i neka $d: X \times X \to R$ zadovoljava sledeće uslove:

1) $d(x,y) \geq 0$ (nenegativnost),
2) $d(x,y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,
3) $d(x,y) = d(y,x)$

Tada se d naziva semimetrika, a par (X,d) semimetrički prostor.

Primer 4.3.1.

Neka je $X = A \cup B$, gde je $A = \{(0,y) \in R^2 : -1 \leq y \leq 1\}$, a B je grafik funkcije $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, za $0 < x \leq 1$. Ako su $u = (x_1, y_1)$ i $v = (x_2, y_2)$ elementi iz X, definišimo $d(u,v) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$, ako je bar jedan od elemenata u i v iz A. Definišimo $d(u,v)$ kao "dužinu luka" između u i v, ako su i u i v iz B. Tada je d semimetrika.

Već smo pokazali da je u metričkim prostorima svaki konvergentan niz Košijev. Međutim, u semimetričkim prostorima postoje primeri u kojima konvergentan niz ima podniz koji nije Košijev.

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove pod kojima u semimetričkom prostoru svaki konvergentan niz ima podniz koji je Košijev.

<u>Teorema 4.3.1.</u>

Ako je (X,d) semimetrički prostor, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1) Svaki konvergentan niz u X ima podniz koji je Košijev.
2) Ako je $\{x_n\}$ konvergentan niz u X i ε pozitivan broj, tada postoji podniz $\{z_n\}$ niza $\{x_n\}$ takav da $d(z_n, z_m) < \varepsilon$, za sve $m, n \in N$.
3) Ako $F \subseteq X$ i ε pozitivan broj takav da je $d(x,y) \geq \varepsilon$ za sve tačke $x, y \in F$, tada je F zatvoren skup.

Dokaz:

$1) \Rightarrow 2)$ Neka je $\{x_n\}$ konvergentan niz u X, a $\{z_n\}$ njegov podniz koji je Košijev. Tada, na osnovu definicije Košijevih nizova znamo da za svako $\varepsilon > 0$ i sve $m, n \in N$ važi da je $d(z_n, z_m) < \varepsilon$.

$2) \Rightarrow 1)$ Direktno, na osnovu definicije konvergentnih i Košijevih nizova,

3) $\Longrightarrow$ 2) Pretpostavimo da važi uslov 3) i neka je $\{x_n\}$ niz u X koji konvergira ka $x \in X$. Pretpostavimo da za svaki podniz $\{y_n\}$ niza $\{x_n\}$ postoji podniz $\{z_n\}$ takav da je $d(z_1, z_n) \geq \varepsilon$, za sve $n > 1$. Tada bi mogli konstruisati podniz $\{z_n'\}$ takav da je $d(z_n', z_m') \geq \varepsilon$, za sve $n, m \in N, n \neq m$. Ovo je nemoguće, pa sledi da postoji podniz $\{y_n\}$ niza $\{x_n\}$, takav da za svaki njegov podniz $\{z_n\}$ imamo da je $d(z_1, z_n) < \varepsilon$, za neko $n > 1$. Sledi da možemo naći podniz $\{z_n'\}$ niza $\{y_n\}$ takav da $d(z_n', z_m') < \varepsilon$, za svako $n, m \in N$.

•

4.4. Kvazimetrika

Definicija 4.4.1. Neka je $M \neq \emptyset$ i neka $d: M \times M \to R$ zadovoljava sledeće uslove:

1) $d(x, y) \geq 0$ (nenegativnost),
2) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trougla),

tada se funkcionela d naziva kvazimetrika, a par (M, d) kvazimetrički prostor.

Kvazimetrika je česta pojava u stvarnom životu, ali ova notacija se ređe koristi u matematici, a njeno ime nije u potpunosti standardizovano.

Ako je (M, d) kvazimetrički prostor, tada se može formirati metrički prostor (M, d'), gde je

$$d'(x, y) = \frac{\big(d(x, y) + d(y, x)\big)}{2}, \quad x, y \in M.$$

Primer 4.4.1.

Skup planinskih sela, gde je $d(x, y)$ prosečno vreme koje je potrebno da bi se stiglo iz sela x u selo y je kvazimetrika.

Obrazloženje:

1) $d(x, y) \geq 0$
   Da bi se stiglo iz jednog sela u drugo, potrebno je određeno vreme, koje je uvek nenegativna veličina.
2) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
   Ako je $x = y$, znači da se radi o istom selu,pa je rastojanje između njih baš 0. A, ako je rastojanje 0, to znači da se nalazimo baš u selu u kom smo.

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
Ako je selo z između x i y, onda je $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$. Ako nije, manje vremena će trebati da direktno idemo iz sela x u selo y, nego da idemo do sela z, jer bi nam tad više vremena trebalo.

Ovde ne važi simetričnost, jer vreme od sela x do sela y ne mora biti isto kao i vreme kada se ide u obrnutom smeru. Mnogo faktora može da utiče na vreme, tako da ono može da se razlikuje. Ovde je najvažniji faktor to što se radi o planinskim selima, pa nije isto ići niz ili uz brdo.

Primer 4.4.2.

Posmatramo preslikavanje $d: R \times R \to [0,\infty)$ zadato na sledeći način:

$$d(x,y) = \max \{y - x, 0\}.$$

1) $d(x,y) \geq 0,\ \ x, y \in R$,
2) $d(x,y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,
3) $d(x,y) = \max \{y - x, 0\} = \max \{y - z + z - x, 0\} \leq \max\{y - z, 0\} + \max\{z - x, 0\} = d(z,y) + d(x,z) = d(x,z) + d(z,y)$.

Ovo jeste primer kvazimetrike, ali ne i metrike. Razlog za to je odsustvo simetrije, jer ne važi da je $y - x = x - y$. Ukoliko uzmemo da se tačka x na polupravoj nalazi desno od tačke y, po uslovu navedenog primera, rastojanje je 0, a ne $x - y$.

Primer 4.4.3.

Već znamo da je sa

$$d(x,B) = \inf \{d(x,b),\ \ b \in B\},$$

definisano rastojanje tačke od skupa.

Na osnovu ovog možemo definisati rastojanje dva skupa na sledeći način:

$$d(A,B) = \underbrace{\sup}_{a \in A} \underbrace{\inf}_{b \in B} d(a,b)\ .$$

Ovo je primer pseudokvazimetrike. Proverimo!

1) $d(A,B) \geq 0$, jer je $d(a,b) \geq 0,\ \ a \in A, b \in B$,

2) $d(A,B) = \underbrace{\sup}_{a\in A} \underbrace{\inf}_{b\in B} d(a,b) \leq$
$\underbrace{\sup}_{a\in A} \underbrace{\inf}_{b\in B} \big(d(a,c) + d(c,b)\big) \leq \underbrace{\sup}_{a\in A} \underbrace{\inf}_{c\in C} d(a,c) + \underbrace{\sup}_{c\in C} \underbrace{\inf}_{b\in B} d(c,b) =$
$d(A,C) + d(C,B)$.

Simetričnost ne važi, jer $\underbrace{\sup}_{a\in A} \underbrace{\inf}_{b\in B} d(a,b)$ nije isto što i $\underbrace{\inf}_{a\in A} \underbrace{\sup}_{b\in B} d(a,b)$. Takođe, ne važi ni da je $d(A,B) = 0$ ako i samo ako je $A = B$. Kako nisu zadovoljena navedena dva uslova, ovo nije primer kvazimetrike, nego posebne vrste generalizovane metrike koja se naziva pseudo-kvazi metrika.

Ukoliko malo modifikujemo definiciju kvazimetrike, možemo dobiti generalizovanu kvazimetriku.

Definicija 4.4.2. Neka je $M \neq \emptyset$ i neka $d: M \times M \to R$ zadovoljava sledeće uslove:

1) $d(x,y) \geq 0$ (nenegativnost),
2) $d(x,y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,
3) $d(x,y) \leq k \cdot \big(d(x,z) + d(z,y)\big), \quad k \geq 1$.

Tada je d generalizovana kvazimetrika.

<u>Komentar:</u>

Ako uzmemo da je $k = 1$, dobijamo baš nejednakost trougla i definiciju kvazimetrike, međutim, za $k > 1$ to je već uopštenje te definicije.

4.5. G-metrika

Mnogi matematičari su pokušali da uopšte pojam metričkih prostora u kom je definisano rastojanje tri ili više tačaka, ali su različiti autori dokazali da su ovi pokušaji uopštavanja metričkih prostora bili neuspešni. Ovo se sve dešavalo do 2005. godine, kada su Mustafa i Sims [3] predstavili novu strukturu generalizovanih metričkih prostora , koje zovemo G-metrički prostori, na osnovu kojih se, između ostalog, može proučavati teorija fiksne tačke.

Definicija 4.5.1. Neka je X neprazan skup, a $G: X \times X \times X \to R^+$ funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:

G1) $G(x, y, z) = 0$ ako je $x = y = z$,

G2) $0 < G(x, x, y)$, za sve $x, y \in X,\ x \neq y$,

G3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$, za sve $x, y, z \in X, z \neq y$,

G4) $(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, x, z) = \cdots$,

G5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, za sve $x, y, z, a \in X$.

Tada se funkcija G naziva uopštena metrika, tačnije G-metrika na X, a uređeni par (X, G) je G-metrički prostor.

<u>Napomena:</u>

Ovi uslovi su zadovoljeni kada je $G(x, y, z)$ obim trougla sa temenima u x, y, z iz R^2. Ukoliko uzmemo da je a u unutrašnjosti trougla, dobijamo da je G5) najbolji mogući uslov.

<u>Teorema 4.5.1.</u>

Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada, za svako $x, y, z, a \in X$ važi:

1) Ako $G(x, y, z) = 0$, tada je $x = y = z$,
2) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$,
3) $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$,
4) $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}\left(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z)\right)$,
5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$.

Dokaz:

1) Pretpostavićemo da je $G(x, y, z) = 0$ i recimo $x \neq y$. Na osnovu uslova G2) prethodne teoreme znamo da je
$$0 < G(x, x, y),\ \text{za}\ x \neq y\,.$$

Iz uslova G3) je
$$G(x,x,y) \leq G(x,y,z) = 0,$$
pa je $0 < G(x,x,y) \leq 0$. Odavde sledi da je $G(x,x,y) = 0$, za $x \neq y$, što je kontradikcija sa uslovom G2). Zaključujemo da mora biti da je $x = y$.
Analogno se pokazuje da je $y = z$, pa je zaključak da ukoliko imamo da je $G(x,y,z) = 0$, radi se o jednoj tački.

2) Na osnovu uslova G5) znamo da je
$$G(x,y,z) \leq G(a,y,a) + G(x,a,z) .$$
Ako uzmemo da je $x = a$, dobijamo
$G(x,y,z) \leq G(x,y,x) + G(x,x,z)$, a kako važi G4), tada je
$$G(x,y,z) \leq G(x,x,y) + G(x,x,z) .$$

3) Dokazali smo da je $G(x,y,z) \leq G(x,x,y) + G(x,x,z)$. Ovo važi za svako x,y,z, pa onda važi i za $z = y$. Kada to ubacimo u formulu, dobije se
$$G(x,y,y) \leq G(x,x,y) + G(x,x,y) =$$
$$= 2G(x,x,y) = 2G(y,x,x),$$
što je trebalo dokazati.

4) Na osnovu G5) znamo da važe sledeće nejednakosti:
$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z),$$
$$G(x,y,z) \leq G(a,y,a) + G(x,a,z),$$
$$G(x,y,z) \leq G(a,a,z) + G(x,y,a).$$
Kada saberemo ove tri nejednakosti, dobije se da je
$3G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z) + G(a,y,a) + G(x,a,z) + G(a,a,z) + G(x,y,a)$.
Kako je, na osnovu uslova G3)
$$G(x,a,a) \leq G(x,a,z),$$
$$G(a,y,a) \leq G(x,y,a),$$
$$G(a,a,z) \leq G(a,y,z),$$
tada sledi da je $3G(x,y,z) \leq 2\big(G(x,a,z) + G(x,y,a) + G(a,y,z)\big)$.
Konačno, $G(x,y,z) \leq \frac{2}{3}\big(G(x,y,a) + G(x,a,z) + G(a,y,z)\big)$.

5) Iz uslova G5) važi da je
$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,a) + G(a,a,z) =$$
$$= G(x,a,a) + G(y,a,a) + G(z,a,a).$$

•

Kada posmatramo metrički prostor (X,d), postoji mogućnost da se definiše G- metrika na skupu X. To se može učiniti na sledeći način:

1) (E_s) $G_s(d)$ $(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(x,z)$,

2) (E_m) $G_m(d)$ $(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$.

Takođe, može da se uradi i obrnuto.

Teorema 4.5.2.

Svaki G-metrički prostor (X, G) definiše metrički prostor (X, d_G) na sledeći način:

$$d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x), \text{ za sve } x, y \in X.$$

Dokaz:

Treba pokazati da $d_G(x, y)$ zadovoljava uslove metrike.

1) $d_G(x, y) \geq 0,\ x, y \in X,$
2) $d_G(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(x, y, y) + G(y, x, x) = 0.$
   Pošto funkcionela G ne može biti negativna, ovaj zbir može biti 0 samo ako su oba sabirka jednaka nuli, tj. $G(x, y, y) = 0$ i $G(y, x, x) = 0$. Na osnovu uslova 1) prethodne teoreme sledi da
   $G(x, y, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$
   $G(y, x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$
   Dakle, $d_G(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$
3) $d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x)$
   $= G(y, x, x) + G(x, y, y) = d_G(y, x).$
4) Na osnovu uslova G5) važi da je
   $$G(x, y, y) \leq G(x, z, z) + G(z, y, y),$$
   $$G(y, x, x) \leq G(y, z, z) + G(z, x, x),$$
   za sve $x, y, z \in X$.

   Dakle, $d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x)$
   $$\leq G(x, z, z) + G(z, y, y) + G(y, z, z) + G(z, x, x)$$
   $$= G(x, z, z) + G(z, x, x) + G(z, y, y) + G(y, z, z)$$
   $$= d_G(x, z) + d_G(z, y).$$

Kako su svi uslovi zadovoljeni, sledi da je $d_G(x, y)$ metrika, što je i trebalo pokazati.

•

Definicija 4.5.2. Neka je (X, G) G-metrički prostor. Tada za $x_0 \in X, r > 0, G$-lopta sa centrom u x_0 i poluprečnikom r je

$$B_G(x_0, r) = \{y \in X : G(x_0, y, y) < r\}.$$

Teorema 4.5.3.

Neka je (X,G) G-metrički prostor. Tada, za bilo koje $x_0 \in X$ i $r > 0$ važi:

1) Ako $G(x_0,x,y) < r$, tada $x,y \in B_G(x_0,r)$,
2) Ako $y \in B_G(x_0,r)$, tada postoji $\delta > 0$ takvo da $B_G(y,\delta) \subseteq B(x_0,r)$.

Dokaz:

1) Pretpostavimo da je $G(x_0,x,y) < r$. Tada, na osnovu G3), važi da je
$$G(x_0,x,x) \leq G(x_0,x,y) < r,$$
odakle zaključujemo da $x \in B_G(x_0,r)$.
Analogno, može se pokazati da i $y \in B_G(x_0,r)$.
2) Neka $y \in B_G(x_0,r)$. To znači da je $G(x_0,y,y) < r$.
Tada postoji $B_G(y,\delta)$, gde je $\delta > 0$, i koja se nalazi unutar $B_G(x_0,r)$.
$$x_0 \in B_G(y,\delta) \quad \Leftrightarrow \quad G(y,x_0,x_0) < \delta.$$
Ako uzmemo da je $\delta = r - G(x_0,y,y)$, dobija se da je
$$G(y,x_0,x_0) < r - G(x_0,y,y) \quad \Leftrightarrow \quad G(y,x_0,x_0) + G(x_0,y,y) < r .$$
Na osnovu prethodne teoreme, sledi da je $d_G(x_0,y) < r$. Dakle, $B_G(y,\delta) \subseteq B(x_0,r)$.

•

Iz uslova 2) prethodne teoreme, sledi da je familija svih lopti

$$\mathcal{B} = \{B_G(x,r) : x \in X, r > 0\}$$

baza topologije τ_G indukovana G-metrikom na skupu X.

Definicija 4.5.3. Neka je (X,G) G-metrički prostor, a $\{x_n\}$ niz tačaka iz X. Za tačku $x \in X$ kažemo da je granica niza $\{x_n\}$ ako $\lim_{n,m\to\infty} G(x,x_n,x_m) = 0$ i kažemo da niz $\{x_n\}$ G-konvergira ka x.

Prema tome, ako $x_n \xrightarrow{G} 0$, u G-metričkom prostoru (X,G), to znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$ takvo da za sve $n,m \geq n_0$ važi da je $G(x,x_n,x_m) < \varepsilon$.

Teorema 4.5.4.

Neka je (X,G) G-metrički prostor. Za niz $\{x_n\} \subseteq X$ i tačku $x \in X$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1) $\{x_n\}$ G-konvergira ka x,
2) $G(x_n,x_n,x) \to 0 \; kada \; n \to \infty$,
3) $G(x_n,x,x) \to 0 \; kada \; n \to \infty$,
4) $G(x_m,x_n,x) \to 0 \; kada \; m,n \to \infty$.

Dokaz:

Na osnovu definicije, za niz $\{x_n\}$ znamo da G-konvergira ka x ako $G(x_m, x_n, x) \to 0$ kada $m, n \to \infty$, pa važi ekvivalencija uslova 1) i 4).

Iz osobina G-metrike, sledi da je

$$G(x_n, x_n, x) \leq G(x_m, x_n, x),$$
$$G(x_n, x, x) \leq G(x_m, x_n, x),$$

pa, kako $G(x_m, x_n, x) \to 0$, sledi da i $G(x_n, x_n, x) \to 0$ i $G(x_n, x, x) \to 0$, kada $n \to \infty$.

Obrnuto,

$$G(x_m, x_n, x) = G(x, x_n, x_m) \leq G(x, x_n, x_n) + G(x, x, x_m),$$

pa ako $G(x_n, x_n, x) \to 0$ i $G(x_n, x, x) \to 0$, kada $n \to \infty$, onda i $G(x_m, x_n, x) \to 0$.

Odavde sledi i ekvivalencija uslova 2), 3) i 4), što je i trebalo dokazati.

•

Definicija 4.5.4. Neka su (X, G) i (X', G') G-metrički prostori i $f\colon (X, G) \to (X', G')$. Za funkciju f kažemo da je G-neprekidna u tački $a \in X$ ako i samo ako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, takvo da za sve $x, y \in X$ važi:

$$G(a, x, y) < \delta \implies G'\big(f(a), f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Funkcija f je G-neprekidna na X ako i samo ako je G-neprekidna u svakoj tački $a \in X$.

Definicija 4.5.5. Neka je (X, G) G-metrički prostor. Niz $\{x_n\}$ je G-Košijev, ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in N$, takvo da je $G(x_m, x_n, x_l) < \varepsilon$, za sve $m, n, l \geq n_0$.

Definicija 4.5.6. Za G-metrički prostor (X, G) kažemo da je G-kompletan (ili kompletan G-metrički prostor) ako svaki G-Košijev niz u (X, G) je G-konvergentan u (X, G).

Teorema 4.5.5.

(X, G) je kompletan ako i samo ako je (X, d_G) kompletan.

Dokaz:

Videti [3].

•

Napomena:

Posmatramo G −metrički prostor (X, G). Neka je

$$d(x, y) = G(x, x, y).$$

Ovo je primer kvazimetrike. Proverimo!

1) $d(x, y) = G(x, x, y) \geq 0, \quad x, y \in X,$
2) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(x, x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$
3) $d(x, y) = G(x, x, y) \leq G(x, x, z) + G(z, y, y) = d(x, z) + d(z, y).$

Simetričnost ne mora da važi, jer na osnovu osobina G-metrike znamo samo da je

$$G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x).$$

Na osnovu ove osobine, možemo zaključiti da $d(x, y)$, u opštem slučaju, nije metrika, nego kvazimetrika.

5. Ultrametrika

Pored generalizacija, postoje specijalni slučajevi metričkih prostora, kao što su ultrametrički prostori.

Definicija 5.1. Preslikavanje $d: X \times X \to R$ je ultrametrika ukoliko su, za svako $x, y, z \in X$, zadovoljeni sledeći uslovi:

1) $d(x, y) \geq 0$,
2) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,
3) $d(x, y) = d(y, x)$,
4) $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ (ultrametrička nejednakost).

Tada je (X, d) ultrametrički prostor.

<u>Osobine:</u>

U ultrametričkom prostoru, za svako $x, y, z \in X$ i svako $r, s \in R$ važi:

- Svaki trougao je jednakokraki, tj. $d(x, y) = d(y, z)$ ili $d(x, z) = d(y, z)$ ili $d(x, y) = d(z, x)$.
- Svaka tačka unutar lopte je njen centar, tj. ako $d(x, y) < r$, tada $L(x, r) = L(y, r)$.
- Lopte čiji presek nije prazan skup su sadržane jedna u drugoj, tj. ako $L(x, r) \cap L(y, s) \neq \emptyset$, tada ili je $L(x, r) \subset L(y, s)$ ili $L(y, s) \subset L(x, r)$.
- Sve lopte su i otvorene i zatvorene u indukovanoj topologiji.

Literatura

1. Adnađević, D., Kadelburg, Z.,: Matematička analiza I, Beograd, 1998.,
2. Burke, D.,:"Cauchy sequences in semimetric spaces", American Mathematical Society,1972.,
3. en.wikipedia.org
4. Gajić, Lj. , Pilipović, S. , Stanković, B. , Kurilić, M.,: "Zbirka zadataka iz funkcionalne analize", Novi Sad, 2000.
5. Gajić, Lj., Lozanov-Crvenković , Z.,: "A fixed point result for mappings with contractive iterate at a point in G-metric spaces", Filomat (u štampi), 2010.,
6. Gajić, Lj.,:" Predavanja iz uvoda u analizu", Novi Sad, 2004.,
7. Hadžić, O., Pilipović , S.,: „Uvod u funkcionalnu analizu", Novi Sad, 1996.,
8. Kurilić, M.: "Osnovi opšte topologije", Novi Sad, 1998.,
9. Mustafa, Shatanawi, Bataineh,: "Existence of Fixed Point Results in G-metric Spaces", International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2005.,
10. NationMaster.com
11. PlanetMath.org
12. Stanković, B.,: "Osnovi funkcionalne analize", Beograd, 1988.,

Biografija

Rođena sam u Novom Sadu, 26. juna 1986. godine. Osnovnu školu „Laza Kostić", u Kovilju, završila sam 2001. godine. Zatim sam upisala gimnaziju „Svetozar Marković", opšti smer, koju sam završila 2005. godine. Od oktobra 2005. godine sam redovan student Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, departman za matematiku i informatiku, na smeru matematika finansija. Diplomirala sam na osnovnim studijama 24. septembra 2009. godine sa prosečnom ocenom 9,39. U novembru 2009. godine sam upisala master studije. Svoj poslednji ispit sam položila u junskom roku 2010. godine, a prosečna ocena na master studijama mi je 9,57. Pored fakulteta, bavim se i folklorom, koji igram već petnaest godina.

Novi Sad, 22.11.2010. **Milana Veličkov**

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Milana Veličkov
AU

Mentor: Prof. dr Ljiljana Gajić
MN

Naslov rada: Metrički i generalizovani metrički prostori
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2010.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 5 glava, 16 poglavlja, 56 strana
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND

Ključne reči: Metrički prostori, topologija, metrika, konvergencija niza, neprekidnost, izometrija, kompaktnost, kompletnost, normirani prostori, premetrika, kvazimetrika, pseudometrika, semimetrika, G-metrika, ultrametrika
UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

Tema ovog rada su metrički i generalizovani metrički prostori. Prvi deo rada govori o opštoj teoriji metričkih prostora. Uvodi se priča o rastojanju dva elementa koje mora da zadovoljava određene uslove da bi prostor u kom se nalaze ti elementi bio metrički. Takođe, u prvom delu rada se razmatraju osobine metričkih prostora kao što su neprekidnost, kompaktnost, kompletnost i druge. Veoma je bitna teorema o kompletiranju metričkih prostora koja nam daje uslove pod kojima se nekompletni metrički prostori mogu kompletirati. U drugom delu posmatramo šta se dešava ukoliko izmenimo ili izostavimo neke uslove iz definicije metrike. U zavisnosti od toga, dobijamo premetričke, pseudometričke, semimetričke, kvazimetričke i G-metričke prostore. Svi oni predstavljaju generalizacije metričkih prostora.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 15.10.2010.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: Prof. dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor

***Član*:** Prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: Prof. dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master thesis
CC

Author: Milana Veličkov
AU

Menthor: Prof. dr Ljiljana Gajić
MN

Title: Metric and generalized metric spaces
TI

Language of text: Serbian (latin)
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2010.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5 head chapters, 16 chapters, 56 pages
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional analysis
SD

Key words: Metric spaces, topology, metric, convergence series, continuity, isometry, compactness, completeness, normed spaces, premetric, quasimetric, pseudometric, semimetric, G-metric,ultrametric
SKW

Holding data: In library of Department of Mathematics
HD

Note:
N

Abstract:
AB

Focus of this paper are metric and generalized metric spaces. The first part talks about the general theory of metric spaces. We introduce the story of the distance of two elements that must satisfy certain conditions to make the space in which these elements are, a metric space. Also, in the first part deals with properties of metric spaces such as continuity, compactness, completeness and others. It is very important theorem about the completion of metric spaces, which gives us the conditions under which the incomplete metric spaces can be completed. In the second part we look at what happens if you modify or exclude certain conditions from the definition of metrics. In accordance, we get premetric, pseudometric, semimetric, quasimetric and G-metric spaces. All of them are generalizations of metric spaces.

Accepted by the Scientific Board on: October 15, 2010.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Dr Ljiljana Gajić, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, menthor

Member**:** Dr Zagorka Lozanov-Crvenković, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad