UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Bodoči Endre

Matematički aspekti talasa na vodi

- Master rad-

Mentor:

dr Marko Nedeljkov

Novi Sad, 2017.

Predgovor

Priroda, koja nas okružuje, fascinira i zastrašuje čovečanstvo od samih početaka. Stoga, možemo da kažemo da je istraživanje i opservacija prirodnih fenomena temelj naše civilizacije. „Neobjašnjivi" fenomeni su neretko dobijali status božanstva u drevnim kulturama. Razvoj naučnih disciplina, metoda i opreme za istaživanje doveo nas je do razumevanja tih fenomena. Jedan od vodećih naučnih disciplina, koja nam pomaže u razumevanju prirodnih fenomena, je matematika.

„Priroda je ogromna knjiga u kojoj je napisana nauka. Ona je stalno otvorena pred našim očima, ali je čovek ne može razumeti ukoliko prethodno ne nauči jezik i slova kojim je napisana. A napisana je ona jezikom matematike."

Rene Dekart

Uvođenjem diferencijalnog i integrlanog računa, različitih numeričkih metoda, i najzad pojavljivanjem računara, naučnicima je omogućeno da sa velikom preciznošću opišu prirodne fenomene, a u nekim slučajevima i da daju prognozu o stanju ili o njihovom budućem ponašanju.

Tema ovog rada je jedna takva prirodna pojava – vodeni talas. Talas je veoma važan fizički pojam i javlja se u različitim oblastima fizike kao što je dinamika fluida, akustika, elektromagnetika, itd. Problematikom opisivanja talasa matematičkim jednačinama bavili su se gotovo sva najveća imena matematike: Ojler, Lagranž, Dalamber, itd. Za opisivanje vodenih talasa koristimo matematičke modele koji se zasnivaju na različitim osobinama vodenog toka.

U prvom, uvodnom delu rada su izvedene osnovne jednačine – jednačina kontinuiteta i Ojlerova jednačina – a zatim i granični uslovi koji su od velikog značaja za rešavanje prethodno pomenutih jednačina. Prvi korak ka rešavanju tih sistema jeste njihovo bezdimenzionisanje i skaliranje. Aproksimacijom dolazimo do dva tipa parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ), koji se javljaju u modelima, linearne i nelinearne jednačine. Kada su fizičke pretpostavke u pitanju, treba napomenuti da se ovaj rad bavi isključivo neviskoznim modelima.

Drugi deo rada sadrži probleme koji su opisani modelima u vidu linearnih PDJ i opisuju kretanje talasa promenljive dubine, gde je nepokretna donja granica fluida konstantnog nagiba.

U trećem ičetvrtom delu su prikazani modeli sa nelinearnim PDJ. U trećem odeljku su analizirani klasični nelinearni problemi prostiranja vodenih talasa: prostiranje talasi konstantne i promenljive dubine i hidraulički skok, U četvrtom odeljku analizirani su neklasični problemi, kao što su superkritični tok i delta šok. Dodatak, koji se nalazi na kraju ovog rada, sadrži pomoćni materijal koji je korišćen u analizi problema.

Zahvaljujem se mentoru, profesoru dr Srboljubu Simiću, na savetima i pomoći pri izradu ovog master rada. Želeo bih da se zahvalim i na izdvojenom vremenu i stroljenju. Takođe, zahvaljujem se i članovima komisije, dr Milani Čolić i dr Marku Nedeljkovu. Posebnu zahvalnost dugujem mojim roditeljima i sestri, kao i svim mojim prijateljima na podršci koju su mi pružili tokom celokupnog školovanja.

Novi Sad, 2017. godine Bodoči Endre

Sadržaj

Glava 1

Matematički uvod

Problemi prostiranja talasa su bili predmet istraživanja najpre u fizici. Međutim, njihova složenost je vremenom iziskivala razvoj odgovarajućeg matematičkog aparata. Budući da je mehanika fluida dugo predstavljala „prirodno” okruženje za analizu prostiranja talasa, u klasičnoj literaturi iz ove oblasti [1] se mogu naći detaljni prikazi ovih problema.

Vremenom je prostiranje talasa preraslo u oblast savremene primenjene matematike, čemu je posvećena i novija literatura [2]. U ovom radu ćemo se prvenstveno osloniti na način izlaganja dat u knjizi [3]. Pored problema koji se tamo mogu naći, a odnose se na linearne i nelinearne talase na vodi, osvrnućemo se i na probleme koji su nedavno privukli pažnju istraživača. To su prvenstveno singularna rešenja i delta udarni talasi, a istraživanja koja su njima posvećena nedavno su objavljena u međunarnodnim naučnim časopisima [4, 5].

1.1 Zakona održanje mase

Neka V bude proizvoljna, fiksirana (u odnosu na neki inercijalni sistem) zapremina ograničena površi $S = \partial V$ u fluidu. Ako je gustina fluida $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^3$, onda je stopa promena mase fluida u zapremini V

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_V \rho\, dV\right). \tag{1.1.1}$$

Neka je sada u bilo kojoj tački fluida $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ brzina fluida, a $\mathbf{n}$ je jedinični vektor spoljašnje normale na površ S. Onda protok mase fluida kroz površ S iznosi

$$-\int\limits_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS, \tag{1.1.2}$$

gde je tačkom označen skalarni proizvod vektora u $\mathbb{R}^3$. Zakon održanja mase tvrdi da promena mase fluida u zapremini V nastaje isključivo zbog njegovog protoka kroz granicu, površ S

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_V \rho\, dV\right) = -\int\limits_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS. \tag{1.1.3}$$

Možemo sada primeniti *Gausovu teoremu* na desnu stranu ove jednačine, čime dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_V \rho\, dV\right) + \int\limits_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\, dV = 0. \tag{1.1.4}$$

Ako iskorisimo činjenicu da je zapremina V fiksirana u prostoru, što znači da njen položaj ne zavisi od vremena t, poslednja jednačina se svodi na

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right) dV = 0. \tag{1.1.5}$$

Pošto je zapremina V proizvoljna, znamo da jednakost važi ako i samo ako je podintegralna funkcija jednaka nuli, tj.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0. \tag{1.1.6}$$

Poslednji izraz predstavlja deferencijalni oblik zakona održanja mase, takođe poznat kao *jednačina kontinuiteta*.

Zakon održanja mase se može zapisati i u drugačijem obliku, ako drugi deo jednačine, $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})$ zapišemo kao $\rho(\nabla\cdot\mathbf{u})+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho$. Uvedimo diferencijalni operator

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla, \tag{1.1.7}$$

koji se naziva *materijalni izvod*. On u sebi objedinjuje *lokalnu* promenu fizičke veličine (u nekoj tački), opisanu parcijalnim izvodom $\partial/\partial t$, i njenu *konvektivnu* promenu nastalu zbog kretanja fluida, što je opisano članom $\mathbf{u}\cdot\nabla$. Sada jednačina (1.1.6) dobija oblik

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{1.1.8}$$

Ako pretpostavimo da je strujanje fluida nestišljivo, to jest da važi $D\rho/Dt = 0$, onda dobijamo

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{1.1.9}$$

Polje brzine $\mathbf{u}$ koje zadovoljava relaciju (1.1.9) naziva se *solenoidno* polje. Jednačina (1.1.9) se često naziva jednačinom kontinuiteta za nestišljive fluide ($\rho =$ const.) i sastavni je deo Navije-Stoksovih jednačina koje opisuju strujanje viskoznih nestišljivih fluida.

1.2 Ojlerova jednačina

Ojlerova jednačina predstavlja zapravo drugi Njutnov zakon za neviskozan fluid. Kao što je poznato iz klasične mehanike, drugi Njutnov zakon tvrdi da je promena količine kretanja (izvod po vremenu) materijalne tačke jednaka sili koja dejstvuje na nju. To tvrđenje ćemo sada uopštiti na neviskozne fluide.

Količina kretanja fluida koji ispunjava elementarnu zapremninu dV iznosi $\rho\mathbf{u}\,dV$. Stopa promene količine kretanja fluida u zapremini V je

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho\mathbf{u}\,dV\right). \tag{1.2.1}$$

Kada je u pitanju fluid (ili bilo koja neprekidna sredina), promena količine kretanja ima dva uzroka: sile koje dejstvuju na fluid i protok fluida kroz rub posmatrane oblasti. Sile mogu biti zapreminske i površinske.

Zapreminske sile dejstvuju na svaku česticu (elementarnu zapreminu) fluida u oblasti V i u opštem slučaju zavise od položaja, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Tipičan primer je gravitaciona sila, koja je u Dekartovim koordinatama opisana sa $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$. Površinske sile deluju u tačkama ruba oblasti V, na površi S, i predstavljaju posledicu uzajamnog dejstva fluida u oblasti V i njegove okoline. U slučaju neviskoznih fluida one se svode na silu pritiska, čije je dejstvo na elementarnu površ dS opisano relacijom $-P\mathbf{n}\,dS$. Ukupna sila koja deluje na zapreminu V fluida je

$$\int_V \rho\mathbf{F}\,dV - \int_S P\mathbf{n}\,dS. \tag{1.2.2}$$

Primenom *Gausove teoreme* poslednji izraz dobija oblik

$$\int_V (\rho\mathbf{F} - \nabla P)\,dV. \tag{1.2.3}$$

Protok količine kretanja kroz površ S iznosi

$$-\int_S \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,dS, \tag{1.2.4}$$

pa na osnovu drugog Njutnovog zakona imamo

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho\mathbf{u}\,dV\right) = \int_V (\rho\mathbf{F} - \nabla P)\,dV - \int_S \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{1.2.5}$$

Ako zamenimo redosled diferenciranja i integrala na prvi integral, a zatim *Gausovu teoremu* na poslednji, dobijamo

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \rho\mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\mathbf{u}\right\} dV = \int_V (\rho\mathbf{F} - \nabla P)\,dV. \tag{1.2.6}$$

Leva strana ove jednakosti je

$$\int_V \left\{\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right\} dV =$$

$$\int_V \left\{\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho(\nabla\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\right) + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right\} dV =$$

$$\int_V \left\{\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right\} dV = \int_V \rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\,dV.$$

Primetimo da je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

zbog zakona održanja mase (1.1.8). Sada jednačina (1.2.6) dobija oblik

$$\int_V \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla P \right) dV = 0, \tag{1.2.7}$$

koji predstavlja Ojlerovu jednačinu u integralnom obliku. Kao što smo već rekli, za proizvoljnu zapreminu V integral je jednak nuli ako i samo ako je podintegralna funkcija jednaka nuli, odnosno mora da važi

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F}. \tag{1.2.8}$$

Ova jednačina predstavlja drugi Njutnov zakon za neviskozan fluid i zove se Ojlerova jednačina u diferencijalnom obliku.

Pošto ćemo se u ovom radu prvenstveno baviti strujanjem nestišljivih fluida, jednačine koje opisuju taj problem su (1.1.9) i (1.2.8). U Dekartovom koordinatnom sistemu, za $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ i $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$ one imaju oblik

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.2.9}$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g, \tag{1.2.10}$$

gde je

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.2.11}$$

1.3 Neka svojstva fluidnog kretanja

Razmotrimo neka važna svojstva fluidnog kretanja koja će biti od značaja za dalju analizu. U nastavku ćemo, ako nije drugačije naglašeno, posmatrati kretanje u odnosu na Dekartov koordinatni sistem.

1.3.1 Vrtložnost

Vrtložnost se definiše kao rotor vektora brzine $\nabla \times \mathbf{u}$. Označava se sa $\boldsymbol{\omega}$ a fizički gledano predstavlja lokalnu rotaciju fluida. Za $\mathbf{u} = (u, v, w)$ vrtložnost je

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right). \tag{1.3.1}$$

Ako je $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$ onda kažemo da je tok bezvrtložan.

1.3.2 Strujnice

Strujnica je zamišljena linija u fluidu, tako da je u svakoj tački date linije vektor brzine tangentan na nju. Ako označimo strujnicu sa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s;t)$, gde je parametrizacija izvršena pomoću lučne (krivolinijske) koordinate s, onda važi jednačina

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \text{(za fiksno t)}. \tag{1.3.2}$$

Ovu jednačinu možemo predstaviti i u sledećem obliku

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{1.3.3}$$

1.3.3 Bernulijeva jednačina

Sad ćemo uvesti u Ojlerovu jednačinu vrtložnost $\boldsymbol{\omega}$. Pretpostavimo da je gustina fluida $\rho = \text{const.}$ i da je sila $\mathbf{F}$ konzervativna, tj. $\mathbf{F} = -\nabla\Omega$, gde je $\Omega(\mathbf{x}, t)$ potencijal sile $\mathbf{F}$. Sada jednačina (1.2.8) dobija oblik

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \Omega\right).$$

Ako iskoristimo identitet $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\right) - \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u})$ i da je $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u}$, prethodna jednačina postaje

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega\right) = \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}.$$

Pretpostavimo sada da je strujanje stacionarno, tj. da $\mathbf{u}$, P i Ω ne zavise od vremena. Tada imamo

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega\right) = \mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}.$$

Koristeći poznati rezultat iz matematičke analize da za glatku funkciju $f(\mathbf{x})$ važi da je ∇f ortogonalan na površ $f(\mathbf{x}) = \text{const.}$, možemo zaključiti da $\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}$ mora biti normalno na površ

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \frac{P}{\rho} + \Omega = \text{const.} \tag{1.3.4}$$

Istovremeno $\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}$ je normalan i na vektor $\mathbf{u}$, i na vektor $\boldsymbol{\omega}$, pa površ (1.3.4) mora da sadrži linije čije su tangente paralelne sa $\mathbf{u}$. Jednu takvu familiju krivih čine strujnice. Izraz (1.3.4) je *Bernulijeva jednačina* za stacionarano strujanje sa vrtlozima. Ona predstavlja zakon održanja ukupne mehaničke energije primenjen na strujnice.

Ovde bi mogla da se prikaže i Bernulijeva jednačina za nestacionarno bezvrtložno strujanje.

1.4 Granični uslovi

U prethodnom odeljku su date diferencijalne jednačine kretanja fluida. Ove jednačine važe za svako kretanje fluida. Kako ćemo onda dobiti različito rešenje za različite pojave ili eksperimente? Odgovor na prethodno pitanje su granični uslovi. U nastavku ćemo formulisati nekoliko takvih uslova za neviskozan fluid. Pre nego što započnemo detaljnu analizu, uvešćemo neke simbole koje ćemo koristiti u daljem tekstu. Slobodna površ će biti

$$z = h(\mathbf{x}_\perp, t),$$

a nepokretna donja granica

$$z = b(\mathbf{x}_\perp, t),$$

gde je sa $\mathbf{x}_\perp$ označen vektor koji je normalan na pravac ose z. Analogno sa $\mathbf{x}_\perp$ koristićemo još i $\mathbf{u}_\perp$ i $\nabla_\perp$. U Dekartovom koordinatnom sistemu za $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ i $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ imamo da je $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$, $\mathbf{u}_\perp = (u, v)$ i $\nabla_\perp = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.

Za bezvrtložno strujanje, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \equiv 0$, postoji funkcija $\phi(\mathbf{x}, t)$, koju nazivamo potencijal polja brzine, takva da je $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Jednačina kontinuiteta u ovom slučaju postaje Laplasova jednačina

$$\nabla^2 \phi = \mathbf{0}.$$

1.4.1 Kinematički granični uslov

Čestica koja pripada slobodnoj površi u početnom trenutku, ostatće njen deo za svako t. U matematičkom zapisu ovo znači

$$\frac{D}{Dt}(z - h(\mathbf{x}_\perp, t)) = 0.$$

U ovom slučaju

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp + w\frac{\partial}{\partial z},$$

pa će kinematički granični uslov biti

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)h, \quad \text{na } z = h(\mathbf{x}_\perp, t). \tag{1.4.1}$$

U Dekartovim koordinatama prethodna jednačina se svodi na

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}.$$

1.4.2 Dinamički granični uslov

Prvo ćemo razmatrati slučaj kada je tok bezvrtložan, ali nestacionaran. Bernulijeva jednačina u ovom slučaju za $\Omega = gz$ i $P = P_a$ na slobodnoj površi fluida[1] glasi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{P_a}{\rho} + gz = f(t), \quad \text{na } z = h.$$

[1] Sa P_a je označen atmosferski pritisak.

Ako pretpostavimo da je u dovoljno udaljenim tačkama oblasti ($|\mathbf{x}_\perp| \to \infty$) fluid u stanju mirovanja, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, a slobodna površ je ravan ortogonalna na osu z, $h = h_0$, onda važi

$$f(t) = \frac{P_a}{\rho} + gh_0.$$

Stoga je granični uslov

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + g(h - h_0) = 0 \quad \text{na } z = h. \tag{1.4.2}$$

U slučaju vrtložnog strujanja posmatraćemo površinski napon. Drugi važan fizički efekat koji se javlja na slobodnoj površi fluida jeste površinski napon. On opisuje razliku pritisaka sa dve strane slobodne površi. Klasična formula za izračunavanje razlike pritiska na površi fluida je

$$\Delta P = \frac{\Gamma}{R}$$

gde je Γ koeficijent površinskog napona. Γ se menja sa temperaturom ali se sa dovoljnom tačnošću može pretpostaviti da je konstantan. Za rešavanje Ojlerove jednačine potreban nam je izraz za pritisak na slobodnoj površi fluida

$$P = P_a - \frac{\Gamma}{R} \quad \text{na } z = h(\mathbf{x}_\perp, t), \tag{1.4.3}$$

gde za $h = h(x, y, t)$ važi

$$\frac{1}{R} = \frac{(1 + h_y^2)h_{xx} + (1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.4.4}$$

1.4.3 Granični uslov na nepokretnom rubu

Nepokretna donja granica, koja je nepropustljiva, će predstavljati granicu koji se definiše kao površina koji se kreće sa fluidom. Zbog toga imaćemo granični uslov sličan kinematičkom

$$\frac{D}{Dt}\left(z - b(\mathbf{x}_\perp, t)\right) = 0.$$

Posle diferenciranja jednačina dobija oblik

$$w = \frac{\partial b}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)b, \qquad \text{na } \ z = b(\mathbf{x}_\perp, t). \tag{1.4.5}$$

1.4.4 Integralni uslov održanje mase

U ovom odeljku kombinovaćemo zakon održanje mase sa prethodno navedenim graničnim uslovima. Integralićemo jednačinu (1.1.9) od $z = b(\mathbf{x}_\perp, \mathbf{t})$ do $z = h(\mathbf{x}_\perp, \mathbf{t})$ pa imamo

$$\int_b^h \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp \, dz + w|_b^h = 0.$$

Ako sada zamenimo redosled integrala i $\nabla_\perp$, iskoristimo granične uslove (1.4.1) i (1.4.5), uvedemo ozanake $d = h - b$ za lokalnu dubinu fluida i $\bar{\mathbf{u}}_\perp = \int_b^h \mathbf{u}_\perp \, dz$ posle manjih transformacija dobićemo

$$d_t + \nabla_\perp \cdot \bar{\mathbf{u}}_\perp = 0. \tag{1.4.6}$$

Pretpostavimo sada da se fluid kreće horizontalno samo u pravcu x ose, tj. $\mathbf{u}_\perp = (u, 0)$, i da kad $x \to \pm\infty$ važi $\bar{\mathbf{u}}_\perp \to 0$. Za $b = b(x)$ i $h(x,t) = h_0 + H(x,t)$ jednačina (1.4.6) daje rezultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x,t)\, dx = \text{const.}$$

odnosno da je masa fluida, povezana sa talasima opisanim funkcijom $H(x,t)$, konstantna.

1.5 Bezdimenzionisanje

U prethodno izvedenim jednačinama javljaju se različite fizičke veličine (vreme, brzina, itd.) koje imaju svoje jedinice mere (s, $\frac{m}{s}$) tj. dimenzije. Bezdimenzionisanje služi za transformaciju jednačina u bezdimenzionalni oblik smenom promenljivih. Zašto se primenjuje bezdimenzionisanje? Za to postoji više razloga, a navešćemo samo neke:

- Pojednostavljuje jednačine tako što smanjuje broj parametara.
- Olakšava analizu jednačina.
- Može da nam pomogne u određivanju reda veličine parametara i primeni aproksimativnih ili asimptotskih metoda.

Bezdimenzionalne (nove) promenljive dobijamo tako što posmatramo odnos (količnik) osnovne fizičke (stare) promenljive i neke referentne veličine vezane za strujanje. U našem slučaju, referentne dužine mogu biti h_0 – prosečna dubina vode, i λ – prosečna talasna dužina talasa na površi vode. Za brzinu ćemo isto imati dve karakteristične veličine. Prosečna brzina talasa će biti $\sqrt{gh_0}$ i odnosi se na horizontalno kretanje, dok za vertikalno kretanje imamo $\frac{h_0}{\lambda}\sqrt{gh_0}$. Karakteristično vreme je definisano implicitno, pomoću korakteristične dužine λ i karakteristične brzine $\sqrt{gh_0}$ i ima oblik $\frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$. Bezdimenzionalne promenljive u Dekartovom koordinatnom sistemu možemo definisati na sledeći način

$$\begin{aligned} x^* = \frac{x}{\lambda}, \quad y^* = \frac{y}{\lambda}, \quad z^* = \frac{z}{h_0}, \quad t^* = \frac{t}{\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}} \\ u^* = \frac{u}{\sqrt{gh_0}}, \quad v^* = \frac{v}{\sqrt{gh_0}}, \quad w^* = \frac{w}{\frac{h_0}{\lambda}\sqrt{gh_0}}. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Uvešćemo još jedan parametar, amplitudu talasa a, pa će slobodna površ $z = h(\mathbf{x}_\perp, t)$ biti opisana sa

$$h = h_0 + a\eta(\mathbf{x}_\perp, t) \tag{1.5.2}$$

gde je η bezdimenzionalna funkcija.

Naš sledeci korak je da ubacimo bezdimenzionalne promeljive u Ojlerovu jednačinu i u zakon održanja mase za nestišljiv fluid. Ali pre nego što to uradimo, definisaćemo i bezdimenzionalnu promenljivu za pritisak

$$P = P_a + \rho g(h_0 - z) + \rho g h_0 p^* \tag{1.5.3}$$

gde je $\rho g(h_0 - z)$ hidrostatički pritisak, a $\rho g h_0 p^*$ predstavja odstupanje od istog (naravno p^* je bezdimenzionalna veličina). Znamo da je

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

i ako hoćemo da odredimo $\frac{D}{Dt^*}$, treba naći neku relaciju redom između $\frac{\partial}{\partial t}$ i $\frac{\partial}{\partial t^*}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial x^*}$, itd. Primenom pravila za izvod složene funkcije ("chain rule") i koristeći (1.5.1) imamo

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t^*}. \tag{1.5.4}$$

Sličnim postupkom dobijamo

$$u\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}u^*\frac{\partial}{\partial x^*}, \quad v\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}v^*\frac{\partial}{\partial y^*}, \quad w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}w^*\frac{\partial}{\partial z^*}. \tag{1.5.5}$$

Stoga sledi

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{D}{Dt^*}. \tag{1.5.6}$$

Dalje, koristeći (1.5.1) i (1.5.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{\rho g h_0}{\lambda}\frac{\partial p^*}{\partial x^*},\\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{\rho g h_0}{\lambda}\frac{\partial p^*}{\partial y^*},\\
\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial P}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial z} = \rho g\left(\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - 1\right),
\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

s tim što izraz za pritisak koristimo u sledećem obliku

$$P = P_a + \rho g h_0(1 - z^* + p^*). \tag{1.5.8}$$

Na osnovu (1.5.6) i (1.5.7) možemo izraziti Ojlerovu jednačinu u bezdimenzionalnom obliku

$$\frac{Du^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad \frac{Dv^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}, \quad \delta^2\frac{Dw^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \tag{1.5.9}$$

gde je

$$\frac{D}{Dt^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial}{\partial z^*},$$

i $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$ označava bezdimenzionalni parametar dubine vode ("shallowness parameter"), koji je od velikog značaja u problemima vezanim za talase na vodi. Zakon održanje mase u bezdimenzionalnom obliku glasi

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \tag{1.5.10}$$

Preostalo nam je još da i granične uslove damo u bezdimenzionalnom obliku. Površina će biti na osnovu (1.5.2)

$$z^* = h^* = 1 + \varepsilon\eta, \quad \left(h^* = \frac{h}{h_0}\right), \tag{1.5.11}$$

a nepokretna donja granica

$$z^* = b^*, \quad \left(b^* = \frac{b}{h_0}\right). \tag{1.5.12}$$

$\varepsilon = \frac{a}{h_0}$ predstavlja drugi, takođe važan bezdimenzionalni parametar – parametar amplitude.

Polazeći od kinematičkog ulsova, iz (1.5)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \varepsilon h_0 \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{\partial \eta}{\partial t^*},$$

a iz (1.5.5)

$$(\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp)h = \varepsilon h_0 \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}(\mathbf{u}^*{}_\perp \cdot \nabla^*_\perp)\eta,$$

pa je kinematički granični uslov u bezdimenzionalnom obliku

$$w^* = \varepsilon\left(\frac{\partial \eta}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^*{}_\perp \cdot \nabla^*_\perp)\eta\right) \quad \text{na } z^* = 1 + \varepsilon\eta. \tag{1.5.13}$$

Za dinamički uslov prvo treba odrediti izraz za $\frac{1}{R}$. Ako pođemo od (1.4.4), pomoću (1.5.11), dobićemo da je

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta\varepsilon}{\lambda}\frac{1}{R^*} \tag{1.5.14}$$

gde

$$\frac{1}{R^*} = \frac{(1+\delta^2\varepsilon^2\eta_y^2)\eta_{xx} + (1+\delta^2\varepsilon^2\eta_x^2)\eta_{yy} - 2\delta^2\varepsilon^2\eta_x\eta_y\eta_{xy}}{(1+\delta^2\varepsilon^2\eta_x^2 + \delta^2\varepsilon^2\eta_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dalje, ako izjednačimo (1.4.3) i (1.5.8), a zatim iskoristimo uslov da smo na površini vode, imaćemo

$$P_a - \frac{\delta\varepsilon}{\lambda}\frac{1}{R^*} = P_a + \rho g h_0(1 - z^* + p^*) \quad \text{na } z^* = 1 + \varepsilon\eta.$$

Ako sredimo prithodni izraz, i uvedemo Veberov broj $\frac{\Gamma}{\rho g \lambda^2} = \delta^2 W$, dobićemo dinamički granični uslov u bezdimenzionalnom obliku

$$p^* - \varepsilon\eta = -\varepsilon\delta^2 W \frac{(1+\delta^2\varepsilon^2\eta_y^2)\eta_{xx} + (1+\delta^2\varepsilon^2\eta_x^2)\eta_{yy} - 2\delta^2\varepsilon^2\eta_x\eta_y\eta_{xy}}{(1+\delta^2\varepsilon^2\eta_x^2 + \delta^2\varepsilon^2\eta_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{na } z^* = 1 + \varepsilon\eta. \tag{1.5.15}$$

Granični uslov na nepokretoj donjoj granici u bezdimenzionalnom obliku dobijamo slično kao kinemtaički uslov, a uz pretpostavku da je donja granica stacionarna, tj. ne zavisi od vremena, ima sledeći oblik

$$w^* = (\mathbf{u}^*{}_\perp \cdot \nabla^*_\perp)b^* \quad \text{na } z^* = b^*. \tag{1.5.16}$$

Analizom prethodno dobijenih jednačina, možemo uočiti da su i w^* i p^* proporcionalni sa ε, i kad $\varepsilon \to 0$ onda i $w^* \to 0$ i $p^* \to 0$, što znači da nema poremećaja na površini vode. Stoga, zapisaćemo neke promenljive na sledeći način

$$p^* \to \varepsilon p^*, \quad \mathbf{u}^* \to \varepsilon \mathbf{u}^*.$$

Ovaj postupak se zove *skaliranje promenljivih*, a jednačine (1.2.9)-(1.2.11) se pretvaraju u

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \\ \frac{Du^*}{Dt^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad \frac{Dv^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}, \quad \delta^2 \frac{Dw^*}{Dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*}, \\ \text{gde je} \quad \frac{D}{Dt^*} &= \frac{\partial}{\partial t^*} + \varepsilon \left(u^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right). \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

Granični uslovi na površi $z^* = 1 + \varepsilon\eta$ su

$$w^* = \frac{\partial \eta}{\partial t^*} + \varepsilon({\mathbf{u}^*}_\perp \cdot \nabla^*_\perp)\eta, \tag{1.5.18}$$

i

$$p^* = \eta - \delta^2 W \frac{(1 + \delta^2\varepsilon^2\eta_y^2)\eta_{xx} + (1 + \delta^2\varepsilon^2\eta_x^2)\eta_{yy} - 2\delta^2\varepsilon^2\eta_x\eta_y\eta_{xy}}{(1 + \delta^2\varepsilon^2\eta_x^2 + \delta^2\varepsilon^2\eta_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.5.19}$$

dok uslov na nepokretnoj donjoj granici $z^* = b^*$ ostaje nepromenjen

$$w^* = ({\mathbf{u}^*}_\perp \cdot \nabla^*_\perp)b^*. \tag{1.5.20}$$

1.6 Aproksimacija

Naše jednačine i granične uslove možemo pojednostaviti putem aproksimacije. Naravno da bismo mogli da uradimo, treba da naš sistem da zadovolji neke pretpostavke.

1.6.1 Linearizovan problem

U ovom slučaju pretpostavićemo da amplituda talasa a je mala u odnosu na prosečnu dubinu vode h_0,tj. da je $a \ll h_0$. Parametar amplituda ε na osnovu ove pretpostavke teži nuli ($\varepsilon \to 0$), a dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \\ &\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial v^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}, \quad \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*}, \\ &w^* = \eta_t \quad \text{i} \quad p^* = \eta - \delta^2 W(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \quad \text{na } z^* = 1, \\ &w^* = ({\mathbf{u}^*}_\perp \cdot \nabla^*_\perp)b^* \quad \text{na } z^* = b^*. \end{aligned}\right\} \tag{1.6.1}$$

1.6.2 Problem „plitke vode”

U drugom slučaju pretpostavićemo da je talasana dužina λ znatno veća u odnosu na prosečnu dubinu vode h_0, tj. da je $\lambda \gg h_0$. Parametar dubine vode $\delta = h_0/\lambda$, na osnovu ove pretpostavke će isto težiti nuli ($\delta \to 0$), a naš sistem je nelinearan i ima oblik:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} + \dfrac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \\
\dfrac{Du^*}{Dt^*} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad \dfrac{Dv^*}{Dt^*} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial y^*}, \quad \dfrac{\partial p^*}{\partial z^*} = 0, \\
\text{gde} \qquad \dfrac{D}{Dt^*} = \dfrac{\partial}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^* \dfrac{\partial}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial}{\partial y^*} + w^* \dfrac{\partial}{\partial z^*} \right), \\
w^* = \eta_{t^*} + \varepsilon(\mathbf{u}^*{}_\perp \cdot \nabla^*_\perp)\eta \quad \text{i} \quad p^* = \eta \quad \text{na } z^* = 1 + \varepsilon\eta, \\
w^* = (\mathbf{u}^*{}_\perp \cdot \nabla^*_\perp) b^* \quad \text{na } z^* = b^*.
\end{array}\right\} \tag{1.6.2}$$

U daljem tekstu će biti analizirani problemi čiji je matematički model u bezdimenzionalnom obliku. Međutim, zbog jednostavnijeg zapisa, biće izostavljena oznaka $(\,)^*$ u jednačinama.

Glava 2

Linearni problemi

2.1 Prostiranje talasa promenljive dubine

U ovom odeljku diskutovaćemo o talasima na vodi koji se prostiru u samo jednom, horizontalnom pravcu (x-pravac), a nepokretna donja granica b zavisi isto samo od promenljive x, $b = b(x)$. Linearizovani problem ćemo još pojednostaviti tako što ćemo posmatrati talase sa većim talasnim dužinama, što se postiže uslovom $\delta \to 0$, pa iz sistema (1.6.1) dobijamo

$$u_t = -p_x, \qquad 0 = p_z, \qquad u_x + w_z = 0, \tag{2.1.1}$$

$$w = \eta_t \qquad \text{i} \qquad p = \eta \qquad \text{na} \quad z = 1 \tag{2.1.2}$$

$$w = ub_x \qquad \text{na} \quad z = b(x) \tag{2.1.3}$$

Iz (2.1.2) odmah sledi da

$$p = \eta \qquad \text{za } b \le z \le 1, \tag{2.1.4}$$

jer na osnovu (2.1.1) znamo da p ne zavisi od z. Koristeći prethodnu jednakost, iz prve jednačine (2.1.1) dobijamo

$$u_t + \eta_x = 0,$$

a integracijom treće jednačine iz (2.1.1) nad z, pod pretpostavkom da u ne zavisi od z dolazimo do

$$w = (1 - z)u_x + \eta_t.$$

Ako sad posmatramo poslednju jednačinu na $z = b(x)$, i pritom označimo lokalnu dubinu sa d, tj. $d(x) = 1 - b(x)$ i iskoristimo (2.1.3), dobijamo tzv. *linearizovane jednačine plitke vode*

$$\begin{aligned} u_t + \eta_x &= 0 \\ \eta_t + (du)_x &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Rešavajući sistem, dolazimo do sledeće talasne jednačine za površ $\eta(x,t)$

$$\eta_{tt} - (d\eta_x)_x = 0. \tag{2.1.6}$$

Prethodna jednačina obuhvata niz problema prostiranja talasa promenljive dubine. Mi ćemo razmatrati slučaj, kada je nepokretna donja granica konstantnog nagiba. Stoga definisaćemo dubinu na sledeći način

$$d(x) = \alpha(x_0 - x), \quad \alpha > 0, \quad x \leq x_0,$$

gde obala se nalazi desno od tačke $x = x_0$.

Pre nego što nastavimo, moramo da obratimo pažnju na dva slučaja, kad $d \to 0$ i kad $d \to \infty$. Znamo da smo za izvođenje jednačine (2.1.6) koristili da i $\varepsilon \to 0$ i $\delta \to 0$ i zbog toga ne može da važi $d \to \infty$ i $\delta \to 0$ istovremeno, jer δ je definisano kao količnik dubine i talasne dužine. Na sličan način dolazimo do zaključka da istovremeno ne može da važi ni $d \to 0$ i $\varepsilon \to 0$, jer ε je definisano kao količnik amplitude i dubine. Odatle sledi da rešenje jednačine (2.1.6) ne može da bude validno kada $d \to 0$ ili $d \to \infty$.

Ako uvrstimo izraz $d(x) = \alpha(x_0 - x)$ u (2.1.6) dobijamo jednačinu

$$\eta_{tt} - \alpha(x_0 - x)\eta_{xx} + \alpha\eta_x = 0, \tag{2.1.7}$$

a rešenje ćemo tražiti u obliku

$$\eta(x,t) = A(x)e^{-i\omega t} + c.c., \tag{2.1.8}$$

koja je harmonijska funkcija vremena t. Sa ω je označena frekvencija, a $A(x)$ je amplitudna funkcija. Odredimo sada parcialne izvode η iz (2.1.7)

$$\begin{aligned} \eta_x &= A'e^{-i\omega t}, \\ \eta_{xx} &= A''e^{-i\omega t}, \\ \eta_{tt} &= -\omega^2 A e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Ako dobijene izraze uvrstimo u jednačinu (2.1.7), zatim podelimo sa $-e^{-i\omega t}$ dobićemo sledeću običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda po A,

$$\alpha(x_0 - x)A'' - \alpha A' + \omega^2 A = 0. \tag{2.1.10}$$

Amplitudnu funkciju A možemo tretirati kao funkciju od $x_0 - x = X$, stoga prethodna jednačina postaje

$$\alpha X A'' + \alpha A' + \omega^2 A = 0. \tag{2.1.11}$$

Uvešćemo još jednu smenu:

$$\chi = 2\omega\sqrt{\frac{X}{\alpha}}.$$

Ovom transformacijom svešćemo jednačinu (2.1.11) na dobro poznatu običnu diferencijalnu jednačinu

$$\chi A'' + A' + \chi A = 0, \tag{2.1.12}$$

tz. Beselovu jednačinu (nultog reda). Uzimajići u obzir dve smene promenljivih, funkcija amplituda je

$$A = A(\chi) = A\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}}\right),$$

gde obala je na $\chi = 0$ a rešenje tražimo za $\chi > 0$.

Opšte rešenje jednačine (2.1.12) prema [6] dato je izrazom

$$A(\chi) = CJ_0(\chi) + DY_0(\chi), \tag{2.1.13}$$

gde su C i D konstante. J_0 je *Beselova funkcija prve vrste nultog reda* a Y_0 je *Beselova funkcija druge vrste nultog reda* i date su u obliku stepenog reda na sledeći način

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \\ Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] J_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} H_k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \right\} \\ &= J_0(x) \log x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \dots, \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

gde su Harmonijski brojevi H_k i Ojler–Maskeronijeva konstanta γ definisani sledećim izrazima

$$H_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}, \qquad \gamma = \lim_{k \to \infty} (H_k - \ln k) \approx 0,577216.$$

Sada na osnovu (2.1.13) i (2.1.8) rešenje jednačine (2.1.7) je

$$\eta(x,t) = \left(CJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}}\right) + DY_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}}\right)\right) e^{-i\omega t} + c.c. \tag{2.1.15}$$

U nastavku ćemo analizirati ovo rešenje najpre daleko od obale ($x_0 - x \to +\infty$), a zatim u njenoj blizini ($x \to x_0$) . U slučaju kada je χ veliko, prema [6] znamo da se Beselove funkcije ponašaju na sledeći način

$$\begin{aligned} J_0(\chi) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \cos\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \chi \to +\infty \\ Y_0(\chi) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \sin\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \chi \to +\infty. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Na osnovu prethodnog izraza (2.1.15) postaje

$$\begin{aligned} \eta(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\omega}} &\left(\frac{\alpha}{x_0 - x}\right)^{1/4} \\ &\left(C\cos\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right) + D\sin\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0 - x}{\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right)\right) e^{-i\omega t} + c.c., \end{aligned}$$

kad $\chi \to +\infty$. Korisno je prethodni izraz napisati u sledećem obliku

$$\eta(x,t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}} \left(\frac{\alpha}{x_0 - x}\right)^{1/4} \times$$
$$\left[(C+D)\exp\left\{i\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0-x}{\alpha}} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right.$$
$$\left. + (C-D)\exp\left\{-i\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0-x}{\alpha}} + \omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right] + c.c.,$$

gde možemo uočiti dva eksponencijalna izraza, od kojih prvi, sa koeficijentom $(C + D)$, predstavlja talas koji se kreće udesno, prema obali. Drugi eksponencijalni izraz je talas koji se reflektovao od obale i kreće se ulevo. Brzina prostiranja talasa nije konstantna ni u jednom smeru, ali je možemo odrediti na linijama konstantne faze

$$\Phi = 2\omega\sqrt{\frac{x_0-x}{\alpha}} \pm \omega t = \text{const.},$$

odakle sledi

$$c_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d\Phi}{dt}}{\frac{d\Phi}{dx}} = \pm\sqrt{\alpha(x_0-x)}. \tag{2.1.17}$$

Prethodna jednačina pokazuje da karakteristike u ovom slučaju nisu prave linije, ali i da je brzina proporcionalna kvadratnom korenu lokalne dubine. Možemo još zaključiti da se talas kad $x_0 - x \to +\infty$ raspada i da se amplituda ponaša kao $\eta \sim d^{-1/4}$ (što je poznato kao *Grinov zakon*). Ako zapišemo fazu u obliku

$$\frac{2\omega}{\sqrt{\alpha(x_0-x)}}(x_0-x) \pm \omega t,$$

možemo da zaključimo da se broj talasa povećava kad $x \to x_0$.

Blizu obale (kad $x \to x_0$), znamo na osnovu [6] da se Beselove funkcije ponašaju kao

$$\begin{aligned} J_0(x) &\sim 1, \quad \chi \to 0^+ \\ Y_0(x) &\sim \frac{2}{\pi}\ln\chi, \quad \chi \to 0^+, \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

pa rešenje (2.1.15) daje

$$\eta(x,t) \sim \left(C + \frac{2D}{\pi}\ln\left(2\omega\sqrt{\frac{x_0-x}{\alpha}}\right)\right)e^{-i\omega t} + c.c.,$$

kad $x_0 - x \to 0^+$. Ponašanje logaritamske funkcije blizu nule nas dovodi do singulariteta. Ovo možemo da eliminišemo ako uzmemo da je $D = 0$ (i onda rešenje zavisi samo od J_0). Odvojeno od singulariteta, rešenje opisuje talas koji oscilira u vremenu t na obali $x = x_0$.

Sada ćemo sumirati sve što smo uspeli da saznamo u vezi rešenja (2.1.15) i skicirati njegove mane. Naš problem je bio da opišemo talas koji dolazi iz beskonačnosti i kreće se prema obali. Da bismo mogli ovo da uradimo, treba da znamo frekvenciju i amplitudu talasa. Frekvencija ω neće nam praviti problem, ali amlituda teži nuli u beskonačnosti. Koristili smo jednačine plitke vode (tj. aproksimaciju da $\delta \to 0$), koje ne mogu precizno opisati prostiranje talasa u dubokoj vodi. Dalje, problem je da uvek postoji reflektovan talas, izuzev ako uzmemo da $C = D(\neq 0)$. Ali u ovom slučaju koeficijent pred Y_0 nije nula i imamo singularitet kad je $x = x_0$. Singularitet je prouzrokovan činjenicom da u blizini obale koristimo aproksimaciju $\varepsilon \to 0$ iako se amplituda povećava. Na osnovu svakodnevnog iskustva znamo da (skoro uvek) dolazi do prelamanje talasa na obali, što linearna teorija ne može da objasni. Ako ipak uzmemo da je $D = 0$ dolazimo do toga da za svako $\chi > 0$ dolazeći i reflektovani talasi postoje svugde.

2.2 Linearizovani gravitacioni talasi proizvoljnog talasnog broja

U prethodnom odeljku smo pojednostavili jednačine tako što smo usvojili aproksimaciju $\delta \to 0$ i videli da rešenje nije bilo u potpunosti zadovoljavajuće. Sada ćemo razmotriti problem ravnog gravitacionog talasa, ali bez aproksimacije $\delta \to 0$. Posmatraćemo jednačine (1.6.1) sa $W_e = 0, \eta = \eta(x,t)$ i $b = b(x)$ pa imamo

$$u_t = -p_x, \qquad \delta^2 w_t = -p_z, \qquad u_x + w_z = 0, \tag{2.2.1}$$

$$w = \eta_t \qquad \text{i} \qquad p = \eta \qquad \text{na } z = 1, \tag{2.2.2}$$

$$w = ub' \qquad \text{na } z = b(x). \tag{2.2.3}$$

Izraz za lokalnu dubinu iz prethodne računice, u kojoj smo pretpostavili da je nepokretna donja granica konstantnog nagiba, odgovara i u ovoj, s tim da ćemo transformisati koordinate tako da obala bude na $x = \frac{1}{\alpha}$, pa važi

$$d(x) = 1 - b(x) = 1 - \alpha x, \quad \alpha > 0, \quad x \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Potražimo rešenje u obliku

$$u = U(x,z)e^{-i\omega t} + c.c., \quad w = W(x,z)e^{-i\omega t} + c.c., \quad p = P(x,z)e^{-i\omega t} + c.c.,$$

zajedno sa

$$\eta(x,t) = A(x)e^{-i\omega t} + c.c. \tag{2.2.4}$$

Na osnovu ovoga, jednačine (2.2.1)-(2.2.3) postaju

$$i\omega U = P_x, \quad i\omega\delta^2 W = P_z, \quad U_x + W_z = 0; \tag{2.2.5}$$

$$W(x,1) = -i\omega A, \quad P(x,1) = A; \tag{2.2.6}$$

$$W(x, b(x)) = \alpha U(x, b(x)) \quad \text{gde } b(x) = \alpha x. \tag{2.2.7}$$

Lako možemo primetiti da na osnovu treće jednačine iz (2.2.5) važi

$$W_{zz} + U_{xz} = 0;$$

a iz prve i druge

$$i\omega U_{xz} = P_{xxz} = i\omega\delta^2 W_{xx}.$$

Dakle na osnovu prethodnih izraza možemo zaključiti da W zadovoljava *Laplasovu jednačinu*, tj.

$$\delta^2 W_{xx} + W_{zz} = 0. \tag{2.2.8}$$

Rešenje ove jednačine ćemo potražiti metodom razdvajanja promenljivih, u obliku

$$W(x, z) = \sum_n W_n(x, z) = \sum_n X_n(x) Z_n(z), \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{2.2.9}$$

Dalje, ako uvrstimo ovo u jednačinu (2.2.8), dobijamo da

$$-\frac{Z_n''}{\delta^2 Z_n} = \frac{X_n''}{X_n} = \lambda_n,$$

što nam daje sledeći sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda za svako n

$$\begin{aligned} X_n'' + \lambda_n X_n = 0; \\ Z_n'' - \lambda_n \delta^2 Z_n = 0, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

gde λ_n je parametar za koji ćemo uzeti da je

$$\lambda_n = k_n^2 (> 0).$$

Ako sad sve ovo uzmemo u obzir, dobijamo da je

$$Z_n = C_n \exp(\delta k_n z) + D_n \exp(-\delta k_n z),$$

gde C_n i D_n su proizvoljne konstante. Kako znamo da dubina neprestano raste ako $x \to -\infty$, da bismo mogli da imamo ograničeno rešenje moramo da uzmemo da $D_n = 0$. Sada već možemo da nepišemo rešenje za n-tu komponetntu W

$$W_n(x, y) = (A_n \exp(ik_n x) + B_n \exp(-ik_n x)) \exp(\delta k_n z),$$

gde A_n i B_n su nove konstante koje su već pomnožene sa C_n.

Ako stanem sada za momenat i odredimo n-ti deo od P (treba integraliti drugu jednačinu iz (2.2.5) nad z), dobićemo da

$$P(x, z) = \frac{i\omega\delta}{k_n}(A_n \exp(ik_n x) + B_n \exp(-ik_n x))(\exp(\delta k_n z) - \exp(\delta k_n)) + A(x) \tag{2.2.11}$$

(gde $A(x)$ je iz izraza za η). Zbog graničnih uslova važi

$$(A_n \exp(ik_n x) + B_n \exp(-ik_n x)) \exp(\delta k_n) = -i\omega A(x) \tag{2.2.12}$$

i

$$W(x, \alpha x) = \alpha U(x, \alpha x) = -\frac{i\alpha}{\omega} P_x(x, \alpha x) \tag{2.2.13}$$

Ako sad izraz (2.2.11) stavimo u jednačinu (2.2.13), zatim pomoću (2.2.12) eliminišemo $A(x)$, dolazimo do identiteta koji sadrži eksponencijalne delove poput $\exp(ik_n x)$, $\exp(-ik_n x)$ i $\exp(\alpha\delta k_n x)$ i konstante koje množe njih, A_n i B_n. Ova jednačina u opštem slučaju nema rešenje, sem $A_n = B_n = 0$ (što nam ne odgovara).

Situacija, međutim, nije beznadežna: može se pokazati da rešenje problema u obliku (2.2.9) postoji, ali samo za određene vrednosti parametra λ. Na jednostavnom primeru ćemo demonstrirati ovu ideju, pretpostavljajući da rešenje (2.2.9) sadrži samo dva člana, $W(x, z) = W_1(x, z) + W_2(x, z) = X_1(x)Z_1(z) + X_2(x)Z_2(z)$. Za određivanje W_1 koristimo sledeći sistem jednačina ($\lambda_1 = k^2$)

$$\begin{aligned} X_1'' + k^2 X_1 &= 0; \\ Z_1'' - k^2\delta^2 Z_1 &= 0, \end{aligned}$$

koji daje rešenje

$$W_1 = (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) e^{\delta kz},$$

gde $D_1 = 0$ jer W_1 mora da bude ograničeno (kad $z \to -\infty$), a C_1 je sadržan u A_1 i B_1. Drugu komponentu W_2 ćemo dobiti ako usvojimo $\lambda_2 = -k^2$, tj.

$$\begin{aligned} X_2'' - k^2 X_2 &= 0; \\ Z_2'' + k^2\delta^2 Z_2 &= 0, \end{aligned}$$

koji daje rešenje

$$W_2 = (A_2 e^{i\delta kz} + B_2 e^{-i\delta kz}) e^{kx},$$

$D_2 = 0$ isto da bi W_2 bila ograničena kad $x \to -\infty$. Konačno, dobili smo rešenje za W,

$$W = (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) e^{\delta kz} + (A_2 e^{i\delta kz} + B_2 e^{-i\delta kz}) e^{kx}, \tag{2.2.14}$$

s tim da imamo četiri konstante koje treba da odredimo tako da budu zadovoljeni granični uslovi (2.2.12) i (2.2.13). Možemo sada da odredimo $P(x, z)$ (kao i ranije, iz (2.2.5))

$$\begin{aligned} P(x, z) = &\frac{i\omega\delta}{k}(A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx})(e^{\delta kz} - e^{\delta k}) \\ &+ \frac{\omega\delta}{k}(A_2(e^{i\delta kz} - e^{i\delta k}) - B_2(e^{-i\delta kz} - e^{-i\delta k}))e^{kx} + A(x). \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Znamo da na osnovu graničnog uslova (2.2.13) iz prethodnog izraza važi

$$\begin{aligned} (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) e^{\alpha\delta kx} &+ (A_2 e^{i\alpha\delta kx} + B_2 e^{-i\alpha\delta kx}) e^{kx} \\ &= i\alpha\delta(A_1 e^{ikx} - B_1 e^{-ikx})(e^{\alpha\delta kx} - e^{\delta k}) \\ - i\alpha\delta(A_2(e^{i\alpha\delta kx} - e^{i\delta k}) &- B_2(e^{-i\alpha\delta kx} - e^{-i\delta k}))e^{kx} - \frac{i\alpha}{\omega} A'(x). \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Izraz $A'(x)$ se može dati u eksplicitnom obliku korišćenjem graničnog uslova (2.2.6).

Ako želimo da odredimo konstante iz prethodnog identiteta, tako da rešenje ne bude trivijalno, moramo da uvedemo još jedan uslov: nagib α mora da zadovolji jednačinu $\alpha\delta = 1$. Prethodni izraz će tako postati

$$\begin{aligned}(A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} + A_2e^{ikx} + B_2e^{-ikx})e^{kx} \\ = i(A_1e^{ikx} - B_1e^{-ikx})(e^{kx} - e^{\delta k}) - i(A_2(e^{ikx} - e^{i\delta k}) - B_2(e^{-ikx} - e^{-i\delta k}))e^{kx} \\ + \frac{ik}{\delta\omega^2}(A_1e^{ikx} - B_1e^{-ikx})e^{\delta k} + \frac{k}{\delta\omega^2}(A_2e^{i\delta k} + B_2e^{-i\delta k})e^{kx}. \quad (2.2.17)\end{aligned}$$

Posle manjih transformacija može se primetiti da se u poslednjoj jednačini pojavljuje pet različitih eksponencijalnih izraza koji sadrže promenljivu x. Shodno tome, dobija se sledećih pet jednačina po nepoznatim A_1, B_1, A_2, B_2 i $\omega(k)$

$$\begin{aligned} e^{(1+i)kx}: &\quad A_1 + A_2 = i(A_1 - A_2); \\ e^{(1-i)kx}: &\quad B_1 + B_2 = i(B_2 - B_1); \\ e^{ikx}: &\quad iA_1\left(\frac{k}{\delta\omega^2} - 1\right)e^{\delta k} = 0; \\ e^{-ikx}: &\quad iB_1\left(\frac{k}{\delta\omega^2} - 1\right)e^{\delta k} = 0; \\ e^{kx}: &\quad (1+i)A_2e^{i\delta k} = -(1-i)B_2e^{-i\delta k}. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema je

$$A_2 = iA_1, \qquad B_2 = -iB_1, \qquad \text{i} \quad B_1 = iA_1e^{2i\delta k},$$

zajedno sa disperzionom relacijom $\omega(k)$

$$\omega^2 = \frac{k}{\delta}, \quad (2.2.18)$$

odakle lako možemo da dobijemo brzinu prostiranja talasa

$$c_p = \frac{\omega(k)}{k} = \pm\frac{1}{\sqrt{\delta k}}.$$

Talas na slobodnoj površi η na osnovu jednačine (2.2.4) ima sledeći oblik

$$\eta(x,t) = A_1(e^{i(kx-\omega t-\delta k)} + e^{-i(kx+\omega t-\delta k)} + (1+i)e^{k(x-\delta)-i\omega t}) + c.c. \quad (2.2.19)$$

Treba primetiti da se ovo rešenje razlikuje od rešenja iz prethodnog odeljka. Najpre, u ovom slučaju rešenje je regularno svuda (kad je $x \leq \delta$). Na obali ($x = \delta$) prethodna jednačina postaje

$$\eta = (3+i)A_1e^{-i\omega t} + c.c. \quad (2.2.20)$$

Posledica ovoga je da se i dolazni i reflektovani talas prostiru konstantnom brzinom (za fiksirano k). Pored toga, dobijeno rešenja ima još dva bitna svojstva koja ga razlikuju od talasa u slučaju „plitke” vode:

1. rešenje sadrži član koji ne predstavlja putujući talas, $e^{k(x-\delta)-i\omega t}$;

2. amplitude oba talasa ne iščezavaju kada $x \to -\infty$.

2.3 Rubni talasi

Dosadašnji primeri su bili povezani sa talasima koji su se kretali upravno na obalu. Sada ćemo preći na slučaj kada se talasi prostiru paralelno sa obalom, tj. u y-pravcu. Otuda potiče i naziv *rubni talasi*, jer se prostiru paralelno sa rubom oblasti definisanosti. Jednačina (1.6.1) u ovom slučaju je oblika (usvojićemo $W_e = 0$ i $\delta \to 0$)

$$u_t = -p_x, \qquad v_t = -p_y, \qquad 0 = p_z, \qquad u_x + v_y + w_z = 0, \tag{2.3.1}$$

$$w = \eta_t \qquad \text{i} \qquad p = \eta \qquad \text{na} \quad z = 1 \tag{2.3.2}$$

$$w = ub' \qquad \text{na} \quad z = b(x) \tag{2.3.3}$$

Za opisivanje promenu nepokretne donje granice koristićemo izraz iz prehodnog primera $b(x) = \alpha x$, obala je na $x = \frac{1}{\alpha}$, a rešenje tražimo u harmonijskom ubliku

$$u = U(x,z)E + c.c., \quad v = V(x,z)E + c.c., \quad w = W(x,z)E + c.c., \tag{2.3.4}$$

zajedno sa

$$p = P(x,z)E + c.c., \quad \eta = A(x)E + c.c., \tag{2.3.5}$$

gde E predstavlja sledeći eksponencijalan izraz

$$E = e^{i(ly-\omega t)}.$$

Ako ovo uvrstimo u jednačine (2.3.1), (2.3.2) i (2.3.3) dobićemo

$$i\omega U = P_x, \qquad \omega V = lP, \qquad P_z = 0, \qquad U_x + ilV + W_z = 0, \tag{2.3.6}$$

$$W = -i\omega A \qquad \text{i} \qquad P = A \qquad \text{na } z = 1 \tag{2.3.7}$$

$$W = \alpha U \qquad \text{na } z = \alpha x. \tag{2.3.8}$$

Odavde sledi da P ne zavisi od z ($P_z = 0$), pa na osnovu graničnog uslova (2.3.7) važi

$$P(x,z) = A(x) \qquad \text{za} \quad 1 \geq z \geq b(x) = \alpha x; \; x \leq \frac{1}{\alpha}. \tag{2.3.9}$$

Ako uzmemo ovo u obzir, iz jednačine (2.3.6) dobijamo

$$U = -\frac{i}{\omega}A'; \qquad V = \frac{l}{\omega}A,$$

pa znamo da

$$W_z = \frac{i}{\omega}(A'' - l^2 A).$$

Ako ovo integralimo po z, dobijamo

$$W = \frac{i}{\omega}(l^2 A - A'')(1 - z) - i\omega A,$$

odakle na osnovu graničnog uslova (2.3.8) dobijamo sledeću običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$(1-\alpha x)(A''-l^2A)-\alpha A'+\omega^2A=0.$$

Ako funkciju A tretiramo kao $A=A(1-\alpha x)=A(X)$, prethodnu jednačinu možemo da zapišemo na sledeći način

$$XA''+A'+\left(\frac{\omega^2-l^2X}{\alpha^2}\right)A=0.$$

Zgodno je zameniti funkciju $A(X)$ sa izrazom

$$A(X)=e^{-\frac{lX}{\alpha}}L(Y), \tag{2.3.10}$$

gde $Y=2lX/\alpha$, pa smo sveli prethodnu jednačinu na običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda, oblika

$$YL''+(1-Y)L'+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2 l}-1\right)L=0. \tag{2.3.11}$$

Ova jednačina je *Lagerova jednačina*, a njena rešenja su *Lagerovi polinomi* $L_n(Y)$, ako važi da

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\alpha l}-1\right)=n, \qquad n=0,1,2,3,\ldots \tag{2.3.12}$$

Otuda lako možemo naći disperzijsku relaciju,

$$\omega^2=\alpha l(2n+1). \tag{2.3.13}$$

Na osnovu ovoga možemo zaključiti da frekvencija raste sa brojom talasa l i da zavisi od nagiba nepokretne donje granice. Interesantna činjenica je da ako $\alpha=0$, tj. kada je dubina konstantna, nemamo talasa.

Rešenje možemo da nađemo pomoću *Rodrigezove formule*

$$L_n(Y)=e^Y\frac{d^n}{dY^n}(Y^ne^{-Y}), \qquad n=0,1,2,3,\ldots \tag{2.3.14}$$

pa za prvih nekoliko n-ova (i $\omega>0$) imamo

$$\begin{aligned}
&\text{za } n=0; \qquad \omega=\sqrt{\alpha l}; \qquad L_0=1;\\
&\text{za } n=1; \qquad \omega=\sqrt{3\alpha l}; \qquad L_1=1-Y=1-\frac{2lX}{\alpha};\\
&\text{za } n=2; \qquad \omega=\sqrt{5\alpha l}; \qquad L_2=2-4Y+Y^2=2-\frac{8lX}{\alpha}+\frac{4l^2X^2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Sad na osnovu (2.3.5) i prethodnog računa rešenja su za

$$\begin{aligned}
n=0 \qquad &\eta(x,y,t)=A_0e^{-\frac{l}{\alpha}(1-\alpha x)}e^{i(ly-\sqrt{\alpha l}t)}+c.c.,\\
n=1 \qquad &\eta(x,y,t)=A_1e^{-\frac{l}{\alpha}(1-\alpha x)}\left(1-\frac{2l}{\alpha}(1-\alpha x)\right)e^{i(ly-\sqrt{3\alpha l}t)}+c.c,\\
n=2 \qquad &\eta(x,y,t)=A_2e^{-\frac{l}{\alpha}(1-\alpha x)}\left(2-\frac{8l}{\alpha}(1-\alpha x)+\frac{4l^2}{\alpha^2}(1-\alpha x)^2\right)e^{i(ly-\alpha\sqrt{5\alpha l}t)}+c.c.,
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

gde A_0, A_1 i A_2 su proizvoljne konstante. Možemo primetiti da talas za svako n raspada kad $x\to-\infty$ i da dostiže najveću amplitudu blizu obale, tj. kad $x\to 1/\alpha$.

Glava 3

Nelinearni problemi

3.1 Nelinearni talasi velikih talasnih dužina

U ovom poglavlju ćemo se posvetiti analizi jednačina koje opisuju nelinearno prostiranje talasa. O opštim metodama koje se koriste u analizi nelinearnih PDJ, a naročito kod prostiranja talasa, može se više naći u monografijama [7, 8]. Radi jednostavnosti, pretpostaviće se da se talasi prostiru samo u jednom pravcu i usvojićemo da to bude pravac x-ose. Nepokretna donja granica je ravna i nalazi se na pravoj $z = 0$. Na osnovu toga iz sistema (1.6.2) imamo sledeće jednačine

$$u_t + \varepsilon(uu_x + wu_z) = -p_x, \qquad 0 = p_z, \qquad u_x + w_z = 0; \tag{3.1.1}$$

$$w = \eta_t + \varepsilon u\eta_x \qquad \text{i} \qquad p = \eta \qquad \text{na } z = 1 + \varepsilon\eta; \tag{3.1.2}$$

$$w = 0 \qquad \text{na } z = 0. \tag{3.1.3}$$

Na osnovu druge jednačine iz (3.1.1) znamo da pritisak ne zavisi od z, odnosno $p_z = O(\delta^2)$, pa iz (3.1.2) sledi da

$$p = \eta$$

svugde (za $z > 0$). Ovo pojednostavljuje naše jednačine na

$$u_t + \varepsilon(uu_x + wu_z) = -\eta_x, \qquad u_x + w_z = 0; \tag{3.1.4}$$

sa graničnim uslovima

$$w = \eta_t + \varepsilon u\eta_x \qquad \text{na } z = 1 + \varepsilon\eta; \qquad w = 0 \qquad \text{na } z = 0. \tag{3.1.5}$$

Tražićemo rešenje tako da u bude funkcija horizontalne koordinate x i vremena t, tj. $u = u(x, t)$. Na osnovu druge jednačine iz (3.1.4) sad možemo zaključiti da onda ni w_z ne zavisi od z, odnosno

$$w_z = \phi(x, t).$$

Ako integralimo prethodni izraz po z dobijamo $w = \int_0^z \phi(x,t)d\zeta = \phi(x,t)z$. Iz graničnih uslova (3.1.5) tada sledi

$$w = \left(\frac{\eta_t + \varepsilon u\eta_x}{1 + \varepsilon\eta}\right) z.$$

Na osnovu prethodnog izraza dve jednačine iz (3.1.4) postaju

$$u_t + \varepsilon u u_x + \eta_x = 0;$$
$$(1+\varepsilon\eta)u_x + \eta_t + \varepsilon u \eta_x = 0.$$

Do sada nije uvedena nikakva pretpostavka o redu veličine parametra ε[1]. U nelinearnim problemima se može smatrati da je $\varepsilon = O(1)$. Stoga ćemo usvojiti da je $\varepsilon = 1$ i uvesti oznaku h

$$h(x,t) = 1 + \eta(x,t),$$

čime se sistem (3.1.4) svodi na

$$u_t + uu_x + h_x = 0, \quad h_t + (hu)_x = 0, \tag{3.1.6}$$

što predstavlja tzv. jednačine „plitke vode".

3.1.1 Metod karakteristika

Prvo ćemo pokušati da nađemo rešenje prethodnog sistema putem metoda karakteristike. Najpre uvešćemo smenu za lokalnu dubinu $h(>0)$

$$c(x,t) = \sqrt{h(x,t)}. \tag{3.1.7}$$

Sistem jednačina (3.1.6) dobija oblik

$$u_t + uu_x + 2cc_x = 0 \tag{3.1.8}$$
$$2cc_t + c^2 u_x + 2cuc_x = 0. \tag{3.1.9}$$

Ako sad podelimo drugu jednačinu sa c i dodamo prvoj, dobijamo

$$(u+2c)_t + u(u+2c)_x + 2cc_x + cu_x = 0, \tag{3.1.10}$$

a ako ih oduzmemo, dobijamo.

$$(u-2c)_t + u(u-2c)_x + 2cc_x - cu_x = 0. \tag{3.1.11}$$

Posle manjih transformacija možemo svesti prethodne jednačine na sledeći oblik

$$\begin{aligned} (u+2c)_t + (u+c)(u+2c)_x &= 0 \\ (u-2c)_t + (u-c)(u-2c)_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Rešenje možemo da nađemo metodom karakteristika

$$\begin{aligned} u+2c = \text{const. na linijama } C^+ &: \frac{dx}{dt} = u + c, \\ u-2c = \text{const. na linijama } C^- &: \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

C^+ i C^- su karakteristike, a funkcije $u \pm 2c$ su *Rimanove invarijante.* Za proizvoljne funkcije f i g, rešenje možemo da izrazimo u implicitnom obliku

$$\begin{aligned} u+2c = f(\alpha),\ \alpha \text{ je konstanta na linijama} &: \frac{dx}{dt} = u + c, \\ u-2c = g(\beta),\ \beta \text{ je konstanta na linijama} &: \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Ovo znači da ako želimo da u potpunosti rešimo problem, potrebno je zadati početno stanje (početni uslov) $u(x,0)$ i $c(x,0)$.

[1] Podsetimo se, $\varepsilon = a/h_0$ je odnos amplitude talasa i prosečne dubine.

Prosti talasi u plitkoj vodi

Jedna specijalna klasa rešenja ovog problema se dobija kada je jedna od Rimanovih invarijanti konstantna u celom domenu. Ovakvo rešenja nazivamo *prostim talasima*. Kao primer, posmatraćemo prostiranje jednog talasa koji se kreće nadesno, u oblast u kojoj se voda nalazi u stanju mirovanja ($u = 0$) i konstantne je dubine ($h = h_0$). Zbog toga će familija karakteristika C^- obrazovati traženi skup karakteristika koje su konstantne. Pošto je u neporemećenoj oblasti $u = 0$, za C^- će važiti

$$u - 2c = -2c_0, \quad \forall(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \tag{3.1.15}$$

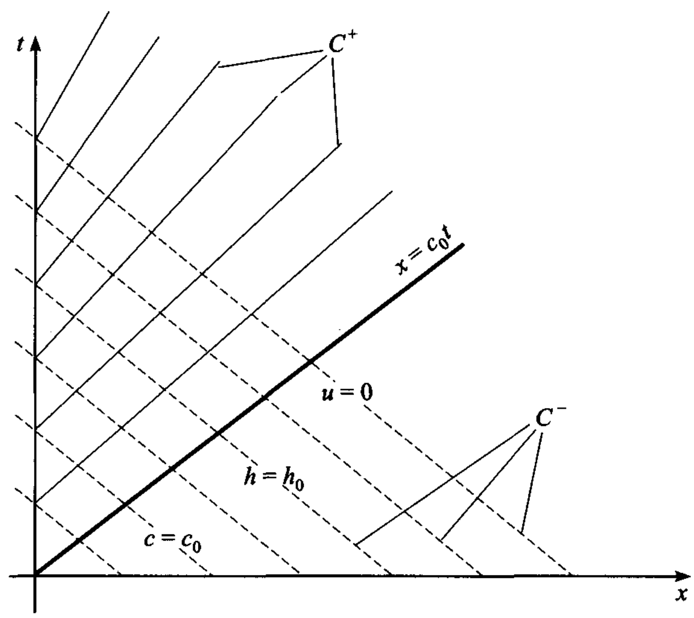
gde je $c_0 = \sqrt{h_0}$. Polazeći od (3.1.15) i $(3.1.14)_1$, može se pokazati da važi

$$u = c_0 + \frac{1}{2} f(\alpha) = \text{const.}, \quad c = \frac{1}{4} f(\alpha) - \frac{c_0}{2} = \text{const.} \quad \text{na } C^+. \tag{3.1.16}$$

odnosno da su i u i c konstante na karakteristikama C^+. Karakteristike su prikazane na Slici 3.1. Odavde na osnovu (3.1.14) znamo da $x - (u+c)t = \alpha$ i možemo zaključiti da

$$u + 2c = f\{x - (u + c)t\}. \tag{3.1.17}$$

Iz jednačina (3.1.15) i (3.1.17) za $t = 0$ znamo da je



Slika 3.1: Karakteristike C^+ i C^- za prosti talas.

$$u + 2c = f(x)$$
$$u - 2c = -2c_0,$$

pa možemo zaključiti da važi

$$f(x) = 4c - 2c_0.$$

Ako sad uvedemo funkciju H, $h(x,0) = H(x)$, onda imamo

$$f(x) = 4\sqrt{H(x)} - 2\sqrt{h_0}.$$

Sada na osnovu (3.1.17) sledi

$$u + 2c = 4\sqrt{H(x-(u+c)t)} - 2\sqrt{h_0}$$

i

$$\begin{aligned} h(x,t) &= H(x-(u+\sqrt{h})t), \\ u(x,t) &= 2\left(\sqrt{h(x,t)} - \sqrt{h_0}\right), \\ h(x,t) &= H\{x - (3\sqrt{h(x,t)} - 2\sqrt{h_0})t\}. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Jednačina (3.1.18) implicitno određuje traženu funkciju $h(x,t)$, za zadati početni uslov $H(x)$ i dubinu h_0. Ako je početni uslov takav da sadrži ograničenu ili neograničenu oblast u kojoj važi $H(x) > 0$, što je fizički očekivano, onda rešenja opisana jednačinom (3.1.18) za konačno t postaju višeznačna. Drugim rečima, postoje $\hat{t} < \infty$ i $\hat{x}$ takvi da je $h_x(\hat{x},\hat{t}) = \infty$, pa za $t > \hat{t}$ imamo presecanje karakteristika i pojavu udarnog talasa.

Probijanje brane

U drugom primeru posmatraćemo problem „probijanja brane" (dam break). Brana se nalazi na $x = 0$ a voda levo od nje, u oblasti $x < 0$. Pretpostavićemo da u trenutku probijanja brane ($t = 0$) voda miruje, tj. brzina je $u = 0$ svuda i

$$h(x,t) = \begin{cases} h_0, & x < 0 \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{3.1.19}$$

gde $h_0 > 0$ predstavlja visinu vodenog stuba. Pretpostavićemo da u trenutku pucanja zid brane trenutno nestaje.

Karakteristike C^+ (iz (3.1.13) ili (3.1.14)) polaze iz oblasti $x < 0$, gde znamo da je $u = 0$ i $c_0 = \sqrt{h_0}$ (videti Sliku 3.2), pa imamo

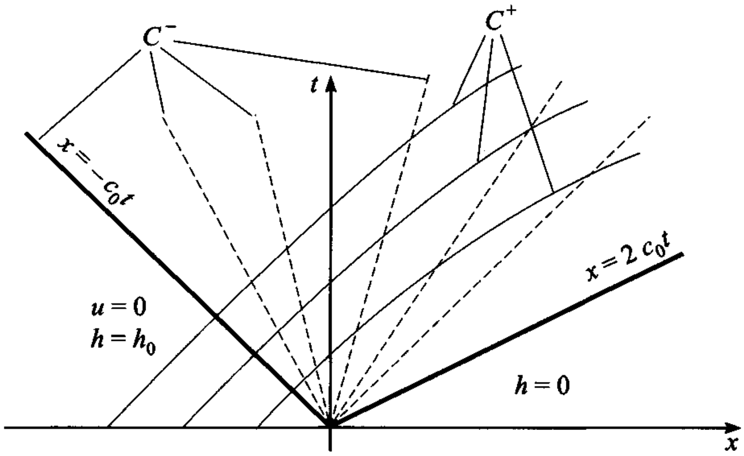
$$u + 2c = 2\sqrt{h_0} = \text{const.} \tag{3.1.20}$$

Kada su u pitanju C^- karakteristike, znamo da sve linije moraju da sadrže tačku $(x,t) = (0,0)$, jer u početnom trenutku voda se nalazi levo od tačke $x = 0$. Kao i u prethodnom primeru, i u ovom slučaju možemo da zaključimo, da su na linijama C^- i u, i c konstante (Slika 3.2), pa odatle sledi

$$x = (u-c)t.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} u + 2c &= 2\sqrt{h_0} \\ u - c &= \frac{x}{t}, \end{aligned}$$

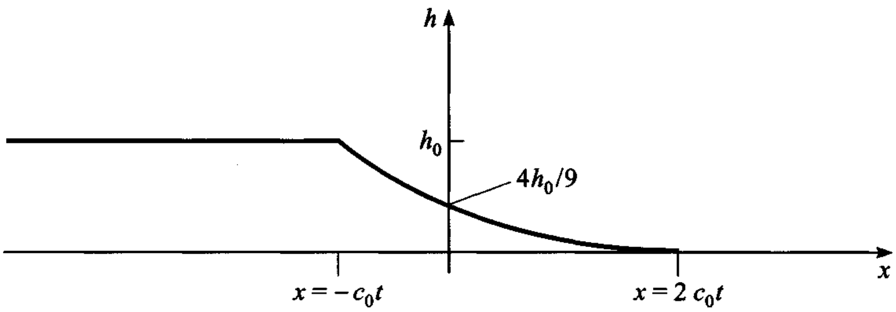


Slika 3.2: Karakteristike C^+ i C^- za problem probijanja brane.

odakle ako uzmemo da $c=\sqrt{h}$, možemo izraziti h i u

$$\sqrt{h}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{h_0}-\frac{x}{t}\right) \tag{3.1.21}$$

$$u=\frac{2}{3}\left(\sqrt{h_0}+\frac{x}{t}\right). \tag{3.1.22}$$



Slika 3.3: Profil slobodne površine talasa u trenutku t posle probijanja brane.

Rešenje je definisano na intervalu $0\le h\le h_0$, pa možemo zaključiti da

$$-\sqrt{h_0}\le\frac{x}{t}\le 2\sqrt{h_0},$$

odakle dobijamo krajnje rešenje u obliku parabole

$$h(x,t)=\frac{1}{9}\left(2\sqrt{h_0}-\frac{x}{t}\right)^2,\qquad -\sqrt{h_0}\le\frac{x}{t}\le 2\sqrt{h_0}, \tag{3.1.23}$$

za svako fiksirano $t > 0$. Kad $\frac{x}{t} = 2\sqrt{h_0}$, onda je $h = 0$ i prednji deo talasa se kreće udesno brzinom $2\sqrt{h_0}$. Slično, ako $\frac{x}{t} = -\sqrt{h_0}$, onda je $h = h_0$ i najviša tačka vodenog zida se kreće unazad (tj. ulevo) brzinom $\sqrt{h_0}$. Možemo još uočiti da za $x = 0$ dubina vode ostaje konstantna za svako $t > 0$ i iznosi $h = \frac{4}{9}h_0$, što je prikazano na Slici 3.3. Interesantan rezultat je i činjenica da kada $t \to \infty$, tada dubina h teži istoj vrednosti $\frac{4}{9}h_0$.

3.1.2 Metod hodografske transformacije

Ova metoda služi za rešavanje diferencijalnih jednačina tako što se zamenjuju uloge zavisno i nezavisno promenljivih. Konkretno, u našem slučaju vratićemo se na sistem (3.1.6) i izvršiti smenu koju smo koristili i do sad, $c(x,t) = \sqrt{h(x,t)}$:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + 2cc_x &= 0 \\ c_t + uc_x + \frac{1}{2}cu_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Kao što smo rekli, zamenićemo uloge promenljivih, tako da bude

$$x = x(u,c), \qquad t = t(u,c).$$

Ako diferenciramo ove izraze po x, dobijamo

$$\begin{aligned} 1 &= x_u u_x + x_c c_x, \\ 0 &= t_u u_x + t_c c_x. \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Jakobijan transformacije određujemo na sledeći način

$$J = \frac{\partial(x,t)}{\partial(u,c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial c} \end{vmatrix} = x_u t_c - x_c t_u. \tag{3.1.26}$$

Sada na osnovu sistema (3.1.25) možemo izraziti u_x i c_x:

$$u_x = \frac{t_c}{J}, \qquad c_x = -\frac{t_u}{J}. \tag{3.1.27}$$

Dalje treba da diferenciramo $x(u,c)$ i $t(u,c)$ po t, a to je

$$\begin{aligned} 0 &= x_u u_t + x_c c_t, \\ 1 &= t_u u_t + t_c c_t, \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

i slično kao i u prethodnom slučaju, izrazićemo u_t i c_t:

$$u_t = -\frac{x_c}{J}, \qquad c_x = \frac{x_u}{J}. \tag{3.1.29}$$

Ako izraze (3.1.27) i (3.1.29) uvrstimo u jednačinu (3.1.24), a zatim pomnožimo sa J, dobićemo sistem linearnih jednačina po x i t

$$\begin{aligned} x_c - ut_c + 2ct_u &= 0 \\ x_u - ut_u + \frac{1}{2}ct_c &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Treba sad da difereciramo prvu jednačinu po u, a drugu po c, da bismo dobili

$$x_{uc} - t_c - ut_{uc} + 2ct_{uu} = 0$$
$$x_{uc} - ut_{uc} + \frac{1}{2}t_c + \frac{1}{2}ct_{cc} = 0.$$

Eliminacijom izraza x_{uc} iz ovih jednačina, dobićemo linearnu (hiperboličnu) PDJ drugog reda

$$4ct_{uu} - ct_{cc} = 3t_c. \tag{3.1.31}$$

Pomoću smene $\xi = u - 2c$ i $\eta = u + 2c$, prethodna jednačina će postati

$$2(\eta - \xi)t_{\xi\eta} = 3(t_\eta - t_\xi). \tag{3.1.32}$$

Rešenje ove jednačine možemo da odredimo samo uz dodatne granične uslove, koji opisuju t u (ξ, η)-ravni. Time se stiže do najveće mane ovog metoda: zamenom zavisno i nezavisno promenljivih dolazimo do jednostavnije diferencijalne jednačine, ali početni i granični uslovi postaju komplikovaniji. Ne možemo primeniti ni osobine *prostog talasa*, tj. ne možemo iskoristiti uslov da je jedna od Rimanovih invarijanti, $u + 2c$ ili $u - 2c$, konstantna u celom domenu, jer transformacija zahteva da i J i J^{-1} budu različiti od nule, što u slučaju prostog talasa ne važi:

$$J^{-1} = \frac{\partial(u, c)}{\partial(x, t)} = u_x c_t - u_t c_x = 0.$$

Rešenje jednačine (3.1.31) možemo da tražimo i na drugi način. Ako funkciju t zapišemo u sledećem obliku

$$t = \frac{1}{c}\frac{\partial T}{\partial c}, \qquad T = T(v, c),$$

gde je $v = u/2$, možemo da svedemo (3.1.31) na jednačinu

$$T_{vv} = T_{cc} + \frac{1}{c}T_c,$$

koju je moguće rešiti metodom razdvajanja promenljivih.

3.2 Nelinearni talasi promenljive dubine

Već smo obradili linearizovane talase nad promenljivom donjom granicom. U ovom odeljku ćemo ispitati nelinearan slučaj. I u nastavku ćemo koristiti aproksimaciju $\delta \to 0$, pa diferncijalne jednačine i granični uslovi na slobodnoj površi ostaju (3.1.1) i (3.1.2) (uz pojednostavljenje $\varepsilon = 1$). Jedino se menja granični uslov na nepokretnoj donjoj granici u odnosu na uslov (3.1.3), jer ovaj put imamo promenljivu dubinu. Sistem jednačina koji želimo da rešimo sada glasi:

$$u_t + uu_x + wu_z = -p_x, \qquad 0 = p_z, \qquad u_x + w_z = 0; \tag{3.2.1}$$

$$w = \eta_t + u\eta_x \qquad \text{i} \qquad p = \eta \qquad \text{na } z = 1 + \eta; \tag{3.2.2}$$

$$w = ub_x \qquad \text{na } z = b(x). \tag{3.2.3}$$

Kao i ranije, na osnovu graničnog uslova na slobodnoj površi $p = \eta$ (na $z = 1 + \eta$) i druge jednačine iz (3.2.1), i u ovom slučaju možemo zaključiti da je $p = \eta$ za svako z. Ako sad uzmemo da u je funkcija x i t, $u = u(x, t)$, dobijamo iz prve jednačine (3.2.1) da je

$$u_t + uu_x + \eta_x = 0, \tag{3.2.4}$$

jer $p_x = \eta_x$ i $u_z = 0$. Na osnovu treće jednačine iz (3.2.1) znamo da w_z ne zavisi od z (jer $w_z = -u_x$ i $u = u(x, t)$), pa integracijom nad z izraza $w_z = \phi(x, t)$ i korišćenjem graničnih uslova (3.2.2) i (3.2.3) dobijamo da je

$$w = \left(\frac{\eta_t + u\eta_x - ub_x}{1 + \eta - b} \right) (z - b) + ub_x.$$

Sada je

$$w_z = \frac{\eta_t + u\eta_x - ub_x}{1 + \eta - b},$$

i $u_x + w_z = 0$, pa imamo da je

$$(1 + \eta - b)u_x + \eta_t + u\eta_x - ub_x = 0. \tag{3.2.5}$$

U zagradi se javlja izraz $1 + \eta - b$, gde $1 + \eta$ je slobodna površ vode, a b je donja granica, pa je prirodno uvesti lokalnu dubinu $d\,(> 0)$ definisanu na sledeći način

$$d(x, t) = 1 + \eta(x, t) - b(x). \tag{3.2.6}$$

Ako sad zamenimo η u jednačinama (3.2.4) i (3.2.5) ($d_t = \eta_t$ i $d_x = \eta_x - b_x$), dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama $u(x, t)$ i $d(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + d_x + b_x &= 0 \\ d_t + (du)_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Ovaj sistem razlikuje se od sistema (3.1.6), koji smo dobili kod slučaja sa konstantnom dubinom, samo za izraz b_x. Međutim, metod kojom smo rešili sistem (3.1.6), u opštem slučaju ne daje rezultat. Ipak, u specijalnom slučaju, kada je donja granica konstantnog nagiba, možemo da primenimo metod hodografske transformacije.

Najpre ćemo nepokretnu donju granicu definisati kao u linearnim problemima:

$$b(x) = 1 - \alpha(x_0 - x).$$

Ako sada ovo uvrstimo u jednačinu (3.2.7), dobijamo

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + d_x + \alpha &= 0 \\ d_t + (du)_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

I u ovom slučaju ćemo uvesti smenu $c = \sqrt{d}$, što nam daje

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + 2cc_x + \alpha &= 0 \\ 2c_t + 2uc_x + cu_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Ako saberemo prethodne jednačine, posle manjih transformacija dobijamo

$$(u + 2c + \alpha t)_t + (u + c)(u + 2c)_x = 0.$$

Sličnim postupkom, posle oduzimanja druge jednačine od prve, imamo

$$(u - 2c + \alpha t)_t + (u - c)(u - 2c)_x = 0.$$

Novodobijene jednačine možemo da zapišemo i u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + c)\frac{\partial}{\partial x}\right)(u + 2c + \alpha t) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - c)\frac{\partial}{\partial x}\right)(u - 2c + \alpha t) = 0. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Primena metoda karakteristika na sistem (3.2.10) nam daje

$$\begin{aligned} u + 2c + \alpha t = \text{const.} \quad \text{na } C^+ : \frac{dx}{dt} = u + c; \\ u - 2c + \alpha t = \text{const.} \quad \text{na } C^- : \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Sistem jednačina (3.2.9) za $\alpha = 0$ je identičan sistemu koji smo dobili za problem sa konstantnom dubinom (3.1.24), pa je logično da potražimo rešenje na isti način. Uvešćemo smenu (analognu smeni iz odeljka 3.1.2)

$$\begin{aligned} \xi = u - 2c + \alpha t, \\ \eta = u + 2c + \alpha t, \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

i istovremeno ćemo primeniti metod hodografske transformacije (zamenićemo uloge zavisnih i nezavisnoh promenljivih tako da $x = x(\xi, \eta)$ i $t = t(\xi, \eta)$). Diferenciranjem funkcije $x(\xi, \eta)$ i $t(\xi, \eta)$ po x dobijamo

$$\begin{aligned} 1 = x_\xi(u_x - 2c_x) + x_\eta(u_x + 2c_x); \\ 0 = t_\xi(u_x - 2c_x) + t_\eta(u_x + 2c_x). \end{aligned}$$

Pomoću prethodnih jednačina možemo da izrazimo u_x i c_x

$$u_x = \frac{t_\eta - t_\xi}{2J}; \qquad c_x = -\frac{t_\eta + t_\xi}{4J}, \tag{3.2.13}$$

gde naravno J je Jakobijan transformacije i $J = x_\xi t_\eta - x_\eta t_\xi$.
Dalje, diferenciranjem po t dobijamo da

$$\begin{aligned} 0 = x_\xi(u_t - 2c_t + \alpha) + x_\eta(u_t + 2c_t + \alpha); \\ 1 = t_\xi(u_t - 2c_t + \alpha) + t_\eta(u_t + 2c_t + \alpha), \end{aligned}$$

odakle možemo da odredimo u_t i c_t:

$$u_t = \frac{x_\xi - x_\eta}{2J} - \alpha; \qquad c_t = \frac{x_\eta + x_\xi}{4J}. \tag{3.2.14}$$

Na osnovu (3.2.12) možemo da izrazimo u i c:

$$u = \frac{\xi + \eta - 2\alpha t}{2}; \qquad c = \frac{\eta - \xi}{4}. \tag{3.2.15}$$

Preostalo nam je da izraze (3.2.13), (3.2.14) i (3.2.15) uvrstimo u sistem jednačina (3.2.9). Na ovaj način smo dobili

$$\begin{aligned} x_\xi - x_\eta + \frac{\xi + \eta - 2\alpha t}{2}(t_\eta - t_\xi) - \frac{\eta - \xi}{4}(t_\eta + t_\xi) = 0; \\ x_\xi + x_\eta - \frac{\xi + \eta - 2\alpha t}{2}(t_\eta + t_\xi) + \frac{\eta - \xi}{4}(t_\eta - t_\xi) = 0. \end{aligned}$$

Eliminacijom x_η, zatim x_ξ dolazimo do sledećeg sistema jednačine

$$\begin{aligned} x_\xi - \frac{1}{4}(\xi + 3\eta - 4\alpha t)\, t_\xi = 0; \\ x_\eta - \frac{1}{4}(3\xi + \eta - 4\alpha t)\, t_\eta = 0. \end{aligned}$$

Konačno diferenciranjem prve jednačien po η, druge po ξ, zatim eliminacijom člana $x_{\xi\eta}$, dolazimo do potpuno identične jednačine, kao i u prethodnom slučaju, za problem sa konstantnom dubinom:

$$2(\eta - \xi)t_{\xi\eta} = 3(t_\eta - t_\xi). \tag{3.2.16}$$

Interesantno je, dakle, da i u problemu sa konstantnom dubinom, i u problemu sa promenljivom dubinom (nepokretna donja granica je konstantnog nagiba), dolazimo do iste diferencijalne jednačine. Ipak, i u ovom slučaju treba napomenuti da rešenje postoji ako su J i J^{-1} različiti od nule.

3.3 Hidraulički skok i plimni talas

Interesantna pojava u dinamici fluida je hidraulički skok. U rekama se javlja u slučaju nagle promene dubine vode h, što je često povezano sa turbulentnim strujanjem i značajnim energijskim gubicima. Hidraulički skok je stacionaran u odnosu na obalu reke, odnosno nepokretni sistem referencije. Ako se kreće, onda se naziva plimni talas. Za obe ove pojave, promena dubine vode može da iznosi i nekoliko metara, ali se javlja na vrlo kratkom rastojanju od $1 - 2$ metra. Ova činjenica opravdava modeliranje hidrauličkog skoka i plimnog talasa kao diskontinuiteta.

Ispitivaćemo dvodimenzionalni slučaj. I dalje koristomo pretpostavku da $\delta \to 0$, što za posledicu ima da $u = u(x,t)$, tj. da u ne zavisi od z. Jednačine plitke vode su već izvedene i date su na sledeći način u diferencijalnom obliku

$$h_t + (hu)_x = 0, \qquad u_t + uu_x + h_x = 0. \tag{3.3.1}$$

Kada rešenja koja tražimo nisu diferencijabilna, jednačine oblika (3.3.1) nisu adekvatne za analizu. Zbog toga nam je potreban njihov integralni oblik, jer smo pretpostavili da h i u nisu neprekidne funkcije. Pri tome treba imati u vidu da je prilikom izvođenja jednačine $(3.3.1)_1$ izvršena integracija po z koordinati, dok u slučaju jednačine $(3.3.1)_2$ to nije bilo učinjeno. Da bi se dobili konzistentni uslovi na površi prekida, gde se javlja hidraulički skok, neophodno je jednačinu $(3.3.1)_1$ integrirati po x koordinati, a jednačinu $(3.3.1)_2$ prvo po z, a potom po x koordinati.

Prvu jednačinu iz (3.3.1) smo dobili iz jednačine kontinuiteta, gde smo u jednom trenutku koristili integral po z[2]. Treba sad da integralimo i po x. Ako funkcije h i u imaju prekid u $x = X(t)$ onda ćemo integraciju vršiti u fiksiranom ograničenom intervalu $I = [a, b]$, koji zadovoljava uslov $a < X(t) < b$ za svako t. Integracijom jednačine po x dobijamo

$$\int_a^b h_t \, dx = \frac{d}{dt}\left(\int_a^b h \, dx\right) \quad \text{i} \quad \int_a^b (hu)_x \, dx = hu\Big|_a^b .$$

Promena redosleda integracije i diferenciranja je u prvom slučaju opravdana zato što se posmatra lokalna (za fiksirano x) promena veličine h u vremenu. Tako dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b h \, dx\right) + (hu)\Big|_a^b = 0.$$

Sada možemo da razdvojimo integral na dva dela, pri čemu ćemo uvesti oznake X^- i X^+ za levi i desni limes

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{X^-} h \, dx + \int_{X^+}^b h \, dx\right) + (hu)\Big|_a^b = 0.$$

Dalje, treba zameniti redosled diferenciranja i integrala, ali moramo da obratimo pažnju na činjenicu da X^- i X^+ zavise od t (nasuprot njima, a i b su konstante), pa zbog toga prethodni izraz postaje

$$\int_a^b h_t \, dx + h^- \frac{dX}{dt} - h^+ \frac{dX}{dt} + (hu)\Big|_a^b = 0,$$

gde smo pretpostavili da je $X(t)$ diferencijabilna funkcija, a $h^\pm = h(X^\pm)$. Ako pustimo da $a \to b$ dolazimo do prvog uslova za skok koji mora da bude zadovoljen na površi diskontinuiteta X, tzv. *Renkin-Igonoov uslov*:

$$-U[\![h]\!] + [\![hu]\!] = 0, \tag{3.3.2}$$

gde je $U = \frac{dX}{dt}$ brzina kretanja diskontinuiteta, a $[\![f]\!] = f^+ - f^-$. U slučaju hidrauličkog skoka po pretpostavci je $U = 0$, pa dolazimo do zaključka da je hu održan duž diskontinuiteta, tj.

$$h^- u^- = h^+ u^+.$$

[2]Ona se, naime, može dobiti neposrednom integracijom jednačine kontinuiteta po z, $\int_0^h (u_x + w_z) dz = 0$, odakle sledi $\int_0^h u_x dz + w|_0^h = 0$. Ako iskoristimo činjenicu da u ne zavisi od z i granične uslove (3.1.2) i (3.1.3), dobijamo $h_t + (hu)_x = 0$.

U nastavku integraliće se druga jednačina iz (3.3.1). Prvo ćemo izvršiti integraciju po z

$$\begin{aligned} \int_0^h (u_t + uu_x + h_x)\, dz = 0 \\ hu_t + huu_x + hh_x = 0, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

jer ni u ni h ne zavise od z. Pre integracije po x, kraćim trasformacijama svešćemo prethodni izraz u drugačiji oblik. Imaćemo

$$\begin{aligned} & hu_t + huu_x + hh_x \pm (huu_x + uuh_x) \\ &\quad = hu_t + (huu_x + huu_x + uuh_x) + hh_x - u(hu_x + uh_x) \\ &\quad = hu_t + (uuh)_x + hh_x - u(-h_t) \\ &\quad = hu_t + uh_t + (uuh)_x + hh_x = 0, \end{aligned}$$

gde je korišćena prva jednačina iz (3.3.1) i pravilo za izvod proizvoda dve funkcije. Odatle sledi

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)_x = 0. \tag{3.3.4}$$

Sada imamo povoljniji oblik za integraciju po x, pa možemo da krenemo:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b hu\, dx\right) + \int_a^b \left(hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)_x dx = 0.$$

Radimo sve analogno prethodnom slučaju, pa ćemo i ovde razdvojiti integral

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{X^-} hu\, dx + \int_{X^+}^b hu\, dx\right) + \left(hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)\Big|_a^b = 0,$$

odakle, ako zamenimo redosled diferenciranja i integracije, dobijamo

$$\int_a^b (hu)_t\, dx + (hu)^- \frac{dX}{dt} - (hu)^+ \frac{dX}{dt} + \left(hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)\Big|_a^b = 0,$$

gde je $(hu)^\pm = h^\pm u^\pm$. Napokon, možemo da odredimo drugi uslov za skok, tako što ćemo opet pustiti da $a \to b$:

$$-U[\![hu]\!] + \left[\!\!\left[hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right]\!\!\right] = 0. \tag{3.3.5}$$

Ovo relacija predstavlja zakon održanja količine kretanja na singularnoj površi.

Imamo, dakle, dve jednačine/uslova (3.3.2) i (3.3.5) sa pet promenljivih (stanje na levoj strani diskontinuiteta u^- i h^-, zatim stanje na destonj strani u^+ i h^+ i brzina U), pa ako nam je dato stanje na levoj strani i U, onda lako možemo odrediti stanje na drugoj strani.

Postoji još jedan uslov, tzv. energijski uslov, koji nam govori o održanju energije na površi diskontinuiteta i ima sledeći oblik (njegovo detaljno izvođenje je dato u Dodatku 5.1)

$$-\frac{1}{2}U\,[\![hu^2+h^2]\!]+\left[\!\!\left[\frac{1}{2}hu^3+uh^2\right]\!\!\right]=0. \tag{3.3.6}$$

Uloga ovog uslova je malo drugačija u odnosu na prva dva, a ilustrovaćemo na sledećem primeru. Da bi bilo jednostavnije, posmatraćemo hidraulički skok ($U=0$). Prethodni uslov je u ovom slučaju sledećeg oblika

$$\left[\!\!\left[\frac{1}{2}hu^3+uh^2\right]\!\!\right]=0,$$

dok iz prvog i drugog uslova sledi

$$\begin{aligned}[\![hu]\!]&=h^+u^+-h^-u^-=0\\ \left[\!\!\left[hu^2+\frac{1}{2}h^2\right]\!\!\right]&=0.\end{aligned}$$

Iz prvog uslova znamo da $h^+u^+=h^-u^-=m$, a iz drugog da je $[\![hu^2]\!]=\frac{1}{2}[\![-h^2]\!]$. Koristeći ove rezultate, možemo da raspišemo treći uslov:

$$\begin{aligned}\left[\!\!\left[\frac{1}{2}hu^3+uh^2\right]\!\!\right]&=\left[\!\!\left[uh\left(\frac{1}{2}u^2+h\right)\right]\!\!\right]=m\left[\!\!\left[\frac{1}{2}u^2+h\right]\!\!\right]=\frac{1}{2}m[\![u^2]\!]+m[\![h]\!]\\&=\frac{1}{2}m({u^+}^2-{u^-}^2)+m[\![h]\!]=\frac{1}{2}m(u^++u^-)(u^+-u^-)+m[\![h]\!]\\&=\frac{1}{2}(u^++u^-)(h^+{u^+}^2-h^-{u^-}^2)+m[\![h]\!].\end{aligned}$$

U poslednjem koraku je iskorišćen prvi Renkin-Igonoov uslov, ali na dva načina: jednom kao $m=h^+u^+$, a drugi put kao $m=h^-u^-$. Daljim transformacijama dobijamo

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(u^++u^-)(h^+{u^+}^2-h^-{u^-}^2)+m[\![h]\!]\\&\quad=\frac{1}{2}(u^++u^-)[\![hu^2]\!]+m[\![h]\!]=\frac{1}{4}(u^++u^-)[\![-h^2]\!]+m[\![h]\!]\\&\quad=\frac{1}{4}(u^++u^-)({h^-}^2-{h^+}^2)+m(h^+-h^-)\\&\quad=\frac{1}{4}(h^--h^+)(h^+u^++h^+u^-+h^-u^++h^-u^-+4m)\\&\quad=\frac{1}{4}(h^--h^+)(h^-(u^+-u^-)-h^+(u^+-u^-))\\&\quad=\frac{m}{4h^+h^-}(h^--h^+)^2\left(\frac{h^+h^-}{m}(u^+-u^-)\right)\\&\quad=\frac{m}{4h^+h^-}(h^--h^+)^3.\end{aligned}$$

Za poslednji izraz znamo da je jednak nuli jedino kad je $h^-=h^+$, što znači da nema skoka. Na osnovu ovoga, možemo da zaključimo da ako imamo skok, izraz je različit od nule, tj. uslov održanja energije ne može da važi. Šta više, znamo da je kod hidrauličkog skoka $h^- < h^+$ (zato što je kod brzina situacija obrnuta, $u^- > u^+$), pa je poslednji izraz negativan. Ovo rezultat pokazuje da kog hidrauličkog skoka dolazi do gubitka energije. To je posledica turbulentnog strujanja vode u okolini površi diskontinuiteta, što uzrokuje gubitak eregije.

Konačno, kao posledicu prvog i drugog uslova, možemo izvesti jednu interesantnu jednačinu. Pretpostavimo da je $U = 0$ (hidraulički skok), i da su nam date u^- i h^-. Tada na osnovu prvog uslova možemo izraziti u^+

$$u^+ = \frac{h^- u^-}{h^+},$$

i uvrstiti u drugi uslov

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(h^{+2} - h^{-2}\right) &= h^- u^{-2} - h^+ \left(\frac{h^- u^-}{h^+}\right)^2 \\ \frac{1}{2} h^{-2} \left(\frac{h^{+2}}{h^{-2}} - 1\right) &= h^- u^{-2} \left(1 - \frac{h^-}{h^+}\right). \end{aligned}$$

Ako sad podelimo sa h^{-2} i uvedemo nove oznake

$$H = \frac{h^+}{h^-} \quad \text{i} \quad F = \frac{u^-}{\sqrt{h^-}},$$

posle kraćih transformacija dolazimo do kubne jednačine po H

$$(H - 1)\left(H^2 + H - 2F^2\right) = 0.$$

Prvo (očigledno) rešenje ove jednačine je

$$H = 1,$$

što je slučaj kada $h^+ = h^-$, tj. nema skoka. Druga dva rešenja su

$$H = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8F^2}}{2} \quad \text{ili} \quad H = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8F^2}}{2}.$$

Prva nema fizičku interpretaciju jer znamo da H mora da bude pozitivno, a ovaj izraz je negativan za svako F. Druga jednačina je značajna i ukazuje nam na to da je skok je moguć (tj. $H > 1$) samo ako je $F > 1$. Parametar F (često se koristi oznaka F_r) se naziva Frudov broj. Za protok fluida kažemo da je *superkritičan* ako je $F > 1$, a ako je $F < 1$, onda je protok subkritičan i skok nije moguć.

Glava 4

Neklasični problemi plitke vode

U ovom odeljku ćemo dati prikaz nekih neklasičnih problema prostiranja vodenih talasa. Oni predstavljaju predmet savremenih istraživanja. Na primer, u radu [5] analizirana su singularna rešenja jednačina plitke vode, koja sadrže Dirakovu delta distribuciju. Ovde ćemo se, međutim, baviti pojavom hidrauličkog skoka i rešavanjem Rimanovog problema za jednačine plitke vode, prikazanim u radu [4]. Glavna poteškoća u rešavanju ovih problema nastaje kada bezdimenzionalni parametar, Frudov broj $F = u^-/\sqrt{h^-}$, ima velike vrednosti, $F \gg 1$. Ispostavlja se da je pod određenim uslovima tada moguća pojava *delta šoka*, o čemu će biti reči u nastavku.

4.1 Superkritični tokovi

Jednačine plitke vode se u bezdimenzionalnom obliku mogu zapisati kao

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{4.1.1}$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{2F^2} h_x = 0, \tag{4.1.2}$$

gde je F Frudov broj. Rankin-Igonoovi uslovi za ove jednačine su

$$\frac{dX}{dt} = \frac{[\![hu]\!]}{[\![h]\!]} = \frac{[\![hu^2 + \frac{1}{2F^2}h^2]\!]}{[\![hu]\!]} \tag{4.1.3}$$

Primer 1. Najpre ćemo posmatrati problem u kom fluid miruje u početnom trenutku, sa konstantnom dubinom $h = 1$ za $x > 0$, i $u = 1$ u $x = t$ za $t > 0$. Ovi uslovi rezultuju uniformnim tokom, koji je podeljen u dve oblasti, sa diskontinuitetom u $X = X(t)$. Na osnovu Rankin-Igonoovih uslova (4.1.3) znamo da dubina fluida h^+ s desne strane udarnog talasa („šoka") zadovoljava sledeću jednačinu ($h^- = 1$, $u^- = 1$ i $u^+ = 0$)

$$h^{+3} - h^{+2} - \left(2F^2 + 1\right) h^+ + 1 = 0. \tag{4.1.4}$$

Ova jednačina ima tri rešenja kad $F \to \infty$, $h^+ = 0$ i $h^+ = \pm\sqrt{2}F$, ali samo $h^+ = \sqrt{2}F$ ima fizičku interpretaciju, pa znamo da je visina diskontinuiteta je $\sqrt{2}F$ a njegova dužina je $\frac{t}{\sqrt{2}F}$. Detaljan postupak rešavanja ove singularno perturbovane jednačine dat je u Dodatku 5.2.

Primer 2. Drugi problem koji ćemo razmotriti je Rimanov problem za dva fluidna toka, koja se kreću jedan prema drugom u $x \lesseqgtr 0$, i sudaraju se u $x = t = 0$. Posmatrajmo sad problem, kada dva tečna sloja kreću jedan prema drugom. Pretpostavimo da bezdimenzijska dubina i brzina imaju jedinične vrednosti. Na osnovu (4.1.3) za udarni talas u $x = \pm Vt$ znamo da je u intervalu $(-Vt, Vt)$ brzina jednaka nuli, a dubina opet ima vrednost $\sqrt{2}F$, kad $F \to \infty$. Pri tome je $V \sim \frac{1}{\sqrt{2}F}$.

4.2 Delta šok

Posmatrajmo sistem jednačina (4.1.1) i (4.1.2) u graničnom slučaju kada $F \to \infty$ i potražimo rešenje tako da $u(x,t)$ i $h(x,t)$ budu glatke funkcije izuzev u diskontinuitetu $X(t)$, gde se ponašaju kao *delta distribucija* i zadovoljen je uslov (4.1.3). U ovom slučaju sistem jednačina (4.1.1) i (4.1.2) se svodi na sledeći oblik

$$\begin{aligned} u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x &= 0, \\ h_t + (hu)_x &= 0, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

dok su početni uslovi dati u obliku

$$(u,h)(x,0) = \begin{cases} (u_l, h_l), & x < 0, \\ (u_d, h_d), & x > 0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Funkcije u_l i h_l predstavljaju početna stanja sistema (4.2.1) za $x < 0$, tj. levo od šoka. Analogno, u_d i h_d su početni uslovi istog sistema, ali za $x > 0$. $X(t)$ je nepoznate funkcije i predstavlja poziciju šoka.

Pretpostavimo sada da su u i h u diskontinuitetu $X(t)$ opisani *delta šokom*, odnosno da se ponašaju kao delta distribucije. $\delta(x - X(t))$ predstavlja Dirakovu delta distribuciju definisanu na sledeći način

$$\delta(x - X) = \begin{cases} \infty, & x = X \\ 0, & x \neq X. \end{cases}$$

Sistem jednačina (4.2.1) sa početnim uslovima (4.2.2) je *Rimanov problem.* Rešenje Rimanovog problema, uz pretpostavke da su u_l, u_d, h_l i h_d konstante, je prikazano u radu [?]. Na osnovu početnih brzina u_l i u_d Džozef je dobio tri rešenja. Ako je $u_l < u_d$, onda rešenje glasi

$$(u(x,t), h(x,t)) = \begin{cases} (u_l, h_l), & x < u_l t, \\ (\frac{x}{t}, 0), & u_l t < x < u_d t, \\ (u_d, h_d), & x > u_d t. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

U slučaju kada je $u_l = u_d = u_0$ važi

$$(u(x,t), h(x,t)) = \begin{cases} (u_0, h_l), & x < u_0 t, \\ (u_0, h_d), & x \geq u_0 t. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

I konačno, u trećem slučaju, kada je $u_l > u_d$, pojavljuje se delta distribucija

$$(u(x,t), h(x,t)) = \begin{cases} (u_l, h_l), & x < st, \\ \left(\frac{u_l+u_d}{2}, (u_l - u_d)\left(\frac{h_l+h_d}{2}\right) t\delta(x-st)\right), & x = st, \\ (u_d, h_d), & x > st, \end{cases} \tag{4.2.5}$$

gde je $s = dX/dt$ brzina šoka i možemo je odrediti na osnovu Renkin-Igonoovih uslova:

$$s = \frac{[\![\frac{1}{2}u^2]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{u_l + u_d}{2}. \tag{4.2.6}$$

Uvešćemo oznaku $h_s(t)$,

$$h_s(t) = (u_l - u_d)\left(\frac{h_l + h_d}{2}\right) t, \tag{4.2.7}$$

koji može se interpretirati kao masa fluida apsorbovanog u delta šok u trenutku t.

4.3 Diskontinuitet sa gubljenjem mase i količine kretanja

U fenomenima, kao što je sudar dve fluidne struje opisan u Primeru 2, stvara se jedan mlaz i strujanje fluida prestaje da bude jednodimenzijsko – javlja se komponenta brzine u pravcu $z-$ose. Ovo strujanje mora biti opisano potpunim sistemom Ojlerovih jednačina. U sistemu referencije vezanom za mlaz, odnosno njegovo podnožje (koren), strujanje je stacionarno. Tada je iz Ojlerovih jednačina moguće odrediti položaj mlaza $x_{sp}(t)$, njegov nagib β, širina mlaza h_{sp} i brzina fluida u pravcu mlaza U_{sp}

$$\frac{dx_{sp}}{dt} = \frac{u^+ + u^-}{2}, \tag{4.3.1}$$

$$h_{sp} = h^+ + h^-, \tag{4.3.2}$$

$$\cos\beta = \frac{h^- - h^+}{h^+ + h^-}, \tag{4.3.3}$$

$$U_{sp} = \frac{u^- - u^+}{2}. \tag{4.3.4}$$

Opisan model sudara dve fluidne struje, ako se posmatra u $x-$pravcu, sadrži gubitak mase, količine kretanja i energije zbog kretanja mlaza u z-pravcu. Ovu situaciju je moguće modelirati i pomoću jednačina plitke vode za $F \to \infty$, ako se u jednačinu $(4.2.1)_2$ doda „ponor" koji opisuje gubitak količine kretanja. Tada dobijamo jednačinu

$$h_t + (hu)_x = -M_{izg}(t)\delta(x - x_{sp}(t)), \tag{4.3.5}$$

gde je $x_{sp}(t)$ nepoznata funkcija koja određuje položaj mlaza, a $M_{izg}(t)$ je izgubljena količina kretanja u mlazu. Ako prethodnu jednačinu integralimo duž diskontinuiteta, dobijamo da važi

$$-M_{izg}(t) = [\![hu]\!] - [\![h]\!]\frac{dx_{sp}}{dt}. \tag{4.3.6}$$

Ako jednačini (4.3.6) dodamo još i jednačinu (4.3.1), dobićemo potpuno određen sistem. Tada korišćenjem jednačina (4.3.2)-(4.3.4) možemo izvesti sledeći identitet

$$M_{izg}(t) = U_{sp}h_{sp} \tag{4.3.7}$$

4.4 Primeri

U ovom odeljku na primerima ćemo ilustrovati rezultate koje su dobijene za superkritične tokove.

4.4.1 Simetričan sudar

Klasičan primer za simetričan sudar dve fluidne struje je naveden u Primeru 2. Dakle, i levi i desni sloj fluida su jedinične visine. Pretpostavimo da se fluidi sudaraju u početnom trenutku $t = 0$ u tački $X(0) = 0$. Brzina levo od $X(0)$ je jednaka 1, a desno od $X(0)$ je -1. Problem će biti rešavan na dva načina: najpre će biti primenjene odgovarajuće jednačine za delta šok (4.2.3)-(4.2.5), a potom ćemo ga analizirati korišćenjem jednačine sa ponorom (4.3.7), odnosno (4.3.1)-(4.3.4).

Znamo da $u_l = 1$ i $u_d = -1$, pa možemo zaključiti da treba da koristimo (4.2.5), jer važi da $u_l > u_d$. Na osnovu toga dobijamo za brzinu šoka iz (4.2.6)

$$s = \frac{u_l + u_d}{2} = 0,$$

pa dolazimo do sledeće diferencijalne jednačine za poziciju šoka

$$s = \frac{dX(t)}{dt} = 0.$$

Rešenje ove jednačine na osnovu početnog uslova $X(0) = 0$ je

$$X(t) = 0. \tag{4.4.1}$$

Korišćenjem jednačine (4.2.7), možemo da odredimo i masu:

$$h_s(t) = (u_l - u_d)\left(\frac{h_l + h_d}{2}\right) t = 2t. \tag{4.4.2}$$

Ako rezultate uvrsitimo u (4.2.5) dobijamo

$$(u(x,t), h(x,t)) = \begin{cases} (1,1), & x < 0, \\ (0, 2t), & x = 0, \\ (-1, 1), & x > 0, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Na osnovu drugog modela, jednačina (4.3.1) nam predviđa, kao i u prethodnom slučaju

$$x_{sp}(t) = 0. \tag{4.4.4}$$

Količina kretanja u mlazu, koja je jednaka izgubljenoj količini kretanja M_{izg}, na osnovu (4.3.2), (4.3.4) i (4.3.7) je

$$U_{sp}h_{sp} = 2. \tag{4.4.5}$$

Ovaj rezultat je u skladu sa (4.4.2), tj. dobija se da je priraštaj mase jednak $2t$.

4.4.2 Asimetričan sudar

U asimetričnom slučaju pretpostavićemo da je brzina fluidne struje sa leve strane $u_l = 2$ i ima jediničnu visinu, i sudara se sa fluidom jedinične dubine za $x > 0$ i $t = 0$, koji se nalazi u stanju mirovanja $u_d = 0$. I u ovom slučaju imamo da je $u_l > u_d$, pa je rešenje sistema (4.2.1) dato izrazom (4.2.5). Brzina šoka na osnovu (4.2.6) je različita od nule

$$s = \frac{u_l + u_d}{2} = 1.$$

Iz diferencijalne jednačine

$$\frac{dX(t)}{dt} = 1,$$

na osnovu početnog uslova da $X(0) = 0$ dobićemo poziciju šoka

$$X(t) = t. \tag{4.4.6}$$

Visinu šoka možemo da odredimo iz (4.2.7)

$$h_s(t) = (u_l - u_d)\left(\frac{h_l + h_d}{2}\right) t = 2t. \tag{4.4.7}$$

Ako rezultate uvrsitimo u (4.2.5) dobijamo

$$(u(x,t), h(x,t)) = \begin{cases} (2,1), & x < t, \\ (1,2t), & x = t, \\ (0,1), & x > t, \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Na osnovu modela sa gubljenjem mase iz uslova (4.3.1) imamo da

$$\frac{dx_{sp}(t)}{dt} = 1,$$

tj. na osnovu početnog uslova

$$x_{sp}(t) = t. \tag{4.4.9}$$

Izgubljena količina kretanja u mlazu na osnovu (4.3.2), (4.3.4) i (4.3.7) je

$$M_{izg} = 2. \tag{4.4.10}$$

Glava 5

Dodatak

5.1 Energijski uslov

Polazićemo od jednačine (3.3.4) tako što ćemo pomnožiti sa u:

$$u(hu)_t + u\left(hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)_x = 0. \tag{5.1.1}$$

Prvi sabirak iz prethodnog izraza movemo transformirati u sledeći oblik

$$\begin{aligned} u(hu)_t &= (hu^2)_t - huu_t \\ &= (hu^2)_t + u(huu_x + hh_x), \end{aligned}$$

gde smo koristili pravilo za izvod proizvoda i jednavinu (3.3.3). Za drugi sabirak važi

$$u\left(hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)_x = \left(hu^3 + \frac{1}{2}h^2u\right)_x - \left(hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)u_x.$$

Ako ove rezultate uvrstimo u jednačinu (5.1.1), posle kraćih transformacija dolazimo do sledećeg izraza

$$(hu^2)_t + \left(hu^3 + \frac{1}{2}h^2u\right)_x + huh_x - \frac{1}{2}h^2u_x = 0. \tag{5.1.2}$$

U nastavku pomnožiće se prva jednačina iz (3.3.1) sa h:

$$hh_t + h(hu)_x = 0. \tag{5.1.3}$$

Ako iskoristimo pravilo za izvod proizvoda i činjenicu da $\left(\frac{1}{2}h^2\right)_t = hh_t$, dobijamo

$$\left(\frac{1}{2}h^2\right)_t + (h^2u)_x - huh_x = 0. \tag{5.1.4}$$

Dalje, ako pomnožimo jednačinu (5.1.2) zatim saberemo sa jednačinom (5.1.4) dobijamo

$$\left(\frac{1}{2}hu^2 + \frac{1}{2}h^2\right)_t + \left(\frac{1}{2}hu^3 + \frac{5}{4}h^2u\right)_x - \frac{1}{2}huh_x - \frac{1}{4}h^2u_x = 0.$$

Ako sad iskoristimo činjenicu, da

$$\left(\frac{1}{4}h^2u\right)_x = \frac{1}{2}huh_x + \frac{1}{4}h^2u_x,$$

dolazimo do jednačine koja je zgodna za integraciju po x:

$$\frac{1}{2}\left(hu^2 + h^2\right)_t + \left(\frac{1}{2}hu^3 + h^2u\right)_x = 0. \tag{5.1.5}$$

Dalji postupak (integracija po x nad intervalom $[a, b]$) je identičan postupcima kojima je dobijen uslov (3.3.2) ili (3.3.5), pa konačno smo dobili

$$-\frac{1}{2}U\left[\!\left[hu^2 + h^2\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{1}{2}hu^3 + uh^2\right]\!\right] = 0.$$

5.2 Rešavanje singularno perturbovane jednačine za h^+

Za rešavanje jednačine (4.1.4) se koristi asimptotski metod. Ako podelimo jednačinu (4.1.4) sa F^2 i posmatramo slučaj kada $F \to \infty$, jednačina postaje singularno perturbovana sa malim parametrom $\varepsilon = \frac{1}{F}$ ($\varepsilon \to 0$ kad $F \to \infty$) i ima sledeći oblik

$$\varepsilon^2 {h^+}^3 - \varepsilon^2 {h^+}^2 - 2h^+ - \varepsilon^2 h^+ + \varepsilon^2 = 0. \tag{5.2.1}$$

Prethodna jednačina u slučaju kada $\varepsilon \to 0$ ima samo jedno rešenje, $h^+ = 0$. Ostala rešenja se dobijaju skaliranjem promenljive h^+

$$h^+ = \frac{H}{\varepsilon}, \tag{5.2.2}$$

$\varepsilon \neq 0$. Posle uvođenje smene i mmoženje sa ε, skalirana jednačina glasi

$$H^3 - \varepsilon H^2 - 2H - \varepsilon^2 H + \varepsilon^3 = 0. \tag{5.2.3}$$

Predstavićemo rešenje u vidu formalnog asimptotskog razvoja po ε

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots \tag{5.2.4}$$

Ako ovo uvrstimo u jednačinu (5.2.3) i izjednačimo sa nulom koeficijente uz odgovarajuće stepene ε, dobija se sistem jednačina koji se rešava rekurzijom

$$\begin{aligned} H_0^3 - 2H_0 &= 0, \\ 3H_0^2 H_1 - H_0^2 - 2H_1 &= 0, \\ 3H_0^2 H_2 - 2H_2 + 3H_0 H_1^2 - 2H_0 H_1 - H_0 &= 0, \\ H_1^3 - H_1^2 + 3H_0^2 H_3 - 2H_3 + 63H_0 H_1 H_2 - 2H_0 H_2 - H_1 + 1 &= 0 \dots \end{aligned}$$

Na osnovu rešenja ovog sistema i (5.2.4) dobijamo sledeća tri rešenja

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\varepsilon^3}{2} \dots \\
H &= -\sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{5\varepsilon^2}{8\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon^3}{4} \dots \\
H &= \sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{5\varepsilon^2}{8\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon^3}{4} \dots
\end{aligned}
$$

Ako rešenja zapišemo u originalnim promenljivim, za dovoljno veliko F dobijamo

$$
h^+ = 0, \qquad h^+ = -\sqrt{2}F \quad \text{ili} \quad h^+ = \sqrt{2}F. \tag{5.2.5}
$$

Zaključak

U ovom radu je dat pregled nekih problema prostiranja talasa na vodi. U prvom delu su izvedene osnovne jednačine koje modeliraju ovaj proces, analizirani su granični uslovi i izvršeno je njihovo bezdimenzionisanje. U drugom delu rada su analizirani linearni problemi prostiranja talasa promenljive dubine, gravitacionih talasa i rubnih talasa. Treći deo sadrži analizu nelinearnih talasa velikih talasnih dužina i nelinearnih talasa promenljive dubine. Pored pregleda karakterističnih metoda rešavanja, proučena su i prekidna rešenja koja opisuju hidrauličke skokove.

Četvrti deo rada je posvećen savremenim problemima koji se sreću u analizi jednačina plitke vode. Naime, kada bezdimenzionalni parametar, Frudov broj, ima veoma velike vrednosti, $F \to \infty$, jednačine plitke vode se svode na „degenerisani" oblik koji dopušta egzistenciju neklasičnih rešenja – delta šokova – koja sadrže delta funkciju. Pored toga, ovaj model na adekvatan način može obuhvatiti i diskontinuitete sa gubljenjem mase i količine kretanja. Ova analiza je poslužila za proučavanje simetričnih i asimetričnih sudara u superkritičnim tokovima.

Analiza sprovedena u ovom radu pokazala je da problemi prostiranja talasa na vodi, iako imaju dugu istoriju, i dalje predstavljaju izazov za istraživače. Od linearnih problema, preko „standardnih" nelinearnih problema sa prekidnim rešenjima, stiglo se u savremenim istraživanjima do proučavanja neklasčnih rešenja sa delta šokovima. To pokazuje aktuelnost ovih problema i nagoveštava da će i dalje predstavljati predmet aktivnih naučnih istraživanja.

Literatura

[1] G.K. Batchelor (2000), *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.

[2] J. Billingham, A.C. King (2000), *Wave Motion*, Cambridge University Press.

[3] R.S. Johnson (1997), *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge University Press.

[4] C.M. Edwards, S.D. Howison, H. Ockendon, J.R. Ockendon (2008), Non-classical shallow water flows, *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 73, pp. 137–157.

[5] H. Kalisch, D. Mitrović (2012), Singular solutions for the shallow-water equations, *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 77, pp. 340–350.

[6] F. Bowman (1958), *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications.

[7] L.S. Evans (2010), *Partial Differential Equations, 2nd Ed.*, American Mathematical Society

[8] G.B. Whitham (1974), *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons.

Biografija

Bodoči Endre je rođen 8. Juna 1990. godine u Kikindi. Osnovnu školu „Petefi Šandor" u Tobi i Novoj Crnji završio je 2005. godine kao dobitnik Vukove diplome. Iste godine upisuje matematički smer u Gimnaziji za talentovane učenike „Boljai" u Senti, koju završava 2009. godine sa oličnim uspehom. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet, smer Primenjena matematika, modul Tehnomatematika. 2013. godine završava osnovne studije i upiseje master studije na Prirodno-matematički fakultet. Na master studijama položio je sve ispite predviđene planom i programom, čime je stekao uslov za odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materija
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Bodoči Endre
AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov
MN

Naslov rada: Matematički principi talasa na vodi
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2017.
GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada:
(broj poglavlja/strana/lit citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Vodeni talas, Jednačina kontinuiteta, Ojlerova jednačina, Jednačine „ plitke vode ", Hidraulički skok, Rankin - Igonoovi uslovi, Superkritični tok, Delta šok
PO

UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
CU

Važna napomena:
VN

Izvod: Rad je posvećen analizi matematičkih aspekata talasa na vodi. Cilj rada je da se jednačine koje opisuju talase na vodi stave u odgovarajući matematički kontekst i prikaže njihova primena na konkretne linearne i nelinearne probleme prostiranja talasa. Prvi deo obuhvata matematičku formulaciju osnovnih fizičkih zakona za neviskozne fluide. Formulisani su zakon održanja mase i jednačina kretanja (Ojlerova jednačina) u integralnom i diferencijalnom obliku. Uz osnovne fizičke zakone formulisani su i odgovarajući granični uslovi za probleme prostiranja talasa na vodi. Matematički model u vidu graničnog problema za sistem PDJ je sveden na bezdimenzijski oblik, odnosno skaliran. Na osnovu jednačina izvedenih u prvom delu rada, u drugom delu su analizirani neki konkretni problemi prostiranja talasa na vodi, i to: (1) prostiranje talasa na vodi u oblasti promenljive dubine; ova analiza se zasniva na linearizovanim jednačinama „plitke vode" i obuhvata gravitacione talase u oblasti konstantnog nagiba; (2) nelinearni talasi velike talasne dužine; ovi problemi su rešavani primenom metoda karaktereistika i metoda zamene promenljivih; (3) hidraulički skok; (4) nelinearni talasi u oblasti sa konstantnim nagibom. Najzad, načinjen je osvrt na savremene rezultate koji se odnose na superkritična strujanja i delta šokove.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 2017.
DP

Datum odbrane: 2017.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Milana Čolić, redovini profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Srboljub Simić, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Marko Nedeljkov, redovini profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author:Bodoči Endre
AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.
MN

Title: Mathematical aspects of water waves
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017.
PY

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description:
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Partial Differential Equations
SD

Subject/Key words: Water wave, Continuity equation, Euler's equation, „Shallow water" equations, Hydraulic jump, Rankine-Hugoniot conditions, Hypercritical flows, Delta shock
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The subject of this thesis is to analyze the mathematical aspects of water waves. The goal is to introduce the wave equations of propagation in water and then to present their application on linear and nonlinear problems. Chapter 1 contains the mathematical formulation of the physical laws for nonviscous fluid: equatuin of the mass conservation and Euler's equation, along with the corresponding boundary conditions that are needed to describe water waves. In addition, there is given the nondimensionalisation and scaling of the governing equations and boundary conditions. In Chapter 2 and 3 we analyze some classical problems in linear and nonlinear water-wave theory: (1) wave propagation over variable depth (linearised gravity waves and edge waves); (2) nonlinear long waves (application of the method of characteristics and the hodograph transformation); (3) hydraulic jump. Finally, the Chapter 4, contains some modern results which are related to the supercritical flows and delta shocks.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 2017.
ASB

Defended: 2017.
DE

Thesis defend board:
DB

President: Milana Čolić, PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Srboljub Simić, PhD, full professor, Faculty of Tehincal Science, University of Novi Sad

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad