UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Dragana Vrućinić

FAMILIJA POSTUPAKA ŠESTOG REDA SLOBODNA OD IZVODA

Master rad

Novi Sad 2014.

Sadržaj

Predgovor

Numerička analiza je značajna oblast matematike koja je pronašla primenu u raznim naukama. Numeričko rešavanje jednačina je deo numeričke analize koji se bavi pronalaženjem algoritama, analizom njihove konvergencije i implementacijom algoritama za rešavanje jednačina. Kako za veliki broj jednačina nije moguće odrediti tačno rešenje, numeričko rešavanje jednačina je posebno značajno.

U master radu posmatramo teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake šestog reda konvergencije slobodne od drugog izvoda za pronalaženje jednostrukih korena nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a, b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f^{'}(\alpha) \neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, dajemo modifikacije čiji je red povišen na šest. Po ugledu na njih, dajemo nove primere postupaka šestog reda konvergencije.

Master rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu dajemo oznake, definicije i teoreme koje koristimo u daljem radu. Drugi deo rada sadrži teoreme i algoritme koji se odnose na iterativne postupke šestog reda slobodne od izvoda reda višeg od jedan. U trećem delu rada dajemo, kao originalan doprinos, modifikacije nekih poznatih postupaka i primere novih postupaka bez upotrebe drugog i viših izvoda. Pod određenim pretpostavkama dokazujemo konvergenciju šestog reda i određujemo asimptotske konstante greške za posmatrane postupke. U četvrtom delu rada prikazaćemo numeričke eksperimente sa postupcima koje smo opisali u drugom i trećem poglavlju.

Za određivanje izvoda funkcija, koraka iterativnih postupaka, sređivanje dobijenih izraza i njihovo pojednostavljivanje koristili smo *Mathematica 8*.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Đorđu Hercegu, kao i članovima komisije dr Dragoslavu Hercegu i dr Heleni Zarin, a posebnu zahvalnost na pomoći, korisnim savetima i sugestijama prilikom pisanja rada dugujem profesoru dr Dragoslavu Hercegu. Bila mi je čast i zadovoljstvo da sarađujem sa njim.

Novi Sad, jun 2014. *Dragana Vrućinić*

1. Uvod

Mnogobrojni su zadaci matematike i njenih primena koji se svode na rešavanje jednačina ili sistema jednačina. Numeričko rešavanje jednačina je deo numeričke analize koji se bavi pronalaženjem algoritama, analizom njihove konvergencije i implementacijom algoritama za rešavanje jednačina. U ovom radu bavimo se rešavanjem nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom oblika

$$f(x) = 0$$

gde je *f* funkcija realne promenljive.

1.1 Oznake

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\{x_k\}$	niz brojeva $x_0, x_1, \ldots$
$D = [a, b]$	interval kojem pripada niz $\{x_k\}$
$C^k[a, b]$	skup k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$
γ	Lipšicova konstanta
$Lip_\gamma[a, b]$	skup funkcija koje na intervalu $[a, b]$ zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom γ
α	rešenje jednačine $f(x) = 0$
$c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}$	asimptotska konstanta greške
$e_n = x_n - \alpha$	greška u n-toj iteraciji
$e_{n+1} = c e_n^p + O(e_n^{p+1})$	jednačina greške
$c = \frac{e_{n+1}}{e_n^p}$	asimptotska konstanta greške
p	red konvergencije postupka

1.2 Neke definicije i teoreme

Definicija 1. *Svaki broj* $\alpha \in \mathbb{R}$ *za koji važi* $f(\alpha) = 0$ *naziva se rešenje jednačine* $f(x) = 0$, *odnosno nula funkcije f.*

Definicija 2. [4] *Rešenje jednačine* α *je višestrukosti* $m \in \mathbb{N}_0$ *ako je moguća faktorizacija* $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, *pri čemu je funkcija* $g(x)$ *ograničena u* α *Rešenje je prosto (jednostruko) ako je* $m = 1$, *a višestruko ako je* $m > 1$.

Osnovna ideja kod većine numeričkih postupaka sastoji se u određivanju početne aproksimacije x_0 i izboru iteartivnog pravila pomoću kog se, polazeći od x_0, generiše niz aproksimacija $\{x_k\}$ koji konvergira ka rešenju α posmatrane jednačine $f(x) = 0$, odnosno važi da je

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha.$$

Da bi se odredila početna aproksimacija, potrebno je lokalizovati rešenja jednačine. To znači da je potrebno odrediti skup koji sadrži jedno ili više rešenja posmatrane jednačine. Lokalizacija rešenja, odnosno određivanje skupa rešenja, može se sprovesti grafičkim putem ili tabeliranjem. Prilikom izbora iterativnog pravila važan kriterijum je brzina konvergencije, koja se meri redom konvergencije. Pošto se u praksi izračunava samo konačan broj aproksimacija, potrebno je oceniti i grešku aproksimacije.

Definicija 3. *Neka su* $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$ $n+1$ *aproksimacija rešenja* α. *Ako je* x_{i+1} *jedinstveno određena aproksimacija dobijena pomoću* $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$ *i funkcije* φ, *tj.*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}),$$

onda φ *nazivamo iterativnom funkcijom.*

Iterativne funkcije klasifikuju se na osnovu informacije koju zahtevaju. Tako imamo sledeće klase iterativnih funkcija.

Definicija 4. *Ako je*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i),$$

onda se funkcija φ *naziva jednotačkasta iterativna funkcija, a posmatrani postupak jednotačkasti iterativni postupak.*

Definicija 5. *Neka je* $\varphi: D \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Broj* $\alpha \in D$ *za koji važi* $\alpha = \varphi(\alpha)$ *je rešenje jednačine* $x = \varphi(x)$ *i naziva se nepokretna tačka funkcije* φ.

Neka je $x_0 \in D$ proizvoljan broj. Formirajmo niz brojeva prema sledećem pravilu

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1 \dots,$$

pri čemu se zahteva da važi $\varphi(x_k) \in D$, zato što je funkcija φ definisana na tom intervalu. Niz koji dobijamo na taj način naziva se niz sukcesivnih aproksimacija ili iterativni niz, a postupak koji primenjujemo naziva se iterativni postupak.

Ako je pored uslova $\varphi(x_k) \in D$ funkcija φ neprekidna na tom intervalu i generiše konvergentan niz $\{x_k\}$, tj. postoji

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha \in D,$$

tada je

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{k-1}) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}) = \varphi(\alpha)$$

i iterativni postupak je konvergentan.

Definicija 6. *Funkcija φ zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D ako postoji konstanta γ takva da za svako x,y iz intervala D važi*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

Konstanta γ naziva se Lipšicova konstanta i, ukoliko je zadovoljeno da je $\gamma < 1$, funkcija φ se naziva kontrakcija.

Definicija 7. *Neka je $lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$. Ako postoje konstante $p > 0$, $c \geq 0$ i ceo broj $K \geq 0$ takav da za $k \geq K$ važi*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq c|x_k - \alpha|^p,$$

tada niz $x_0, x_1, \dots$ konvergira ka α sa redom bar p. Pritom, red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog iterativnim postupkom.

Red konvergencije služi za upoređivanje brzine konvergencije postupaka.

Definicija 8. *Iterativni postupak sa redom konvergencije p_1 brži je od iterativnog postupka sa redom konvergencije p_2 ako važi da je $p_1 > p_2$.*

Definicija 9. *Jednačina greške postupka definisana je sa*

$$e_{n+1} = ce_n^p + O\left(e_n^{p+1}\right),$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$ greška u n-toj iteraciji, c asimptotska konstanta greške i p red konvergencije posmatranog postupka.

Sledi nekoliko teorema koje se odnose na opšti iterativni postupak i jednačinu $x = \varphi(x)$, kao i teorema o redu konvergencije jednokoračnog postupka i teorema o Tejlorovom razvoju koji smo često koristili u radu.

Teorema 1. [4] *Jednačine $f(x) = 0$ i $x = \varphi(x)$ ekvivalentne su na intervalu $[a, b]$ sa jednačinom $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$, gde je $g(x) \neq 0$ za $x \in [a, b]$.*

Teorema 2. *Funkcija koja zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D neprekidna je na tom intervalu. Obrnuto ne mora da važi.*

Teorema 3. [4] *Neka je $\varphi: [a, b] \to [a, b]$ kontrakcija. Tada iterativni niz određen sa*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0,1 \dots$$

sa proizvoljnim $x_0 \in [a, b]$ konvergira ka jedinstvevnom rešenju $\alpha \in [a, b]$ jednačine $x = \varphi(x)$ i pritom važi

$$|x_k-\alpha| \le \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k-x_{k-1}| \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1-x_0|, k=1,2\ldots,$$

gde je γ Lipšicova konstanta kontrakcije funkcije φ. Ovako definisane vrednosti $\frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k -$ $xk-1$ *i* $\gamma k1-\gamma x1-x0$ *nazivaju se aposteriorna i apriorna ocena greške.*

Teorema 4. [21] *Red konvergencije jednokoračnog postupka*

$$x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1\ldots$$

pozitivan je i ceo broj. Ovaj postupak konvergira redom p ako i samo ako važi da je

$$\alpha=\varphi(\alpha),\ \varphi^j(\alpha)=0, j=1,2,\ldots,p-1, \varphi^p(\alpha)\neq 0.$$

Definicija 10. *Asimptotska konstanta greške određena je sa* $\frac{\varphi^p(\alpha)}{p!}$, *gde je* p *red konvergencije postupka, i izražava se preko konstanti* $c_k=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!f'(\alpha)}$.

Za sve postupke koje posmatramo u ovom radu red konvergencije i asimptotske konstante greške određujemo na osnovu teoreme 4 i prethodno navedene definicije.

Teorema 5. *(Tejlorova teorema) Neka je funkcija* f *neprekidna na zatvorenom intervalu* $[a,b]$. *Neka je* n *pozitivan ceo broj takav da su svi izvodi funkcije* f *do reda* n *neprekidni na* $[a,b]$ *i postoji konačan izvod funkcije* f *reda* $(n+1)$ *na* $[a,b]$. *Ako su* a *i* x *iz intervala* (a,b), *tada postoji tačka* ξ *takva da važi Tejlorova formula*

$$f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^3}{3!}f^{(3)}(\alpha)+\cdots$$
$$+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

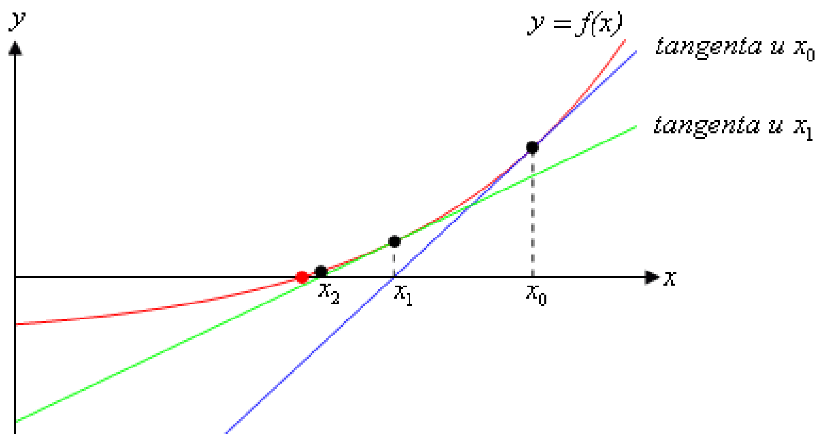
1.3 Njutnov postupak

Njutnov (ili Njutn-Rafsonov) postupak je široko primenjen i jedan od najpopularnijih postupaka za rešavanje jednačina oblika $f(x)=0$. Velika prednost ovog postupka je to što ne zahteva poseban oblik jednačine. Algoritam radi jednako dobro za veliki broj tipova jednačina, na primer: polinomnih, racionalnih, transcendentnih, trigonometrijskih, itd. Druga važna odlika Njutnovog postupka je to što je pogodan za računarsku upotrebu. Ovo privlači veliki broj programera da prilikom kreiranja računskih aplikacija programiraju i Njutnov algoritam u alate programa.

U osnovi Njutnovog postupka je aproksimacija posmatrane funkcije f linearnom funkcijom u blizini rešenja. Pretpostavimo da želimo približno da rešimo jednačinu $f(x)=0$. Neka je x_0 početna aproksimacija traženog rešenja. Za linearnu funkciju uzima se tangenta na krivu $f(x)$ u tački $(x_0,f(x_0))$. Jednačina tangente u toj tački je

$$y=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0).$$

Pogledajmo kako to izgleda na slici 1.



Slika 1.

Posmatrana funkcija predstavljena je crvenom linijom. Plava linija je tangenta funkcije u tački x_0. Primetimo da tangenta preseca x-osu u tački koja je bliža tački rešenja u odnosu na x_0. Neka je taj presek tangente u x_0 i x-ose x_1 i neka je to nova aproksimacija traženog rešenja.

Ako je $f'(x_0) \neq 0$, aproksimaciju x_1 dobijamo kao rešenje jednačine $y(x) = 0$, odnosno

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nastavljamo postupak samo sa dobijenom boljom aproksimacijom. Uzimamo tangentu na krivu $f(x)$ u tački $(x_1, f(x_1))$ (što je na slici prikazano zelenom linijom) i dobijamo novu, bolju aproksimaciju rešenja x_2. Ponavljanjem postupka dobijamo niz brojeva koji su veoma blizu traženog rešenja.

Analogno, ako je x_k k-ta aproksimacija rešenja posmatrane jednačine, naredne aproksimacije dobijaju se po iterativnom pravilu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

za $k \geq 0$, što predstavlja Njutnov postupak.

Da bi se Njutnov postupak mogao sprovesti, potrebno je da je f' neprekidna funkcija u svim tačkama posmatranog intervala i da važi $f'(x) \neq 0$, za svako x iz tog intervala. U suprotnom se postupak zaustavlja.

Njutnov postupak može da se posmatra i u sledećem obliku

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

gde je

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Teorema 6. [4] *(O lokalnoj konvergenciji Njutnovog postupka) Neka su konstante* γ *i* $m > 0$ *takve da za svako* $x, y \in (a, b)$ *važi*

$$|f'(y) - f'(x)| \leq \gamma |y - x| \text{ i } |f'(x)| \geq m.$$

Ako jednačina $f(x) = 0$ *ima rešenje* $\alpha \in (a, b)$, *onda za* x_0 *postoji takvo* $\delta > 0$ *za koje važi* $|x_0 - \alpha| \leq \delta$ *i niz* $x_0, x_1, \ldots$ *definisan Njutnovim iterativnim postupkom postoji i konvergira ka* α. *Pri tome važi*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_k - \alpha|^2, k = 0,1, \ldots$$

Na osnovu definicije o redu konvergencije iterativnog postupka i navedene teoreme sledi da Njutnov postupak konvergira barem kvadratno.

Teorema 7. [4] *(O globalnoj konvergenciji Njutnovog postupka) Neka funkcija* f *pripada skupu* $C^2[a, b]$. *Ako* f' *i* f'' *ne menjanju znak na* $[a, b]$ *i* $f(a)f(b) < 0$, *onda za svako* $x_0 \in [a, b]$ *za koje važi*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

Njutnov postupak konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in (a, b)$ *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi sledeće*

$x \in (a, b)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$	$x_k > x_{k+1}$	$x_k < x_{k+1}$
$f''(x) < 0$	$x_k < x_{k+1}$	$x_k > x_{k+1}$

2. Postupci šestog reda konvergencije

U literaturi se često mogu sresti postupci šestog reda konvergencije. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, navodimo samo neke ([1], [2], [3]) teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake šestog reda konvergencije za pronalaženje jednostrukih korena nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a, b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f^{'}(\alpha) \neq 0$.

2.1 Familije postupaka šestog reda konvergencije

Postupci koje posmatramo mogu da se zapišu u sledećem obliku

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}h(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}H(s),$$

gde je

$$s = \frac{f^{'}(y_n)}{f^{'}(x_n)} = \frac{f^{'}\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)}{f^{'}(x_n)},$$

dok su funkcije h i H definisane posebno za svaki postupak.

U posmatranom postupku

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

polazimo od aproksimacije x_n i novu aproksimaciju x_{n+1} računamo sa

$$F(x_n) = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)} h\left(\frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}\right)$$
$$- \frac{f\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)} h\left(\frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}\right)\right)}{f'(x_n)} H\left(\frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}\right).$$

Red konvergencije postupka $x_{n+1} = F(x_n)$ određujemo na osnovu teoreme 4. Da bismo ga odredili, potrebne su nam vrednosti izvoda funkcije F. Možemo ih izračunati i pomoću programskog paketa *Mathematica*. Iz praktičnih razloga, posmatraćemo vrednosti izvoda samo za $x = \alpha$. Posmatranjem dobijenih izraza odredićemo koje osobine funkcije h i H treba da zadovoljavaju da bi posmatrani postupak oblika $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0,1,2 \ldots$ imao red konvergencije šest.

Za računanje izvoda funkcije F potrebno je da izračunamo vrednosti izvoda funkcije $s(x) = \frac{f'\left(x - \frac{2}{3}\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)}$. Direktnim računanjem ne možemo izračunati $s(\alpha)$, jer imamo izraz $s(\alpha) = \frac{0}{0}$. Međutim, ovaj problem se može rešiti pomoću Tejlorovog razvoja funkcije s.

Teorema 8. *Neka je $f: I \to \mathbb{R}$ realna funkcija definisana na I, gde je I okolina prostog korena α funkcije f i neka je funkcija f neprekidno diferencijabilna sve do šestog reda na I. Tada je postupak*

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} h(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} H(s),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)},$$

šestog reda konvergencije, ako važi da je $h(1) = \frac{1}{3}$, $h'(1) = -\frac{3}{4}$, $h''(1) = \frac{9}{4}$, $H(1) = 1$, $H'(1) = -\frac{3}{2}$. *Asimptotska konstanta greške je*

$$-\frac{1}{729}c_2\left(9c_3+c_2^2(-54+8H'(1))\right)\left(-81c_2c_3+9c_4+c_2^3\left(-405+32h^{(3)}(1)\right)\right).$$

Ako je još $h^{(3)}(1)=-\frac{405}{32}$ *i* $H''(1)=\frac{27}{4}$, *onda je asimptotska konstanta greške*

$$c_2c_3^2-\frac{c_3c_4}{9}.$$

Dokaz. Na osnovu Tejlorovog razvoja, za neko τ između x i $x-\frac{2}{3}\frac{f(x)}{f'(x)}$ dobija se

$$s(x)=1-\frac{2f(x)f''(x)}{3f'(x)^2}+\frac{2f(x)^2f^{(3)}(x)}{9f'(x)^3}-\frac{4f(x)^3f^{(4)}(x)}{81f'(x)^4}+\frac{2f(\tau)^4f^{(5)}(x)}{243f'(x)^5}.$$

Sada sledi

$$s'(\alpha)=-\frac{4c_2}{3}$$

$$s''(\alpha)=8c_2^2-\frac{16c_3}{3}$$

$$s^{(3)}(\alpha)=-64c_2^3+80c_2c_3-\frac{208c_4}{9}$$

$$s^{(4)}(\alpha)=\frac{32}{27}(540c_2^4-999c_2^2c_3+216c_3^2+363c_2c_4-100c_5)$$

$$s^{(5)}(\alpha)=-\frac{160}{9}(432c_2^5-1062c_2^3c_3+440c_2^2c_4-189c_3c_4+c_2(495c_3^2-151c_5)+35c_6)$$

$$s^{(6)}(\alpha)=\frac{640}{9}(1512c_2^6+4644c_2^4c_3-351c_3^3+2106c_2^3c_4+183c_4^2+14c_2^2(243c_3^2-59c_5)+349c_3c_5+c_2(-1926c_3c_4+216c_6)-21c_7).$$

Na osnovu toga dobijamo

$$F(\alpha)=\alpha,\ F'(\alpha)=\frac{1}{3}\left(-1+3h(1)\right)\left(-1+H(1)\right).$$

Da bismo dobili $F'(\alpha)=0$, treba da važi da je $h(1)=\frac{1}{3}$ ili $H(1)=1$. Posmatraćemo prvi izbor uslova, odnosno $h(1)=\frac{1}{3}$. Kada iskoristimo taj uslov, dobijamo

$$F''(\alpha)=-\frac{2}{3}c_2\left(-1+H(1)\right)\left(3+4h'(1)\right).$$

Iz uslova $h'(1)=-\frac{3}{4}$ sledi $F''(\alpha)=0$ i

$$F^{(3)}(\alpha)=\frac{4}{3}c_2^2\left(-1+H(1)\right)\left(-9+4h''(1)\right).$$

Dalje, sa $h''(1)=\frac{9}{4}$ dobijamo da je $F^{(3)}(\alpha)=0$ i

$$F^{(4)}(\alpha) = -\frac{8}{27}\big(-1 + H(1)\big)\left(-81c_2c_3 + 9c_4 + c_2^3\left(-405 + 32h^{(3)}(1)\right)\right).$$

Sada iz $H(1) = 1$ dobijamo da je $F^{(4)}(\alpha) = 0$ i

$$F^{(5)}(\alpha) = \frac{80}{81}c_2\big(3 + 2H'(1)\big)\left(-81c_2c_3 + 9c_4 + c_2^3\left(-405 + 32h^{(3)}(1)\right)\right).$$

Dalje iz $H'(1) = -\frac{3}{2}$ sledi $F^{(5)}(\alpha) = 0$ i

$$F^{(6)}(\alpha) = -\frac{80}{81}c_2(9c_3 + c_2^2(-54 + 8H''(1)))\left(-81c_2c_3 + 9c_4 + c_2^3\left(-405 + 32h^{(3)}(1)\right)\right).$$

Uz dodatne uslove $h^{(3)}(1) = -\frac{405}{32}$ i $H''(1) = -\frac{27}{4}$ dobijamo $F^{(6)}(\alpha) = 0$ i

$$F^{(6)}(\alpha) = 720\left(c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}\right).$$

Na sličan način, drugi izbor uslova $H(1) = 1$ koji smo mogli posmatrati da bi bilo zadovoljeno $F'(\alpha) = 0$, daje iste rezultate.

Konačno, uz uslove

$$h(1) = \frac{1}{3}, h'(1) = -\frac{3}{4}, h''(1) = \frac{9}{4}, h^{(3)}(1) = -\frac{405}{32}, H(1) = 1, H'(1) = -\frac{3}{2}, H''(1) = \frac{27}{4},$$

posmatrani postupak konvergira šestim redom, a asimptotska konstanta greške data je sa

$$\frac{F^{(6)}(\alpha)}{720} = c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}.$$

I time je dokaz teoreme završen. ■

2.1.1 Kou&Li postupak

Jaratov postupak četvrtog reda konvergencije definisan je sa

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 - \frac{3}{2}\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$.

Predstavljamo varijantu Jaratovog postupka [1], koja u osnovi ima kompoziciju Jaratovog i Njutnovog postupka. Videćemo da je konvergencija postupka poboljšana sa četiri na šest.

Posmatramo sledeću šemu

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$

$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$.

Ovaj iterativni postupak sastoji se iz koraka Jaratovog postupka za izračunavanje z_n pomoću x_n i koraka Njutnovog postupka za izračunavanje x_{n+1} pomoću prethodno dobijene tačke z_n. Međutim, ovaj postupak ne zahteva prvi izvod u tački z_n, već aproksimaciju izvoda. Da bismo aproksimirali $f'(z_n)$, koristimo linearnu aproksimaciju u tačakama $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$, pa imamo

$$f'(x) \approx \frac{x - x_n}{y_n - x_n} f'(y_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n).$$

Na osnovu toga je

$$f'(z_n) \approx \frac{z_n - x_n}{y_n - x_n} f'(y_n) + \frac{z_n - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) = \frac{z_n - x_n}{y_n - x_n} f'(y_n) + \left(1 - \frac{z_n - x_n}{y_n - x_n}\right) f'(x_n).$$

Primetimo i da je

$$\frac{z_n - x_n}{y_n - x_n} = \frac{3}{2} J_f(x_n).$$

Dobijamo

$$f'(z_n) \approx \frac{3}{2} J_f(x_n) f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2} J_f(x_n)\right) f'(x_n).$$

Konačno, novi postupak koji posmatramo je

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$
$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2} J_f(x_n) f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2} J_f(x_n)\right) f'(x_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$.

Teorema koja sledi odnosi se na red konvergencije posmatranog postupka.

Teorema 9. [1] *Neka funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu D ima prost koren $\alpha \in D$. Ako je $f(x)$ dovoljno glatka u okolini α, tada postupak definisan sa*

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$
$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$, *konvergira redom šest.*

Dokaz. Neka je α prosta nula funkcije *f*. Neka je $e_n = x_n - \alpha$. Koristeći Tejlorov razvoj u okolini $x_n = \alpha$ i uzimajući u obzir da je $f(\alpha) = 0$, dobija se

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)],$$
$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)],$$

gde je $c_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \ldots$

Dalje se iz prethodna dva izraza dobija

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)]}{f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)]}$$
$$= e_n - c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (7c_2c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Uvrštavanjem dobijenog izraza u izraz za izračunavanje y_n i uzimajući u obzir da je $e_n = x_n - \alpha$, imamo

$$y_n - \alpha = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \alpha$$
$$= \frac{1}{3}e_n + \frac{2}{3}[c_2e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 - (7c_2c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)].$$

Razvojem $f'(y_n)$ u okolini α, imamo

$$f'(y_n) = f'(\alpha)\left[1 + \frac{2}{3}c_2e_n + \frac{1}{3}(4c_2^2 + c_3)e_n^2 - \left(\frac{8}{3}c_2^3 - 4c_2c_3 - \frac{4}{27}c_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right].$$

Dalje je

$$3f'(y_n) + f'(x_n)$$
$$= 4f'(\alpha)\left[1 + c_2e_n + (c_2^2 + c_3)e_n^2 - \left(2c_2^3 - 3c_2c_3 - \frac{10}{9}c_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right],$$
$$6f'(y_n) - 2f'(x_n) = 4f'(\alpha)\left[1 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^2 - \left(4c_2^3 - 6c_2c_3 + \frac{16}{9}c_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right].$$

Deljenjem prethodna dva izraza dobija se

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)} = 1 + c_2 e_n - (c_2^2 - 2c_3)e_n^2 - 2\left(c_2c_3 - \frac{13}{9}c_4\right)e_n^3 + O(e_n^4).$$

Dalje je

$$J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - \left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Koristeći da je $e_n = x_n - \alpha$, imamo

$$z_n - \alpha = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Razvojem $f(z_n)$ u okolini α dobija se

$$f(z_n) = f'(\alpha)[(z_n - \alpha) + O((z_n - \alpha)^2)].$$

Dalje računamo

$$\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n) = f'(\alpha)\big(1 - c_3e_n^2 + O(e_n^3)\big).$$

Recipročna vrednost dobijenog izraza je

$$\frac{1}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)} = \frac{1}{f'(\alpha)\big(1 - c_3e_n^2 + O(e_n^3)\big)}.$$

Konačno dobijamo grešku jednačine

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= z_n - \alpha - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)} \\
&= z_n - \alpha - [(z_n - \alpha) + c_3e_n^2(z_n - \alpha) + O(e_n^7)] = -c_3e_n^2(z_n - \alpha) + O(e_n^7) \\
&= -c_3\left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^6 + O(e_n^7).
\end{aligned}$$

Ovim je pokazano da posmatrani postupak konvergira redom šest. ■

Primetimo da posmatrani postupak možemo da zapišemo u sledećem obliku

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)},$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s + 1}{6s - 2},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{12s - 4}{9s^2 + 6s - 7},$$

čime se postupak uklapa u našu šemu za

$$h(s) = \frac{3s + 1}{6s - 2},$$

$$H(s) = \frac{12s - 4}{9s^2 + 6s - 7}.$$

2.1.2 Chun postupak

Predstavljamo još jednu varijantu Jaratovog postupka četvrtog reda za rešavanje nelinearnih jednačina [2]. Videćemo da je red konvergencije svakog postupka u ovoj familiji poboljšan sa četiri na šest.

Već je rečeno da je Jaratov postupak četvrtog reda konvergencije definisan sa

$$x_{n+1} = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

gde je

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}$$

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}.$$

Osim toga, videli smo da se iz sledeća dva koraka

$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

u kombinaciji sa linearnom interpolacijom u tačkama $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$

$$f'(x) \approx \frac{x - x_n}{y_n - x_n}f'(y_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n}f'(x_n)$$

dobija aproksimacija

$$f'(z_n) \approx \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)$$

i poboljšanje Jaratovog postupka, koji je sada šestog reda konvergencije

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)},$$

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ i $z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Posmatramo aproksimaciju

$$f'(x) \approx h(x),$$

gde je h definisano sa

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

i pretpostavimo se da se h slaže sa f' u tačkama $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$. Pošto tačke $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$ pripadaju grafiku funkcije h, možemo da odredimo konstante b i c na osnovu

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n),$$

$$c = f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}.$$

Dobijamo aproksimaciju

$$f'(z_n) \approx h(z_n) = a(z_n - x_n)(x_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n).$$

Uvrštavanjem dobijenog izraza u korak algoritma dobijamo novu familiju postupaka

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(x_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)},$$

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ i $z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ i $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 10. [2] *Neka je $\alpha \in I$ prosta nula diferencijabilne funkcije $f: I \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu I. Ako je x_0 dovoljno blizu α, onda je postupak definisan sa*

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(x_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ i $z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ i $a \in \mathbb{R}$, *konvergencije reda šest i greška jednačine je data sa*

$$e_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\frac{a}{f'(\alpha)} - c_3\right)\left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^6 + O(e_n^7),$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$, $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!f'(\alpha)}$ *i* $a \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je α prosta nula funkcije *f*. Neka je $e_n = x_n - \alpha$ i $d_n = z_n - \alpha$. Koristeći Tejlorov razvoj u okolini $x_n = \alpha$ i $f(\alpha) = 0$, imamo

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)],$$

$$f'^{(x_n)} = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)],$$

gde je $c_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \ldots$

Deljenjem izraza prethodna dva izraza dobijamo

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)]}{f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)]} = e_n - c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4).$$

Već je pokazano da je

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)} = 1 + c_2e_n - (c_2^2 - 2c_3)e_n^2 - 2\left(c_2c_3 - \frac{13}{9}c_4\right)e_n^3 + O(e_4),$$

$$\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n) = f'(\alpha)\big(1 - c_3e_n^2 + O(e_n^3)\big).$$

Uvrštavanjem prethodno dobijenih izraza imamo

$$z_n - x_n = -J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -e_n + \left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5),$$

$$z_n - y_n = \left(\frac{2}{3} - J_f(x_n)\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{1}{3}e_n - \frac{2}{3}c_2e_n^2 + O(e_n^3),$$

tako da je

$$z_n - \alpha = \left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5),$$

$$a(z_n - x_n)(x_n - y_n) = \frac{1}{3}ae_n^2 + O(e_n^3).$$

Dalje računamo

$$a(z_n - x_n)(x_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)$$
$$= f'(\alpha)\left[1 + \left(\frac{1}{3}\frac{a}{f'(\alpha)} - c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right].$$

Tejlorov razvoj $f(z_n)$ u okolini α daje nam

$$f(z_n) = f'(\alpha)\big((z_n - \alpha) + O((z_n - \alpha)^2)\big).$$

Deljenjem ova dva prethodno dobijena izraza imamo

$$\frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(x_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)}$$
$$= z_n - \alpha + \left(c_3 - \frac{1}{3}\frac{a}{f'(\alpha)}\right)e_n^2(z_n - \alpha) + O(e_n^7).$$

Prema tome, greška jednačine je

$$e_{n+1} = z_n - \alpha - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(x_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\frac{a}{f'(\alpha)} - c_3\right)\left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^6 + O(e_n^7).$$

Zaključujemo da je ovaj postupak konvergencije reda šest, čime se završava dokaz teoreme. ■

Primetimo da za $a = 0$ dobijamo specijalan slučaj ovog postupka, odnosno postupak Kou&Li oblika

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)},$$

a jednačina greške, kao što smo već videli, data je sa

$$e_{n+1} = -c_3\left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^6 + O(e_n^7).$$

2.1.3 Wang&Kou&Li postupak

Već smo videli neke modifikacije Jaratovog postupka. Posmatramo još jednu varijaciju Jaratovog postupka [3], koja predstavlja kompoziciju Jaratovog i Njutnovog postupka, a konvergencija postupka poboljšana je takođe sa četiri na šest.

Polazimo od sledeće šeme

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$
$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$.

Možemo da aproksimiramo $f'(z_n)$ pomoću $\psi(z_n)$

$$f'(z_n) \approx \psi(z_n),$$

gde je $\psi(z_n)$ koristimo u cilju eliminacije ocena prvog izvoda. U tom slučaju potrebna nam je sledeća šema

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\psi(z_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$.

Videli smo da funkciju $\psi(x)$ možemo da aproksimiramo na sledeći način:

1. $\psi(x)$ možemo da posmatramo kao linearnu interpolaciju funkcije u dvema tačkama
$$\psi(x) \approx \frac{x - x_n}{y_n - x_n} f'(x_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(y_n),$$
2. $\psi(x)$ možemo da aproksimiramo kao
$$\psi(x) \approx h(x),$$
gde je h definisano sa
$$h(x) = ax^2 + bx + c.$$
3. I konačno, nova aproksimacija funkcije $\psi(x)$ je sledeća
$$\psi(z_n) = \frac{1}{\frac{\theta}{f'(y_n)} + \frac{1-\theta}{f'(x_n)}},$$

a parametar θ je određen u teoremi koja analizira konvergenciju postupka.

Teorema 11. [3] *Neka funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu D ima prost koren $\alpha \in D$. Ako je $f(x)$ dovoljno glatka u okolini α, tada postupak definisan sa*

$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ i $J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n)+f'(x_n)}{6f'(y_n)-2f'(x_n)}$, konvergira redom šest za aproksimaciju $f'(z_n)$ definisanu sa

$$f'(z_n) \approx \psi(z_n) = \frac{1}{\frac{\theta}{f'(y_n)} + \frac{1-\theta}{f'(x_n)}},$$

uz uslov da je $\theta = \frac{3}{2}$.

Dokaz. Neka je *α* prosta nula funkcije *f*. Neka je $e_n = x_n - \alpha$. Koristeći Tejlorov razvoj u okolini *α* i uzimajući u obzir da je $f(\alpha) = 0$, imamo

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)],$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)],$$

gde je $c_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, ...$

Deljenjem ova dva izraza dobijamo

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)]}{f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)]}$$
$$= e_n - c_2 e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5),$$

stoga imamo

$$y_n - \alpha = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \alpha$$
$$= \frac{1}{3}e_n + \frac{2}{3}[c_2 e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 - (7c_2 c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)].$$

Razvojem $f'(y_n)$ u okolini α, imamo

$$f'(y_n) = f'(\alpha)\left[1 + \frac{2}{3}c_2 e_n + \frac{1}{3}(4c_2^2 + c_3)e_n^2 - \left(\frac{8}{3}c_2^3 - 4c_2 c_3 - \frac{4}{27}c_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right].$$

Dalje je

$$-\frac{3}{4}(f'(y_n) - f'(x_n))$$
$$= f'(\alpha)\left[c_2 e_n - (c_2^2 - 2c_3)e_n^2 + \left(2c_2^3 - 3c_2 c_3 + \frac{26}{9}c_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right],$$

$$\frac{3}{2}f'(y_n) - \frac{1}{2}f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + (2c_2^2 - c_3)e_n^2 + O(e_n^3)].$$

Deljenjem ova dva izraza dobijamo

$$-\frac{3}{2}\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)} = c_2 e_n - (c_2^2 - 2c_3)e_n^2 - 2\left(c_2 c_3 - \frac{13}{9}c_4\right)e_n^3 + O(e_n^4).$$

Dalje je

$$-\frac{3}{2}\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$= c_2 e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + \left(3c_2^3 - 6c_2 c_3 + \frac{26}{9}c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Zatim sledi

$$z_n - \alpha = e_n - \left(1 - \frac{3}{2}\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(c_2^3 - c_2 c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Razvojem $f'(z_n)$ u okolini α dobijamo

$$f(z_n) = f'(\alpha)[(z_n - \alpha) + O((z_n - \alpha)^2)].$$

Računamo

$$\frac{\theta}{f'(y_n)}+\frac{1-\theta}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(\alpha)}\left\{1+\left(\frac{4}{3}\theta-2\right)c_2e_n+\left[(4c_2^2-3c_3)-(\frac{44}{9}c_2^2-\frac{8}{3}c_3\right]\theta\right\}e_n^2 + O(e_n^3).$$

Pošto imamo

$$e_{n+1}=z_n-\alpha-f(z_n)\left[\frac{\theta}{f'(y_n)}+\frac{1-\theta}{f'(x_n)}\right],$$

to nam dalje daje

$$\begin{aligned}e_{n+1}&=\left\{\left(2-\frac{4}{3}\theta\right)c_2e_n+\left[(4c_2^2-3c_3)-\left(\frac{44}{9}c_2^2-\frac{8}{3}c_3\right)\theta\right]e_n^2\right\}(z_n-\alpha)+O(e_n^7)\\&=\left\{\left(2-\frac{4}{3}\theta\right)c_2+\left[(4c_2^2-3c_3)-\left(\frac{44}{9}c_2^2-\frac{8}{3}c_3\right)\theta\right]e_n\right\}\left(c_2^3-c_2c_3\right.\\&\left.+\frac{1}{9}c_4\right)e_n^5+O(e_n^7).\end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da posmatrani postupak sa datom aproksimacijom za $f'(z_n)$ konvergira najmanje redom pet, za $\theta\in\mathbb{R}$. Za $\theta=\frac{3}{2}$ postupak konvergira redom šest i dobijamo da je greška jednačine

$$e_{n+1}=\left(\frac{10}{3}c_2^2-c_3\right)\left(c_2^3-c_2c_3+\frac{1}{9}c_4\right)e_n^6+O(e_n^7).$$

I time je dokaz teoreme završen. ■

Uvrštavanjem aproksimacije $f'(z_n)$ u posmatrani postupak, uz uslov da je $\theta=\frac{3}{2}$, dobijamo novi postupak šestog reda konvergencije definisan sa

$$z_n=x_n-J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{3}{2f'(y_n)}-\frac{1}{2f'(x_n)}\right]f(z_n),$$

gde je $y_n=x_n-\frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ i $J_f(x_n)=\frac{3f'(y_n)+f'(x_n)}{6f'(y_n)-2f'(x_n)}$.

Kada dati postupak posmatramo u sledećem obliku

$$y_n=x_n-\frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)},$$

$$z_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s+1}{6s-2},$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{3}{2s}-\frac{1}{2}\right),$$

zaključujemo da se uklapa u opštu šemu za

$$h(s) = \frac{3s + 1}{6s - 2},$$

$$H(s) = \frac{3}{2s} - \frac{1}{2}.$$

3. Novi i modifikovani postupci šestog reda konvergencije

U ovom delu rada prikazane su originalne modifikacije postupaka opisanih u drugom poglavlju, odnosno modifikacije postupaka Chun, Kou&Li i Wang&Kou&Li, kao i originalni primeri postupaka sa pogodno izabranim funkcijama h i H. Svi postupci koje posmatramo uklapaju se u opštu šemu

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} h(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} H(s),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)},$$

a funkcije h i H su definisane posebno za svaki postupak.

Konvergencija postupaka je ispitana i dokazana pomoću teoreme 8, koju smo dokazali u drugom poglavlju, a na osnovu toga su dobijene asimptotske konstante greške za svaki postupak.

3.1 Postupak sa jednom funkcijom

Posmatramo sledeću šemu

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} w(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} w(s)^2,$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Ova šema se uklapa u opštu za

$$h(s) = w(s),$$

$$H(s) = w(s)^2.$$

Uz uslove $w(1) = 1$, $w'(1) = -\frac{3}{4}$ i $w''(1) = \frac{9}{4}$ dobijamo da dati postupak konvergira redom šest, a asimptotska konstanta greške iznosi

$$\frac{1}{81}(c_2^2 - c_3)(-81c_2c_3 + 9c_4 + c_2^3\left(405 + 32w^{(3)}(1)\right).$$

Uz dodatni uslov $w^{(3)}(1) = -\frac{405}{32}$ imamo da je asimptotska konstanta greške

$$-\frac{1}{9}(c_2^2 - c_3)(9c_2c_3 - c_4).$$

3.1.1 Primer 1.

Neka je funkcija w oblika

$$w(s) = \frac{9}{8}s^2 - 3s + \frac{23}{8}.$$

Računanjem izvoda date funkcije vidimo da oni zadovoljavaju uslov za konvergenciju šestog reda novog definisanog postupka, pa dobijamo sledeći postupak

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{9}{8}s^2 - 3s + \frac{23}{8}\right),$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{9}{8}s^2 - 3s + \frac{23}{8}\right)^2,$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Asimptotska konstanta greške je

$$\frac{1}{9}(c_2^2 - c_3)(45c_2^3 - 9c_2c_3 + c_4).$$

3.1.2 Primer 2.

Sada posmatramo funkciju w oblika

$$w(s) = -\frac{1}{64}(135s^3 - 477s^2 + 597s - 319).$$

Izvodi ove funkcije u 1 takođe se poklapaju sa uslovima za konvergenciju novog definisanog postupka, pa na osnovu toga imamo postupak u sledećem obliku

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n + \frac{1}{64}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(135s^3 - 477s^2 + 597s - 319),$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\left(-\frac{1}{64}(135s^3 - 477s^2 + 597s - 319)\right)^2,$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Asimptotska konstanta greške ovog postupka je

$$-\frac{1}{9}(c_2^2 - c_3)(9c_2c_3 - c_4).$$

3.1.3 Primer 3.

Već smo se upoznali sa Jaratovom funkcijom, odnosno

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}.$$

Predstavljamo još jedan primer postupka sa jednom pomoćnom funkcijom. U drugom i trećem koraku ovog algoritma je Jaratova funkcija, odnosno

$$w(s) = \frac{3s + 1}{6s - 2},$$

Na osnovu toga imamo sledeći postupak

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s + 1}{6s - 2},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{3s + 1}{6s - 2}\right)^2,$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Ovaj postupak je šestog reda, a asimptotska konstanta greške je

$$\frac{1}{9}(c_2^2 - c_3)(9c_2^3 - 9c_2c_3 + c_4).$$

3.2 Postupak sa dve funkcije

Posmatramo još jedan novi postupak koji se uklapa u našu opštu šemu. Novi postupak je definisan sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} q(s),$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} w(s),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Uslovi $w(1) = 1$, $w'(1) = -\frac{3}{2}$, $q(1) = 1$, $q'(1) = -\frac{3}{4}$, $q''(1) = \frac{9}{4}$ omogućavaju da posmatrani postupak konvergira redom šest, a asimptotska konstanta greške je

$$-\frac{1}{729}(9c_3 + c_2^2(-54 + 8w''(1)))(-81c_2c_3 + 9c_4 + c_2^3\left(405 + 32q^{(3)}(1)\right).$$

Ako važi i $w''(1) = \frac{27}{4}$, $q^{(3)}(1) = -\frac{405}{32}$, onda je asimptotska konstanta greške

$$c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}.$$

3.2.1 Primer

Neka su nam date funkcije

$$q(s) = \frac{9}{8}s^2 - 3s + \frac{23}{8},$$

$$w(s) = \frac{1}{8}(27s^2 - 66s + 47).$$

Vrednosti izvoda ovih funkcija u tački 1 omogućavaju konvergenciju novog postupka, pa imamo postupak

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{9}{8}s^2 - 3s + \frac{23}{8}\right),$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{8}\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}(27s^2 - 66s + 47),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)},$$

a asimtotska konstanta greške iznosi

$$-5c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}.$$

3.3 Postupci sa sredinama

U radovima [6] i [7-8] posmatrani su postupci koji su ubrzanja Njutnovog postupka. U njima su korišćene i sredine, koje kao specijalan slučaj sadrže aritmetičku i harmonijsku sredinu. U ovom paragrafu posmatramo samo aritmetičku i geometrijsku sredinu, sa napomenom da se na isti način mogu koristiti i neke druge sredine, po ugledu na radove [7-8].

3.3.1 Postupak sa aritmetičkom sredinom

Pogledajmo sledeću šemu

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}q(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2f(z_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}w(s),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Za izbor uslova $q(1) = 1$, $q'(1) = -\frac{1}{4}$, $q''(1) = \frac{3}{2}$, $w(1) = 1$ i $w'(1) = -1$ posmatrani postupak je šestog reda konvergencije, a asimptotska konstanta greške je

$$-\frac{1}{729}\left(9c_3 + c_2^2(-42 + 8w''(1))\right)\left(-81c_2c_3 + 9c_4 + c_2^3\left(297 + 32q^{(3)}(1)\right)\right).$$

Uz dodatni izbor uslova $w''(1) = \frac{21}{4}$ i $q^{(3)}(1) = -\frac{297}{32}$ sledi da je asimptotska konstanta greške

$$c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}.$$

3.3.1.1 Primer

Pogledajmo funkcije zadate na sledeći način

$$w(s) = 2 - s,$$

$$q(s) = \frac{3}{4}s^2 - \frac{7}{4}s + 2.$$

Računanjem izvoda ovih funkcija u tački 1 dobijamo da su zadovoljeni uslovi koji su potrebni da bi posmatrani postupak sa aritmetičkom sredinom konvergirao šestim redom. Uvrštavanjem ovih funkcija u posmatrani postupak dobijamo sledeće

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$z_n = y_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}\left(\frac{3}{4}s^2 - \frac{7}{4}t + 2\right),$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2f(z_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}(2 - s)$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Asimptotska konstanta greške data je sa

$$\frac{1}{27}(14c_2^2 - 3c_3)(33c_2^3 - 9c_2c_3 + c_4).$$

3.3.2 Postupak sa geometrijskom sredinom

Pogledajmo sledeću šemu

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}q(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}w(s),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Uslovi potrebni da bi postupak konvergirao redom šest su $q(1) = 1$, $q'(1) = -\frac{1}{4}$, $q''(1) = \frac{5}{4}$, $w(1) = 1$ i $w'(1) = -1$, a asimptotska konstanta greške u tom slučaju je

$$-\frac{1}{729}\left(9c_3+8c_2^2(-5+w''(1)\right)(-81c_2c_3+9c_4+c_2^3\left(267+32q^{(3)}(1)\right).$$

Ako još važi da je $w''(1)=5$ i $q^{(3)}(1)=-\frac{267}{32}$, dobijamo da je asimptotska konstanta greške

$$c_2c_3^2-\frac{c_3c_4}{9}.$$

3.3.2.1 Primer

Neka su date sledeće funkcije

$$w(s)=\frac{5}{2}s^2-6s+\frac{9}{2},$$

$$q(s)=-\frac{1}{64}(89s^3-307s^2+363s-209).$$

Izvodi ovih funkcija u tački 1 se poklapaju sa uslovima za konvergenciju šestog reda posmatranog postupka sa geometrijskom sredinom. Na osnovu toga imamo sledeće

$$y_n=x_n-\frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n=y_n+\frac{1}{64}\frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}(89s^3-307s^2+363s-209),$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}(\frac{5}{2}s^2-6s+\frac{9}{2}),$$

gde je

$$s=\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}=\frac{f'\left(x_n-\frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Dobija se da je asimptotska konstanta greške

$$c_2c_3^2-\frac{c_3c_4}{9}.$$

3.4 Neke modifikacije postupaka iz drugog dela

3.4.1 Postupak Kou&Li

Posmatrajmo šemu dobijenu po ugledu na Kou&Li postupak

$$y_n=x_n-\frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n=y_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s+1}{6s-2}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} t(s),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Računanjem dobijamo da su uslovi, koji su potrebni da bi ovaj postupak bio šestog reda konvergencije, dati sa $t(1) = 1$, $t'(1) = -\frac{3}{2}$, a sa dodatnim uslovom $t''(1) = \frac{27}{4}$ dobijamo da je asimptotska konstanta greške

$$-c_2^3 c_3 + c_2 c_3^2 - \frac{c_3 c_4}{9}.$$

3.4.1.1 Primer

Neka je funkcija t oblika

$$t(s) = \frac{1}{8}(27s^2 - 66s + 47).$$

Izvodi posmatrane funkcije poklapaju se sa uslovima potrebnim za konvergenciju modifikovanog postupka Kou&Li, pa nam to daje sledeću šemu

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s+1}{6s-2}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{8}\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}(27s^2 - 66s + 47),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Na isti način kao i do sada, dobijamo da je asimpotska konstanta greške ovog postupka

$$-c_2^3 c_3 + c_2 c_3^2 - \frac{c_3 c_4}{9}.$$

3.4.2 Postupak Kou&Li bez recipročne vrednosti

Videli smo da je opšta šema za postupak Kou&Li definisana na sledeći način

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$

$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)},$$

gde je $y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$.

Treći korak iz algoritma možemo da zapišemo i ovako

$$x_{n+1} = z_n - f(z_n)\frac{1}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)}.$$

Uklapanjem tako definisanog koraka bez recipročne vrednosti koja množi $f(z_n)$ u opštu šemu dobijamo sledeći postupak sa pomoćnom funkcijom $q(s)$

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)},$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s+1}{6s-2},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{9s^2+6s-7}{12s-4}q(s).$$

Potrebni su nam uslovi za konvergenciju šestog reda ovog postupka, pa dobijamo da mora biti zadovoljeno $q(1) = 1$, $q'(1) = -3$, $q''(1) = 18$. Ako to važi, onda je asimptotska konstanta greške

$$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}.$$

3.4.2.1 Primer

Neka je data funkcija

$$q(s) = 9s^2 - 21s + 13.$$

Izvodi funkcije q zadovoljavaju uslove za konvergenciju modifikovanog postupka Kou&Li bez recipročne vrednosti, odakle dobijamo postupak definisan sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)},$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s+1}{6s-2},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{9s^2+6s-7}{12s-4}(9s^2-21s+13),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)},$$

a čija je asimptotska konstanta greške data sa

$$-c_2^3 c_3 + c_2 c_3^2 - \frac{c_3 c_4}{9}.$$

3.4.3 Postupak Wang&Kou&Li sa recipročnom vrednošću

Videli smo da je opšta šema postupka Wang&Kou&Li definisana sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f'(x_n)}{f(x_n)},$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s+1}{6s-2},$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{3}{2s} - \frac{1}{2}\right).$$

Funkcija $H(s)$ je oblika

$$H(s) = \frac{3}{2s} - \frac{1}{2} = \frac{3-s}{2s}.$$

Recipročna vrednost funkcije $H(s)$ data je sa

$$\frac{1}{H(s)} = \frac{2s}{3-s}.$$

Ukoliko bismo to posmatrali kao novu funkciju $H(s)$ u opštoj šemi, zajedno sa pomoćnom funkcijom $q(s)$, onda bi treći korak algoritma bio definisan sa

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{2s}{3-s}q(s).$$

Da bi ovako dobijeni postupak bio šestog reda, mora da važi $q(1) = 1$, $q'(1) = -3$, a ako pored toga ispunjeno i $q''(1) = \frac{57}{4}$, onda je asimptotska konstanta greške posmatranog postupka

$$-c_2^3 c_3 + c_2 c_3^2 - \frac{c_3 c_4}{9}.$$

3.4.3.1 Primer

Data je funkcija $q(s)$ oblika

$$q(s) = \frac{1}{8}(57s^2 - 138s + 89).$$

Njeni izvodi se poklapaju sa uslovima potrebnim da modifikovani postupak Wang&Kou&Li sa recipročnom vrednošću bude šestog reda, pa postupak koji dobijamo uvrštavanjem funkcije $q(s)$ u posmatrani algoritam glasi

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{3s+1}{6s-2}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{8}\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}(57s^2 - 138s + 89),$$

gde je

$$s = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'\left(x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Dobijamo još i da je asimptotska konstanta greške

$$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}.$$

3.5 Pregled postupaka

U tabeli 1 prikazan je pregled postupaka koji su posmatrani i opisani u radu, zajedno sa asimptotskom konstantom greške za svaki postupak, kao i skraćenicama kojima smo označili pojedine postupke koje ćemo koristiti u daljem radu.

POSTUPAK	ASIMPTOTSKA KONSTANTA GREŠKE
Kou&Li postupak (KL)	$-c_2c_3(c_2^2 - c_3) - \frac{c_3c_4}{9}$
Chun postupak ($a = 0$)	$-c_2c_3(c_2^2 - c_3) - \frac{c_3c_4}{9}$
Wang&Kou&Li postupak (WKL)	$\left(\frac{10}{3}c_2^2 - c_3\right)\left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)$
Postupak sa jednom funkcijom	$-(c_2^2 - c_3)\left(c_2c_3 - \frac{1}{9}c_4\right)$
Primer 1 postupka sa jednom funkcijom (D1)	$(c_2^2 - c_3)\left(5c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)$
Primer 2 postupka sa jednom funkcijom (D2)	$-(c_2^2 - c_3)\left(c_2c_3 - \frac{1}{9}c_4\right)$
Primer 1 postupka sa jednom funkcijom (D3)	$(c_2^2 - c_3)\left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)$
Postupak sa dve funkcije	$c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Primer postupka sa dve funkcije (D4)	$-5c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Postupak sa aritmetičkom sredinom	$c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$

Primer postupka sa aritmetičkom sredinom (AS)	$\frac{1}{27}(14c_2^2 - 3c_3)(33c_2^3 - 9c_2c_3 + c_4)$
Postupak sa geometrijskom sredinom	$c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Primer postupka sa geometrijskom sredinom (GS)	$c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Modifikovan postupak Kou&Li	$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Primer modifikovanog postupka Kou&Li (MKL)	$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Postupak Kou&Li bez recipročne vrednosti	$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Primer Kou&Li bez recipročne vrednosti (KLBRV)	$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Postupak Wang&Kou&Li sa recipročnom vrednošću	$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$
Primer Wang&Kou&Li sa recipročnom vrednošću (WKLRV)	$-c_2^3c_3 + c_2c_3^2 - \frac{c_3c_4}{9}$

tabela 1.

4. Numerički eksperiment

U ovom delu rada prikazani su numerički rezultati sa postupcima koje smo opisali u drugom i trećem poglavlju. Svi rezultati dobijeni su u programskom paketu *Mathematica 8*. Preciznost je povećana na 10000 cifara sa funkcijom *SetPrecision*. Koristili smo izlazni kriterijum

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon \text{ i } |x_k - \alpha| < \varepsilon,$$

gde je α tačno rešenje posmatrane jednačine, a $\varepsilon = 10^{-20000}$. Sa α^* označena je aproksimacija tačnog rešenja za jednačine kod kojih tačno rešenje nije dostupno. Aproksimacija tačnog rešenja prikazana je sa 20 cifara, a u *Mathematici* smo računali sa 10000 cifara.

Numerički red konvergencije postupka računat je prema formuli

$$ord_k = \frac{\ln\left(\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|}\right)}{\ln\left(\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|}\right)}, k = 1,2 \ldots,$$

a predstavlja aproksimaciju reda konvergencije p. Kod svih postupaka dobili smo $ord_k \approx 6$.

Aproksimacije c_k asimptotske konstante greške c izračunate su pomoću formule

$$c_k = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}, k = 1,2 \ldots.$$

Rešavali smo jednačinu $f(x) = 0$ koristeći sledeće test funkcije.

$f_1(x) = \frac{1}{2} - sinx,$ [1] $, \alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731, x_0 = 0.7$

$f_2(x) = 3x^2 - e^x,$ [7] $, \alpha_2^* \approx 0.9100075724887090607, x_0 = 1$

$f_3(x) = x^6 - 10x^3 + x^2 - x + 3,$ [24] $, \alpha_3^* \approx 0.6586048471181404368, x_0 = 0.5$

$f_4(x) = (1 + x)^3 \cos\frac{\pi}{2}x + \sqrt{1 - x^2} - \frac{2(9\sqrt{2}+16\sqrt{3})}{27},$ [24] $, \alpha_4^* \approx 0.3333333333333333333, x_0 = 0.3$

$f_5(x) = e^{-x} + cosx,$ [22] $, \alpha_5^* \approx 1.7461395304080124177, x_0 = 1.5$

$f_6(x) = x^3 + 1,$ [23] $, \alpha_6 = -1, x_0 = -0.8$

$f_7(x) = x^2 + sin\frac{x}{5} - \frac{1}{4},$ [23] $, \alpha_7^* \approx 0.4099920179891371316, x_0 = 0.5$

$f_8(x) = x - 3lnx,$ [23] $, \alpha_8^* \approx 1.8571838602078353365, x_0 = 2$

$f_9(x) = x - cosx,$ [15] $, \alpha_9^* \approx 0.7390851332151606416, x_0 = 2$

$f_{10}(x) = x^2 + sinx + x,$ [24] $, \alpha_{10} = 0, x_0 = 0.1.$

Uz svaku jednačinu navedeno je tačno ili približno rešenje, kao i početna vrednost postupka.

	CHUN	WKL	D1	D2	D3	D4
f_1	8723.5	7778.9	7818.4	9874.3	8341.1	8143.1
f_2	10388.3	9066	8728.9	10006.8	9635.9	9084.8
f_3	6933.1	4068	2051	2187.2	5716.5	1530
f_4	9415.15	8704.5	8474.2	9275.5	9088.8	8667.2
f_5	9121.8	8953.6	8885.1	9110.6	9063.4	8934.1
f_6	6756.8	4458.6	2599.8	2837.5	6072	2115.1
f_7	11917.9	7724.5	7286.7	9312.3	8411	8213.7
f_8	8724.1	7261.2	6494	7126.9	8637.3	5762.9
f_9	5521.6	5383.1	5343.1	5529.0	5460.1	5404.6
f_{10}	10754.9	9290.1	8949.8	10302.3	9891	9347.5

Tabela 2. Upoređenje postupaka $-log|x_5 - \alpha|$

	AS	GS	MKL	KLBRV	WKLRV
f_1	6974.2	-1.0	8952.4	7832.4	8114.5
f_2	8242.1	10406.5	9895.1	9461.8	9665.4
f_3	2299.3	-3.8	3557.2	2546.9	2622.8
f_4	8133.3	9475.7	9229.4	8977.7	9105.3
f_5	8778.5	-2.1	9106.7	9076.3	9092.7
f_6	2688.6	3178	4011.1	3103.2	3200.8
f_7	6761.7	10316.3	9155.9	8564.9	8837.4
f_8	5616.7	-0.4	7399.6	6697.9	6890
f_9	5265.3	5590.5	5521.6	5521.8	5521.7
f_{10}	8434.1	10753.2	10187.9	9727.3	9940.3

Tabela 3. Upoređenje postupaka $-log|x_5 - \alpha|$

U tabelama 2 i 3 prikazani su rezultati koje smo dobili. Iz tabela vidimo da se rezultati razlikuju, za pojedine funkcije neki postupci u odnosu na druge daju bolje rezultate, a za druge funkcije daju lošije, tako da se ni za jedan postupak ne može reći da je najbolji.

5. Zaključak

U radu smo posmatrali familije postupaka šestog reda konvergencije za numeričko rešavanje nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom. Ovi postupci polaze od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, a povišenje reda sa dva na šest postiže se ubrzanjem Njutnovog postupka sa dva dodatna koraka. Po ugledu na postupke Chun, Kou&Li i Wang&Kou&Li, dali smo, kao originalan doprinos, modifikacije i primere postupaka za pogodno izabrane funkcije, bez upotrebe drugog i viših izvoda. Pri tome se prvi izvod funkcije računa jednom, u osnovnom koraku, tj. u Njutnovom koraku, i drugi put prilikom izračunavanja vrednosti promenljive s koja se koristi u sledeća dva koraka. Pod određenim pretpostavkama dokazali smo konvergenciju postupaka i odredili red konvergencije.

U četvrtom delu rada prikazali smo više rezultata izvedenih eksperimenata koji su urađeni u programskom paketu *Mathematica 8*. Numerički rezultati pokazuju da naše modifikacije i primeri daju dobre rezultate, slične postupcima na koje smo se ugledali.

Primeri koje smo koristili za numerički eksperiment uzeti su iz relevantnih radova. Numerički rezultati su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

6. Literatura

[1] J. Kou, Y. Li, *An improvement of the Jarrat method*, Appl. Math. Comput., 2006, doi:10.1016/j.amc (2006) 12.062.

[2] C. Chun, *Some improvements of Jarratt's method with sixth-order convergence*, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 1432–1437.

[3] X. Wang, J. Kou, Y. Li, *Modified Jarratt method with sixth-order convergence*, Appl. Math. Comput., 2009, doi: 10.1016/j.aml. (2009) 06.022.

[4] Herceg D., Krejić N., *Numerička analiza*, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[5] Grau, G., Diaz-Barrero, J.L., *An improvement to Ostrowski root-finding method*, Applied Mathematics and Computation 173 (2006), 450–456.

[6] Herceg, D., Herceg, Đ., *Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126-6133.

[7] Herceg, Đ., Herceg, D., *On a third order family of methods for solving nonlinear equations*, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1-9.

[8] Herceg, Đ., Herceg, D., *Sixth-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 267(2014), 244–253.

[9] Herceg, Đ., Herceg, D., *Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means*, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.

[10] Hernandez, M.A., *Second-derivative-free variant of the Chebyshev method for nonlinear equations*, J. Optim. Theory Appl. 104 (3) (2000) 501–515.

[11] Khattri, S. K., Argyros, I. K., *Sixth order derivative free family of iterative methods*, Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 5500–5507.

[12] Kou, J, Li, Y., *Modified Chebyshev's method free from second derivative for non-linear equations*, Appl. Math. Comput. 187 (2) (2007) 1027–1032.

[13] Kou, J, Li, Y., *On Chebyshev-type methods free from second derivative*, Comm. Numer. Method Eng. 24 (2008) 1219–1225.

[14] Kou, J, Li, Y., X. Wang, X., *A uniparametric Chebyshev-type method free from second derivatives*, Appl. Math. Comput. 179 (2006) 296–300.

[15] Kou, J., *On Chebyshev–Halley methods with sixth-order convergence for solving non-linear equations*, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 126–131.

[16] Kou, J., Wang, X., *Sixth-order variants of Chebyshev–Halley methods for solving non-linear equations*, Appl. Math. Comput. 190 (2007)1839–1843.

[17] Neta, B., *A sixth order family of methods for nonlinear equations*, Int. J. Comput. Math. 7 (1979) 157–161.

[18] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.

[19] Ostrowski A.M., *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press Inc., 1966.

[20] Parhi, S.K., Gupta, D.K., *A sixth order method for nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation 203 (2008) 50–55.

[21] Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.

[22] Ren, H., Wu, Q., Bi, W., *New variants of Jarratt's method with sixth-order convergence*, Numer. Algorithm. 52 (2009) 585–603.

[23] Sharma, J. R., Guha, R. K., *A family of modified Ostrowski methods with accelerated sixth order convergence*, Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 111-115.

[24] F.Soleymani, S.K.Khattri, S.KarimiVanani, *Two new classes of optimal Jarratt-type fourth-order methods*, Applied Mathematics Letters, 25(2012) 847-853.

[25] P. Jarratt, *Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations*, Math. Comp. 20 (1966), 434–437.

[26] Traub J.F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.

7. Biografija

Rođena sam 23.11.1988. godine u Bačkoj Palanci. Osnovnu školu „Braća Novakov“ u Silbašu završila sam 2003. godine sa odličnim uspehom i Vukovom diplomom. Iste godine upisala sam Gimnaziju "Svetozar Marković" u Novom Sadu, opšti smer, koju sam takođe završila kao nosilac Vukove diplome. Osnovne studije na Prirodno – matematičkom fakultetu, smer primenjena matematika - matematika finansija, upisala sam 2007. godine i diplomirala u oktobru 2011. godine. Godine 2012, nakon uspešno položenog prijemnog ispita, upisala sam master studije primenjene matematike. Položila sam sve ispite predviđene planom i programom master studija, zajedno sa predmetom Osnovi geometrije i grupom pedagoško–psihološko–metodičkih predmeta.

Novi Sad, jun 2014. *Dragana Vrućinić*

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Dragana Vrućinić
AU
Mentor: dr Đorđe Herceg
MN
Naslov rada: Familija postupaka šestog reda slobodna od izvoda
MR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2014.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/ 46 strana/ 3 tabele / 25 literatura
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: red konvergencije, postupak, jednačina greške
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U master radu posmatramo teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake šestog reda konvergencije za pronalaženje jednostrukih korena nelinearne jednačine $f(x)=0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a,b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha)\neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, dajemo modifikacije čiji je red povišen na šest bez upotrebe izvoda reda višeg od jedan. Kao originalan doprinos dajemo modifikacije nekih poznatih postupaka i nekoliko novih postupaka. Pod određenim pretpostavkama za

posmatrane postupke dokazujemo konvergenciju šestog reda i određujemo odgovarajuće simptotske konstante greške.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.9.2013.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Helena Zarin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Dragana Vrućinić
AU
Mentor: dr. Đorđe Herceg
MN
Title: Sixth order derivative free family of iterative methods
XI
Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description 4 chapters/ 46 pages/ 3 tables/ 25 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: order of convergence, method, equation error
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N
The master work we consider theorems and algorithms related to the iterative procedure of the sixth-order convergence for numerical solving of the nonlinear equation . We assume that function f has a simple solution α in $[a, b]$, ie. $f'(\alpha) \neq 0$. Starting from Newton's method, which is second order convergence, we present some known methods of sixth order of convergence without derivatives of order higher than one. As an original contribution we give some modifications to known methods and

several new procedures. Under certain conditions, for the concerned methods we prove the convergence of the sixth order and determine corresponding asymptotic constant errors.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 25. 9. 2013.
ASB
Defended:
DE

Thesis defense board:
DB
President: dr Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor : dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad