UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Vlado Uljarević

O GLATKIM GRAFOVIMA KOMPATIBILNIM SA TEJLOROVIM OPERACIJAMA

-master teza-

Novi Sad, 2014

Sadržaj

Predgovor

U ovom master radu se bavimo pitanjem H-bojenja grafova, gde je H fiksiran gladak digraf.

U prvom poglavlju prvo dajemo opšti pregled oblasti, kratak sažetak predstojećih rezultata i njihov značaj. Zatim uvodimo pojmove i rezultate teorije grafova, univerzalne algebre i veze među njima.

U drugoj poglavlju rešavamo slučaj kad je fiksirani digraf jako povezan, kroz niz tvrđenja i lema.

U trećem poglavlju rešavamo opšti slučaj. Dokazi u ovom poglavlju su najkomplikovaniji i možda najvažniji doprinos rada je ako smo uspeli da malo približimo te dokaze široj publici.

Iskoristio bih priliku da se zahvalim svom mentoru, dr Petru Markoviću, ne samo na odabiru zanimljive teme i pomoći prilikom obrade iste, već i na podršci i korisnim savetima u toku prethodih godina studija. Zahvalnost dugujem i članovima komisije, dr Igoru Dolinki i dr Bojanu Bašiću.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima i bratu kako na podršci u odabiru profesije tako i na svemu ostalom što su mi pružili u životu.

Vlado Uljarević

Poglavlje 1

Uvod

Ovaj rad se bavi pitanjem složenosti tzv "problema H-bojenja" grafa, odnosno problema da li postoji homomorfizam iz grafa G koji je ulaz algoritma u fiksirani graf H. Glavna teorema rada [BKN] koji prikazujemo uopštava rezultat P. Hell-a i J. Nešetřila [HN1] iz 1990. koji je klasifikovao složenost problema H-bojenja grafa gde je H neusmeren graf (logički, to su strukture sa jednom irefleksivnom i simetričnom binarnom relacijom). Hell i Nešetřil su dokazali da je problem H-bojenja rešiv u polinomnom vremenu ako je H bipartitan graf, dok je inače problem H-bojenja NP-kompletan.

Problem H-bojenja je specijalan slučaj problema Constraint Satisfaction Problem, koji je nastao iz deskriptivne teorije računske složenosti. Da bismo dali potpun opis problema koji prikazujemo i njegov značaj u teorijskom računarstvu, daćemo prvo vrlo kratak pregled oblasti deskriptivne složenosti.

Neka je problem odlučivosti Π proizvoljan jezik (skup reči) nad nekom azbukom A. Ako je pitanje pripadnosti ulazne reči problemu Π moguće razrešiti algoritmom (Tjuringovom mašinom), onda se kaže da je Π odlučiv. Ako je Π odlučiv problem, postavlja se pitanje minimalnog broja koraka najbolje Tjuringove mašine koji razrešava svaki input dužine n, i taj broj koraka se obeležava sa $s_\Pi(n)$ i zove računska složenost problema Π. Kaže se da je Π polinomne složenosti ako postoji polinom $p(n)$ takav da je $s_\Pi(n) \leq p(n)$. Klasa svih problema polinomne složenosti obeležava se sa P i piše se $\Pi \in P$ ako je Π polinomne složenosti. Klasa NP je skup svih problema Π takvih da postoji problem $\Pi' \subseteq A^* \times A^*$ koji zadovoljava:

- Π' je polinomne složenosti,
- postoji polinom $q(n)$ takav da za svaku reč $w \in A^*$, ili postoji reč $u \in A^*$ takva da $|u| \leq q(|w|)$ i $(w,u) \in \Pi'$, ili za svaku reč $u \in A^*$ važi $(w,u) \notin \Pi'$ i
- $w \in \Pi$ akko postoji reč $u \in A^*$ takva da $(w,u) \in \Pi'$.

Inače, uređeni parovi reči se mogu kodirati kao reči nad azbukom $(A \cup \{< blanko >\}) \times (A \cup \{< blanko >\}) \setminus \{(< blanko >, < blanko >)\}$ gde, ako i-to slovo ima koordinatu jednaku $< blanko >$, onda i $i+1$-vo slovo ima istu tu koordinatu jednaku $< blanko >$. Dakle, uređeni parovi reči su takođe reči nad nekim jezikom.

Neformalno, klasa NP je projekcija polinomnih problema na parovima reči na jednu koordinatu, ali takva da se "polinomnost po dužini para" i "polinomnost po dužini projekcije para" poklapaju.

Osnovna teorema koja se smatra za početak deskriptivne složenosti je teorema R. Fagina [F] koja pravi bijekciju između problema u klasi NP i tzv. egzistencijalnih formula drugog reda. U pitanju su logičke formule drugog reda u preneksnoj formi koje počinju sa egzistencijalno kvantifikovanim promenljivama drugog reda (relacijama), a pod dejstvom tih kvantifikatora drugog reda je formula prvog reda. Reči kodiraju konačne modele i reč pripada jeziku akko model zadovoljava formulu.

S obzirom na veliki značaj problema $P =?NP$, značajan napor u deskriptivnoj teoriji složenosti je usmeren na pojačavanje Faginove teoreme na lepše i uže klase od svih egzistencijalnih formula drugog reda. Ovde više nije moguće reprezentovati sve probleme u klasi NP, ali za primenu na problem $P =?NP$ dovoljno je da se reprezentuje *računski ekvivalentna* klasa problema. Naime, ako je klasa K problema koja se reprezentuje takva podklasa od NP da postoji problem koji reprezentuje svaku klasu složenosti unutar NP, onda ćemo moći da utvrdimo da li NP ima jednu jedinu klasu složenosti P (dakle, $P = NP$), ili sadrži više njih (dakle, $P \neq NP$). U tom cilju se prvo došlo do klase strogih NP formula (*strict NP*, pišemo SNP) u radovima [KV] i [PY]. Kasnije se došlo i do tri pojačanja uslova SNP formula u radu [FV]:

- *monotonost* - svi predikati prvog reda su istog znaka u disjunktivnoj normalnoj formi, npr. nijedan nije negiran;
- *monadičnost* - svi predikati drugog reda su unarni i

- *bez nejednakosti* - zabranjeno je korišćenje nejednakosti promenljivih kao atomskih formula u disjunktivnoj normalnoj formi.

Dokazano je da bilo koja dva od ova tri uslova daju formule koje su računski ekvivalentne celoj klasi NP. Ako se sva tri uslova pretpostave, onda se, na osnovu radova [FV] i [K] dobijaju SNP formule koje su računski ekvivalentne problemu H-bojenja digrafa, ili opštije, a ekvivalentno, pitanju postojanja homomorfizma iz ulazne relacijske strukture u fiksiranu konačnu relacijsku strukturu H. To je problem *Constraint Satisfaction Problem*, gde se daje još jedan ekvivalentan način opisa postojanja homomorfizma, naime za svaku uređenu n-torku koja pripada nekoj relaciji ulazne strukture dobijamo uslov ("constraint") koji kaže da se ta n-torka mora preslikati u neku n-torku u odgovarajućoj relaciji fiksirane strukture H. Na primer, u slučaju grafova, svaki "constraint" bi bio oblika da neki uređen par čvorova ulaznog grafa G (naime, proizvoljan par koji je u relaciji grafa G) mora preslikati u orijentisanu granu fiksiranog grafa H.

Dakle, u slučaju monotonih monadičkih SNP formula bez nejednakosti, umesto formule, za fiksiranu vrednost se može uzeti konačna relacijska struktura na konačnom jeziku. Sad zadovoljenje fiksirane formule u modelu prelazi u homomorfizam iz modela u fiksiran model.

Samo da primetimo, razrešenje svih klasa složenosti koje postoje u problemu H-bojenja grafa nema direktan uticaj na problem $P =?NP$. Medjutim, kada bi se dokazalo da ih ima samo dve, P i NP-kompletni, što je važeća hipoteza, onda bismo dobili da monotone monadičke SNP formule bez nejednakosti sadrže isto samo probleme iz te dve klase složenosti. S obzirom da je klasa monotonih monadičkih SNP formula bez nejednakosti "do na jedan uslov" daleko od reprezentovanja svih formula u klasi NP, onda bi to bilo "blizu" tvrdjenja da i u NP postoji samo te dve klase. Medjutim, ako $P \neq NP$, onda na osnovu teoreme Ladnera [L] znamo da u klasi NP postoji ili jedna ili prebrojivo beskonačno mnogo klasa složenosti. Dakle, bili bismo "blizu" "kontradikcije", iz koje bi jedini izlaz bio da $P = NP$, tj. da su klase složenosti P i NP-kompletna jedna ista klasa.

Za potrebe daljeg teksta formalno definišemo problem H-bojenja gde je H relacijska struktura:

Definicija 1.1 *Neka je H konačna relacijska struktura na konačnom jeziku. Problem odlučivosti obeležen sa $CSP(H)$ kao ulaz ima konačnu* *strukturu G na istom jeziku kao H, i prihvata G akko postoji homomorfizam iz Gu H.*

Dakle, teorema Hella i Nešetřila rešava problem H-bojenja na željeni način (ili P ili NP-kompletni) za klasu svih običnih neorijentisanih grafova, tj. irefleksivnih, simetričnih relacija. Uslov irefleksivnosti može se izbaciti, tim se samo dodaju trivijalni slučajevi (ako H ima petlju, onda se svaki graf može H-obojiti). Sa druge strane, uslov simetričnosti je vrlo bitan: ako bi bio u potpunosti izbačen, time bi se razrešila hipoteza o dihotomiji problema CSP. U ovom radu je zamenjen sa uslovom tzv. *glatkosti* grafa, tj. radi se o usmerenim grafovima bez izvora (čvorova sa ulaznim stepenom nula) i ponora (čvorova sa izlaznim stepenom nula). Svaki neusmeren graf je disjunktna unija glatkog grafa i izvesnog broja izolovanih čvorova, jer se neusmerena grana tretira kao dve usmerene grane izmedju ta dva čvora, po jedna u svakom smeru. Dakle, svaki čvor neusmerenog grafa koji nije izolovan automatski nije ni izvor ni ponor. Izolovani čvorovi su takodje trivijalan slučaj, u njih se homomorfno slikaju samo grafovi bez grana (koji se slikaju u svaki graf), a inace homomorfizam postoji akko postoji homomorfizam u podgraf od H koji se dobije izbacivanjem svih izolovanih čvorova. Dakle, teorema koju prikazujemo uopštava rezultat [HN1] sem tih izolovanih čvorova (koji bi mogli biti dodati da bi rad [BKN] i formalno bio uopštenje [HN1], ali bi formulacija [BKN] postala ružnija).

To što [BKN] uopštava poznati rezultat [HN1] je već dovoljno da bi rad [BKN] bio vredan paznje. Međutim, pravi značaj rada [BKN] je u primenama rezultata koje su se potom dogodile. Da bismo ih opisali, moramo pomenuti vezu ove teoretsko-računarske priče sa univerzalnom algebrom.

Prvo, relacijske strukture se mogu povezati sa operacijskim strukturama na istom skupu preko *kompatibilnosti.* Relacija arnosti k je kompatibilna sa operacijom arnosti n akko se svakih n k-torki koje su u relaciji slikaju koordinatu-po-koordinatu u k-torku vrednosti operacije koja je takođe u relaciji. Kompatibilnost nam daje jedno zatvorenje skupova relacija Σ na istom skupu (konstruišemo sve operacije $Pol(\Sigma)$ koje su kompatibilne sa svakom relacijom iz Σ, pa onda sve relacije kompatibilne sa svakom takvom operacijom u $Pol(\Sigma)$). Dobijeni zatvoreni skup relacija zove se *relacijski klon* generisan sa Σ. Slično, ako pođemo od skupa operacija $\mathcal{F}$, zatim konstruišemo skup svih relacija $Inv(\mathcal{F})$ koje su kompatibilne sa svakom operacijom iz $\mathcal{F}$, pa onda sve operacije kompatibilne sa svakom takvom relacijom u $Inv(\mathcal{F})$, dobijeni skup operacija zove se *klon* generisan sa $\mathcal{F}$. Ova veza funkcioniše kao potpuna Galoa-veza ako je skup na kojem radimo konačan na osnovu radova [BKKR] i [G]. Relacijski klon generisan sa Σ se može tada predstaviti tačno kao sve relacije koje su definabilne pomoću primitivno-pozitivnih definicija koristeći relacije iz Σ, dok je klon generisan sa $\mathcal{F}$ skup svih operacija koji se mogu dobiti of $\mathcal{F}$ ako dodamo sve projekcije (jer svaka projekcija je kompatibilna sa svakom relacijom!) i zatvorimo za sve moguće kompozicije.

Inače, operacije u $Pol(H)$ zovu se *polimorfizmi* relacijske strukture H, dok se relacije u $Inv(\mathcal{F})$ zovu invarijantne relacije, ili podalgebre od stepena, algebre $(A, \mathcal{F})$.

Usput, problem CSP se može predstaviti ekvivalentno i na još jedan način: kao zadovoljivost ulaznih primitivno-pozitivnih formula u fiksiranom konačnom modelu (dakle, ulaz postaje formula umesto konačnog modela), što nam daje naznaku da je način razmišljanja preko relacijskih klonova takav da se ne gubi na opštosti. To je i dokazao Jeavons u [J]. Bez ulaženja u preciznu formulaciju njegovog rezultata, možemo reći da algebra $Pol(H)$ u potpunosti kontroliše složenost problema $Pol(H)$.

No, i jače i mnogo korisnije tvrđenje je tačno, kao što su dokazali Bulatov, Jeavons i Krokhin u [BJK]. Pretpostavimo da H ima endomorfizam na podgraf H'. Onda za svaki graf G, postoji homomorfizam iz G u H akko postoji homomorfizam iz G u H', tj. problemi $CSP(H)$ i $CSP(H')$ prihvataju isti skup grafova. Dakle, možemo pretpostaviti da je H jezgro, tj. da su svi endomorfizmi grafa H permutacije (automorfizmi). U [BJK] je dokazano da za svaku relacijsku strukturu H koja je jezgro, $CSP(H)$ je polinomno ekvivalentan sa problemom $CSP(H^c)$, gde je H^c relacijska struktura koja se dobija od H kad se u jezik doda po jedna nova unarna relacija ρ_c za svaki element c strukture H i ta ρ_c se interpretira kao $\{c\}$. Sada se $Pol(H^c)$ sastoji samo od onih operacija u $Pol(H)$ koje svaki jednoelementni skup tretiraju kao podalgebru, tj. koje zadovoljavaju $f(x, x, \ldots, x) = x$ za sve x u nosaču A strukture H. Bulatov, Jeavons i Krokhin su time sveli problem $CSP(H)$ na istraživanje idempotentnih polimorfizama strukture H, u slučaju kad je H jezgro. Oni rešavaju i jedan od slučajeva odmah. Dajemo formulaciju njihovog rezultata koja uzima u obzir Tejlorovu (Taylor) karakterizaciju varijeteta sa netrivijalnim Maljcevljevim uslovima [T]:

Definicija 1.2 *Idempotentna operacija $f(x_1, \ldots, x_n)$ na skupu A je Tejlorova operacija ako algebra (A, f) zadovoljava n identiteta oblika*

$$f(x_{i1}, \ldots, x_{in}) = f(y_{i1}, \ldots, y_{in})$$

gde $x_{ij}, y_{ij} \in \{x, y\}$, $x_{ii} = x$ i $y_{ii} = y$ za sve $1 \leq i, j \leq n$.

Teorema 1.3 *[BJK] Ako $Pol(H)$ ne sadrži Tejlorovu operaciju, onda je $CSP(H)$ NP-kompletan problem.*

U [BJK] je postavljena i hipoteza da i suprotan smer gornje teoreme važi, tj. da je za sve strukture H sa Tejlorovim polimorfizmom problem $CSP(H)$ u klasi P. Ovo se zove Algebarska hipoteza o dihotomiji i ona pojačava hipotezu Federa i Vardija tako što postulira ne samo dve klase složenosti, nego i gde je granica među njima.

Na osnovu rezultata Marotija i Mekenzija [MM], Tejlorov polimorfizam u gornjem rezultatu i hipotezi se može zameniti sa wnu polimorfizmom, koji definišemo kasnije. Sad možemo dati kratak pregled primena rezultata koji predstavljamo:

U periodu od objavljivanja Algebarske hipoteze o dihotomiji 2000. godine do danas, dokazani su mnogi parcijalni rezultati. Od tih parcijalnih rezultata izdvajamo one koje se bave algoritmima ograničene širine [BK1] i [BK3], i koji su koristili rezultat koji predstavljamo u ovom radu. U [BK1] se dokazuje Algebarska hipoteza o dihotomiji za relacijske strukture H koji imaju Jonsonove polimorfizme, odnosno one u kojima algebra $Pol(H)$ generiše kongruencijski distributivan varijetet. U [BK3] se isti rezultat uopštava na relacijske strukture H koji imaju Vilardove polimorfizme, odnosno one u kojima algebra $Pol(H)$ generiše kongruencijski $\wedge$-semidistributivan varijetet i dokazuje se (koristeći raniji rezultat Laroza i Zadorija [LZ]) da je to najšira klasa struktura H u kojima radi algoritam ograničene širine. Oba rada, [BK1] i [BK3] suštinski koriste glavne rezultate rada [BKN] koji prikazujemo. Naime, tu se koriste grafovi koji su definabilni na nekim podstrukturama od H i koji su glatki. Biraju se takvi grafovi koji imaju algebarsku dužinu 1. Onda se napravila bolja aproksimacija rešenja gde se umesto te podstrukture uzima manja podstruktura u kojoj je dati graf refleksivna relacija (videti Definiciju 1.22 i Teoremu 3.1 za objašnjenje algebarske dužine i razloga zašto moraju da postoje petlje).

Druga primena rada [BKN] je u univerzalnoj algebri. Konkretno, Teorema 3.1 pomaže u nalaženju još boljih ekvivalentnih uslova za lokalno konačne varijetete koji imaju Tejlorovu ili wnu term operaciju. Tu su glavni rezultati koji koriste [BKN] radovi [BK2], [S] i [KMM]. U radu [BK2] se dokazuje da se wnu operacije mogu zameniti sa jačim uslovom, tzv *cikličkim* operacijama $t(x_1, \ldots, x_n)$ koji sem idempotentnosti zadovoljavaju identitet $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. U [S] se ista klasa lokalno konačnih varijeteta karakteriše sa postojanjem idempotentne term operacije arnosti 6 koja zadovoljava još i identitete $t(x, x, x, x, y, y) = t(x, y, x, y, x, x)$ i $t(y, y, x, x, x, x) = t(x, x, y, x, y, x)$. Siggers je u dokazu koristio rezultate rada [HN1]. U [KMM] se isti varijeteti karakterišu sa postojanjem idempotentne term operacije arnosti 4 koja zadovoljava još i identitet $t(x, y, z, y) = t(y, z, x, x)$. Ideja je skoro ista kao Siggersova, ali se primenjuje jači rezultat [BKN] umesto [HN1], pa je i dobijena karakterizacija jača.

Sada ćemo definisati osnovne pojmove iz univerzalne algebre i teorije grafova koji će nam biti neophodni u nastavku.

1.1 Elementi univerzalne algebre

Definicija 1.4 *Neka je A neprazan skup i n nenegativan ceo broj. Tada je $A^0 = \{\emptyset\}$, a za $n > 0$, A^n je skup n-torki elemenata iz A. Funkciju $f : A^n \to A$ nazivamo* **n-arna operacija** *na A, a broj n je* **arnost** *od f. Operacija f na A je* **nularna** *operacija (ili* **konstanta***) ako je njena arnost nula; operacija je* **unarna**, **binarna**, *ili* **ternarna** *ako je njena arnost 1,2, ili 3, respektivno.*

Definicija 1.5 **Jezik** *algebri je skup* **funkcijskih simbola** *$\mathcal{F}$ sa pridruženim nenegativnim celim brojem za svako f iz $\mathcal{F}$. Taj broj se naziva* **arnost** *od f, i za f kažemo da je* **n-arni funkcijski simbol**. *Skup svih n-arnih funkcijskih simbola iz $\mathcal{F}$ označavamo sa $\mathcal{F}_n$.*

Definicija 1.6 *Ako je $\mathcal{F}$ jezik algebri onda je* **algebra A** *na jeziku $\mathcal{F}$ uređeni par (A, F), gde je A neprazan skup i F familija konačnih operacija na A indeksirana jezikom $\mathcal{F}$ tako da svakom n-arnom funkcijskom simbolu f iz $\mathcal{F}$ odgovara n-arna operacija $f^{\mathbf{A}}$ na A. Skup A se naziva* **univerzum** *(ili* **nosač***) od $\mathbf{A} = (A, F)$, a funkcije $f^{\mathbf{A}}$ su* **fundamentalne operacije**.

Ako je $\mathcal{F}$ konačan, recimo $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$, obično pišemo $(A, f_1, \ldots, f_k)$ umesto (A, F), uz uslov:

$$arnost\ f_1 \geq arnost\ f_2 \geq \cdots \geq arnost\ f_k.$$

Navedimo primer jedne algebre.

Primer 1.7 *Grupa* $\mathbf{G}$ *je algebra* $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ *sa binarnom, unarnom i nularnom operacijom, tako da su zadovoljeni identiteti:*

(G1) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$

(G2) $x \cdot 1 \approx 1 \cdot x \approx x$

(G3) $x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x \approx 1$

Grupa $\mathbf{G}$ *je Abelova ako važi sledeći identitet:*

(G4) $x \cdot y \approx y \cdot x.$

Definicija 1.8 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *dve algebre na istom jeziku. Algebra* $\mathbf{B}$ *je* **podalgebra** *od* $\mathbf{A}$ *ako je* $B \subseteq A$ *i svaka fundamentalna operacija algebre* $\mathbf{B}$ *je restrikcija odgovarajuće operacije iz* $\mathbf{A}$.

Definicija 1.9 *Za* $B \subseteq A$ *kažemo da je* **poduniverzum** *od* $\mathbf{A}$ *ako je zatvoren za fundamentalne operacije iz* $\mathbf{A}$*, tj. ako je* f n*-arna fundamentalna operacija algebre* $\mathbf{A}$ *i* $a_1, \ldots, a_n \in B$*, onda* $f(a_1, \ldots, a_n) \in B$.

Dakle, ako je $\mathbf{B}$ podalgebra od $\mathbf{A}$, onda je B poduniverzum od $\mathbf{A}$. Primetimo da prazan skup može biti poduniverzum, ali ne može biti nosač neke podalgebre.

Definicija 1.10 *Neka su* $\mathbf{A}_1$ *i* $\mathbf{A}_2$ *dve algebre na istom jeziku* $\mathcal{F}$*. Definišemo* **direktni proizvod** $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ *kao algebru čiji je nosač skup* $A_1 \times A_2$*, a za* $f \in \mathcal{F}_n$ *i* $a_i \in A_1$*,* $a'_i \in A_2$*,* $1 \leq i \leq n$*,*

$$f^{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}((a_1, a'_1), \ldots, (a_n, a'_n)) = (f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, \ldots, a'_n)).$$

Biće nam potrebni i pojmovi iz sledećih definicija.

Definicija 1.11 *Neka je* X *skup objekata koje zovemo* **promenljive** *i neka je* $\mathcal{F}$ *jezik algebri. Skup* $T(X)$ **terma** *na jeziku* $\mathcal{F}$ *nad* X *je najmanji skup za koji važe uslovi:*

(i) $X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq T(X)$.

(ii) *Ako* $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ *i* $f \in \mathcal{F}_n$, *onda je "izraz"* $f(p_1, \ldots, p_n)$ *u* $T(X)$.

Definicija 1.12 *Za dati term* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *na jeziku* $\mathcal{F}$ *nad nekim skupom* X *i za datu algebru* $\mathbf{A}$ *na jeziku* $\mathcal{F}$, *definišemo preslikavanje* $p^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ *na sledeći način:*

(1) *ako je* p *promenjliva* x_i, *onda*

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$

za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(2) *ako je* p *oblika* $f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$, *gde* $f \in \mathcal{F}_k$, *onda*

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Obično se piše p umesto $p^{\mathbf{A}}$ jer je iz konteksta jasno da se radi o operaciji.

1.2 Elementi teorije grafova

Definišimo neke od osnovnih pojmova o matematičkim objektima koje nazivamo grafovima, tačnije digrafovima (od *e*ng.directed graph).

Definicija 1.13 **Digraf G** *je uređeni par* $\mathbf{G} = (V, E)$ *gde je* V *skup* **čvorova** *i* $E \subseteq V \times V$ *skup* **grana**.

Ponekad za dati digraf $\mathbf{G} = (V, E)$, skup čvorova obeležavamo sa $V(\mathbf{G})$, a skup grana sa $E(\mathbf{G})$.
Za digraf $\mathbf{G} = (V, E)$ granu $(a, b) \in E$ ćemo obeležavati sa $a \to b$. Kažemo da je grana (a, b) izlazna za čvor a i ulazna za čvor b.

Definicija 1.14 *Čvor digrafa je* **izvor** *(resp.* **ponor***) ako nema ulaznih (resp. izlaznih) grana.*

U ovom radu ćemo raditi isključivo sa konačnim digrafovima koji nemaju izvora i ponora, i zvaćemo ih **glatki** grafovi.
Za $a \in V$ granu (a, a) ćemo zvati **petlja**.

Definicija 1.15 *Alternirajući niz čvorova i grana* $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ *digrafa* $\mathbf{G}$ *takvih da je za svako* $1 \leq i \leq k$*,* e_i *grana koja povezuje* v_{i-1} *i* v_i *nazivamo* **put**. *Ako za svako* $1 \leq i \leq k$ *važi* $v_{i-1} \to v_i$ *onda je to* **usmereni** *put. Broj* k *nazivamo* **dužina** *puta.*

Primetimo da prethodna definicija dozvoljava ponavljanje čvorova odnosno grana.
Put je **zatvoren** ako važi $v_0 = v_k$. Zatvoreni usmereni put ćemo zvati **ciklus**, a ako se u ciklusu ne ponavljaju čvorovi (osim početnog, odnosno krajnjeg) onda je to **kontura**.

Definicija 1.16 *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *proizvoljni digrafovi. Funkcija* $f : V(\mathbf{G}) \to V(\mathbf{H})$ *je* **homomorfizam G** *u* **H** *ako je zadovoljena implikacija:*

$$(a, b) \in E(\mathbf{G}) \Rightarrow (f(a), f(b)) \in E(\mathbf{H}) \text{ za sve } a, b \in V(\mathbf{G}).$$

Naravno, homomorfizam digrafa na samog sebe je **endomorfizam**.

Definicija 1.17 *Digraf* $\mathbf{G} = (V, E)$ *se* **retraktuje** *na indukovan podgraf* $\mathbf{H} = (W, F)$ *ako postoji endomorfizam* $h : V \to V$ *tako da je* $h(V) = W$ *i* $h(a) = a$ *za sve* $a \in W$*. Ovakvo preslikavanje* h *nazivamo* **retrakcija**.

Definicija 1.18 *Minimalan indukovan podgraf na koji se digraf retraktuje se naziva* **jezgro** *digrafa.*

Sada ćemo uvesti notaciju koja će nam biti od koristi u nastavku rada. Koristićemo oznaku $a \xrightarrow{k} b$ da kažemo da postoji usmeren put od čvora a do čvora b dužine k. Generalno, za proizvoljan put α, sa krajnjim čvorovima c i d, pišemo $a \xrightarrow{\alpha} b$ ako postoji homomorfizam φ iz α u $\mathbf{G}$ tako da je $\varphi(c) = a$ i $\varphi(d) = b$. Za $W \subseteq V$ definišemo

$$W^{+n} = \{v \in V \mid (\exists w \in W)\, w \xrightarrow{n} v\}$$

i slično

$$W^{-n} = \{v \in V \mid (\exists w \in W)\, v \xrightarrow{n} w\}.$$

Definišemo $W^0 = W$ i pisaćemo a^{+n} (ili a^{-n}, a^0) umesto $\{a\}^{+n}$ ($\{a\}^{-n}$, $\{a\}^0$ respektivno) za $a \in V$. Generalno, za put α, uvodimo

$$W^{\alpha} = \{v \in V \mid (\exists w \in W)\, w \xrightarrow{\alpha} v\}.$$

Ponekad, zbog kraćeg zapisa, koristimo oznaku $a \xrightarrow{k,n} b$ umesto $a \xrightarrow{k} b$ i $a \xrightarrow{n} b$.

Definicija 1.19 *Neka je* $\mathbf{G} = (V, E)$ *digraf i* α *put.* **Putni stepen** *digrafa* $\mathbf{G}$, *u oznaci* $\mathbf{G}^{\alpha}$, *je digraf za koga važi:*

(i) $V(\mathbf{G}^{\alpha}) = V(\mathbf{G})$

(ii) $(c, d) \in E(\mathbf{G}^{\alpha})$ *ako i samo ako* $c \xrightarrow{\alpha} d$ *u* $\mathbf{G}$.

Za usmereni put α dužine n definišemo $\mathbf{G}^{+n} = \mathbf{G}^{\alpha}$.

Definicija 1.20 *Digraf je* **povezan** *(resp.* **jako povezan***) ako za bilo koja dva njegova čvora postoji put (resp. usmeren put), sa bar jednom granom, koji ih povezuje.*

Maksimalan (u smislu inkluzije) indukovan podgraf je koji je povezan (resp. jako povezan) zovemo **komponenta** (resp. **jaka komponenta**) digrafa. Trivijalno, iz jake povezanosti sledi povezanost.

Definicija 1.21 *Za dati digraf* $\mathbf{G}$ *bez izvora i ponora, kažemo da je jaka komponenta* $\mathbf{H}$ *od* $\mathbf{G}$ **gornja komponenta** *ako je* $V(\mathbf{H})^{+1} = V(\mathbf{H})$. *Slično, jaka komponenta* $\mathbf{H}$ *je* **donja komponenta** *ako je* $V(\mathbf{H})^{-1} = V(\mathbf{H})$.

Definicija 1.22 *Za proizvoljan put* α *definišemo* **algebarsku dužinu** $al(\alpha)$ *kao*

$$al(\alpha) = |\{grane\ prema\ napred\ u\ \alpha\}| - |\{grane\ prema\ nazad\ u\ \alpha\}|.$$

Za $\mathbf{G} = (V, E)$ možemo definisati algebarsku dužinu digrafa

$$al(\mathbf{G}) = \min\{i > 0 \mid (\exists v \in V)(\exists\ put\ \alpha)\ v \xrightarrow{\alpha} v\ i\ al(\alpha) = i\},$$

kada je skup sa desne strane neprazan, a ∞ u suprotnom.

Tvrđenje 1.23 *Algebarska dužina nepraznog digrafa bez izvora i ponora je prirodan broj.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljan čvor $a_0 \in V$. Kako graf nema ponora onda postoji $a_1 \in V$ tako da $a_0 \to a_1$. Nastavljajući postupak, a uzimajući u obzir da je u pitanju konačan digraf, mora doći do ponavljanja čvorova. Ako je $a_n = a_k$, za neko $1 \leq k \leq n-2$, prvi čvor koji se ponavlja onda imamo konturu $a_k \to a_{k+1} \to \cdots \to a_k$. Algebarska dužina konture je pozitivna, pa samim tim i algebarska dužina digrafa. $\square$

Tvrđenje 1.24 *Povezan digraf* $\mathbf{G}$ *se retraktuje na konturu ako i samo ako postoji kontura u* $\mathbf{G}$ *dužine* $al(\mathbf{G})$.

Dokaz. Neka se digraf $\mathbf{G}$ retraktuje na neku konturu dužine k. Pokazaćemo da je $al(\mathbf{G}) = k$. Pretpostavimo suprotno tj. $k > al(\mathbf{G})$. Posmatrajmo neki zatvoreni put $a \xrightarrow{\alpha} a$ gde je $al(\alpha) = al(\mathbf{G})$. Neka se retrakcijom čvor a slika u čvor b na konturi. Preslikajmo redom sve čvorove iz $a \xrightarrow{\alpha} a$ sem poslednjeg, recimo c. Slika čvora c na konturi je na rastojanju $al(\mathbf{G}) + 1$ od čvora b ako $a \to c$ u α, odnosno $al(\mathbf{G}) - 1$ ako $c \to a$. Međutim, kako je $k \geq al(\mathbf{G}) + 1$ onda slika čvora a ne može biti b. Kontradikcija.

S druge strane, ako u digrafu $\mathbf{G}$ postoji kontura dužine $al(\mathbf{G})$ konstruisaćemo retrakciju na istu. Neka je a neki fiksiran čvor na toj konturi. Digraf je povezan, pa za proizvoljan čvor b van konture postoji put do čvora a. Ako je k algebarska dužina puta od b do a, čvor b preslikavamo u čvor c na konturi za koji važi $c \xrightarrow{k} a$. Moramo dokazati da je preslikavanje dobro definisano. Pretpostavimo da imamo dva puta koja spajaju b sa a. Ako bi algebarske dužine tih puteva davale različite ostatke pri deljenju sa $al(\mathbf{G})$ onda bi mogli konstruisati zatvoren put čija je algebarska dužina manja od dužine konture, što je nemoguće. Dakle, algebarske dužine puteva od b do a su jednake po modulu $al(\mathbf{G})$. To nam odgovara jer je tada slika čvora b jedinstveno određena. Definisano preslikavanje je očigledno homomorfizam, pa je dokaz gotov. □

U narednim tvrđenjima fokusiraćemo se na vezu između digrafova i putnih stepena.

Lema 1.25 *Neka je* $\mathbf{G}$ *digraf bez izvora i ponora. Neka je* α *put algebarske dužine* k *i* $a \xrightarrow{\alpha} b$ *u* $\mathbf{G}$. *Onda je* $a \xrightarrow{\beta} b$ *u* $\mathbf{G}^{+k}$ *za neki put* β *algebarske dužine jedan.*

Dokaz. Posmatrajmo za fiksiran, dovoljno veliki broj j, sve puteve oblika $a \xrightarrow{l_1} a_1 \xleftarrow{l_2} a_2 \xrightarrow{l_3} \cdots \rightleftarrows a_{l_j} = b$ gde je $l_1 - l_2 + \cdots \pm l_j = k$. Izaberimo put takav da k deli svako l_i, $1 \leq i \leq i_0$, gde je i_0 maksimalno.
Ako je $i_0 + 1 < j$ onda ako pretpostavimo (bez umanjenja opštosti) da je i_0 neparan, put

$$a \xrightarrow{l_1} \cdots \xrightarrow{l_{i_0}} a_{i_0} \xleftarrow{l_{i_0+1}} a_{i_0+1} \xrightarrow{l_{i_0+2}} a_{i_0+2} \cdots$$

možemo izmeniti koristeći uslov da digraf nema izvora. Naime, postoji čvor a'_{i_0+1} takav $a_{i_0} \xleftarrow{l_{i_0+1}} a_{i_0+1} \xleftarrow{l} a'_{i_0+1}$ i $l_{i_0+1} + l$ je deljivo sa k. Sada modifikovani put izgleda ovako

$$a \xrightarrow{l_1} \cdots \xrightarrow{l_{i_0}} a_{i_0} \xleftarrow{l'_{i_0+1}} a'_{i_0+1} \xrightarrow{l'_{i_0+2}} a_{i_0+2} \cdots$$

gde je $l'_{i_0+2} = l + l_{i_0+2}$. Međutim, l'_{i_0+1} je veće od l_{i_0+1} i deljivo sa k, što je u kontradikciji sa izborom i_0.
Pretpostavimo sada da je $i_0 + 1 = j$. Kako je $l_1 - l_2 + \cdots \pm l_{i_0}$ deljivo sa k i kako je $l_1 - l_2 + \cdots \pm l_{i_0} \mp l_{i_0+1} = k$ zaključujemo da k deli l_{i_0+1}, što je opet u kontradikciji sa izborom i_0.
Imamo da je $i_0 = j$ i možemo naći put

$$a \xrightarrow{l_1} a_1 \xleftarrow{l_2} a_2 \xrightarrow{l_3} \cdots a_{l_j} = b$$

gde je $l_1 - l_2 + \cdots \pm l_j = k$ i svako l_i je deljivo sa k. Ako je $l'_i = l_i/k$, $1 \leq i \leq j$, onda je

$$a \xrightarrow{l'_1} a_1 \xleftarrow{l'_2} a_2 \xrightarrow{l'_3} \cdots a_{l_j} = b$$

put algebarske dužine jedan u $\mathbf{G}^{+k}$. □

Posledica 1.26 *Neka je* $\mathbf{G}$ *digraf, bez izvora i ponora, i neka* $al(\mathbf{G}) = 1$. *Onda je* $al(\mathbf{G}^{+k}) = 1$ *za proizvoljan prirodan broj* k.

Dokaz. Neka je $a \xrightarrow{\alpha} a$, gde je α put algebarske dužine jedan. Ako k puta pređemo put α dobijamo $a \xrightarrow{\beta} a$ put algebarske dužine k. Sada iz prethodne leme direktno sledi tvrđenje. □

U narednih nekoliko lema i posledica dokazujemo neke zanimljive osobine (jako) povezanih digrafova.

Lema 1.27 *Neka je* c *čvor jako povezanog digrafa. Najveći zajednički delilac (NZD) dužina ciklusa u digrafu jednak je NZD dužina ciklusa koji sadrže čvor* c.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je broj n', NZD dužina ciklusa koji sadrže c, veći od NZD dužina ciklusa u celom grafu. Onda postoji ciklus $d \xrightarrow{l} d$ takav da n' ne deli l. S druge strane, kako je digraf jako povezan, imamo $c \xrightarrow{l'} d$ i $d \xrightarrow{l''} c$ za neke brojeve l' i l''. Sada imamo $c \xrightarrow{l'} d \xrightarrow{l''} c$ i $c \xrightarrow{l'} d \xrightarrow{l} d \xrightarrow{l''} c$. Prema definciji, n' deli $l' + l''$ i $l' + l + l''$, a samim tim i l. Kontradikcija. □

Tvrđenje 1.28 *Za povezan digraf* $\mathbf{G}$ *i zatvoren put* α *u* $\mathbf{G}$*, broj* $al(\mathbf{G})$ *deli* $al(\alpha)$*.*

Dokaz. Neka je digraf $\mathbf{G}$ povezan i $a \xrightarrow{\alpha} a$ zatvoren put $\mathbf{G}$. Sa b ćemo označiti čvor digrafa takav da je $b \xrightarrow{\beta} b$ put za koji važi $al(\beta) = al(\mathbf{G})$. Kako je $\mathbf{G}$ povezan sledi da postoji put γ takav da $b \xrightarrow{\gamma} a$. Sada imamo $b \xrightarrow{\gamma} a \xrightarrow{\alpha} a \xrightarrow{\gamma'} b$ gde je $al(\gamma') = -al(\gamma)$. Koristeći navedene puteve očigledno je da možemo konstruisati put od b do b, algebarske dužine $al(\alpha) - k \cdot al(\mathbf{G})$, za proizvoljan broj k. Iz minimalnosti $al(\mathbf{G})$ sledi da za neki k_0 važi $al(\alpha) - k_0 \cdot al(\mathbf{G}) = 0$. Time je tvrđenje dokazano. □

Lema 1.29 *Neka je* $\mathbf{G} = (V, E)$ *jako povezan digraf. Ako je NZD dužina ciklusa u* $\mathbf{G}$ *jednak jedan, onda*

$$(\exists m)(\forall a, b \in V)(\forall n) \text{ ako } n \geq m \text{ onda } a \xrightarrow{n} b.$$

Dokaz. Fiksirajmo proizvoljno $c \in V$. Na osnovu leme 1.27 možemo naći i ciklusa koji sadrže čvor c tako da njihove dužine $k_1, \ldots, k_i$ zadovoljavaju $\mathrm{NZD}(k_1, \ldots, k_i) = 1$. Samim tim, čvor c je sadržan u l-ciklusu uvek kada je l linearna kombinacija $k_1, \ldots, k_i$ sa nenegativnim celim koeficijentima. Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ celi brojevi takvi da je $\alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_i k_i = 1$. Prebacivanjem na desnu stranu jednakosti negativnih članova dobijamo dve linearne kombinacije $k_1, \ldots, k_i$, sa koeficijentima prirodnim brojevima, čija je razlika jedan. Pretpostavimo da smo dobili $c \xrightarrow{k} c$ i $c \xrightarrow{k+1} c$. Ciklus $c \xrightarrow{j(k+1)} c$ je dužine j po modulu k za $1 \leq j \leq k-1$. Sada je jasno da za svaki broj $n' \geq m' = (k-1)(k+1)+k = k^2+k-1$ možemo dobiti ciklus koji sadrži c pomoću ciklusa $c \xrightarrow{k} c$, $c \xrightarrow{k+1} c$, $c \xrightarrow{2(k+1)} c,\ldots,c \xrightarrow{(k-1)(k+1)} c$. Sada je dovoljno staviti $m = m' + 2|V|$ jer za proizvoljne čvorove $a, b \in V$ postoje usmereni putevi dužine najviše $|V|$ od a do c i od c do b. □

Trivijalno sledi posledica.

Posledica 1.30 *Neka dat jako povezan digraf* $\mathbf{G}$ *čiji je NZD dužina ciklusa jedan jedan. Onda je za proizvoljan prirodan broj* n *digraf* $\mathbf{G}^{+n}$ *takođe jako povezan.*

Posledica 1.31 *Za jako povezani digraf, NZD dužina ciklusa je jednak algebarskoj dužini digrafa.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G} = (V, E)$ jako povezan digraf i n najveći zajednički delilac dužina ciklusa u $\mathbf{G}$. Na osnovu tvrđenja 1.28 algebarska dužina

digrafa deli dužinu svakog ciklusa u $\mathbf{G}$ pa je $al(\mathbf{G}) \leq n$.
S druge strane, neka je $a = a_0 \xrightarrow{l_0} b_0 \xleftarrow{k_0} a_1 \xrightarrow{l_1} \cdots \xleftarrow{k_{m-1}} a_m = a$ put algebarske dužine $al(\mathbf{G})$. Iz jake povezanosti sledi da za svako i postoji k_i' tako da je $b_i \xleftarrow{k_i} a_{i+1} \xleftarrow{k_i'} b_i$. Kako n deli $k_i + k_i'$ i $\sum_{i<m} l_i + \sum_{i<m} k_i'$ onda deli i $\sum_{i<m} l_i + \sum_{i<m} k_i = al(\mathbf{G})$. Dakle, imamo i $n \leq al(\mathbf{G})$ čime je dokaz završen. □

1.3 Veza grafova i algebri

Definicija 1.32 *Za preslikavanje $f : V^n \to V$ kažemo da je n-arni* **polimorfizam** *digrafa $\mathbf{G} = (V, E)$ ako očuvava grane. Odnosno, za sve $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n) \in E(\mathbf{G})$ važi da $(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in E(\mathbf{G})$.*

Polimorfizam f je **idempotentan** ako je $f(x, x, \ldots, x) = x$ za sve $x \in V$.
Nama će od značaja biti sledeća vrsta idempotentnih polimorfizama.

Definicija 1.33 *Neka je $n \geq 2$. Idempotentni polimorfizam $f : V^n \to V$ je* **slabi skoro jednoglasni** *polimorfizam ako za sve $x, y \in V$ važi*

$$f(y, x, x, \ldots, x) = f(x, y, x, x, \ldots, x) = \cdots = f(x, x, \ldots, x, y).$$

Slabi skoro jednoglasni polimorfizam ćemo u nastavku skraćeno zvati wnu (od eng. weak near unanimity) polimorfizam. Ako je f wnu polimorfizam digrafa $\mathbf{G}$, onda kažemo da je $\mathbf{G}$ kompatibilan sa wnu polimorfizmom f.

Posmatraćemo digraf $\mathbf{G} = (V, E)$ kompatibilan sa wnu polimorfizmom $w : V^h \to V$. Digrafu $\mathbf{G}$ dodeljujemo algebru $\mathbf{A} = (V, w)$. Ako je W poduniverzum algebre $\mathbf{A}$ onda možemo definisati digraf $\mathbf{G}_{|W} = (W, E \cap W \times W)$ koji je kompatibilan sa wnu polimorfizmom $w|_{W^h}$ i algebra $(W, w|_{W^h})$ je podalgebra od $\mathbf{A}$.

Sledećih nekoliko lema nam pokazuje kako možemo dobiti neke poduniverzume algebre $\mathbf{A}$.

Lema 1.34 *Ako je W poduniverzum od $\mathbf{A}$ onda su i skupovi W^{+1} i W^{-1} poduniverzumi od $\mathbf{A}$.*

Dokaz. Izaberimo proizvoljne $a_0, \dots, a_{h-1}$ iz W^{+1}. Sada možemo naći $b_0, b_1, \dots b_{h-1} \in W$ tako da $b_i \to a_i$ za $0 \le i \le h-1$. Onda je $w(b_0, \dots, b_{h-1}) \to w(a_0, \dots, a_{h-1})$ odnosno $w(a_0, \dots, a_{h-1}) \in W^{+1}$. Slično je za W^{-1}. $\square$

Kako je wnu polimorfizam idempotentan, svi jednoelementni podskupovi od V su poduniverzumi algebre $\mathbf{A}$. Sada na osnovu prethodne leme trivijalno sledi:

Posledica 1.35 *Za svaki čvor $a \in V$, svaki put α i svaki prirodan broj n skupovi a^{+n}, a^{-n} i a^{α} su poduniverzumi od $\mathbf{A}$.*

Lema 1.36 *Neka je $\mathbf{H}$ jaka komponenta digrafa $\mathbf{G}$. Ako je NZD dužina ciklusa u $\mathbf{H}$ jednak jedan, onda je $V(\mathbf{H})$ poduniverzum od $\mathbf{A}$.*

Dokaz. Lema 1.29 nam garantuje postojanje broja m za koga postoji usmeren put $b \xrightarrow{m} c$ u $\mathbf{H}$, za sve $b, c \in V(\mathbf{H})$. Fiksirajmo neki čvor $a \in V(\mathbf{H})$. Postoji usmereni putevi $a \xrightarrow{m} b$ i $c \xrightarrow{m} a$ za sve $b, c \in V(\mathbf{H})$. Ovim smo pokazli da je skup $V(\mathbf{H}) = a^{+n} \cap a^{-n}$, pa je kao presek poduniverzuma i sam poduniverzum. $\square$

Lema 1.37 *Ako je $\mathbf{H} = (W, F)$ najveći indukovan podgraf bez izvora i ponora digrafa $\mathbf{G}$, onda je W poduniverzum od $\mathbf{A}$.*

Dokaz. Kako je $\mathbf{H}$ najveći indukovan podgraf bez izvora i ponora, njegovi čvorovi su tačno oni čvorovi od $\mathbf{G}$ za koje postoje proizvoljno dugi putevi iz njih i u njih. $\mathbf{G}$ je konačan pa postoji prirodan broj k takav da je

$$W = \{w \mid (\exists v, v' \in V)\ v \xrightarrow{k} w \text{ i } w \xrightarrow{k} v'\}.$$

Odnosno, $W = V^{+k} \cap V^{-k}$. Ovim smo dokazali da je W poduniverzum jer je presek dva poduniverzuma. $\square$

Poglavlje 2

Jako povezan slučaj

Dokazujemo centralnu teoremu rada [BKN] u slučaju jako povezanih digrafova.

Teorema 2.1 *Ako jako povezani digraf algebarske dužine k kompatibilan sa wnu polimorfizmom, onda sadrži konturu dužine k.*

Ova teorema je posledica niza lema i tvrđenja iz prethodnog poglavlja, ali i sledeće teoreme:

Teorema 2.2 *Ako jako povezani digraf algebarske dužine jedan kompatibilan sa wnu polimorfizmom, onda sadrži petlju.*

Prvo ćemo dokazati teoremu 2.1 koristeći teoremu 2.2 čiji ćemo dokaz dati u nastavku.

Dokaz teoreme 2.1. Fiksirajmo proizvoljan čvor c u jako povezanom digrafu $\mathbf{G}$ algebarske dužine k. Iz leme 1.27 i posledice 1.31 imamo da je NZD dužina ciklusa koji sadrže c jednak k. Dakle, u putnom stepenu $\mathbf{G}^{+k}$, NZD dužina ciklusa koji sadrže c je jedan. Neka je $\mathbf{H}$ jaka komponenta digrafa $\mathbf{G}^{+k}$ koja sadrži čvor c. Na osnovu leme 1.36 zaključujemo da je $V(\mathbf{H})$ poduniverzum algebre $(V(\mathbf{G}^{+k}), w)$ pa dopušta wnu polimorfizam. Algebarska dužina digrafa $\mathbf{H}$ je jedan jer su svi ciklusi koji sadrže c u $\mathbf{H}$ i važi posledica 1.31. Na osnovu teoreme 2.2 postoji petlja u $\mathbf{G}^{+k}$, odnosno postoji ciklus dužine k u $\mathbf{G}$. Taj ciklus je zapravo kontura jer bi u suprotnom postojao ciklus kraći od k, a to je nemoguće. $\square$

Posvetimo se sada dokazivanju teoreme 2.2. Pretpostavićemo suprotno, tj. da postoji kontraprimer. Izaberimo minimalan (po broju čvorova) digraf $\mathbf{G} = (V, E)$ koji je kontraprimer. Fiksiramo wnu polimorfizam $w(x_0, \ldots, x_{h-1})$ digrafa $\mathbf{G}$ i pridružimo odgovarajuću algebru $\mathbf{A} = (V, w)$. Za dokaz će nam trebati niz tvrđenja.

Tvrđenje 2.3 *Digraf* $\mathbf{G}$ *se može izabrati tako da sadrži konturu dužine dva.*

Dokaz. Neka je k minimalan prirodan broj takav da je neki ciklus dužine 2^k sadržan u $\mathbf{G}$. Takvo k postoji na osnovu leme 1.29. Putni stepen $\mathbf{G}^{+2^{k-1}}$ sadrži ciklus dužine dva. Kako smo izabrali k da bude minimalno, i kako $\mathbf{G}$ ne sadrži petlju, onda ni $\mathbf{G}^{+2^{k-1}}$ ne sadrži petlju. Digraf $\mathbf{G}$ je jako povezan i NZD njegovih ciklusa je jedan, pa je na osnovu posledice 1.30 i njegov putni stepen $\mathbf{G}^{+2^{k-1}}$ jako povezan. Iz posledice 1.26 sledi da je $al(\mathbf{G}^{+2^{k-1}}) = 1$. Uzimajući u obzir i to da je putni stepen kompatibilan sa wnu polimorfizmom, zaključujemo da je i $\mathbf{G}^{+2^{k-1}}$ kontraprimer za teoremu 2.2. S obzirom da ima isti broj čvorova kao $\mathbf{G}$, digraf $\mathbf{G}^{+2^{k-1}}$ možemo uzeti umesto $\mathbf{G}$. $\square$

Prethodno tvrđenje nam obezbeđuje postojanje ciklusa dužine dva. Taj ciklus ćemo zvati **neorijentisana grana**. Naredno tvrđenje će nam omogućiti fiksiranje neorijentisane grane sa određenom osobinom. Napomenimo još jednom da su fiksirani digraf $\mathbf{G}$, wnu polimorfizam w, a samim tim i pridružena algebra $\mathbf{A}$.

Tvrđenje 2.4 *U digrafu* $\mathbf{G}$ *postoje čvorovi* a *i* b *koji formiraju neorijentisanu granu, i binarni term* t *algebre* $\mathbf{A}$ *takav da je* $a = t(w(\overline{a}, b), w(\overline{b}, a))$.

Dokaz. Neka je $M \subseteq V$ minimalan (u smislu inkluzije) poduniverzum od $\mathbf{A}$ koji sadrži neorijentisanu granu. Označimo sa a i b, $a, b \in M$, čvorove jedne takve grane. Iz osobine polimorfizma dobijamo da čvorovi $w(\overline{a}, b), w(\overline{b}, a) \in M$ formiraju neorijentisanu granu. Zbog minimalnosti M zaključujemo da skup $\{w(\overline{a}, b), w(\overline{b}, a)\}$ generiše M. Samim tim, postoji term t takav da je $t(w(\overline{a}, b), w(\overline{b}, a)) = a$. $\square$

Kao što smo najavili, fiksiramo čvorove a i b iz neorijentisane grane, te term $t(x, y)$ za koji važi $t(w(\overline{a}, b), w(\overline{b}, a)) = a$. Takođe napomenimo da na osnovu osobine wnu operacije važi $a = t(w^{(i)}(\overline{a}, b), w^{(j)}(\overline{b}, a))$ za sve $i, j < h$.
Fiksirajmo i minimalan prirodan broj n za koji je $a^{+(n+1)} = V$. Njegovo

postojanje nam garantuje lema 1.29. Neka je $\mathbf{H} = (W, F)$ indukovan podgraf digrafa $\mathbf{G}$ takav da je $W = a^{+n}$ i $F = (W \times W) \cap E$. Iz posledice 1.35 je jasno da je W poduniverzum od $\mathbf{A}$, pa je $\mathbf{H}$ kompatibilan sa wnu polimorfizmom. U nastavku ćemo dokazati postojanje jake komponente algebarske dužine jedan digrafa $\mathbf{H}$ što će biti u kontradikciji sa minimalnošću $\mathbf{G}$.

Tvrđenje 2.5 *Za proizvoljan čvor iz W postoji ciklus u $\mathbf{H}$ i usmereni put (isto u $\mathbf{H}$) koji povezuje ciklus sa datim čvorom.*

Dokaz. Neka je v_0 proizvoljan čvor iz W. Kako je $a^{+(n+1)} = W^{+1} = V$ postoji $v_1 \in W$ tako da je $v_1 \to v_0$. Opet, postoji $v_2 \in W$ takav da $v_2 \to v_1$. Nastavljajući postupak, zbog konačnosti digrafa, dolazi do ponavljanja nekog čvora. Time je dokaz završen. □

Tvrđenje 2.6 *Postoje čvorovi $c, c' \in W$ i prirodan broj k takvi da:*

(1) $c' \to a$,

(2) $c \xrightarrow{k} c$ *u* $\mathbf{H}$,

(3) $c \xrightarrow{k-n-1} c'$ *u* $\mathbf{H}$.

Dokaz. Iz $W^{+1} = V$ sledi da postoji čvor $c' \in W$ takav da je $c' \to a$. Neka je l dužina ciklusa koji se dobija primenom prethodnog tvrđenja na čvor $c' \in W$. Ako je n' dužina puta koji spaja dati ciklus sa čvorom c' onda za k umonžak od l, takav da je $k \geq n' + n + 1$, imamo usmeren put u $\mathbf{H}$ dužine $k - n - 1$ od nekog čvora ciklusa do c'. Taj čvor iz ciklusa označavamo sa c i tvrđenje je dokazano. □

Čvorove c i c', kao i broj k, iz upravo dokazanog tvrđenja fiksiramo jer će nam biti potrebni u nastavku. Naredna tvrđenja daće nam više informacija o strukturi jake komponente u $\mathbf{H}$ koja sadrži čvor c.

Tvrđenje 2.7 *Za svaki broj $m \leq n$ ili je $a^{+m} \subseteq a^{+n}$ ili $a^{+m} \subseteq b^{+n}$.*

Dokaz. Čvor a se nalazi u ciklusu dužine dva, pa očigledno važi $a^{+n} \supseteq a^{+(n-2)} \supseteq a^{+(n-4)} \ldots$, što dokazuje tvrđenje u slučaju kad je m parno. Za neparno m važi $b^{+n} \supseteq a^{+(n-1)} \supseteq a^{+(n-3)} \ldots$, pa je i taj slučaj dokazan. □

U nastavku ćemo sa $\overline{a}$ obeležavati torku $(a, a, \dots, a)$ čija će arnost biti jasna iz konteksta, a sa $\overrightarrow{a}$ torku $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Notaciju $\overline{a}$ proširujemo i na skupove u smislu da ćemo sa $\overline{W}$ obeležavati odgovarajući direktni stepen skupa W. Takođe, za term t arnosti n, definišemo

$$t^{(i)}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = t(x_{n-i}, x_{n-i+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_{n-i-1}),$$

za sve $0 \leq i < n$.

Sledeća dva tvrđenja će odigrati najvažniju ulogu u dokazu teoreme 2.2.

Tvrđenje 2.8 *Za svako $m \leq n$ i sve $0 \leq i, j < h$ važi sledeća inkluzija*

$$t(w^{(i)}(\overline{a^{+n}}, a^{+m}), w^{(j)}(\overline{a^{+m}}, a^{+n})) \subseteq a^{+n}.$$

Dokaz. Kako je $a = t(w^{(i)}(\overline{a}, b), w^{(j)}(\overline{b}, a))$, koristeći osobinu polimorfizma dobijamo

$$a^{+n} \supseteq t(w^{(i)}(\overline{a^{+n}}, b^{+n}), w^{(j)}(\overline{b^{+n}}, a^{+n})).$$

Iz idempotencije imamo $a = t(w^{(i)}(\overline{a}, a), w^{(j)}(\overline{a}, a))$, pa je slično kao prethodno

$$a^{+n} \supseteq t(w^{(i)}(\overline{a^{+n}}, a^{+n}), w^{(j)}(\overline{a^{+n}}, a^{+n})).$$

Sada na na osnovu prethodnog tvrđenja sledi tražena inkluzija. $\square$

Naredni rezultat nam pruža mogućnost nalaženja određenih usmerenih puteva unutar jake komponente koja sadrži c.

Tvrđenje 2.9 *Neka su $e, e', f \in W$ proizvoljni i neka $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{d'}, \overrightarrow{g} \in \overline{W}$, pri čemu je $\overrightarrow{d} = (d_0, \dots, d_{h-2})$ i $\overrightarrow{d'} = (d'_0, \dots, d'_{h-2})$. Onda za sve brojeve $0 \leq i, j < h$ u $\mathbf{H}$ važi implikacija (tj. svi putevi i čvorovi su u $\mathbf{H}$):*

$$\text{ako } e \xrightarrow{k} e' \text{ i } d_l \xrightarrow{k} d'_l \text{ za sve } 0 \leq l \leq h-2$$
$$\Downarrow$$
$$t(w^{(i)}(\overrightarrow{d}, c), w^{(j)}(\overline{c}, e)) \xrightarrow{k} t(w^{(i)}(\overrightarrow{d'}, f), w^{(j)}(\overrightarrow{g}, e'))$$

Dokaz. Nije teško primetiti sledeće usmerene puteve u $\mathbf{G}$:

$$\begin{tikzcd}
\overrightarrow{d} \arrow[ddd, "k"] & c \arrow[d, "k-n-1"] & \overline{c} \arrow[d, "k-n-1"] & e \arrow[ddd, "k"] \\
 & c' \arrow[d] & \overline{c'} \arrow[d] & \\
 & a \arrow[d, "n"] & \overline{a} \arrow[d, "n"] & \\
\overrightarrow{d'} & f & \overrightarrow{g} & e'
\end{tikzcd}$$

s tim da su c i c' povezani na osnovu tvrđenja 2.6 i put je unutar $\mathbf{H}$. Jasno je da imamo usmeren put dužine k koji povezuje $t(w^{(i)}(\overrightarrow{d}, c), w^{(j)}(\overline{c}, e))$ sa $t(w^{(i)}(\overrightarrow{d'}, f), w^{(j)}(\overrightarrow{g}, e'))$. Treba dokazati da su svi elementi ovog puta u W. Kako je W poduniverzum prvih $k-n-1$ elemenata puta su u W jer ih dobijamo kao rezultat primene term operacije na elemente poduniverzuma. Za $m \geq 0$, $(k-n+m)$-ti element puta je iz $t(w^{(i)}(\overline{a^{+n}}, a^{+m}), w^{(j)}(\overline{a^{+m}}, a^{+n}))$, ali to na osnovu tvrđenja 2.8 znači da je u W. $\square$

Još jedno tvrđenje nam je potrebno za dokaz teoreme 2.2. Konstruisaćemo ciklus u $\mathbf{H}$, takav da sadrži c i njegova dužina je uzajamno prosta sa k.

Tvrđenje 2.10 *U digrafu* $\mathbf{H}$ *postoji ciklus* $c \xrightarrow{(h+1)k-1} c$.

Dokaz. Koristićemo samo čvorove i puteve koji su u $\mathbf{H}$. Na osnovu tvrđenja 2.6 možemo fiksirati $d \in W$ tako da je $c \to d \xrightarrow{k-1} c$ u digrafu $\mathbf{H}$. Primenjujući više puta prethodno tvrđenje dobijamo:

$$
\begin{array}{rcl}
t(w(c,\ldots,c,c,c), w(c,c,\ldots,c)) & & \\
\downarrow k \qquad\qquad & & \\
t(w(c,\ldots,c,c,d), w(d,c,\ldots,c)) & = & t(w^{(1)}(c,\ldots,c,d,c), w^{(1)}(c,\ldots,c,d)) \\
& & \downarrow k \\
t(w^{(2)}(c,...,d,d,c), w^{(1)}(c,...,c,d)) & = & t(w^{(1)}(c,\ldots,c,d,d), w^{(1)}(c,\ldots,c,d)) \\
\vdots \qquad\qquad & & \\
\downarrow \qquad\qquad & = & t(w^{(h-1)}(d,...,d,d,c), w^{(1)}(c,...,c,d)) \\
& & \downarrow k \\
& & t(w^{(h-1)}(d,...,d,d,d), w^{(1)}(d,...,d,d))
\end{array}
$$

Zbog idempotentnosti početna tačka dobijenog puta je c, a krajnja d. Kako je h arnost operacije w, imamo $c \xrightarrow{hk} d$. Odnosno, $c \xrightarrow{(h+1)k-1} c$. $\square$

Sada imamo sve što nam je potrebno za dokaz teoreme 2.2.

Iz tvrđenja 2.6 i 2.10 smo dobili cikluse $c \xrightarrow{k} c$ i $c \xrightarrow{(h+1)k-1}$ u $\mathbf{H}$. Naravno, oni pripadaju jakoj komponenti koja sadrži čvor c, pa je NZD dužina ciklusa te komponente jedan. Neka je $\mathbf{H}_0 = (W', F')$ ta komponenta. Na osnovu leme 1.36 sledi da je skup čvorova W' poduniverzum algebre $\mathbf{A}$. Digraf $\mathbf{H}_0$ je kompatibilan sa wnu polimorfizmom. Zbog posledice 1.31 $\mathbf{H}_0$ ima algebarsku dužinu jedan, a kako je podgraf digrafa $\mathbf{G}$ onda nema petlji. Dakle, i $\mathbf{H}_0$ je kontraprimer za teoremu 2.2. Međutim, digraf $\mathbf{H_0}$ ima manje čvorova od $\mathbf{G}$ jer ih i $\mathbf{H}$ ima manje. Kontradikcija sa minimalnošću digrafa $\mathbf{G}$, pa je teorema 2.2 dokazana.

Poglavlje 3

Opšti slučaj BKN teoreme

Cilj nam je dokazivanje sledeće teoreme iz koje sledi glavni rezultat.

Teorema 3.1 *Ako digraf bez izvora i ponora ima algebarsku dužinu jedan i kompatibilan je sa wnu polimorfizmom onda sadrži petlju.*

Koristeći prethodnu teoremu nije teško dokazati glavni rezultat rada [BKN].

Teorema 3.2 *Ako je digraf bez izvora i ponora kompatibilan sa wnu polimorfizmom onda se retraktuje na disjunktnu uniju kontura.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ digraf bez izvora i ponora kompatibilan sa wnu polimorfizmom. Sa n označimo alebarsku dužinu neke komponente. Putni stepen $\mathbf{G}^{+n}$ je takođe kompatibilan sa wnu polimorfizmom, nema izvora i ponora, i na osnovu leme 1.25 ima algebarsku dužinu jedan. Teorema 3.1 nam garantuje postojanje petlje u putnom stepenu $\mathbf{G}^{+n}$, odnosno ciklusa dužine n u digrafu $\mathbf{G}$.
Neka je n minimalno (u smislu deljivosti) u skupu algebarskih dužina komponenti digrafa $\mathbf{G}$. Kako algebarska dužina komponente deli dužine svih njenih ciklusa, za takvo minimalno n svaki ciklus dužine n je kontura. Iz istog razloga konture koje dobijemo za dva različita minimalna broja n ne mogu biti u istoj komponenti povezanosti. Za svaku komponentu $\mathbf{H}$ čija je algebarska dužina minimalna postoji kontura unutra nje dužine $al(\mathbf{H})$. To dobijamo primenom teoreme 3.1 na datu konturu. Na osnovu teoreme 1.24 data komponenta se retraktuje na tu istu konturu. Ako algebarska dužina neke komponente $\mathbf{H}'$ nije minimalna, onda postoji kontura dužine n, gde je n minimalan i deli $al(\mathbf{H}')$. Slično kao u teoremi 1.24 možemo konstruisati homomorfizam iz $\mathbf{H}'$ na datu konturu. Svaka

komponenta se retraktuje na konturu, pri čemu su te konture su disjunktne, pa je teorema dokazana. $\square$

Ostalo nam je da dokažemo teoremu 3.1. Dokazaćemo je svođenjem na kontradikciju.

Pretpostavimo da je digraf $\mathbf{G} = (V, E)$ minimalan (po broju čvorova) kontraprimer. Kao i ranije, $\mathbf{A} = (V, w(x_0, \ldots, x_{h-1}))$ je algebra pridružena digrafu $\mathbf{G}$, za neki wnu polimorfizam $w(x_0, \ldots, x_{h-1})$.
Za nastavak dokaza nam je neophodno da definišemo familiju digrafova koje ćemo zvati **daire**. n-daire su digraf $(\{d_0, \ldots, d_{n-1}, g_0, \ldots, g_{n-1}\}, F_n)$ gde je

$$F_n = \bigcup_i \{(d_i, d_{i+1}), (d_i, g_i), (d_i, g_{i+1}), (g_i, g_{i+1})\},$$

s tim da je sabiranje indeksa po modulu n.

Prvo dokazujemo tvrđenje koje nam kaže da digraf $\mathbf{G}$ možemo izabrati tako da ima neke dodatne osobine.

Tvrđenje 3.3 *Možemo izabrati digraf* $\mathbf{G}$ *i broj* n *tako da važe uslovi:*

(i) *n-daire se homomorfno preslikavaju u* $\mathbf{G}$,

(ii) *svaki čvor digrafa* $\mathbf{G}$ *se nalazi u nekom ciklusu dužine* n *i*

(iii) $\mathbf{G}^{+(mn+1)} = \mathbf{G}$ *za svaki broj* m.

Za dokaz će nam biti potrebna sledeća lema.

Lema 3.4 *Digraf* $\mathbf{G}$ *sadrži čvorove* d *i* g *takve da je* $d \xrightarrow{|V|,|V|+1} g$.

Dokaz. Neka je α put

$$\underbrace{\rightarrow \cdots \rightarrow}_{|V|+1}\underbrace{\leftarrow \cdots \leftarrow}_{|V|}$$

Put α je algebarske dužine jedan i uzimajući u obzir da $\mathbf{G}$ nema izvora i ponora nije teško zaključiti da važi $E(\mathbf{G}) \subseteq E(\mathbf{G}^\alpha)$. Prvo dokažimo da svaka komponenta povezanosti digrafa $\mathbf{G}$ postaje jaka komponenta u $\mathbf{G}^\alpha$.

Svaku komponentu povezanosti koja nije jaka možemo posmatrati kao skup jakih komponenti, ali tako da ako postoje grane između dve jake komponente onda su one sve isto usmerene. Unutra jake komponente svaki čvor je sadržan u nekom ciklusu. Neka su a i b čvorovi u $\mathbf{G}$ takvi da b pripada nekom ciklusu i $a \xrightarrow{k} b$, za neko k. Dovoljno nam je dokazati da postoje putevi u $\mathbf{G}^\alpha$ od a do b i od b do a. Jedan put imamo jer važi $a \xrightarrow{k} b$ i u $\mathbf{G}^\alpha$. Imamo $a \xrightarrow{k'} b$ za neko $k' \leq |V|$ i ako izaberemo b' iz ciklusa koji sadrži b tako da važi $b' \xrightarrow{k'+1} b$, dobijamo

$$b' \xrightarrow{k'+1} b \xrightarrow{(|V|+1)-(k'+1)} c \xleftarrow{(|V|+1)-(k'+1)} b \xleftarrow{k'} a \text{ za neki čvor } c.$$

Dakle, $b' \xrightarrow{\alpha} a$, odnosno $b' \to a$ u $\mathbf{G}^\alpha$. Kako je $b \xrightarrow{l} b'$ za neki broj l, sledi da postoji usmeren put od b do a u $\mathbf{G}^\alpha$.

Neka je $\mathbf{H} = (W, F)$ komponenta od $\mathbf{G}$ koja sadrži put algebarske dužine jedan. Onda postoji $F' \supseteq F$ tako da je digraf $\mathbf{H}' = (W, F')$ jaka komponenta od $\mathbf{G}^\alpha$. Digraf $\mathbf{H}'$ je nadgraf digrafa $\mathbf{H}$ pa je njegova algebarska dužina takođe jedan. Putni stepen $\mathbf{G}^\alpha$ je kompatibilan sa polimorfizmom $w(x_0, \ldots, x_{h-1})$, pa je na osnovu leme 1.36 $\mathbf{H}'$ kompatibilan sa odgovarajućom restrikcijom. Teorema 3.2 primenjena na $\mathbf{H}'$ nam kaže da postoji petlja u $\mathbf{H}'$. Time smo obezbedili postojanje čvorova d i g takvih da $d \xrightarrow{|V|,|V|+1} g$. $\square$

Dokaz tvrđenja 3.3. Fiksiraćemo $n = |V|!$ i dokazaćemo da za neko k putni stepen $\mathbf{G}_k = \mathbf{G}^{+(kn+1)}$ zadovoljava uslove tvrđenja. Naravno, za svaki broj k, digraf $\mathbf{G}_k = \mathbf{G}^{+(kn+1)}$ je kompatibilan sa $w(x_0, \ldots, x_{h-1})$, nema izvora i ponora, i algebarske je dužine jedan.

Dokažimo da za proizvoljno k digraf $\mathbf{G}_k$ ne sadrži petlju. Ako bi $\mathbf{G}_k$ imao petlju onda bi u nekoj jakoj komponenti digrafa $\mathbf{G}$ postojao ciklus dužine $kn+1$. Dužina svake konture je broj uzajamno prost sa $kn+1$ jer je $n = |V|!$, pa je NZD dužina ciklusa u jakoj komponenti jedan. Sada nam posledica 1.31 i lema 1.36 omogućavaju primenu teoreme 2.2 na gore pomenutu jaku komponentu. Dobili smo petlju u jakoj komponenti, a time i u $\mathbf{G}$, kontradikcija.

Sada ćemo dokazati da se, za fisiran broj n, n-daire homomorfno preslikavaju u $\mathbf{G}_k$ za $k \geq 4$. Iz prethodne leme znamo da postoje $d, g \in V$ tako da $d \xrightarrow{|V|,|V|+1} g$. Digraf $\mathbf{G}$ nema izvora i ponora, pa postoje čvorovi d' i g', sadržani u nekim ciklusima, i usmereni putevi

$$d' \to \cdots \to d \text{ i } g \to \cdots \to g'.$$

Možemo pronaći čvorove d'_0 i g'_0 u datim ciklusima takve da obilazeći cikluse više puta, te koristeći dobijene usmerene puteve od d' do g', imamo $d'_0 \xrightarrow{3n,3n+1} g'_0$. Lako se vidi da imamo i

$$d'_0 \xrightarrow{n} d'_0 \xrightarrow{3n,3n+1} g'_0 \xrightarrow{n} g'_0.$$

Označimo sa d'_i i-ti čvor ciklusa $d'_0 \xrightarrow{n} d'_0$, a sa g'_i i-ti čvor $g'_0 \xrightarrow{n} g'_0$. Primetimo da za svaki broj $k \geq 4$ i svaki $i < n$ važi

$$d'_i \xrightarrow{kn+1} g'_i \text{ i } d'_i \xrightarrow{kn+1} g'_{(i+1) \mod n}.$$

Takođe, unutar ciklusa imamo $d'_i \xrightarrow{kn+1} d'_{(i+1) \mod n}$ i $g'_i \xrightarrow{kn+1} g'_{(i+1) \mod n}$. Za $k \geq 4$ definišemo preslikavanje f takvo da je $f(d_i) = d'_i$ i $f(g_i) = g'_i$ za $i < n$. Onda je f traženi homomorfizam iz n-daira u stepeni put $\mathbf{G}_k$.

Sada dokazujemo da je za $k \geq 4$ svaki čvor digrafa $\mathbf{G}_k$ u nekom ciklusu dužine n. Fiksirajmo k. Neka je $W \subset V$ poduniverzum algebre $\mathbf{A}$ generisan skupom $\{d'_0, \ldots, d'_{n-1}, g'_0, \ldots, g'_{n-1}\}$. Sa $\mathbf{G}'_k$ označimo podgraf digrafa $\mathbf{G}_k$ indukovan sa W. Digraf $\mathbf{G}'_k$ je kompatibilan sa restrikcijom polimorfizma $w(x_0, \ldots, x_{h-1})$. Kako se n-daire homomorfno preslikavaju u digraf $\mathbf{G}'_k$ onda je njegova algebarska dužina jedan. Neka je $a \in W$ proizvoljno. Skup W je poduniverzum, pa postoji term $t(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1})$ takav da je $a = t(d'_0, \ldots, d'_{n-1}, g'_0, \ldots, g'_{n-1})$. Onda imamo ciklus koji sadrži a:

$$\begin{array}{c}
t(d'_0, \ldots, d'_{n-2}, d'_{n-1}, g'_0, \ldots, g'_{n-2}, g'_{n-1}) \\
\downarrow \\
t(d'_1, \ldots, d'_{n-1}, d'_0, g'_1, \ldots, g'_{n-1}, g'_0) \\
\vdots \\
t(d'_{n-1}, \ldots, d'_{n-3}, d'_{n-2}, g'_{n-1}, \ldots, g'_{n-3}, g'_{n-2}) \\
\downarrow \\
t(d'_0, \ldots, d'_{n-2}, d'_{n-1}, g'_0, \ldots, g'_{n-2}, g'_{n-1})
\end{array}$$

Kako je čvor a bio proizvoljno izabran dokazali smo da $\mathbf{G}'_k$ nema izvora i ponora. Međutim, ne postoji kontraprimer sa manjim brojem čvorova od $\mathbf{G}$, pa je $W = V$. Dakle, za svako $k \geq 4$ digraf $\mathbf{G}'_k$ zadovoljava drugi uslov.

U digrafu $\mathbf{G}_4$ svaki čvor je u nekom ciklusu dužine n, pa je

$$E(\mathbf{G}_4^{+(nm+1)}) \subseteq E(\mathbf{G}_4^{+(n(m+1)+1)})$$

za svaki priridan broj m. Onda postoji prirodan broj l takav da za sve $m \geq l$ važi $\mathbf{G}_4^{+(nm+1)} = \mathbf{G}_4^{+(nl+1)}$. Digraf

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G}_4^{+(nl+1)} = \mathbf{G}_{(4nl+l+4)n+1}$$

na osnovu već dokazanog zadovoljava prva dva uslova tvrđenja. Dokažimo da zadovoljava i treći, pa samim tim može zameniti digraf $\mathbf{G}$. Neka je m proizvoljno. Onda je

$$(\mathbf{G}')^{+(mn+1)} = \mathbf{G}_4^{+((mnl+l+m)n+1)} = \mathbf{G}_4^{+(nl+1)} = \mathbf{G}',$$

čime je dokaz završen. $\square$

Sada sa $\mathbf{G}$ označavamo digraf čiju smo egzistenciju dokazali u prethodnom tvrđenju, i fiksiramo ga zajedno sa brojem n. Napomenimo samo da ćemo u nastavku sa $[m]$ označavati ostatak pri deljenju broja m brojem n.
Dokazali smo da postoji homomorfizam koji preslikava n-daire u $\mathbf{G}$. Nama će biti potreban homomorfizam iz sledećeg tvrđenja.

Tvrđenje 3.5 *n-daire se mogu homomorfno preslikati u digraf $\mathbf{G}$ tako da je*

$$d'_i = t^{(n-i)}(w(\overline{d'_0}, d'_1), w(\overline{d'_1}, d'_2), \dots, w(\overline{d'_{n-1}}, d'_0)) \text{ za sve } i < n,$$

gde je d'_i slika čvora d_i.

Dokaz. Neka je $d_i \mapsto d'_i$, $g_i \mapsto g'_i$ homomorfizam iz n-daira u $\mathbf{G}$. Onda za svako i imamo

$$\begin{tikzcd}
w(\overline{g'_i}, g'_{[i+1]}) \arrow[r] & w(\overline{g'_{[i+1]}}, g'_{[i+2]}) \arrow[r] & \dots \\
 & & \dots \\
w(\overline{d'_i}, d'_{[i+1]}) \arrow[r] \arrow[uu] \arrow[uur] & w(\overline{d'_{[i+1]}}, d'_{[i+2]}) \arrow[r] \arrow[uu] \arrow[uur] & \dots
\end{tikzcd}$$

pa je $d_i \mapsto w(\overline{d'_i}, d'_{[i+1]})$, $g_i \mapsto w(\overline{g'_i}, g'_{[i+1]})$ takođe homomorfizam iz n-daira u $\mathbf{G}$. Nastavljajuću postupak dobijamo beskonačan niz homomorfizama, pa se jedan od njih mora pojaviti dva puta. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je prvi koji se ponavlja početni homomorfizam $d_i \mapsto d'_i$, $g_i \mapsto g'_i$. Ako sa $d_{i,j}$ označimo sliku od d_i pri j-tom po redu homomorfizmu, onda nije teško primetiti da postoji term t takav da je

$$d_{i,j} = t_j^{(n-i)}(w(\overline{d'_0}, d'_1), w(\overline{d'_1}, d'_2), \ldots, w(\overline{d'_{n-1}}, d'_0)).$$

To važi za svaki broj j, pa pri prvom ponavljanju dobijamo homomorfizam sa željenom osobinom. $\square$

Čvorove $d'_0, \ldots, d'_{n-1}, g'_0, \ldots, g'_{n-1}$ i term $t(x_0, \ldots, x_{n-1})$ iz prethodnog tvrđenja fiksiramo u nastavku dokaza teoreme. Sa φ_k ćemo označiti put $\triangle \xrightarrow{\varphi_k} \circ$ oblika

$$\triangle \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \dashrightarrow \cdots \dashleftarrow \bullet \to \circ$$

sa tačno k grana.

Tvrđenje 3.6 *Skup* $(d'_0)^{\varphi_n}$ *sadrži sve čvorove digrafa* $\mathbf{G}$.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da u n-dairama važi

$$(d_0)^{\varphi_n} = \{d_0, \ldots, d_{n-1}, g_0, \ldots, g_{n-1}\}.$$

Pretpostavićemo da je n parno (slično se dokazuje za neparno n). Razmotrimo slučaj kada je $i < n/2$. Put φ_n od d_0 do d_i izgleda ovako

$$\underbrace{d_0 \to g_0 \leftarrow d_0 \to \cdots \leftarrow d_0}_{n-2i \ grana} \to g_1 \leftarrow d_1 \to \cdots \to g_i \leftarrow d_i,$$

a od d_0 do g_i :

$$\underbrace{d_0 \to g_0 \leftarrow d_0 \to \cdots \leftarrow d_0}_{n-2(i+1) \ grana} \to g_1 \leftarrow d_1 \to \cdots \to g_i \leftarrow d_i \to g_{i+1} \leftarrow g_i.$$

Neka je sada $i = n/2$. Put $d_0 \xrightarrow{\varphi_n} d_i$:

$$d_0 \to g_1 \leftarrow d_1 \to g_2 \leftarrow d_2 \to \cdots d_{i-1} \to g_i \leftarrow d_i.$$

Put od d_0 do g_i, za $i = n/2$, će se malo razlikovati. Naime,

$$d_0 \to g_0 \leftarrow d_{n-1} \to g_{n-1} \leftarrow d_{n-2} \to g_{n-2} \leftarrow \cdots \leftarrow d_{i+2} \to g_{i+2} \leftarrow d_{i+1} \to g_{i+1} \leftarrow g_i.$$

Kada je $i > n/2$ dokaz je sličan kao za $i < n/2$ samo što koristimo puteve preko čvorova $d_{n-1}, g_{n-1}, d_{n-2}, g_{n-2}, \dots$.

Sada očigledno važi

$$(d_0')^{\varphi_n} \supseteq \{d_0', \dots, d_{n-1}', g_0', \dots, g_{n-1}'\}.$$

Neka je $\mathbf{G}'$ podgraf digrafa $\mathbf{G}$ indukovan skupom $(d_0')^{\varphi_n}$. Na osnovu posledice 1.35 $\mathbf{G}'$ je kompatibilan sa restrikcijom polimorfizma $w(x_0, \dots, x_{h-1})$ i ima algebarsku dužinu 1. Sa $\mathbf{G}''$ označimo najveći indukovan podgraf bez izvora i ponora digrafa $\mathbf{G}'$. $\mathbf{G}''$ je zbog leme 1.37 kompatibilan sa wnu polimorfizmom. Zaključujemo da je $\mathbf{G}''$ takođe kontraprimer za teoremu 3.1, pa mora biti jednak sa $\mathbf{G}$. Ovim je tvrđenje dokazano. □

Fiksirajmo minimalan broj k takav da je $(d_0')^{\varphi_{k+1}} = V$. Definišimo $W_i = (d_i')^{\varphi_k}$, za svako $i < n$. Neka je

$$W = \bigcap_{i<n} W_i$$

i to je poduniverzum algebre $\mathbf{A}$ jer je presek poduniverzuma. Sa $\mathbf{H}$ označimo podgraf digrafa $\mathbf{G}$ indukovan skupom W.

Cilj nam je da dokažemo da je $\mathbf{H}$ kontraprimer za teoremu 3.1, što bi bilo u kontradikciji sa minimalnošću digrafa $\mathbf{G}$. U tom slučaju moramo dokazati da je algebarska dužina digrafa $\mathbf{H}$ jednaka 1. Naredna tvrđenja će nam to omogućiti.

Tvrđenje 3.7 *Postoji term $s(x_0, \dots, x_{p-1})$ takav da za svaku koordinatu $q < p$ postoji broj i tako da važi*

$$s^{(q)}(W_l, W, \dots, W) \subseteq W_{[l-i]} \cap W_{[l-i-1]} \text{ za sve } l < n.$$

Dokaz. Neka je $p = hn$ i neka je term $s(x_0, \dots, x_{p-1})$ definisan sa

$$t\big(w(x_0, \dots, x_{h-1}), w(x_h, \dots, x_{2h-1}), \dots, w(x_{(n-1)h}, \dots, x_{hn-1})\big).$$

Za svako $q < p$ postoje brojevi i i q'', takvi da je $q = ih + q''$ i $0 \leq q'' < h$. Onda je za sve $l < n$ očigledno

$$s^{(q)}(W_l, \overline{W}) = t^{(i)}\Big(w^{(g'')}(W_l, \overline{W}), w(\overline{W}), \dots, w(\overline{W})\Big).$$

Kako za $j < n$ važi $W \subseteq W_j$, imamo:

$$\begin{aligned}
s^{(q)}(W_l, \overline{W}) &= t^{(i)}\Big(w^{(g'')}(W_l, \overline{W}), w(\overline{W}), \ldots, w(\overline{W})\Big) \\
&\subseteq t^{(i)}\Big(w^{(q'')}(\overline{W_l}, W_{[l+1]}), w(\overline{W_{[l+1]}}, W_{[l+2]}), \ldots, w(\overline{W_{[l+n-1]}}, W_l)\Big) \\
&= t^{([i-l])}\Big(w(\overline{W_0}, W_1), \ldots, w^{(q'')}(\overline{W_l}, W_{[l+1]}), \ldots, w(\overline{W_{n-1}}, W_0)\Big).
\end{aligned}$$

Iz tvrđenja 3.5 i osobine wnu operacije dobijamo

$$\begin{aligned}
d'_{[n-(i-l)]} = d'_{[l-i]} &= t^{([i-l])}\big(w(\overline{d'_0}, d'_1), \ldots, w(\overline{d'_l}, d'_{[l+1]}), \ldots, w(\overline{d'_{n-1}}, d'_0)\big) \\
&= t^{([i-l])}\big(w(\overline{d'_0}, d'_1), \ldots, w^{(q'')}(\overline{d'_l}, d'_{[l+1]}), \ldots, w(\overline{d'_{n-1}}, d'_0)\big).
\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir prethodnu jednakost i definiciju skupova W_j zaključujemo da za sve $a \in t^{([i-l])}\Big(w(\overline{W_0}, W_1), \ldots, w^{(q'')}(\overline{W_l}, W_{[l+1]}), \ldots, w(\overline{W_{n-1}}, W_0)\Big)$ važi $d'_{[l-i]} \xrightarrow{\varphi_k} a$, tj. $a \in W_{[l-i]}$. Ovim smo dokazali da važi

$$s^{(q)}(W_l, \overline{W}) \subseteq W_{[l-i]}.$$

Na sličan način dokazujemo da je

$$\begin{aligned}
s^{(q)}(W_l, \overline{W}) &= t^{(i)}\Big(w^{(g'')}(W_l, \overline{W}), w(\overline{W}), \ldots, w(\overline{W})\Big) \\
&\subseteq t^{(i)}\Big(w^{(q'')}(W_l, \overline{W_{[l-1]}}), w(W_{[l+1]}, \overline{W_l}), \ldots, w(W_{[l+n-1]}, \overline{W_{[l+n-2]}})\Big) \\
&= t^{([i-l+1])}\Big(w(W_l, \overline{W_0}), \ldots, w^{(q'')}(W_l, \overline{W_{[l-1]}}), \ldots, w(W_0, \overline{W_{n-1}})\Big) \\
&\subseteq W_{[l-i-1]}
\end{aligned}$$

i ovim je dokaz završen. □

Sada konstruišemo term koji zadovoljava jače uslove. Cilj nam je dokazivanje dodatnih osobina skupa W, a za to će nam biti potrebno i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.8 *Postoji term $r(x_0, \ldots, x_{m-1})$ tako da za svaku koordinatu $q < m$ važi*

$$r^{(q)}\Big(\bigcup_{l<n} W_l, W, \ldots, W\Big) \subseteq W.$$

Dokaz. Neka je $s(x_0, \ldots, x_{p-1})$ term arnosti p čiju smo egzistenciju pokazali u prethodnom tvrđenju. Posmatrajmo term

$$s_2(x_0, x_1, \ldots, x_{p^2-1}) = s(s(x_0, \ldots, x_{p-1}), \ldots, s(x_{p^2-p}, \ldots, x_{p^2-1})).$$

Dokažimo da za svaku koordinatu $q < p^2 - 1$ postoji broj i takav da važi

$$s_2^{(q)}(W_l, \overline{W}) \subseteq W_{[l-i]} \cap W_{[l-i-1]} \cap W_{[l-i-2]}.$$

Nije teško primetiti da postoje brojevi q' i q'' takvi da je

$$s_2^{(q)}(W_l, \overline{W}) = s^{(q')}(s^{(q'')}(W_l, \overline{W}), s(\overline{W}), \ldots, s(\overline{W})).$$

Na osnovu prethodnog tvrđenja znamo da postoje brojevi i' i i'' takvi da važi

$$\begin{aligned}
s_2^{(q)}(W_l, \overline{W}) &= s^{(q')}(s^{(q'')}(W_l, \overline{W}), s(\overline{W}), \ldots, s(\overline{W})) \\
&\subseteq s^{(q')}(W_{[l-i']} \cap W_{[l-i'-1]}, s(\overline{W}), \ldots, s(\overline{W})) \\
&\subseteq s^{(q')}(W_{[l-i']}, \overline{W}) \cap s^{(q')}(W_{[l-i'-1]}, \overline{W}) \\
&\subseteq W_{[l-i''-i']} \cap W_{[l-i''-i'-1]} \cap W_{[l-i''-i'-1]} \cap W_{[l-i''-i'-2]},
\end{aligned}$$

pa uzimajući $i = i'' + i'$ dobijamo željenu inkluziju.
Definisaćemo rekurzivno niz terma i dokazati opštiji rezultat

- $s_1(x_0, \ldots, x_{p-1}) = s(x_0, \ldots, x_{p-1})$ i
- $s_{j+1}(x_0, \ldots, x_{p^j-1}) = s(s_j(x_0, \ldots, x_{p^{j-1}-1}), \ldots, s_j(x_{(p-1)p^{j-1}}, \ldots, x_{p^j-1}))$.

Dokazujemo da za svako j, svako $q < p^j$ i svako $l < n$ postoji i takvo da

$$s_j^{(q)}(W_l, W, \ldots, W) \subseteq W_{[l-i]} \cap \cdots \cap W_{[l-i-j]}.$$

Koristićemo matematičku indukciju. Baza indukcije važi na osnovu tvrđenja 3.7. Pretpostavimo da tvrđenje važi za neki broj j. Sa q' ćemo označiti rezultat celobrojnog deljenja q sa p, a sa q'' ostatak. Onda za svako l, slično kao u slučaju $j = 2$, postoje brojevi i i i' takvi da je

$$\begin{aligned}
s_{j+1}^{(q)}(W_l, \overline{W}) &= s^{(q')}(s_j^{(q'')}(W_l, \overline{W}), s_j(\overline{W}), \ldots, s_j(\overline{W})) \\
&\subseteq s^{(q')}(W_{[l-i]} \cap \cdots \cap W_{[l-i-j]}, \overline{W}) \\
&\subseteq s^{(q')}(W_{[l-i]}, \overline{W}) \cap \cdots \cap s^{(q')}(W_{[l-i-j]}, \overline{W}) \\
&\subseteq W_{[l-i'-i]} \cap \cdots \cap W_{[l-i'-i-(j+1)]}.
\end{aligned}$$

Sada je očigledno da tvrđenje važi ako je term $r(x_0, \ldots, x_{m-1})$ jednak $s_{n-1}(x_0, \ldots, x_{p^n-1})$. □

Term $r(x_0, \ldots, x_{m-1})$ iz upravo dokazanog tvrđenja fiksiramo.

Tvrđenje 3.9 *Neka je α put i neka su $a_0 \to a_1$ i $b_0 \to b_1$ grane koje pripadaju nekim ciklusima. Ako je $a_0 \xrightarrow{\alpha} b_0$, onda je i $a_1 \xrightarrow{\alpha} b_1$.*

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo matematičkom indukcijom po broju grana u α. Neka su čvorovi a_0, a_1, b_0, b_1 kao u uslovu tvrđenja. Pretpostavimo da je $a_0 \to b_0$. Kako grana $a_0 \to a_1$ pripada nekom ciklusu onda postoji broj i takav da je $a_1 \xrightarrow{in-1} a_0 \to b_0 \to b_1$. Onda iz tvrđenja 3.3 sledi da je $a_1 \to b_1$. Na isti način radimo u slučaju da $a_0 \leftarrow b_0$ i time smo dokazali bazu indukcije.

Neka put α ima više od jedne grane. Pretpostavićemo, bez umanjenja opštosti, da poslednja grana puta α ide prema napred. Važi $a_0 \xrightarrow{\alpha'} a'_0 \to b_0$ za neki čvor a'_0, i α' je put dobijen od α uklanjanjem poslednje grane. Iz tvrđenja 3.3 znamo da je a'_0 u nekom ciklusu dužine n, pa je $a'_0 \to a'_1 \xrightarrow{n-1} a'_0$ za neki čvor a'_1. Kako je $a_0 \to a_1$, $a'_0 \to a'_1$ i $a_1 \xrightarrow{\alpha'} a'_1$, onda na osnovu indukcijske hipoteze važi $a'_1 \to b_1$. Time je i $a_1 \xrightarrow{\alpha} b_1$, pa je tvrđenje dokazano. □

Kao što smo najavili dokazaćemo neke dodatne osobine skupa W, a u tu svrhu ćemo koristiti ranije definisane gornje i donje komponente digrafa.

Tvrđenje 3.10 *Digraf* **H** *nema izvora i ponora i*

- *ako je k paran, onda je svaka donja komponenta sadržana u W, i*
- *ako je k neparan, onda je svaka gornja komponenta sadržana u W.*

Dokaz. Dokažimo prvo da za sve čvorove a, b takve da je $a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{j} a$ za neke i, j, važi

$$\text{ako } a \in W_l \text{ onda } b \in W_{[l+i]}. \qquad (\triangle)$$

Neka je $a \to a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_{i-1} \to b \xrightarrow{j} a$ za neke čvorove $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$. Ako je $d'_l \xrightarrow{\varphi_k} a$ onda, koristeći tvrđenje 3.9 i granu $d'_l \to d'_{[l+1]}$, dobijamo $d'_{[l+1]} \xrightarrow{\varphi_k} a_1$. Nastavljajući postupak dobijamo

$$d'_{[l+2]} \xrightarrow{\varphi_k} a_2, \ldots, d'_{[l+i-1]} \xrightarrow{\varphi_k} a_{i-1}, d'_{[l+i]} \xrightarrow{\varphi_k} b,$$

odnosno $b \in W_{[l+i]}$.

Neka je $a \in W$ proizvoljan i b takav čvor da $a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{j} a$ za neke brojeve i, j. Kako $a \in W$, na osnovu prethodno dokazanog sledi da

$b \in \bigcap_{l<n} W_{[l+i]} = W$, a to znači da je W unija jakih komponenti. Iz tvrđenja 3.3 znamo da svaki čvor pripada nekoj konturi dužine n, pa digraf $\mathbf{H}$ nema izvora i ponora.

Neka je k paran broj i neka je a u donjoj komponenti. Svaki čvor digrafa je, na osnovu tvrđenja 3.3, u nekom ciklusu, pa postoji čvor b u donjoj komponenti koja sadrži a takav da je $a \to b$. Iz $(d_0')^{\varphi_{k+1}}$ imamo

$$d_0' \xrightarrow{\varphi_{k-1}} c \leftarrow a' \to b$$

za neke čvorove a' i c. Čvor b je u donjoj komponenti, pa i a' mora biti u istoj donjoj komponenti. Ovo implicira $a' \to b \xrightarrow{i-1} a$ za neko i, odnosno

$$a \to b \xrightarrow{ni-1} a' \to c.$$

Na osnovu tvrđenja 3.3 dobijamo $a \to c$. Sada imamo

$$d_0' \xrightarrow{\varphi_{k-1}} c \leftarrow a,$$

pa $a \in W_0$. Zaključujemo da je svaka donja komponenta sadržana u W_0. Dokažimo da je svaki čvor a iz donje komponente sadržan u proizvoljnom W_l. Postoji čvor b, u donjoj komponenti koja sadrži a, takav da je $b \xrightarrow{l} a \xrightarrow{i} b$ za neko i. Onda je $b \in W_0$, pa primenom $(\triangle)$ dobijamo $a \in W_l$. Dokazali smo tvrđenje u slučaju kada je broj k paran, a na sličan način se dokazuje za neparno k i gornje komponente. $\square$

Sada imamo sve što nam je potrebno da dokažemo poslednje od tvrđenja na osnovu kojih ćemo izvesti dokaz teoreme 3.1.

Tvrđenje 3.11 *Algebarska dužina drigrafa* $\mathbf{H}$ *jednaka je 1.*

Dokaz. U slučaju kada je k neparan broj cilj nam je da pronađemo $a, b, c \in W$ i $e \in W_0$ takve da je

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[r] & c \\ & e \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Za $e = d_1'$ na osnovu prethodnog tvrđenja možemo naći čvor $b \in W$ u gornjoj komponenti takav da je $g_{[2]}' \xrightarrow{in-1} b$ za neko i. Onda postoje čvorovi a i c u istoj gornjoj komponenti takvi da je $a \to b \to c$. Naravno, na osnovu prethodnog tvrđenja a i c su u W. Kako je $d_1' \xrightarrow{1,2} g_{[2]}'$, sledi $e \xrightarrow{in+1} b$ i

$e \xrightarrow{in+1} c$. Na osnovu tvrđenja 3.3 čvorovi a, b, c i e zadovoljavaju željene osobine. Sada, koristeći term $r(x_0, \ldots, x_{m-1})$, možemo konstruisati put

$$\begin{tikzcd}
b = r(\bar{b}) & & r(c,\bar{b}) = r^{(1)}(\bar{b},c) & & r^{(1)}(c,\bar{b},c) = r^{(2)}(\bar{b},c,c) & & r^{(n-1)}(\bar{c}) = c \\
& r(e,\bar{a}) \arrow[ul] \arrow[ur] & & r^{(1)}(e,\bar{a},b) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \ldots \arrow[ul, dotted] \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Na osnovu tvrđenja 3.8 svi elementi datog puta su u W. Upravo smo konstruisali put u $\mathbf{H}$ koji povezuje b i c, i algebarske je dužine 0. Kako je $b \to c$ zaključujemo da je algebarska dužina digrafa $\mathbf{H}$ jednaka 1.

U slučaju kada je k paran broj, na sličan način nalazimo $a, b, c \in W$ i $e \in W_0$. Razlika je u tome što ćemo za e uzeti čvor g_1' i važiće

$$\begin{tikzcd}
& & e & \\
a & b \arrow[l] \arrow[ur] & & c \arrow[ll] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Konstrukcija puta algebarske dužine 1 je ista kao za neparno k, samo što će grane biti usmerene u suprotnom smeru. $\square$

U tvrđenju 3.10 smo dokazali da digraf $\mathbf{H}$ nema izvora i ponora, a kako je W poduniverzum onda je i kompatibilan sa wnu polimorfizmom. Dokazali smo da je njegova algebarska dužina 1, pa je i digraf $\mathbf{H}$ kontraprimer za teoremu 3.1. Međutim, $\mathbf{H}$ ima manje čvorova od digrafa $\mathbf{G}$, pa dobijamo kontradikciju sa minimalnošću $\mathbf{G}$. Ovim je dokazana teorema 3.1.

Bibliografija

[BK1] L. Barto, M. Kozik, *Congruence distributivity implies bounded width*, SIAM Journal on Computing 39/4 (2009), 1531-1542

[BK2] L. Barto, M. Kozik, *Absorbing subalgebras, cyclic terms and the constraint satisfaction problem*, Logical Methods in Computer Science 8/1:07 (2012), 1-26.

[BK3] L. Barto, M. Kozik, *Constraint satisfaction problems solvable by local consistency methods*, Journal of the ACM 61/1 (2014), 3:1-3:19

[BKN] L. Barto, M. Kozik, T. Niven, *The CSP dichotomy holds for digraphs with no sources and no sinks (a positive answer to a conjecture of Bang-Jensen and Hell)*, SIAM Journal on Computing 38/5 (2009), 1782-1802.

[BKKR] V. B. Bodnarchuk, L. A. Kalužnin, V. N. Kotov, B. A. Romov, *Galois theory for Post algebras I, II*, Kibernetika (Kiev) **3** (1969), 1-–10; **5** (1969), 1-–9.

[BJK] A. A. Bulatov, P. G. Jeavons, A. Krokhin, *Classifying the complexity of constraints using finite algebras*, SIAM Journal on Computing, 34/3 (2005), 720-742.

[BS] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, graduate Texts in Mathematics, vol. 78, Springer-Verlag, New York, 1981.

[F] R. Fagin, *Generalized First-Order Spectra and Polynomial-Time Recognizable Sets*, Complexity of Computation, ed. R. Karp, SIAM-AMS Proceedings **7**, pp. 27—41, 1974.

[FV] T. Feder, M. Vardi, *The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: a study through Datalog and group theory*, SIAM Journal on Computing 28 (1998), 57-104.

[G] D. Geiger, *Closed systems of functions and predicates*, Pacific J. Math. **27** (1968), no. 1, 95—100.

[HN1] P. Hell, J. Nešetřil, *On the Complexity of H-Coloring*, J. Comb. Theory B 48 (1990), 92-110.

[HN2] P. Hell, J. Nešetřil, *Graphs and homomorphisms*, Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications, vol. 28, Oxford University Press, Oxford, 2004.

[J] P. G. Jeavons, *On the algebraic structure of combinatorial problems*, Theor. Comput. Sci. **200** (1998), 185–204.

[KMM] K. Kearnes, P. Marković, R. McKenzie, *Optimal strong Mal'cev conditions for omitting type 1 in locally finite varieties*, Algebra Universalis **72**, no. 1 (2014), 91-100.

[KV] P. Kolaitis, M. Y. Vardi, *The decision problem for the probabilities of higher-order properties*, ed. A. V. Aho, STOC '87, Proceedings of the nineteenth annual ACM symposium on Theory of computing, pp. 425–435, 1987.

[K] G. Kun, *Constraints, MMSNP and expander relational structures*, Combinatorica **33** (2013), no. 3, 335–347.

[L] R. Ladner, *On the structure of polynomial time reducibility*, J. ACM **22** (1975), no.1, 155-–171.

[LZ] B. Larose, L. Zádori, *Bounded width problems and algebras* Algebra Universalis **56** no. 3-4 (2007), 439-–466.

[MM] M. Maroti and R. McKenzie, *Existence theorems for weakly symmetric operations*, Algebra Universalis, 2007.

[PY] C. H. Papadimitriou, M. Yannakis, *Optimization, approximation, and complexity classes*, J. Comput. Syst. Sci. **43** (1991), no. 3, 425-–440.

[S] M. Siggers, *A strong Mal'cev condition for locally finite varieties omitting the unary type*, Algebra Universalis 64/1-2 (2011), 15-20.

[T] W. Taylor, *Varieties obeying homotopy laws*, Canad. J. Math. **29** (1977), 498–527.

Biografija

Vlado Uljarević rođen je 22. februara 1990. godine u Trebinju, Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu "Sveti Sava", u Bileći, završio je 2005. godine. Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja u Gimanziji "Golub Kureš", u Bileći, 2009. godine upisuje studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. U oktobru 2012. godine završava osnovne sa prosečnom ocenom 9.88 i upisuje master studije teorijske matematike. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekao uslov za odbranu ovog rada.

Novi Sad, okotobar 2014. godine Vlado Uljarević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKLUTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj (RBR):

Identifikacioni broj (IBR):

Tip dokumentacije (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada (VR): Master rad

Autor (AU): Vlado Uljarević

Mentor (MN): dr Petar Marković

Naslov rada (NR): O glatkim grafovima kompatibilnim sa Tejlorovim operacijama

Jezik publikacije (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja (ZP): Srbija

Uže geografsko područje (UGP): Vojvodina

Godina (GO): 2014.

Izdavač (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3

Fizički opis rada (FO): 3 poglavlja/40 strana/22 reference/1 fotografija

Naučna oblast (NO): Matematika

Naučna disciplina (ND): Univerzalna algebra, teorija grafova

Predmetna odrednica/ključne reči (PO): izvor, ponor, glatki grafovi, Tejlorova operacija, polimorfizam, CSP

UDK:
Čuva se (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku

Važna napomena (VN):

Izvod (IZ): U ovom radu bavimo se pitanjem složenosti problema H-bojenja grafa. Dokazujemo da CSP dihotomija važi za digrafove bez izvora i ponora (glatke digrafove). Zapravo, mi dokazujemo da digraf se bez izvora i ponora, kompatibilan sa wnu polimorfizmom, retraktuje na disjunktnu uniju kontura. Prvo dajemo dokaz za jako povezane digrafove, a zatim i za opšti slučaj.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća (DP): 10.04.2014.

Datum odbrane (DO):

Članovi komisije (KO):
Predsednik: dr Igor Dolinka, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Petar Marković, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član: dr Bojan Bašić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number (ANO):

Identification number (INO):

Document type (DT): Monograph type

Type of record (TR): Printed text

Contents Code (CC): Master's thesis

Author (AU): Vlado Uljarević

Mentor (MN): Petar Marković, Ph.D

Title (TI): On the smooth graphs compatible with Taylor operations

Language of text (LT): serbian (latin)

Language of abstract (LA): serbian and english

Country of publication (CP): Serbia

Locality of publication (LP): Vojvodina

Publication year (PY): 2014.

Publisher (PU): Author's reprint

Publication place (PP): Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

Physical description (PD): 3 chapters/40 pages/22 references/1 photo

Scientific field (SF): Mathematics

Scientific discipline (SD): Universal algebra, graph theory

Subject/Key words (SKW): source, sink, smooth graphs, Taylor's operation, polimorphism, CSP

UC:
Holding data (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics

Note (N):

Abstract (AB): In this thesis we consider the computational complexity of graph H-coloring problem. We prove that CSP dichotomy holds for digraphs with no sources and no sinks (the smooth digraphs). Actually, we prove that if digraph without sources and sinks admits a weak near unanimity polymorphism then it retracts onto the disjoint union of circles. First we give the proof for strongly connected digraphs and after that we prove the general case.

Accepted by the Scientific Board on (ASB): 10.04.2014.

Defended (DE):

Thesis defend board (DB):
President: dr Igor Dolinka, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: dr Petar Marković, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor
Member: dr Bojan Bašić, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad