

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DEPARTMAN ZA  
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Snežana Gordić

Numeričko rešavanje singularno  
perturbovanih konturnih problema sa  
prekidima

-master rad-

Novi Sad, 2009.



# Sadržaj

Predgovor	v
Uvod	1
<b>1 Postupci konačnih elemenata</b>	<b>5</b>
1.1 Prostori funkcija . . . . .	5
1.1.1 Prostori integrabilnih funkcija . . . . .	5
1.1.2 Prostori Soboljeva . . . . .	6
1.2 Eliptični problemi drugog reda . . . . .	9
1.3 Klasifikacija postupaka konačnih elemenata . . . . .	16
1.3.1 Konformni postupci konačnih elemenata . . . . .	17
1.3.2 Nekonformni postupci konačnih elemenata . . . . .	20
1.4 Konačni elementi . . . . .	22
1.4.1 Primeri trougaonih konačnih elemenata . . . . .	24
1.4.2 Primeri pravougaonih konačnih elemenata . . . . .	26
1.5 Prostori konačnih elemenata . . . . .	27
<b>2 Problemi konvekcije-difuzije sa unutrašnjim slojevima</b>	<b>31</b>
2.1 Opšta analiza greške . . . . .	33
2.2 Problemi konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama . . . . .	36

2.3	Dekompozicija rešenja . . . . .	38
2.4	Slojno-adaptivne mreže . . . . .	40
2.5	Postupak konačnih elemenata Galerkina . . . . .	45
2.6	Greška interpolacije . . . . .	51
2.7	Konvergenција u $\ \cdot\ _\varepsilon$ . . . . .	56
2.8	”Streamline-diffusion” postupak konačnih elemenata . . . . .	59
2.9	Diskretne Grinove funkcije . . . . .	65
2.10	Analiza greške u tačkama mreže . . . . .	67
2.11	O optimalnosti postupka tipa SDFEM . . . . .	70
2.12	Numerički eksperimenti . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Dodatak</b>	<b>89</b>
3.1	Odabrane definicije i teoreme iz linearne algebre . . . . .	89
3.1.1	Inverzno monotone matrice . . . . .	90
3.2	Odabrane definicije i teoreme iz analize . . . . .	92
3.2.1	Helderovi prostori . . . . .	92
3.2.2	Normirani prostori . . . . .	93
3.2.3	Prostori sa skalarnim proizvodom . . . . .	94
3.3	Odabrane definicije i teoreme iz numeričke matematike . . . . .	94
3.3.1	Ocene diskretnih funkcija Grina . . . . .	94
<b>A</b>	<b>Pregled oznaka</b>	<b>97</b>
A.1	Skupovi, prostori i norme . . . . .	97
A.2	Operatori . . . . .	98
A.3	Funkcije . . . . .	98
A.4	Parametri i funkcije diskretizacije . . . . .	99
A.5	Parametri i konstante . . . . .	100
A.6	Ostale oznake . . . . .	100

<b>B</b>	<b><i>Mathematica</i> programi</b>	<b>101</b>
B.1	Program za rešavanje sistema $Ax = v$ <i>LU</i> -dekompozicijom . . .	101
B.2	Šiškinova mreža . . . . .	102
B.3	Bahvalov-Šiškinova mreža . . . . .	102
B.4	Modifikovana Bahvalov-Šiškinova mreža . . . . .	103
B.5	Test problem 5 . . . . .	103
	<b>Zaključak</b>	<b>105</b>
	<b>Literatura</b>	<b>107</b>
	<b>Biografija</b>	<b>111</b>



# Predgovor

Parcijalne diferencijalne jednačine predstavljaju matematičke modele mnogih fizičkih, hemijskih i bioloških pojava (na primer širenje zagađenja u jezerima i rekama, širenje zaraza, predviđanje vremena, itd.). Često su jednačine koje se razmatraju dosta komplikovane i nalaženje analitičkog rešenja je nemoguće ili nepraktično. Stoga se traže numeričke aproksimacije nepoznatog analitičkog rešenja.

Postupci konačnih elemenata (*finite element methods*, FEMs) predstavlja ju moderan i snažan alat za numeričko rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Iako koreni ovih postupaka datiraju još iz XVII veka, Kuranov<sup>1</sup> rad [8] iz 1943. godine smatra se za prvi matematički doprinos teoriji konačnih elemenata. Kuran je u svom radu predložio aproksimaciju rešenja neprekidnim po delovima linearnim funkcijama na triangulacijom prilagođenoj geometriji domena. Nažalost važnost ovog rada nije prepoznata na vreme i ideja je zaboravljena. Pedesetih godina dvadesetog veka postupak ponovo otkrivaju inženjeri, ali matematička analiza postupaka konačnih elemenata počinje mnogo kasnije. Naziv postupci konačnih elemenata se prvi put pojavio u radu [7] iz 1960. godine, dok je prvi značajan rezultat izložen u radu Zlamala<sup>2</sup>, [25], iz 1968. godine. Svoju pravu ekspanziju postupci konačnih elemenata doživeli su u drugoj polovini XX veka, posebno zahvaljujući naglom razvoju računara. Zbog mogućnosti da uspešno rešavaju apstraktne probleme i modele problema iz realnog života ovi postupci su podjednako razvijeni i podjednako popularni i kod matematičara i kod inženjera. Više detalja o istoriji konačnih elemenata može se pronaći u [16] i [22].

Postupci konačnih elemenata baziraju se na slaboj formulaciji parcijalne diferencijalne jednačine. Na taj način se mogu proučavati ne samo klasična

---

<sup>1</sup>Richard Courant (1888-1972), nemački matematičar

<sup>2</sup>Miloš Zlamal (rođen 1924), češki matematičar

(regularna) rešenja, nego i neklasična rešenja koja se češće javljaju. Kod postupaka konačnih elemenata prvo se izvrši razlaganje polaznog domena, a potom se vrši aproksimacija rešenja problema po delovima polinomnom funkcijom. Tako se globalna analiza svodi na lokalnu analizu na poddomenima. U opštem slučaju, postupci konačnih elemenata se mogu primeniti na probleme sa domenom proizvoljnog oblika, uz proizvoljno razlaganje i stepen polinoma, istovremeno zadržavajući efikasnost i robustnost. Ova osobina izdvaja postupak konačnih elemenata od ostalih postupaka za rešavanje kompleksnih problema.

Singularno perturbovani problemi (SPP) predstavljaju matematičke modele mnogih fenomena u prirodi. Najpoznatije primene su u aerodinamici, mehanici fluida, prenosu toplote, modeliranju poluprovodnika u elektrotehnici, hemijskoj kinematici, finansijskoj matematici.

Singularno perturbovani problemi su parametarski zavisne parcijalne diferencijalne jednačine čije rešenje ispoljava neuniformno ponašanje kada parametar teži ka nekoj graničnoj vrednosti. Neuniformnost ovih problema ogleda se u pojavi slojeva u kojima se rešenje naglo menja kada perturbacioni parametar teži nuli. Rešavanje ovakvih problema standardnim numeričkim postupcima je u opštem slučaju neefikasno. Zato se javlja potreba za primenom adekvatnijih metoda, kao što su postupci konačnih elemenata.

\* \* \*

Ogromnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Heleni Zarin, koja me je uvela u teoriju singularno perturbovanih problema i upoznala sa teorijom konačnih elemenata. Zahvaljujem se dr Heleni Zarin na njenim savetima i predlozima kojima mi je pomogla pri izradi najpre diplomskog rada, a potom i master rada.

Zahvaljujem se i članovima komisije dr Katarini Surli i dr Dragoslavu Hercegu.



# Uvod

Glavna tema ovog rada jeste singularno perturbovani problem konvekcije-difuzije. Posmatrajmo sledeću jednodimenzionalnu diferencijalnu jednačinu

$$-\varepsilon u'' + bu' = f \quad \text{u} \quad (c, d), \quad u(c) = \gamma_c, \quad u(d) = \gamma_d, \quad (P)$$

gde su polazne funkcije u  $(P)$  realne i definisane na odgovarajućim domenima. Realan broj  $\varepsilon \in (0, 1]$  koji množi najviši izvod nepoznate funkcije  $u$ , u praksi najčešće uzima veoma male vrednosti.

Problem tipa  $(P)$  sa  $\varepsilon = 0$  i odgovarajućim konturnim uslovom naziva se *redukovani problem*. Njegovo rešenje se najčešće označava sa  $u_0 = u(\cdot, 0)$ . Za problem tipa  $(P)$  se kaže da je *singularno perturbovan* ako njegovo rešenje  $u = u(\cdot, \varepsilon)$  ne konvergira ka rešenju odgovarajućeg redukovanog problema, kada  $\varepsilon$  teži nuli. U tom slučaju  $\varepsilon$  se naziva *singularno perturbovanim parametrom*. Za granične vrednosti parametra, u dvodimenzionalnom slučaju diferencijalna jednačina u  $(P)$  menja svoj karakter - od eliptične prelazi u hiperboličnu. Zbog toga neki od konturnih uslova ne mogu biti zadovoljeni kada je  $\varepsilon = 0$ . Ova odstupanja predstavljaju glavnu odliku singularno perturbovanih problema.

U opštem slučaju, rešenje singularno perturbovanog problema se zajedno sa svojim izvodima naglo menja na određenim delovima domena. Uske podoblasti na kojima se javljaju promene se nazivaju *slojevima* i mogu se nalaziti u okolini ruba ili u unutrašnjosti domena. Tačan položaj i širina slojeva zavise od geometrije domena, konturnih uslova, kao i glatkosti polaznih funkcija.

Pri numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema, osnovni cilj je konstrukcija robustnih ili  $\varepsilon$ -uniformno konvergentnih numeričkih postupaka.

**Definicija 0.0.1** [15] *Neka je  $u$  rešenje singularno perturbovanog problema i neka je  $u_h$  aproksimacija za  $u$  koja je dobijena numeričkim postupkom sa parametrom diskretizacije  $N$ . Za numerički postupak se kaže da je  $\varepsilon$ -uniformno konvergentan (ili robustan) u normi  $\|\cdot\|$ , ako je*

$$\|u - u_h\| \leq \vartheta(N) \quad \text{za} \quad N \geq N_0,$$

gde su funkcija  $\vartheta$  i  $N_0 > 0$  nezavisni od  $\varepsilon$  i

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta(N) = 0.$$

Konstrukciji  $\varepsilon$ -uniformno konvergentnih postupaka za rešavanje SPP može se prići na dva načina. Prvi prilaz koristi činjenicu da je u većini SPP ponašanje rešenja u okolini slojeva eksponencijalne prirode. Za takve eksponencijalno fitovane postupke, približna rešenja se konstruišu na relativno grubim mrežama. Kada imamo problem u više dimenzija ovaj pristup je ipak teško uopštiti. Drugi prilaz koristi standardnu diskretizaciju na slojno-adaptivnim mrežama. Ova neuniformna razlaganja domena se zasnivaju na unapred poznatim informacijama o ponašanju rešenja. Formira se mreža koja je gusta u slojnim oblastima. Na takvim mrežama problem se efikasno rešava i u slojevima i van njih. Ovaj pristup je danas široko rasprostranjen i koristi se u kombinaciji sa raznim numeričkim metodama, kao što su "upwinding", veštačka difuzija, konačni elementi, "streamline-diffusion", postupak konačnih elemenata Petrov-Galerkina, itd. U slučaju kada ponašanje rešenja nije unapred poznato, moguće je koristiti adaptivne postupke koji konstruišu mrežu na osnovu informacija o numeričkom rešenju.

Postupcima konačnih elemenata se aproksimiraju ne samo klasična, nego i neklasična rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina. To je jedna od glavnih prednosti ovih postupaka nad ostalim standardnim numeričkim postupcima. Problem se postavlja u prostoru Soboljeva, to jest u Banahovom prostoru slabo diferencijabilnih funkcija, i polazi se od slabe formulacije diferencijalne jednačine. Domen se razlaže na konačnu uniju disjunktnih poddomena. Zatim se nad svakim poddomenom (*elementom*) tačno rešenje aproksimira polinomom i na taj način se formira globalno diskretno rešenje u obliku po delovima polinomne funkcije koja pripada određenom konačnodimenzionalnom prostoru (*prostoru konačnih elemenata*). Zahvaljujući takvom pristupu teorija interpolacije je zauzela značajno mesto u teoriji konačnih elemenata. Konvergenciju postupka konačnih elemenata moguće je postići

zgušnjavanjem mreže, povećavanjem stepena polinoma ili kombinovanjem oba načina. Tako se dobijaju  $h$ -verzija,  $p$ -verzija ili  $hp$ -verzija konačnih elemenata. U zavisnosti od razlaganja domena, baza prostora konačnih elemenata se bira tako da njene funkcije imaju male nosače. Posledica izbora takve baze je da formirani diskretni problem i odgovarajući linearni sistem jednačina imaju retku matricu, pa je njihovo rešavanje umnogome olakšano.

Za dokazivanje uniformnosti postupaka konačnih elemenata koristi se sledeća tehnika. Na osnovu dekompozicije rešenja dolazimo do nekih osobina rešenja i njegovih izvoda. Dobijene informacije o rešenju koriste se za konstrukciju slojno-adaptivne mreže i prilikom izvođenja greške interpolacije. Na kraju se izvodi analiza greške.

\* \* \*

Rad je organizovan na sledeći način.

Glava 1 posvećena je osobinama postupka konačnih elemenata. Kao model za upoznavanje sa ovim postupcima koristi se eliptična parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda, čiji specijalan slučaj predstavlja SPP. Potom su predstavljeni konformni i nekonformni FEM. Navedene su teorema o egzistenciji slabog rešenja (Laks-Milgramova teorema) i teorema o oceni greške (lema Céa).

Glava 2 posvećena je jednodimenzionalnim singularno perturbovanim problemima sa unutrašnjim slojevima. Postojanje ovakvih slojeva, pored uobičajenih konturnih slojeva, posledica je prekidnih polaznih funkcija. U ovoj glavi izučava se problem konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama. Kako standardni Galerkinov postupak konačnih elemenata ispoljava probleme sa stabilnošću i generiše oscilatorna numerička rešenja, radi stabilizacije se koristi "streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata. Za tako konstruisan postupak se pokazuje  $\varepsilon$ -uniformna konvergencija drugog reda na slojno-adaptivnoj mreži Šiškinovog tipa. Svi numerički testovi dati u ovoj glavi urađeni su pomoću programskog paketa *Mathematica 5.0*.

Glava 3 predstavlja dodatak u kome su izložene definicije i teoreme iz algebre, analize i numeričke matematike koje su korišćene u radu.

Na kraju su data dva priloga. Prvi prilog sadrži oznake koje su korišćene u radu, a u drugom prilogu su predstavljeni programi koji su korišćeni pri izvođenju numeričkih eksperimenata.



# Glava 1

## Postupci konačnih elemenata

Ova glava posvećena je postupcima konačnih elemenata za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Ovde su opisane glavne osobine ovih postupaka. Takođe, u ovoj glavi su uvedene potrebne oznake i pojmovi.

### 1.1 Prostori funkcija

Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren i ograničen skup. U ovom odeljku se uvode posebne klase realnih funkcija koje su definisane na skupu  $\Omega$ .

#### 1.1.1 Prostori integrabilnih funkcija

Označimo sa  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , skup merljivih funkcija  $u$  za koje je

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

Za dve funkcije  $u, v \in L^p(\Omega)$  kažemo da su jednake ako je  $u(x) = v(x)$  za  $x \in \Omega$ , osim na skupu mere nula.  $L^p(\Omega)$  je Banahov prostor sa normom

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Prostor  $L^2(\Omega)$  je osim toga i Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom definisanim sa

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

Očigledno je  $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (u, u)_{L^2(\Omega)}$ .

Za  $p = \infty$  sa  $L^\infty(\Omega)$  označen je skup funkcija sa konačnim esencijalnim supremumom.  $L^\infty(\Omega)$  je takođe Banahov prostor sa normom

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

**Lema 1.1.1 (Helderova nejednakost)** [1] *Za svake dve funkcije  $u \in L^p(\Omega)$  i  $v \in L^q(\Omega)$ , za koje je  $1/p + 1/q = 1$ , važi  $uv \in L^1(\Omega)$  i*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

U slučaju  $p = q = 2$  Helderova<sup>1</sup> nejednakost poznata je pod imenom Koši<sup>2</sup>-Švarcova<sup>3</sup> nejednakost.

Sa  $L_{loc}^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty)$ , označen je skup svih funkcija  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  takvih da za svako  $x \in \Omega$  postoji otvorena okolina  $\mathcal{U}$  takva da je  $\mathcal{U} \subset \Omega$  i  $u \in L^p(\mathcal{U})$ . Funkcije iz  $L_{loc}^p(\Omega)$  nazivamo *lokalno p-integrabilnim funkcijama*.

### 1.1.2 Prostori Soboljeva

U ovom pododeljku ćemo dati definiciju i navesti neke osobine prostora Soboljeva<sup>4</sup>. Prostori Soboljeva su značajni za analizu numeričkih metoda za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ovde ćemo navesti neke rezultate bez dokaza, a više o prostorima Soboljeva se može pronaći u [1].

Neka je sa  $\mathbb{N}_0$  označen skup nenegativnih celih brojeva. *Multi-indeks* je naziv za  $n$ -torku

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dužina multi-indeksa  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  je nenegativan ceo broj

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Multi-indeks  $(0, \dots, 0)$  označavamo sa  $\mathbf{0}$ ; jasno  $|\mathbf{0}| = 0$ .

<sup>1</sup>Otto Ludwig Hölder (1859-1937), nemački matematičar

<sup>2</sup>Augustin Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

<sup>3</sup>Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), nemački matematičar

<sup>4</sup>Sergej Soboljev (1908-1989), ruski matematičar

Podsetimo se sada pojma slabog izvoda funkcije. Neka je sa  $C_0^\infty(\Omega)$  označen prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u  $\Omega$ .

**Definicija 1.1.1** *Lokalno 1-integrabilna funkcija  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  ima slabi izvod  $w = D^\alpha u \in L_{loc}^1(\Omega)$  reda  $\alpha$  ako je*

$$(w, \phi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \phi)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{za svako } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ako je funkcija diferencijabilna u klasičnom smislu, tada njen slabi izvod postoji i jednak je klasičnom izvodu. Radi jednostavnijeg zapisa, koriste se oznake

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

i za slabi i za klasični izvod funkcije  $u$ , gde će iz konteksta biti jasno koji izvod se koristi.

Sada možemo dati definiciju prostora Soboljeva.

**Definicija 1.1.2** *Za dati ceo broj  $k \geq 0$  i  $p \in [1, \infty]$  prostor Soboljeva reda  $k$  definisan je sa*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Na prostoru  $W^{k,p}(\Omega)$  su definisane norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty, \end{cases}$$

i seminorma

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Lako se pokazuje da je  $W^{k,p}(\Omega)$  normiran prostor. Štaviše, imamo sledeći rezultat.

**Teorema 1.1.1** [3] *Prostor Soboljeva  $W^{k,p}(\Omega)$  je Banahov prostor.*

U nastavku se umesto  $W^{k,2}(\Omega)$  upotrebljava oznaka  $H^k(\Omega)$ ; slovo  $H$  se u literaturi koristi u čast Davida Hilberta<sup>5</sup>.  $H^k(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^k(\Omega).$$

Izuzetno je važan prostor Soboljeva  $H_0^k(\Omega)$  definisan kao komplementiranje prostora  $C_0^\infty(\Omega)$  u odnosu na normu  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ .  $H_0^k(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom  $(\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)}$  i normom  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ . U slučaju kada je  $\Omega$  otvoren, ograničen i povezan skup sa Lipšic-neprekidnim (regularnim) rubom<sup>6</sup>  $\partial\Omega$ , prostor  $H_0^1(\Omega)$  ima osobinu

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

**Lema 1.1.2 (Poenkare-Fridrihova nejednakost)** [21] *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  povezan i otvoren skup i neka  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Tada postoji konstanta  $c^*(\Omega)$ , nezavisna od  $u$ , takva da je*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq c^* \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx.$$

Veza između prostora  $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $L^q(\Omega)$  i  $C^m(\overline{\Omega})$  opisana je u *teoremi o potapanju*. Teorema o potapanju se može naći u [3], a sledeća teorema predstavlja jedan njen deo.

**Teorema 1.1.2** [24] *Neka je  $\Omega$  otvoren i ograničen podskup prostora  $\mathbb{R}^n$  sa regularnim rubom  $\partial\Omega$ . Tada se za  $kp > n$ , prostor Soboljeva  $W^{k,p}(\Omega)$  može potopiti u Helderov prostor  $C^{k-\lfloor n/p \rfloor - 1, \beta}(\overline{\Omega})$ , gde je*

$$\beta = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ \text{proizvoljan realan broj iz } (0, 1), & \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

<sup>5</sup>David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

<sup>6</sup>Rub  $\partial\Omega$  je Lipšic-neprekidan (ili regularan) ako se može lokalno opisati Lipšic-neprekidnim funkcijama.



Direktna posledica prethodne teoreme je  $H^k(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega})$ , kada je  $k - m > n/2$ . Dakle, neprekidne funkcije su  $H^1$ -funkcije u jednodimenzionalnom slučaju i  $H^2$ -funkcije u dvodimenzionalnom slučaju.

## 1.2 Eliptični problemi drugog reda

Eliptične parcijalne diferencijalne jednačine se najčešće modeliraju Laplasovom<sup>7</sup> jednačinom

$$\Delta u = 0$$

i Poasonovom<sup>8</sup> jednačinom

$$-\Delta u = f,$$

gde je  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  Laplasov operator.

Za predstavljanje postupka konačnih elemenata korišćemo kao model linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa homogenim Dirihleovim konturnim uslovima na otvorenom i ograničenom domenu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad \text{u } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

gde koeficijenti  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  i funkcija  $f$  zadovoljavaju sledeće uslove:

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i \in C(\bar{\Omega}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$c \in C(\bar{\Omega}),$$

$$f \in C(\bar{\Omega}),$$

i

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \text{za svako } (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.3)$$

gde je  $\tilde{c}$  konstanta nezavisna od  $x$  i  $\xi_i$ .

<sup>7</sup>Pierre Simon Laplace (1749-1827), francuski matematičar i astronom

<sup>8</sup>Siméon Denis Poisson (1781-1840), francuski matematičar i fizičar

**Napomena 1.2.1** Slučaj nehomogenih konturnih uslova se jednostavno analizira uvođenjem odgovarajuće transformacije, vidi [3].  $\diamond$

**Definicija 1.2.1** Klasično rešenje problema (1.1)-(1.2) jeste svaka funkcija  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1.1) i konturni uslov (1.2).

U opštem slučaju, egzistencija klasičnog rešenja nije uvek garantovana jer to zavisi od glatkosti  $\partial\Omega$  i funkcija  $u$  (1.1)-(1.2). Ilustrujemo to sledećim primerom.

**Primer 1.2.1** Posmatrajmo Poasonovu jednačinu sa homogenim Dirihleovim konturnim uslovima na  $\Omega = (-1, 1)^n$ :

$$\begin{cases} -\Delta u = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - |x|\right), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Ovaj problem nema klasično rešenje  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . U suprotnom,  $\Delta u$  je neprekidna funkcija na  $\Omega$ , što nije moguće zato što  $\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - |x|\right)$  nije neprekidna funkcija na  $\Omega$ .  $\square$

Da bismo savladali nedostatke klasične teorije i da bismo mogli da se bavimo parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa nedovoljno glatkim podacima generalizujemo pojam klasičnog rešenja. Uopštenje pojma klasičnog rešenja jeste slabo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine.

Pretpostavimo da je  $u$  klasično rešenje problema (1.1)-(1.2). Množenjem polazne jednačine (1.1) test funkcijom  $v \in C_0^1(\Omega)$  dobijamo

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot v \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Primenom parcijalne integracije na prvi integral i koristeći da je  $v = 0$  na  $\partial\Omega$ , dobijamo

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx,$$

za svako  $v \in C_0^1(\Omega)$ . Primećujemo da ova jednakost ima smisla i ako nije  $u \in C^2(\Omega)$ . Naime, dovoljno je pretpostaviti da  $u \in L^2(\Omega)$  i  $\partial u / \partial x_i \in L^2(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Kako  $u$  treba da zadovoljava Dirihleove konturne uslove prirodno je pretpostaviti da  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Dakle, razmatramo sledeći problem: naći  $u \in H_0^1(\Omega)$  tako da je

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \\ & + \int_{\Omega} c u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Primetimo da je  $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ . Jasno, ako  $u \in H_0^1(\Omega)$  i  $v \in H_0^1(\Omega)$  (umesto  $v \in C_0^1(\Omega)$ ) gornja jednakost je i dalje tačna. Prisetimo da više nije potrebna pretpostavka  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ , jer koeficijenti  $a_{ij}$  u gornjoj jednakosti nisu pod znakom izvoda. Dovoljno je pretpostaviti  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ . Takođe, dovoljne su pretpostavke  $b_i \in L^\infty(\Omega)$  i  $c \in L^\infty(\Omega)$ . Ovo nam daje motivaciju za uvođenje sledeće definicije.

**Definicija 1.2.2** Neka  $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$  i  $f \in L^2(\Omega)$ . Funkcija  $u \in H_0^1(\Omega)$  je slabo rešenje problema (1.1)-(1.2) ako važi

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (1.4)$$

za svako  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Jednačinu (1.4) nazivamo *slabom formulacijom* problema (1.1)-(1.2). Jasno, svako klasično rešenje je istovremeno i slabo, dok obrnuto ne mora da važi. Na kraju ovog odeljka ćemo navesti primer slabog rešenja koje nije klasično.

Radi jednostavnosti uvodimo sledeće oznake

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c w v dx, \quad (1.5)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.6)$$

Sada se problem (1.4) može formulirati na sledeći način

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v) \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.7)$$

U nastavku ćemo najpre navesti neke osobine karakteristične za bilinearnu formu  $a$  i linearnu funkcionalu  $l$ , a potom ćemo navesti glavnu teoremu o egzistenciji jedinstvenog slabog rešenja  $u$  eliptičnog problema (1.1)-(1.2). Pomenuta teorema poznata je pod imenom Laks-Milgramova teorema.

**Definicija 1.2.3** *Neka je  $(V, \|\cdot\|)$  realni normirani prostor. Bilinearna forma  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  je*

*i) neprekidna (ili ograničena) ako postoji konstanta  $M_a > 0$  tako da je*

$$|a(w, v)| \leq M_a \|w\| \|v\|, \quad \text{za svako } w, v \in V,$$

*ii) V-eliptična (ili koercitivna) ako postoji konstanta  $\alpha > 0$  tako da je*

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2, \quad \text{za svako } w \in V.$$

**Definicija 1.2.4** *Neka je  $(V, \|\cdot\|)$  realni normirani prostor. Linearna funkcionala  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  je ograničena ako postoji konstanta  $M_l > 0$  tako da je*

$$|l(v)| \leq M_l \|v\|, \quad \text{za svako } v \in V.$$

Sada ćemo navesti Laks-Milgramovu teoremu o egzistenciji rešenja problema (1.7). Dokaz ove teoreme može se pronaći u [3], [5], [23].

**Teorema 1.2.1 (Laks-Milgram)** *Neka je  $(V, \|\cdot\|)$  realni Hilbertov prostor. Za neprekidnu V-eliptičnu bilinearnu formu  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  i ograničenu linearnu funkcionalu  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ , apstraktni varijacioni problem*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u \in V \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \text{ za svako } v \in V, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

*ima jedinstveno rešenje.*

Vratimo se sada na eliptični problem (1.1)-(1.2) i njegovu slabu formulaciju (1.7). Lako se pokazuje da je za svako fiksno  $w \in H_0^1(\Omega)$  preslikavanje  $v \mapsto a(v, w)$  linearno. Slično, za svako fiksno  $v \in H_0^1(\Omega)$  preslikavanje  $w \mapsto a(v, w)$  je linearno. Stoga je  $a(\cdot, \cdot)$  bilinearna forma na  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

Pokažimo da je bilinearna forma  $a$  neprekidna. Primenom Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{ij}(x)| \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| + \sum_{i=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} |b_i(x)| \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx \right| \\
&\quad + \max_{x \in \bar{\Omega}} |c(x)| \left| \int_{\Omega} w(x)v(x) dx \right| \\
&\leq \hat{c} \left[ \sum_{i,j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad \left. + \left( \int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \hat{c} \left[ \left( \int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\quad \times \left[ \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right],
\end{aligned}$$

gde je

$$\hat{c} = \max \left\{ \max_{1 \leq i,j \leq n} \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{ij}(x)|, \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in \bar{\Omega}} |b_i(x)|, \max_{x \in \bar{\Omega}} |c(x)| \right\}.$$

Dalje dobijamo da je

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| &\leq 2n\hat{c} \left[ \int_{\Omega} |w|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[ \int_{\Omega} |v|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Uzimajući  $M_a = 2n\hat{c}$  imamo da je

$$|a(w, v)| \leq M_a \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dakle, bilinearna forma  $a$  je neprekidna.

Pokažimo i da je bilinearna forma  $a$  koercitivna. Da bismo to uradili pretpostavićemo da  $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . Koristeći (1.3), imamo da je

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v^2) dx + \int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx,$$

gde smo umesto  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v$  pisali  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v^2)$ . Primenom parcijalne integracije na drugi izraz na desnoj strani prethodne nejednakosti dobijamo

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left( c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) |v|^2 dx.$$

Pretpostavimo da koeficijenti  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  i  $c$  zadovoljavaju nejednakost

$$c - \frac{1}{2} \operatorname{div} b = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (1.9)$$

Tada je

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx. \quad (1.10)$$

Primenom Poenkare-Fridrihove nejednakosti dobijamo

$$a(v, v) \geq \frac{\tilde{c}}{c^*} \int_{\Omega} |v|^2 dx. \quad (1.11)$$

Iz (1.10) i (1.11) sledi da je

$$a(v, v) \geq \alpha \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) = \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (1.12)$$

gde je  $\alpha = \tilde{c}/(1 + c^*)$ . Dakle, bilinearna forma  $a$  je koercitivna.

Proverimo da li je  $l$  ograničena linearna funkcionala. Preslikavanje  $v \mapsto l(v)$  je linearno. Zaista, za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  i sve  $v, w \in H_0^1(\Omega)$  važi

$$\begin{aligned} l(\alpha v + \beta w) &= \int_{\Omega} f(x)(\alpha v(x) + \beta w(x)) dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \beta \int_{\Omega} f(x)w(x) dx \\ &= \alpha l(v) + \beta l(w). \end{aligned}$$

Primenom Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

za sve  $v \in H_0^1(\Omega)$ . U poslednjoj nejednakosti smo koristili očiglednu nejednakost  $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ . Uzimajući  $M_l = \|f\|_{L^2(\Omega)}$  dobijamo da je  $l$  ograničena linearna funkcionala.

Kako su zadovoljene sve pretpostavke Laks-Milgramove teoreme sledi da postoji jedinstveno slabo rešenje  $u$  problema (1.1)-(1.2).

**Teorema 1.2.2** *Neka  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $c \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  i neka važe (1.3) i (1.9). Tada problem (1.1)-(1.2) ima jedinstveno slabo rešenje  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Štaviše,*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Dokaz.** Postojanje i jedinstvenost slabog rešenja posmatranog problema smo već pokazali. Ostaje da se pokaže navedena nejednakost. Važi

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u, u) = l(u) = (f, u)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |(f, u)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

gde smo koristili (1.12), (1.7), Koši-Švarcovu nejednakost i definiciju norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . ■

**Napomena 1.2.2** Kada smo dokazivali da je  $a$  koercitivna bilinearna forma pretpostavili smo da  $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . Međutim, uslov  $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$  se može oslabiti tako da se koristi  $b_i \in L^\infty(\Omega)$  iz Definicije 1.2.2. Primenom (1.3) i Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \tilde{c} |v|_{H^1(\Omega)}^2 - \left( \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{1/2} |v|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} c(x) |v(x)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \tilde{c} |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left( c(x) - \frac{2}{\tilde{c}} \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) |v(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Uvodeći novu pretpostavku

$$c - \frac{2}{\tilde{c}} \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

dobijamo nejednakost

$$a(v, v) \geq \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx,$$

koja je analogna sa (1.10). Sada, slično kao gore, dobijamo (1.12), gde je  $\alpha = \tilde{c}/(2 + 2c^*)$ .  $\diamond$

U nastavku dajemo primer slabog rešenja koje nije klasično.

**Primer 1.2.2** Posmatrajmo problem iz Primera 1.2.1. Sada je  $a_{ij} \equiv 1$ ,  $i = j$ ,  $a_{ij} \equiv 0$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $b_i(x) \equiv 0$ ,  $c(x) \equiv 0$ ,  $f(x) = \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} - |x|)$  i  $\Omega = (-1, 1)^n$ . Uslovi (1.3) i (1.9) su ispunjeni. Primenom Teoreme 1.2.2 dobijamo da posmatrani problem ima jedinstveno slabo rešenje  $u \in H_0^1(\Omega)$ .  $\square$

## 1.3 Klasifikacija postupaka konačnih elemenata

Postupci konačnih elemenata mogu se grubo klasifikovati u dve grupe: konformni i nekonformni postupci konačnih elemenata.

Prvu grupu *konformnih FEM* čine oni postupci čiji prostor konačnih elemenata leži u prostoru u kome se traži rešenje polaznog problema. Takođe, smatra se da su u slaboj formulaciji koju pretežno čine integrali, sva izračunavanja tačna. Standardni postupak Galerkina i postupak Petrov-Galerkina su konformni FEM.

Druga grupa *nekonformnih FEM* obuhvata sva ostala odstupanja koja mogu nastati iz različitih razloga, na primer, pojava prekida kod susednih elemenata (diskontinualni Galerkinov FEM), krivolinijski oblik domena (izoparametarski FEM), upotreba numeričke integracije za izračunavanje koeficijenata diskretnog problema. Mnogo šira grupa nekonformnih FEM uključuje



razna uopštenja, koja su u literaturi poznata pod nazivom "variational crimes".

Pored ove dve grupe postoje i druge vrste postupaka konačnih elemenata, kao što su mešoviti i hibridni FEM koji polaze od opštijeg oblika varijacionog problema.

### 1.3.1 Konformni postupci konačnih elemenata

Prilikom konstrukcije približnog rešenja varijacionog problema (1.8) u konformnom slučaju se polazi od konačnodimenzionalnog potprostora  $V_h \subset V$ . Pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi Laks-Milgramove teoreme.

Diskretni problem kojim se definiše *Galerkinov<sup>9</sup> postupak konačnih elemenata* glasi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Primenom Laks-Milgramove teoreme na prostor  $V_h$  dobija se da postoji jedinstveno rešenje  $u_h \in V_h$  problema (1.13). Ovaj problem možemo prikazati kao sistem linearnih jednačina. Neka je  $V_h$  prostor dimenzije  $N$  i neka je  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$  njegova baza. Diskretno rešenje  $u_h$  se može predstaviti u obliku

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_{h,i} \varphi_i.$$

Dakle, diskretni problem (1.13) se može zapisati na sledeći način

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } [u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^N \text{ tako da je} \\ \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Dobijeni sistem linearnih jednačina je dimenzije  $N \times N$ . Njegova matrica sa elementima  $a(\varphi_j, \varphi_i)$  naziva se "*stiffness*" matrica ili *matrica sistema*. Vektor desne strane  $[l(\varphi_1), l(\varphi_2), \dots, l(\varphi_N)]^T$  u (1.14) naziva se "*load*" vektor.

<sup>9</sup>Boris Grigorievič Galerkin (1871-1954), ruski matematičar

”Stiffness” matrica  $A = [a_{ij}]$ ,  $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ , je pozitivno definitna, tj.

$$Y^T A Y > 0 \quad \text{za sve } 0 \neq Y \in \mathbb{R}^N.$$

Neka je  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \neq 0$  i neka je

$$w = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i.$$

Tada je zbog  $V$ -eliptičnosti bilinearne forme  $a$

$$\begin{aligned} Y^T A Y &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i a_{ji} y_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i a(\varphi_i, \varphi_j) y_j \\ &= a\left(\sum_{i=1}^N y_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N y_j \varphi_j\right) = a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Dakle,  $A$  je pozitivno definitna matrica.

”Stiffness” matrica je regularna. Pretpostavimo suprotno da je  $A$  singularna matrica. Tada postoji  $0 \neq Y \in \mathbb{R}^N$  tako da je  $AY = 0$ , pa je  $Y^T A Y = 0$ . Međutim, to je nemoguće jer je  $A$  pozitivno definitna matrica.

Na osobine matrice sistema diskretnog problema direktno utiče izbor baze  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ . U opštem slučaju polazi se od dva važna principa prilikom odabira baze. Prvi princip je da bazne funkcije imaju što manje nosače u domenu problema. Drugi princip podrazumeva da broj baznih funkcija čiji nosači imaju neprazan presek što manji. Ovi zahtevi imaju za posledicu da je generisana matrica sistema retka, pa je rešavanje odgovarajućeg diskretnog problema umnogome olakšano.

U nastavku ćemo videti da izbor konačnodimenzionalnog prostora  $V_h$  ima veliki uticaj na ocenu greške. Glavni rezultat na ovu temu je lema Céa<sup>10</sup>, čiji dokaz se može pronaći u [3], [6].

**Lema 1.3.1 (Céa)** *Neka su pretpostavke Laks-Milgramove teoreme ispunjene i neka je  $V_h \subset V$  konačnodimenzionalni linearni prostor. Ako su redom  $u$  i  $u_h$  rešenja varijacionog i diskretnog problema, tada važi*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

<sup>10</sup>Céa je ovu lemu dokazao u simetričnom slučaju 1964. godine. Nezavisno od njega, isti rezultat je dobio i Varga 1966. godine. Godine 1968. Birkhof, Šulc i Varga proširili su lemu Céa i na nesimetričan slučaj.

gde su  $M_a$  konstanta neprekidnosti i  $\alpha$  konstanta koercitivnosti bilinearne forme  $a$ .

**Napomena 1.3.1** Kada se na rešavanje eliptičnog problema (1.1)-(1.2) primeni Galerkinov postupak konačnih elemenata dobija se

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

◇

Prilikom rešavanja određenih problema, nekada je zgodnije koristiti različite prostore kojima pripadaju približna rešenja  $u_h$  i test funkcije  $v_h$ . Kod *Petrov-Galerkinovog postupka konačnih elemenata* koristi se ta ideja. Ovaj postupak predstavlja generalizaciju (standardnog) postupka Galerkina. Posmatramo opštiji varijacioni problem

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in U \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \quad \text{za svako } v \in V. \end{cases} \quad (1.15)$$

Egzistencija rešenja problema (1.15) data je u uopštenoj Laks-Milgrama teoremi.

**Teorema 1.3.1** [3] *Neka su  $(U, \|\cdot\|_U)$  i  $(V, \|\cdot\|_V)$  realni Hilbertovi prostori,  $a : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinearna forma i  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena linearna funkcionala. Ako postoje konstante  $M_a$  i  $\alpha$  tako da je*

$$|a(u, v)| \leq M_a \|u\|_U \|v\|_V, \quad u \in U, \quad v \in V, \quad (1.16)$$

$$\inf_{0 \neq u \in U} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq \alpha > 0, \quad (1.17)$$

$$\sup_{u \in U} a(u, v) > 0, \quad \text{za svako } v \in V, \quad v \neq 0, \quad (1.18)$$

tada problem (1.15) ima jedinstveno rešenje  $u \in U$ .

Uopštena lema Céa daje ocenu greške između tačnog i odgovarajućeg diskretnog rešenja problema (1.15).

**Lema 1.3.2** [3] *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 1.3.1 i neka su  $U_h \subset U$  i  $V_h \subset V$  linearni konačnodimenzionalni prostori jednakih dimenzija. Ako uslovi (1.16)-(1.18) važe kada se  $U_h$  i  $V_h$  zamene umesto  $U$  i  $V$ , redom, tada diskretni problem*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u_h \in U_h \text{ tako da je} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h, \end{array} \right. \quad (1.19)$$

ima jedinstveno rešenje  $u_h \in U_h$  i

$$\|u - u_h\|_U \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|_U.$$

### 1.3.2 Nekonformni postupci konačnih elemenata

Posmatramo ponovo problem (1.8). Pretpostavimo da važe pretpostavke Laks-Milgramove teoreme. Prilikom rešavanja konkretnih modela različitih pojava, usled uticaja brojnih faktora formiraju se diskretni problemi oblika

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h, \end{array} \right. \quad (1.20)$$

pri čemu su bilinearna koercitivna forma  $a_h$  i ograničena linearna funkcionala  $l_h$  definisane na konačnodimenzionalnom prostoru  $V_h \subset V$ . Znači, nije potrebno da su  $a_h$  i  $l_h$  definisane na  $V$ , što prirodno sledi imajući na umu da  $a_h$  i  $l_h$  najčešće predstavljaju kvadraturne formule kojima se aproksimiraju  $a$  i  $l$ . Analogno diskretnom problemu (1.13), i diskretni problem (1.20) se može transformisati u sistem linearnih jednačina

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } [u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^N \text{ tako da je} \\ \sum_{i=1}^N a_h(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l_h(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

U nastavku ćemo navesti prvu i drugu lemu Stranga<sup>11</sup>, čiji dokazi se mogu pronaći u [6].

<sup>11</sup>William Gilbert Strang (rođen 1934), američki matematičar

**Teorema 1.3.2 (prva lema Stranga)** *Neka su pretpostavke Laks-Milgrmove teoreme ispunjene. Tada postoji konstanta  $C$  nezavisna od prostora  $V_h$  tako da je*

$$\|u - u_h\| \leq C \left( \inf_{v_h \in V_h} \left[ \|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right] + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|l(w_h) - l_h(w_h)|}{\|w_h\|} \right).$$

U ovom slučaju je još uvek ispunjena "konformna" pripoda postupka konačnih elemenata. Međutim, nekada je prihvatljivije pretpostaviti da je  $V_h \not\subset V$ . Ovaj slučaj opisan je u drugoj lemi Stranga. Najpre pretpostavimo da su u diskretnom problemu (1.20) bilinearna forma  $a_h$  i linearna funkcionala  $l_h$  definisane na prostoru

$$V + V_h = \{w : w = v + v_h, \quad v \in V, \quad v_h \in V_h\},$$

kao i da u normi  $\|\cdot\|_h$ , koja zavisi od razlaganja domena, važi

$$|a_h(w, v_h)| \leq M_{a_h} \|w\|_h \|v_h\|_h, \quad \text{za svako } w \in V + V_h, \quad v_h \in V_h,$$

$$a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_h^2, \quad \text{za svako } v_h \in V_h,$$

$$|l_h(v_h)| \leq M_{l_h} \|v_h\|_h, \quad \text{za svako } v_h \in V_h,$$

za neke pozitivne konstante  $M_{a_h}$ ,  $\alpha$ ,  $M_{l_h}$ .

**Teorema 1.3.3 (druga lema Stranga)** *Neka su pretpostavke Laks-Milgrmove teoreme ispunjene. Tada postoji jedinstveno rešenje  $u_h \in V_h$  diskretnog problema (1.20) i važi sledeća ocena greške*

$$\|u - u_h\|_h \leq \left(1 + \frac{M_{a_h}}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \frac{1}{\alpha} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a(u_h, v_h) - l_h(v_h)|}{\|v_h\|_h}.$$

U narednim odeljcima ćemo govoriti o formiranju potprostora  $V_h$ , daćemo formalne definicije konačnog elementa i prostora konačnih elemenata.

## 1.4 Konačni elementi

Važan korak u postupku konačnih elemenata jeste izbor prostora  $V_h$  i njegove baze. Pošto je ova problematika usko povezana sa razlaganjem domena polaznog problema, prvo polazimo od nekoliko zahteva koji se uobičajeno postavljaju za jedno razlaganje u okviru konformnog FEM.

Neka je sa  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  označen domen posmatranog problema koji je otvoren i ograničen skup.

**Definicija 1.4.1** [6] *Triangulacija ili mreža je razlaganje  $\mathcal{T} = \{\kappa\}$  domena  $\Omega$  u konačni broj podskupova  $\kappa$ , koje zovemo elementi, tako da su zadovoljene sledeće osobine*

*i) svaki element  $\kappa \in \mathcal{T}$  je zatvoren i povezan skup čija je unutrašnjost  $\kappa^\circ$  neprazna, a rub  $\partial\kappa$  je Lipšic-neprekidan;*

*ii)  $\overline{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}} \kappa$ ;*

*iii) za svaka dva različita elementa  $\kappa_i, \kappa_j \in \mathcal{T}$ , važi  $\kappa_i^\circ \cap \kappa_j^\circ = \emptyset$ .*

**Napomena 1.4.1** Iako pojam mreže iz prethodne definicije označava razlaganje domena, za jednodimenzionalne probleme je uobičajeno da se pod ovim pojmom podrazumeva skup deobenih tačaka.  $\diamond$

Da bismo predstavili konačne elemente na što jednostavniji način, u nastavku se pretpostavlja da je  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  poligonalni domen koji se može razložiti na ravnostrane<sup>12</sup> trouglove ili četvoruglove.

**Definicija 1.4.2** [6] *Za triangulaciju  $\mathcal{T} = \{\kappa\}$  domena  $\Omega$  se kaže da je*

*i) dopustiva (ili ograničena) ako za svaka dva različita elementa  $\kappa_i, \kappa_j \in \mathcal{T}$ , je  $\kappa_i \cap \kappa_j$  ili prazan skup, ili zajednički čvor ili zajednička stranica (ivica);*

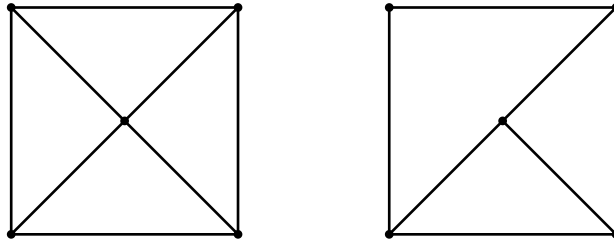
---

<sup>12</sup>Krivolinijske (izoparametarske) elemente je potrebno koristiti za domene sa krivolinijskim rubom

ii) regularna po obliku ako postoji konstanta  $\varrho > 0$  takva da za svaki element  $\kappa \in \mathcal{T}$  prečnika  $h_\kappa$  i njegovu upisanu kružnicu prečnika  $\rho_\kappa$  važi

$$\frac{h_\kappa}{\rho_\kappa} \leq \varrho.$$

Na Slici 1.1 prikazan je primer dopustive i nedopustive triangulacije.



Slika 1.1: Dopustiva (levo) i nedopustiva triangulacija (desno)

Nakon izvršene triangulacije domena prelazimo na izbor odgovarajućeg konačnodimenzionalnog prostora  $V_h$ . Ovom temom ćemo se baviti u narednom odeljku, a sada ćemo uvesti definiciju pojma konačnog elementa.

**Definicija 1.4.3** [6] Konačni element je uređena trojka  $(\kappa, P_\kappa, \Sigma_\kappa)$  sa sledećim osobinama:

- i)  $\kappa \subset \mathbb{R}^2$  je zatvoren skup čija je unutrašnjost neprazna i rub Lipschitz-neprekidan;
- ii)  $P_\kappa$  je potprostor  $C(\kappa)$  konačne dimenzije  $s$  (njegove bazne funkcije se nazivaju "shape" funkcijama);
- iii)  $\Sigma_\kappa$  je skup  $s$  linearno nezavisnih funkcionela definisanih na  $P_\kappa$ , gde je svako  $p \in P_\kappa$  na jedinstven način definisano preko  $s$  funkcionela iz  $\Sigma_\kappa$ .

Neka je  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s\}$  skup  $s$  linearno nezavisnih funkcionela iz  $\Sigma_\kappa$ . Tada postoji  $s$  "shape" funkcija  $p_i \in P_\kappa$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , koje zadovoljavaju

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

gde je  $\delta_{ij}$  Kronekerov simbol, to jest

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Takođe, važi

$$p = \sum_{i=1}^s \phi_i(p) p_i, \quad \text{za svako } p \in P_\kappa.$$

Linearne funkcionele  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , se zovu *stepeni slobode* konačnog elementa.

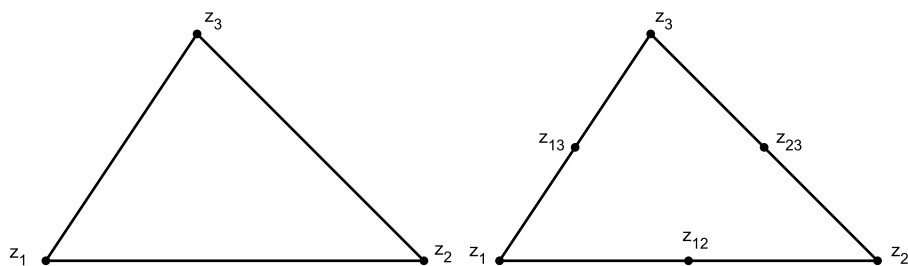
### 1.4.1 Primeri trougaonih konačnih elemenata

Neka je  $\kappa \subset \mathbb{R}^2$  trougao i neka je sa  $P_\kappa = \mathbb{P}_k(\kappa)$  označen skup svih polinoma stepena najviše  $k$  definisanih na  $\kappa$ .

**Primer 1.4.1** *Linearni Lagranžov konačni element* je trojka  $(\kappa, \mathbb{P}_1(\kappa), \Sigma_\kappa)$ , gde je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke  $z_i$  predstavljaju temena trougla  $\kappa$ . Skup  $\kappa$  zove se linearni Lagranžov trougao (vidi Sliku 1.2, levo).  $\square$



Slika 1.2: Linearni Lagranžov trougao (levo) i kvadratni Lagranžov trougao (desno)



**Primer 1.4.2** *Kvadratni Lagranžov konačni element* je trojka  $(\kappa, \mathbb{P}_2(\kappa), \Sigma_\kappa)$ , gde je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_{12}, \phi_{13}, \phi_{23}\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad \phi_{ij}(p) = p(z_{ij}), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke  $z_i$  predstavljaju temena trougla  $\kappa$ , a tačke  $z_{ij} = (z_i + z_j)/2$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$  predstavljaju sredine stranica trougla  $\kappa$ . Skup  $\kappa$  zove se kvadratni Lagranžov trougao (vidi Sliku 1.2, desno).  $\square$

Na isti način se konstruiše Lagranžov konačni element  $(\kappa, \mathbb{P}_k(\kappa), \Sigma_\kappa)$  za proizvoljan stepen polinoma  $k$ . U tom slučaju je

$$\dim(\mathbb{P}_k(\kappa)) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2),$$

dok je

$$\Sigma_\kappa = \left\{ \phi_i : i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke  $z_i$  predstavljaju 3 temena trougla  $\kappa$ ,  $3(k-1)$  tačaka na stranicama trougla  $\kappa$  i  $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$  unutrašnjih tačaka. Unutrašnje tačke su izabrane tako da određuju konačni element sa  $k-3$  stepena slobode.

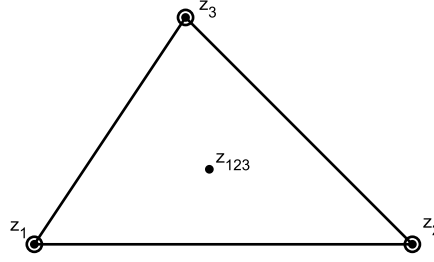
U prethodnim primerima su stepeni slobode  $\phi_i$  bili definisani preko vrednosti u tačkama odgovarajućeg argumenta. Takođe, za stepene slobode moguće je koristiti parcijalne izvode. Na taj način se dobijaju *Hermitovi konačni elementi*.

**Primer 1.4.3** *Kubni Hermitov konačni element* je trojka  $(\kappa, \mathbb{P}_3(\kappa), \Sigma_\kappa)$ , gde je

$$\begin{aligned} \Sigma_\kappa &= \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_{123}, \phi_{x,1}, \phi_{y,1}, \dots, \phi_{x,3}, \phi_{y,3}\}, \\ \phi_i(p) &= p(z_i), \quad \phi_{123}(p) = p(z_{123}), \\ \phi_{x,i}(p) &= \partial_x p(z_i), \quad \phi_{y,i}(p) = \partial_y p(z_i), \quad p \in P_\kappa. \end{aligned}$$

Tačke  $z_i$  su ponovo temena trougla  $\kappa$ , a tačka  $z_{123}$  je središte trougla  $\kappa$ . Skup  $\kappa$  zove se kubni Hermitov trougao. Na Slici 1.3 prikazan je kubni Hermitov trougao, pri čemu kružić ukazuje na izračunavanje gradijenta u označenoj tački.  $\square$

Postoje i drugi tipovi trougaonih konačnih elemenata, kao što su redukovani kubni trougao, Belov, Argirisov, Toherov trougao. Oni se međusobno razlikuju po izabranim stepenima slobode i "shape" funkcijama. Više detalja o ovome se može pronaći u [6] i [11].



Slika 1.3: Kubni Hermitov trougao

### 1.4.2 Primeri pravougaonih konačnih elemenata

Kada je  $\kappa$  pravougaoni element u  $\mathbb{R}^2$  često se koristi linearni prostor  $\mathbb{Q}_k(\kappa)$  koga čine funkcije  $p$  definisane na  $\kappa$  oblika

$$p(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq k} c_{ij} x^i y^j, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Dimenzija ovog prostora je  $(k+1)^2$  i važi  $\mathbb{P}_k(\kappa) \subset \mathbb{Q}_k(\kappa) \subset \mathbb{P}_{2k}(\kappa)$ .

**Primer 1.4.4** *Bilinearni Lagranžov konačni element* (vidi Sliku 1.4, levo) je trojka  $(\kappa, P_\kappa = \mathbb{Q}_1(\kappa), \Sigma_\kappa)$ , gde je

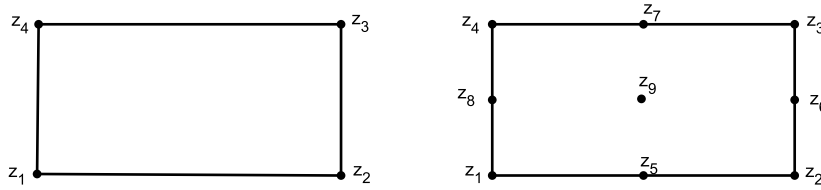
$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke  $z_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  predstavljaju temena pravougaonika  $\kappa$ . □

**Primer 1.4.5** *Bikvadratni Lagranžov konačni element* (vidi Sliku 1.4, desno) je trojka  $(\kappa, P_\kappa = \mathbb{Q}_2(\kappa), \Sigma_\kappa)$ , gde je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_9\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa,$$

gde su tačke  $z_1, z_2, z_3, z_4$  temena pravougaonika  $\kappa$ , tačke  $z_5, z_6, z_7, z_8$  sredine stranica pravougaonika  $\kappa$ , a tačka  $z_9$  se nalazi u preseku dijagonala pravougaonika  $\kappa$ . □



Slika 1.4: Bilinearni Lagranžov pravougaonik (levo) i bikvadratni Lagranžov pravougaonik (desno)

Pravougaoni Lagranžov konačni element za proizvoljan stepen  $k$  je trojka  $(\kappa, P_\kappa = \mathbb{Q}_k(\kappa), \Sigma_\kappa)$ , gde je

$$\Sigma_\kappa = \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{(k+1)^2} \}, \quad \phi_i(p) = p(z_{ij}), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačka  $z_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, k$  predstavlja uređeni par  $(z_i, z_j)$ , gde je  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_k = 1$ .

Postoje takođe i drugi tipovi konačnih elemenata, kao što su redukovani bikvadratni, bikubni Lagranžov konačni element. Više detalja o njima se može pronaći u [6] i [11].

## 1.5 Prostori konačnih elemenata

U ovom odeljku govorićemo o konstrukciji *prostora konačnih elemenata*  $V_h$  u kome se traži približno rešenje. Najpre je potrebno izvršiti razlaganje domena polaznog problema na konačan broj poddomena  $\kappa$ . Potom je potrebno opredeliti se za osobine svakog elementa. Element  $\kappa$  zajedno sa "shape" funkcijama i stepenima slobode predstavlja konačni element. Prostor konačnih elemenata dat je sa

$$V_h = \{ v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v_h|_\kappa \in P_\kappa, \quad \text{za svako } \kappa \in \mathcal{T} \}.$$

Različiti izbori konačnih elemenata imaju direktnog uticaja na globalne osobine funkcija iz  $V_h$ .

Kada se formira prostor konačnih elemenata prelazi se na analizu greške. Tvrdjenje Céa leme ili druge Strangove leme ukazuje nam na mogućnost korišćenja interpolacione funkcije  $u^I \in V_h$  u greški aproksimacije  $\|u - v_h\|$ . Pošto se ipak bavimo funkcijama  $u$  iz prostora Soboljeva potrebno je dati preciznu definiciju interpolacione funkcije  $u^I$ . Ograničimo se samo na Lagranžove konačne elemente, kod kojih stepeni slobode koriste vrednosti u određenim tačkama elemenata. *Interpolaciona funkcija*  $u^I \in V_h$  za datu funkciju  $u$ , ili kraće *interpolant*, se kod takvih konačnih elemenata definiše po delovima koristeći mrežu  $\mathcal{T}$ . Tako imamo da je

$$u^I|_{\kappa} = u_{\kappa}^I, \quad \kappa \in \mathcal{T},$$

gde je za konačni element  $(\kappa, P_{\kappa}, \Sigma_{\kappa})$ , lokalni interpolant  $u_{\kappa}^I$  dat sa

$$u_{\kappa}^I(x) = \sum_{i=1}^s \phi_i(u) p_i(x), \quad x \in \kappa.$$

Očigledno je  $\phi_i(u_{\kappa}^I) = \phi_i(u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  i  $p_{\kappa}^I = p$  za svako  $p \in P_{\kappa}$ .

**Primer 1.5.1** Posmatramo jednodimenzionalni problem sa domenom  $\Omega = (\alpha, \beta)$ . Neka je  $\mathcal{T} = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N\}$  mreža sa elementima  $\kappa_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $x_0 = \alpha$ ,  $x_N = \beta$ . Linearni Lagranžov konačni element  $(\kappa_i, P_{\kappa_i}, \Sigma_{\kappa_i})$  je definisan sa

$$P_{\kappa_i} = \mathbb{P}_1(\kappa_i), \quad \Sigma_{\kappa_i} = \{\phi_1, \phi_2\},$$

$$\phi_1(p) = p(x_{i-1}), \quad \phi_2(p) = p(x_i), \quad p \in P_{\kappa_i}.$$

”Shape” funkcije prostora  $P_{\kappa_i}$  su oblika

$$p_{\kappa_i,1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}, \quad p_{\kappa_i,2}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

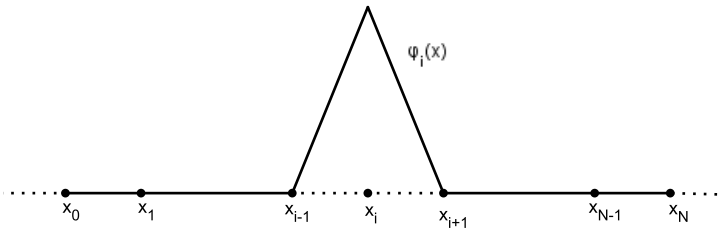
Odgovarajući prostor konačnih elemenata  $V_h$  sastoji se od po delovima linearnih neprekidnih funkcija  $v_h$ . Svaka funkcija  $v_h \in V_h$  se može prikazati kao linearna kombinacija ”hat” funkcija  $\varphi_i : [x_0, x_N] \rightarrow [0, 1]$  (vidi Sliku 1.5) koje su date sa

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} p_{\kappa_i,2}(x), & x \in \kappa_i, \\ p_{\kappa_{i+1},1}(x), & x \in \kappa_{i+1}, \\ 0, & x \notin \kappa_i \cup \kappa_{i+1}, \end{cases} \quad (1.22)$$

za  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  i

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} p_{\kappa_1,1}(x), & x \in \kappa_1, \\ 0, & x \notin \kappa_1, \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} p_{\kappa_N,2}(x), & x \in \kappa_N, \\ 0, & x \notin \kappa_N. \end{cases}$$



Slika 1.5: Bazne funkcije za linearne konačne elemente

Dimenzija ovako konstruisanog prostora konačnih elemenata  $V_h$  je  $N + 1$ . Funkcije  $\varphi_i$ , koje se mogu posmatrati kao globalne bazne funkcije za  $V_h$ , imaju osobinu

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

Neka je  $u$  funkcija definisana na  $\Omega$ . Tada je interpolant  $u^I \in V_h$  po delovima linearna funkcija za koju je

$$u_{\kappa_i}^I = \sum_{j=1}^2 \phi_j(u) p_{\kappa_i,j}(x) = u(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) + u(x_i)\varphi_i(x), \quad x \in \kappa_i.$$

Sada su trivijalno zadovoljeni uslovi

$$u^I(x_i) = u(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (1.24)$$

koji su uobičajeni za neprekidne interpolacione funkcije. Interpolant definisan na ovaj način poseduje sledeću korisnu osobinu

$$\begin{aligned} |u^I(x)| &\leq |u(x_{i-1})|\varphi_{i-1}(x) + |u(x_i)|\varphi_i(x) \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\kappa_i)}(\varphi_{i-1}(x) + \varphi_i(x)) = \|u\|_{L^\infty(\kappa_i)}, \quad x \in \kappa_i. \end{aligned} \quad (1.25)$$

□

Izračunavanja i analiza greške na svakom pojedinačnom elementu  $\kappa$  su komplikovana u više dimenzija. Zato je u praktičnoj primeni postupaka tipa FEM od velike važnosti formiranje *afine familije* prostora konačnih elemenata  $V_h$ . Neka je sa  $\mathcal{T}_h$  označena triangulacija koja se pojavljuje prilikom konstrukcije prostora  $V_h$ .

**Definicija 1.5.1** [6] *Familija prostora konačnih elemenata  $V_h$  sa triangulacijama  $\mathcal{T}_h$  je afina familija, ako postoji konačan element  $(\hat{\kappa}, P_{\hat{\kappa}}, \Sigma_{\hat{\kappa}})$  sa sledećim osobinama:*

- i) *za svako  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  postoji afino preslikavanje  $F_\kappa : \hat{\kappa} \rightarrow \kappa$  tako da za svako  $v_h \in V_h$  važi*

$$v_h|_\kappa = p_{\hat{\kappa}}(F_\kappa^{-1}), \quad \text{za neko } p_{\hat{\kappa}} \in P_{\hat{\kappa}};$$

- ii) *za svako  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , svaka funkcionala  $\phi \in \Sigma_\kappa$  se može izraziti u obliku*

$$\phi(p) = \phi_{\hat{\kappa}}(p \circ F_\kappa), \quad p \in P_\kappa,$$

*za neko  $\phi_{\hat{\kappa}} \in \Sigma_{\hat{\kappa}}$ .*

*Konačni element  $(\hat{\kappa}, P_{\hat{\kappa}}, \Sigma_{\hat{\kappa}})$  se naziva referencni element.*

Za prostor konačnih elemenata iz afine familije, najveći deo izračunavanja koeficijenata matrice sistema se obavlja na referencnom elementu. Takođe, sve ocene greške interpolacije  $u - u^I$  se najpre izvode na  $\hat{\kappa}$ , a potom se transformišu tako da važe na celom domenu. Ove ocene u velikoj meri zavise od izbora konačnih elemenata.

## Glava 2

# Problemi konvekcije-difuzije sa unutrašnjim slojevima

Posmatramo sledeći linearni jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije bez povratnih tačaka<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := -\varepsilon u'' + bu' + cu = f & \text{u } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

gde je  $0 < \varepsilon \ll 1$  mali perturbacioni parametar, a  $b$ ,  $c$  i  $f$  su realne funkcije definisane na intervalu  $[0, 1]$ . Pretpostavlja se da je

$$b(x) \geq \beta > 0, \quad c(x) \geq 0, \quad c(x) - \frac{1}{2} b'(x) \geq \gamma > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2.2)$$

za pozitivne konstante  $\beta$  i  $\gamma$ .

**Napomena 2.0.1** Bez umanjenja opštosti se posmatraju problemi koji su definisani na jediničnom intervalu  $\Omega = (0, 1)$ . Za opštije singularno perturbovane probleme tipa  $(P)$  sa Dirihleovim konturnim uslovima

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + bu' + cu = f & \text{u } \Omega = (d, e), \\ u(d) = \gamma_d, \quad u(e) = \gamma_e, \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Nule funkcije  $b$  nazivaju se povratne tačke.

uzimajući

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \chi(x), \quad \chi(x) = \gamma_d \frac{x-e}{e-d} + \gamma_e \frac{x-d}{d-e},$$

dobija se da funkcija  $\tilde{u}$  zadovoljava problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{u} := f + \mathcal{L}\chi & \text{u } (d, e), \\ \tilde{u}(d) = \tilde{u}(e) = 0, \end{cases}$$

dok linearno preslikavanje  $x \mapsto (x-d)/(e-d)$  transformiše proizvoljni domen  $(d, e)$  u  $(0, 1)$ .  $\diamond$

**Napomena 2.0.2** Iz prve pretpostavke  $b(x) \geq \beta > 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  za problem (2.1), druge dve nejednakosti u (2.2) uvek mogu biti zadovoljene uz pomoć transformacije  $u(x) = v(x)e^{kx}$  sa specijalno izabranom konstantom  $k$ .  $\diamond$

U narednoj teoremi dati su uslovi za egzistenciju klasičnog rešenja problema (2.1).

**Teorema 2.0.1** [24] *Neka koeficijenti operatora  $\mathcal{L}$  u (2.1) pripadaju prostoru  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  i neka važe pretpostavke (2.2). Tada postoji jedinstveno rešenje  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  odgovarajućeg problema. Štaviše, kada  $b, c, f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$  tada je  $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ .*

Za glatke polazne funkcije rešenje problema (2.1)-(2.2) ima granični sloj u okolini  $x = 1$  i širine je  $\mathcal{O}(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$ . Više detalja o ponašanju rešenja i njegovih izvoda na celom domenu dato je u narednoj teoremi.

**Teorema 2.0.2** [24] *Za funkcije  $b, c, f \in C^3(\bar{\Omega})$  rešenje u problema konvekcije-difuzije (2.1)-(2.2) se može dekomponovati u obliku  $u = S + E$ , gde regularna komponenta  $S$  i slojna komponenta  $E$  zadovoljavaju  $\mathcal{L}S = f$ ,  $\mathcal{L}E = 0$ , i za svako  $x \in \Omega$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ,*

$$|S^{(k)}(x)| \leq C, \quad |E^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k} e^{-\beta(1-x)/\varepsilon}.$$

**Napomena 2.0.3** U slučaju veće glatкости funkcija  $b, c$  i  $f$  ocene izvoda u Teoremi 2.0.2 važe i za  $k > 3$ .  $\diamond$



Pri analizi greške, polazi se od dekompozicije rešenja  $u = S + E$ , gde  $S$  predstavlja regularnu komponentu (deo rešenja koji je sa svojim izvodima  $\varepsilon$ -uniformno ograničen), a  $E$  je slojna komponenta koja opisuje ponašanje rešenja u slojevima. Takva dekompozicija se koristi pri konstrukciji slojno-adaptivnih mreža, kao i za dobijanje greške interpolacije.

## 2.1 Opšta analiza greške

Posmatrajmo sledeći opšti problem

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in V \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \quad \text{za svako } v \in V, \end{cases} \quad (2.3)$$

gde je  $V$  Hilbertov prostor,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinearna forma i  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  linearna funkcionala. Ograničavamo se na konformni postupak konačnih elemenata, tj. polazimo od konačnodimenzionalnog potprostora  $V_h \subset V$ . Diskretni problem glasi

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h, \end{cases} \quad (2.4)$$

gde su  $a_h$  i  $l_h$  bilinearna forma i linearna funkcionala definisane na potprostoru  $V_h$ . Pretpostavimo da problemi (2.3) i (2.6) imaju jedinstvena rešenja, to jest da su zadovoljene pretpostavke Laks-Milgramove teoreme.

Neka je  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$  skup baznih funkcija  $M$ -dimenzionalnog prostora  $V_h$ .

**Definicija 2.1.1** Biortogonalna baza prostora  $V_h$  u odnosu na bilinearnu formu  $a_h$  je skup funkcija  $\{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^M\} \subset V_h$  takav da svako  $\lambda^j$  ima osobinu

$$a_h(\varphi_i, \lambda^j) = \delta_{ij}, \quad \text{za svako } i = 1, 2, \dots, M, \quad (2.5)$$

gde je  $\delta_{ij}$  Kronekerov simbol. Funkcije  $\lambda^j$  se nazivaju diskretnim Grinovim funkcijama.

Pitanje da li je Definicija 2.1.1 dobro formulisana zavisi od jednačine (2.5) i jedinstvenosti njenog rešenja  $\lambda^j$  za svako  $j = 1, 2, \dots, M$ . Ako, na primer, bilinearna forma  $a_h$  ima osobinu  $V_h$ -eliptičnosti, tada homogeni problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = 0, \quad \text{za svako } v_h \in V_h, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

ima samo trivijalno rešenje  $u_h = 0$ , pa (2.5) ima jedinstveno rešenje. Pitanja egzistencije i jedinstvenosti funkcija  $\lambda^j$  zavise od polaznog problema konvekcije-difuzije i izabranog postupka konačnih elemenata. Ovoj problematici će biti posvećena veća pažnja u narednim odeljcima.

Pretpostavimo da za prostor  $V_h$  postoji biortogonalna baza. Tada, kao direktna posledica (2.5), sledi postojanje jedinstvene reprezentacije

$$v_h = \sum_{k=1}^M a_h(v_h, \lambda^k) \varphi_k \quad (2.7)$$

za svako  $v_h \in V_h$ . Takođe, moguće je definisati linearni operator  $P : V \rightarrow V_h$  sa

$$Pv = \sum_{k=1}^M a_h(v, \lambda^k) \varphi_k, \quad v \in V.$$

Zbog osobine (2.7) operator  $P$  je projekcioni operator na  $V_h$ , tj. važi  $Pv_h = v_h$ , za svako  $v_h \in V_h$ .

Neka je data opšta mreža  $\Omega^N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subset [0, 1]$ , gde je

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da za funkciju  $u$  postoji dobro definisana interpolaciona funkcija  $u^I \in V_h$  na  $\Omega^N$ .

Kako je  $Pu^I = u^I$ , greška  $u - u_h$  se može predstaviti u obliku

$$u - u_h = u - u^I + P(u^I - u) + Pu - u_h. \quad (2.8)$$

Ovakva reprezentacija greške sastoji se iz tri dela. Prvi deo  $u - u^I$  se naziva *greška interpolacije*, drugi deo  $P(u^I - u)$  *greška projekcije* i treći  $Pu - u_h$  *greška konzistencije*. Poslednji deo je dobio ovakav naziv jer je  $Pu - u_h = 0$

u slučaju konzistentnog postupka konačnih elemenata<sup>2</sup>. Zaista u slučaju konzistentnog postupka konačnih elemenata dobija se

$$Pu = \sum_{k=1}^M a_h(u, \lambda^k) \varphi_k = \sum_{k=1}^M l_h(\lambda^k) \varphi_k = \sum_{k=1}^M a_h(u_h, \lambda^k) \varphi_k = u_h.$$

U narednim odeljcima se uz pomoć reprezentacije greške (2.8) izvodi ocena greške u tačkama mreže

$$|u(x_i) - u_h(x_i)|, \quad x_i \in \Omega^N.$$

Takođe, osobine izabranog konačnodimenzionalnog prostora  $V_h$  se koriste za dobijanje tačnijih podataka o ponašanju greške u pomenutim tačkama i o oceni greške na podintervalima  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Neka  $V_h$  koristi linearne Lagranžove elemente. Sada se lako može izvesti ocena greške  $u - u_h$  na svakom elementu  $\kappa_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Prvo pretpostavimo da je već pokazana  $\varepsilon$ -uniformna ocena greške u tačkama mreže tipa

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leq \vartheta(N), \quad x_i \in \Omega^N,$$

gde je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta(N) = 0.$$

Neka je  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  proizvoljno i neka  $x \in \kappa_i$ . Tada primenom nejednakosti trougla dobijamo

$$|u(x) - u_h(x)| \leq |u(x) - u^I(x)| + |u^I(x) - u_h(x)|.$$

Drugi sabirak u ovoj nejednakost ocenjuje se sa

$$\begin{aligned} & |u^I(x) - u_h(x)| \\ &= |u(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) + u(x_i)\varphi_i(x) - u_h(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) - u_h(x_i)\varphi_i(x)| \\ &\leq |u(x_{i-1}) - u_h(x_{i-1})|\varphi_{i-1}(x) + |u(x_i) - u_h(x_i)|\varphi_i(x) \\ &\leq \vartheta(N), \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Za postupak konačnih elemenata kažemo da je *konzistentan* ako važi

$$a_h(u, v_h) = l_h(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h.$$

za  $i = 2, 3, \dots, N-1$ . Funkcije  $\varphi_i$ , koje se javljaju u gornjoj oceni, definisane su u (1.22). Ista ocena greške se dobija i za  $i = 1$  i  $i = N$ . Dakle, na svakom podintervalu  $\kappa_i$  se dobija

$$|u(x) - u_h(x)| \leq \|u - u^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} + \vartheta(N). \quad (2.9)$$

Vratimo se ponovo na reprezentaciju greške (2.8). Neka je  $x_i \in \Omega^N$  fiksirana tačka mreže. Tada se greška u izabranoj tački svodi na

$$\begin{aligned} u(x_i) - u_h(x_i) &= u(x_i) - u^I(x_i) + P(u^I - u)(x_i) + (Pu - u_h)(x_i) \\ &= P(u^I - u)(x_i) + (Pu - u_h)(x_i), \end{aligned}$$

jer je za linearni interpolant  $u^I$  ispunjeno (1.24). Pri tome je greška projekcije

$$P(u^I - u)(x_i) = \sum_{k=0}^N a_h(u^I - u, \lambda^k) \varphi_k(x_i) = a_h(u^I - u, \lambda^i). \quad (2.10)$$

U opštem slučaju se greška konzistencije  $Pu - u_h$  može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} Pu - u_h &= \sum_{k=0}^N a_h(u, \lambda^k) \varphi_k - \sum_{k=0}^N a_h(u_h, \lambda^k) \varphi_k \\ &= \sum_{k=0}^N a_h(u, \lambda^k) \varphi_k - \sum_{k=0}^N l_h(\lambda^k) \varphi_k + \sum_{k=0}^N l(\lambda^k) \varphi_k - \sum_{k=1}^{N-1} a(u, \lambda^k) \varphi_k \\ &= \sum_{k=0}^N (a_h - a)(u, \lambda^k) \varphi_k + \sum_{k=0}^N (l - l_h)(\lambda^k) \varphi_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sada je greška konzistencije u tački mreže  $x_i$  data sa

$$(Pu - u_h)(x_i) = (a_h - a)(u, \lambda^i) + (l - l_h)(\lambda^i).$$

Na kraju zaključujemo da greška u tački mreže ima oblik

$$u(x_i) - u_h(x_i) = a_h(u^I - u, \lambda^i) + (a_h - a)(u, \lambda^i) + (l - l_h)(\lambda^i). \quad (2.12)$$

## 2.2 Problemi konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama

Za probleme konvekcije-difuzije sa dovoljno glatkim polaznim funkcijama, do sada u literaturi postoji ogroman broj rezultata o  $\varepsilon$ -uniformno konvergentnim

postupcima (u smislu Definicije 0.0.1); vidi [9], [15], [18]. Međutim, ne postoji dovoljno rezultata o problemima konvekcije-difuzije kada su koeficijenti prekidne funkcije. U nastavku ćemo analizirati takve probleme.

Posmatramo linearni jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije čiji su koeficijenti funkcije sa prekidom u tačno jednoj unutrašnjoj tački  $d$  domena  $\Omega = (0, 1)$ . Ako uvedemo oznake  $\Omega_1 = (0, d)$  i  $\Omega_2 = (d, 1)$  problem se svodi na pronalaženje funkcije  $u \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C^1(\bar{\Omega})$  koja zadovoljava

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := -\varepsilon u'' + bu' = f & \text{u } \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ |[b](d)| \leq C, \quad |[f](d)| \leq C, \end{cases} \quad (2.13)$$

gde je  $0 < \varepsilon \ll 1$  perturbacioni parametar, a  $d$  je  $\varepsilon$ -nezavisna tačka. Skok funkcije  $g$  u tački  $d$  označavamo sa  $[g](d)$ .

Iz Teoreme 2.0.1 sledi da za dovoljno glatke funkcije  $b$  i  $f$  rešenje  $u$  poseduje granični sloj u okolini tačke  $x = 1$ . Zbog prekidnosti funkcija  $b$  i  $f$  sada se dodatno pojavljuje i unutrašnji sloj u okolini tačke prekida.

Problem ovog tipa, ali sa graničnim slojem u okolini tačke  $x = 0$ , razmatran je u [10]. U tom radu je konstruisan  $\varepsilon$ -uniformno konvergentan postupak za rešavanje posmatranog problema. Taj postupak uključuje po delovima uniformnu mrežu, koja je prilagođena graničnom i unutrašnjem sloju, i standardnu "upwind" konačnu diferencnu šemu. Pokazano je da operator  $\mathcal{L}$  zadovoljava princip maksimuma, predstavljena je dekompozicija rešenja i dokazan prvi red konvergencije datog postupka na Šiškinovoj mreži.

Pretpostavimo sledeće:

$$\begin{aligned} b & \text{ je dovoljno glatka funkcija na } \bar{\Omega} \setminus \{d\}, \\ f & \text{ je dovoljno glatka funkcija na } \bar{\Omega} \setminus \{d\}, \\ b(x) & \geq \beta > 0, \quad -\frac{1}{2}b'(x) \geq \gamma > 0, \quad x \in \bar{\Omega} \setminus \{d\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Poslednja pretpostavka u (2.14) je ista sa pretpostavkom (2.2). To znači da se druga nejednakost uvek može dobiti iz prvog uslova (vidi Napomenu 2.0.2).

## 2.3 Dekompozicija rešenja

Naš cilj je konstrukcija slojno-adaptivnih mreža i analiza greške. Da bismo to izveli potrebno nam je predznanje o ponašanju rešenja  $u$  problema (2.13), kao i njegovih izvoda.

U dokazu teoreme o dekompoziciji rešenja  $u$  problema (2.13) koristi se sledeća lema, koju navodimo bez dokaza.

**Lema 2.3.1** [10] *Neka  $b, f \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Pretpostavimo da je*

$$b(x) \geq \beta > 0, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

*Ako je  $u \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  rešenje problema*

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + bu' = f, & x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \\ |[b](d)| \leq C, \quad |[f](d)| \leq C, \end{cases}$$

*onda važe ocene*

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \max\{|u_0|, |u_1|\} + \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})},$$

$$\|u^{(k)}\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \leq C\varepsilon^{-k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

**Napomena 2.3.1** Problem iz Leme 2.3.1 ima granični sloj u okolini tačke  $x = 0$ . Dokaz ove leme se analogno izvodi i za problem (2.13) sa graničnim slojem u okolini  $x = 1$ .  $\diamond$

Kada su koeficijent konvekcije  $b$  i desna strana u (2.13) glatke funkcije, osobine rešenja su prikazane u Teoremi 2.0.2 o dekompoziciji rešenja. Ovde se dekompozicija vrši posebno na svakom od poddomena  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , gde se na svakom od njih ponaosob primenjuje Teorema 2.0.2.

**Teorema 2.3.1** *Rešenje u problema (2.13) se može dekomponovati u obliku*

$$u = S + E,$$

gde za  $k = 0, 1, \dots, q$  važi

$$|S^{(k)}(x)| \leq C, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.15)$$

$$|E^{(k)}(x)| \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-k}e^{-\beta(d-x)/\varepsilon}, & x \in \Omega_1, \\ C\varepsilon^{-k}e^{-\beta(1-x)/\varepsilon}, & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.16)$$

a maksimalni red  $q$  zavisi od glatkosti funkcija  $b$  i  $f$  na  $\bar{\Omega} \setminus \{d\}$ .

**Dokaz.** Prema Lemi 2.3.1 je

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})},$$

pa je funkcija  $u$   $\varepsilon$ -uniformno ograničena.

Na intervalu  $\Omega_1$  rešenje  $u$  problema (2.13) zadovoljava

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) := -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) = f(x), & x \in \Omega_1, \\ u(0) = 0, \quad u(d) = r, \end{cases} \quad (2.17)$$

gde je  $r \in \mathbb{R}$ . Primenom Leme 2.3.1 na problem (2.17) dobijamo

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_1)} \leq \max\{0, |r|\} + \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_1)} = |r| + \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_1)}.$$

Kako je funkcija  $u$   $\varepsilon$ -uniformno ograničena, sledi da je  $|r| \leq C$ . Prema Teoremi 2.0.2 postoji dekompozicija  $u = S_1 + E_1$  na  $\Omega_1$  takva da važi

$$|S_1^{(k)}(x)| \leq C, \quad |E_1^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k}e^{-\beta(d-x)/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_1,$$

i  $k = 0, 1, \dots, q$ .

Analogno posmatrajući interval  $\Omega_2$  i problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) := -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) = f(x), & x \in \Omega_2, \\ u(d) = r, \quad u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

dobija se druga dekompozicija  $u = S_2 + E_2$  na  $\Omega_2$  takva da je ispunjeno

$$|S_2^{(k)}(x)| \leq C, \quad |E_2^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k}e^{-\beta(1-x)/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_2,$$

i  $k = 0, 1, \dots, q$ . Primitimo da je  $r$  isto u (2.17) i (2.18), jer je funkcija  $u \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C^1(\bar{\Omega})$  jedinstvena prema Teoremi 2.0.1.

Na kraju dokaza dovoljno je uzeti  $S = S_1$ ,  $E = E_1$  na  $\Omega_1$  i  $S = S_2$ ,  $E = E_2$  na  $\Omega_2$ . ■

Teorema 2.3.1 ukazuje na postojanje graničnog sloja u  $x = 1$ , što predstavlja tipičnu osobinu za probleme konvekcije-difuzije. Ovde je dodatno pokazana i egzistencija unutrašnjeg sloja u okolini tačke  $x = d$ .

## 2.4 Slojno-adaptivne mreže

Pri numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema, za aproksimaciju rešenja van slojeva dovoljno je da se koristi gruba mreža. Međutim, u slojnim delovima domena je poželjno da mreža bude dovoljno gusta kako bi sa prihvatljivom tačnošću dobili numeričko rešenje. Zato je potrebno pažljivo izvršiti diskretizaciju domena. Iz tog razloga se generišu *slojno-adaptivne mreže* ("layer-adapted meshes"). *Tranzicione tačke* su tačke domena u kojima mreža prelazi iz fine u grubu ili iz grube u finu.

U ovom odeljku se za diskretizaciju polaznog domena koristi po delovima ekvidistantna Šiškinova ( $S$ -) mreža, koja je prilagođena slojevima u  $x = d$  i  $x = 1$ . Mreža Šiškinovog tipa se zbog svoje jednostavnosti često sreće u literaturi. Pored mreže  $S$ -tipa korišćićemo Bahvalov-Šiškinovu ( $BS$ -) mrežu, koja predstavlja modifikaciju  $S$ -mreže, a prvi put je predstavljena u [14] za dvodimenzionalni linearni problem konvekcije-difuzije, ali se može koristiti i za jednodimenzionalni problem. Takođe, korišćićemo modifikovanu Bahvalov-Šiškinovu ( $mBS$ -) mrežu.

Neka je  $N > 4$  paran ceo broj i neka je

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{d}{2}, \frac{\tau}{\beta} \varepsilon \ln N \right\}, \quad \lambda_2 = \min \left\{ \frac{1-d}{2}, \frac{\tau}{\beta} \varepsilon \ln N \right\}, \quad \tau \geq 1.$$

**Pretpostavka 2.4.1** Neka je  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda = \frac{\tau}{\beta} \varepsilon \ln N$ , jer je u suprotnom  $N^{-1}$  jako malo u poređenju sa  $\varepsilon$ , preciznije  $N^{-1} \leq Ce^{-1/\varepsilon}$ . Takođe, pretpostavimo da je  $\varepsilon \leq CN^{-1}$ .



Konstruišimo mrežu tako da je ekvidistantna na  $\overline{\Omega}_c$  i postepeno izdeljena na  $\overline{\Omega}_f$ , gde je

$$\Omega_c = (0, d - \lambda) \cup (d, 1 - \lambda),$$

$$\Omega_f = (d - \lambda, d) \cup (1 - \lambda, 1).$$

Tranzicione tačke biraju se tako da je

$$x_{\frac{N}{4}} = d - \lambda, \quad x_{\frac{N}{2}} = d, \quad x_{\frac{3N}{4}} = 1 - \lambda.$$

Zbog postojanja dodatnog unutrašnjeg sloja u tački  $x = d$ , potrebno je da se koriste dve *generativne funkcije mreže*<sup>3</sup>  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . Funkcije  $\phi_1$  i  $\phi_2$  su obe neprekidne, po delovima neprekidno diferencijabilne i monotonno opadajuće i imaju osobine

$$\phi_1(1/4) = \ln N, \quad \phi_1(1/2) = 0,$$

$$\phi_2(3/4) = \ln N, \quad \phi_2(1) = 0.$$

Funkcije karakterizacije mreže  $\psi_i$  definisane su sa  $\psi_i = e^{-\phi_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

Tačke mreže su date sa

$$x_i = \begin{cases} 4(d - \lambda)t_i, & i \in I_1 \cup \{0\}, \\ d - \frac{\tau\varepsilon}{\beta} \phi_1(t_i), & i \in I_2, \\ d + 4(1 - d - \lambda) \left(t_i - \frac{1}{2}\right), & i \in I_3, \\ 1 - \frac{\tau\varepsilon}{\beta} \phi_2(t_i), & i \in I_4, \end{cases} \quad (2.19)$$

gde je  $t_i = i/N$  i

$$I_1 = \left\{1, \dots, \frac{N}{4}\right\}, \quad I_2 = \left\{\frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{2}\right\},$$

$$I_3 = \left\{\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{3N}{4}\right\}, \quad I_4 = \left\{\frac{3N}{4} + 1, \dots, N\right\}.$$

U Tabeli 2.1 prikazane su funkcije karakterizacije Šiškinove, Bahvalov-Šiškinove i modifikovane Bahvalov-Šiškinove mreže.

<sup>3</sup>Strogo monotona funkcija  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  koja preslikava uniformnu mrežu po  $\xi$  u slojno-adaptivnu mrežu po  $x$  sa  $x = \phi(\xi)$  se naziva generativna funkcija mreže.

Tabela 2.1: Mreže  $S$ -tipa za problem (2.13)

$S$ -mreža	
$\psi_1(t) = e^{-2(1-2t)\ln N}$	$\max  \psi'  = C \ln N$
$\psi_2(t) = e^{-4(1-t)\ln N}$	$\max  \phi'  = C \ln N$
$BS$ -mreža	
$\psi_1(t) = 1 - 2(1 - N^{-1})(1 - 2t)$	$\max  \psi'  = C$
$\psi_2(t) = 1 - 4(1 - N^{-1})(1 - t)$	$\max  \phi'  = CN$
$mBS$ -mreža	
$\psi_1(t) = e^{-(1-2t)/(q-1+2t)}$ , $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln N}$	$\max  \psi'  = C$
$\psi_2(t) = e^{-2(1-t)/(q-2+2t)}$	$\max  \phi'  = C \ln^2 N$

U nastavku je sa  $\max |\phi'|$  označen maksimum  $|\phi'|$  na odgovarajućem domenu, za funkciju  $\phi = \phi_k$ , za neko  $k = 1, 2$ . Ova konvencija u zapisu će se odnositi i na funkcije  $\psi_k$ .

**Pretpostavka 2.4.2** Neka generativne funkcije mreže zadovoljavaju

$$N^{-1} \max |\phi'_k| \leq C, \quad k = 1, 2. \quad (2.20)$$

U nastavku ćemo navesti neke osobine lokalnog koraka mreže  $h_i$ .

**Lema 2.4.1** Za tačke mreže  $x_i$  iz (2.19), lokalni korak mreže  $h_i$  ima osobinu

$$h_i \leq \begin{cases} C\varepsilon N^{-1} \max |\phi'|, & i \in I_2 \cup I_4, \\ CN^{-1}, & i \in I_1 \cup I_3. \end{cases} \quad (2.21)$$

Štaviše, važe sledeće ocene

$$h_i \leq \frac{\tau}{\beta} \varepsilon N^{-1} \begin{cases} e^{\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} \max |\psi'_1|, & i \in I_2, \\ e^{\beta(1-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} \max |\psi'_2|, & i \in I_4. \end{cases} \quad (2.22)$$

**Dokaz.** Neka  $i \in I_1$ . Tada prema (2.19)

$$h_i = 4(d - \lambda)(t_i - t_{i-1}) = 4(d - \lambda) \left( \frac{i}{N} - \frac{i-1}{N} \right) = 4(d - \lambda)N^{-1}.$$

Za  $i \in I_3$  važi

$$\begin{aligned} h_i &= d + 4(1 - d - \lambda) \left( t_i - \frac{1}{2} \right) - d - 4(1 - d - \lambda) \left( t_{i-1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 4(1 - d - \lambda) (t_i - t_{i-1}) \\ &= 4(1 - d - \lambda)N^{-1}. \end{aligned}$$

Dakle, na poddomenu  $\bar{\Omega}_c$  domena  $\Omega$ , imamo

$$h_i = \begin{cases} 4(d - \lambda)N^{-1}, & i \in I_1, \\ 4(1 - d - \lambda)N^{-1}, & i \in I_3, \end{cases}$$

pa je

$$h_i \leq CN^{-1}, \quad i \in I_1 \cup I_3.$$

Posmatrajmo sada poddomen  $\bar{\Omega}_f$  koji odgovara slojevima. Ako je  $i \in I_2$  onda je

$$\begin{aligned} h_i &= d - \tau \frac{\varepsilon}{\beta} \phi_1(t_i) - d + \tau \frac{\varepsilon}{\beta} \phi_1(t_{i-1}) \\ &= -\tau \frac{\varepsilon}{\beta} (\phi_1(t_i) - \phi_1(t_{i-1})) \\ &= -\tau \frac{\varepsilon}{\beta} \phi_1'(\rho_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &= -\tau \frac{\varepsilon}{\beta} N^{-1} \phi_1'(\rho_i) \\ &\leq C\varepsilon N^{-1} \max |\phi_1'|, \end{aligned}$$

za neko  $\rho_i \in (t_{i-1}, t_i)$ . Na sličan način se dobija ocena i za  $i \in I_4$ .

Detaljnijom analizom na  $\bar{\Omega}_f$  se dobija da je

$$h_i = -\tau \frac{\varepsilon}{\beta} N^{-1} \phi_1'(\rho_i) = \tau \frac{\varepsilon}{\beta} N^{-1} \frac{\psi_1'(\rho_i)}{\psi_1(\rho_i)}, \quad i \in I_2.$$

Kako je  $\psi_1$  rastuća funkcija, tada je

$$\begin{aligned} h_i &\leq \tau \frac{\varepsilon}{\beta} N^{-1} \psi_1(t_{i-1})^{-1} \max |\psi'_1| \\ &= \tau \frac{\varepsilon}{\beta} N^{-1} e^{\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} \max |\psi'_1|. \end{aligned}$$

Slično se pokazuje i druga ocena u (2.22). ■

**Posledica 2.4.1** *Kada je  $i \in I_2 \cup I_4$  lokalni korak mreže  $h_i$  ima sledeću osobinu*

$$h_i \leq \begin{cases} C\varepsilon N^{-1} \ln N, & \text{na } S\text{-mreži,} \\ C\varepsilon, & \text{na } BS\text{-mreži,} \\ C\varepsilon N^{-1} \ln^2 N, & \text{na } mBS\text{-mreži.} \end{cases} \quad (2.23)$$

*Štaviše, važi ocena*

$$h_i \leq CN^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.24)$$

**Dokaz.** Prva ocena sledi iz (2.21) i

$$\max |\phi'| = \begin{cases} C \ln N, & \text{na } S\text{-mreži,} \\ CN, & \text{na } BS\text{-mreži,} \\ C \ln^2 N, & \text{na } mBS\text{-mreži.} \end{cases}$$

Kako za generativne funkcije mreže važi (2.20) koristeći pretpostavku  $\varepsilon \leq CN^{-1}$  konačno se dobija

$$h_i \leq C\varepsilon \leq CN^{-1}, \quad i \in I_2 \cup I_4. \quad \blacksquare$$

Iz (2.21) i Pretpostavke 2.4.2 dobija se sledeća ocena

$$\frac{h_i}{\varepsilon} \leq CN^{-1} \max |\phi'| \leq C, \quad i \in I_2 \cup I_4.$$

## 2.5 Postupak konačnih elemenata Galerkina

U ovom odeljku će biti predstavljen postupak konačnih elemenata koji se koristi za numeričko rešavanje problema (2.13).

Polazimo od slabe formulacije problema (2.13) koja glasi

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \quad \text{za svako } v \in V, \end{cases} \quad (2.25)$$

gde je

$$a(v, w) = (\varepsilon v', w') + (bw', w), \quad l(w) = (f, w), \quad v, w \in V,$$

i  $(\cdot, \cdot)$  skalarni proizvod na prostoru  $L^2(\Omega)$ .

Egzistencija rešenja  $u$  problema (2.25) dobija se primenom Laks-Milgrameve teoreme. Pokažimo da su zadovoljene pretpostavke pomenute teoreme. Lako se pokazuje da je  $l$  linearna funkcionela na  $V$ . Pokažimo sada da je linearna funkcionela  $l$  ograničena. Primenom Koši-Švarcove nejednakosti i nejednakosti  $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)}$  dobijamo

$$\begin{aligned} |l(w)| &= |(f, w)| = \left| \int_{\Omega} f(x)w(x) dx \right| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

za sve  $w \in H_0^1(\Omega)$ . Stavljajući da je  $M_l = \|f\|_{L^2(\Omega)}$  dobijamo da je linearna funkcionela  $l$  ograničena. Trivijalno se pokazuje da je  $a$  bilinearna forma na  $V \times V$ . Sada pokazujemo neprekidnost bilinearne forme  $a$ . Primenom nejednakosti trougla i Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &= |(\varepsilon w', v') + (bw', v)| \\ &\leq |(\varepsilon w', v')| + |(bw', v)| \\ &= \left| \int_{\Omega} \varepsilon w'(x)v'(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} b(x)w'(x)v(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |w'(x)v'(x)| dx + \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \int_{\Omega} |w'(x)v(x)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max\{\varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}\} \left[ \int_{\Omega} |w'(x)v'(x)| dx + \int_{\Omega} |w'(x)v(x)| dx \right] \\
&\leq \max\{\varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}\} \left[ \left( \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \left( \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \max\{\varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}\} \left[ \left( \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\quad \times \left[ \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\leq 2 \max\{\varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}\} \left[ \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[ \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Uzimajući  $M_a = 2 \max\{\varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}\}$  imamo da je

$$|a(w, v)| \leq M_a \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dakle, bilinearna forma  $a$  je neprekidna. Ostaje da se pokaže da je bilinearna forma  $a$  koercitivna. Važi

$$\begin{aligned}
a(w, w) &= (\varepsilon w', w') + (bw', w) \\
&= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} bw'w dx \\
&= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} b \frac{1}{2} (w^2)' dx.
\end{aligned}$$

Primenom parcijalne integracije na drugi integral i primenom pretpostavke  $-\frac{1}{2}b'(x) \geq \gamma > 0$  dobijamo da je

$$\begin{aligned}
a(w, w) &= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx - \int_{\Omega} w^2 \left( \frac{1}{2} b' \right) dx \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} \gamma w^2 dx \\
&\geq \alpha \left( \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} w^2 dx \right) \\
&= \alpha \|w\|_{H^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

gde je  $\alpha = \min\{\varepsilon, \gamma\}$ . Dakle, bilinearna forma  $a$  je koercitivna.

Predstavimo sada postupak konačnih elemenata na opštoj mreži

$$\Omega^N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Neka je sa

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

označen lokalni korak mreže i neka je

$$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Neka je  $V_h$  prostor koga čine po delovima linearne funkcije koje imaju vrednost nula u tačkama  $x_0 = 0$  i  $x_N = 1$ . Sama konstrukcija i neke osobine ovog prostora su već prikazane u Primeru 1.5.1.

Diskretni problem kojim se definiše konformni FEM za problem (2.13) glasi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u_h \in V_h \subset V \text{ tako da je} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Takav postupak se naziva *postupak konačnih elemenata Galerkina*. Na osnovu Laks-Milgramove teoreme sledi da postoji jedinstveno diskretno rešenje problema (2.26).

Diskretno rešenje  $u_h$  se može predstaviti u obliku

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \varphi_i(x),$$

gde  $u_{h,i} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  i važi

$$u_h(x_j) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \varphi_i(x_j) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \delta_{ij} = u_{h,j}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Diskretni problem (2.26) se može transformisati u sistem linearnih jednačina oblika

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } [u_{h,0}, u_{h,1}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tako da je} \\ \sum_{i=0}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Na taj način se dobija sledeća diferencna šema

$$\begin{cases} \mathcal{L}^N u_i := -\varepsilon(D^+ u_i - D^- u_i) + \alpha_i D^+ u_i + \beta_i D^- u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx \\ u_0 = u_N = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

gde je  $u_i = u_h(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  i

$$D^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}}, \quad D^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i},$$

$$\alpha_i = h_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b \varphi'_{i+1} \varphi_i dx, \quad \beta_i = h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi'_i \varphi_i dx.$$

U nastavku ispitujemo osobine matrice  $A = [a_{ij}] = [a(\varphi_j, \varphi_i)]$ , koja odgovara šemi (2.27). Uočimo najpre da je  $a_{ij} = 0$  za  $|i - j| > 1$ , tj.  $A$  je tridijagonalna matrica. Važi

$$a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = -\frac{\varepsilon}{h_i} - \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx \leq 0.$$

Za dijagonalne elemente je ispunjeno

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_i) &= \varepsilon \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx \\ &\quad - \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) dx \\ &> 0. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) &= -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) dx \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_{i+1}^2} \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) dx \\ &= -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} + \frac{1}{2} \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}, \end{aligned}$$

da bi važilo  $a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) \leq 0$ , potreban nam je uslov

$$h_{i+1} \leq \frac{2\varepsilon}{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}}. \quad (2.28)$$



Dakle,  $A$  je  $L$ -matrica ukoliko je korak mreže dovoljno mali u poređenju sa  $\varepsilon$ , odnosno kada je mreža gusta. Kada je uslov (2.28) narušen, tj. kada je korak mreže veliki, matrica  $A$  nema  $L$ -oblik, pa nije  $M$ -matrica. Zbog toga je narušena stabilnost ovog postupka. Direktna posledica nestabilnosti postupka jeste pojava oscilacija. Sledeći primer ilustruje pojavu oscilatornog numeričkog rešenja, čak i na slojno-adaptivnoj mreži.

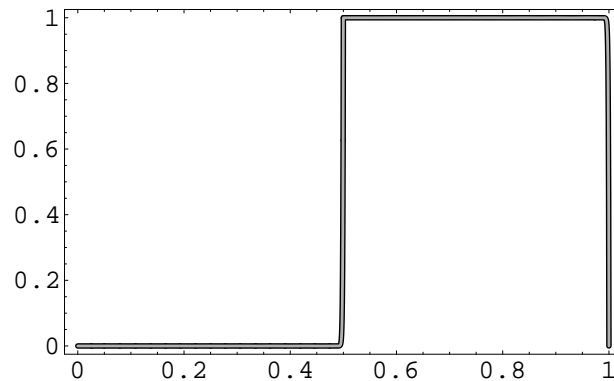
**Primer 2.5.1** Posmatrajmo sledeći test problem

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = \delta_{0.5}(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

gde je

$$\delta_{0.5}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0.5, \\ 0, & x \neq 0.5 \end{cases}$$

Dirakova<sup>4</sup> delta funkcija.



Slika 2.1: Tačno rešenje (sivi grafik) problema  $-10^{-3}u'' + u' = \delta_{0.5}$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  i njegovo numeričko rešenje (crni grafik) dobijeno standardnim postupkom Galerkina na Šiškinovoj mreži sa  $N = 2^6$

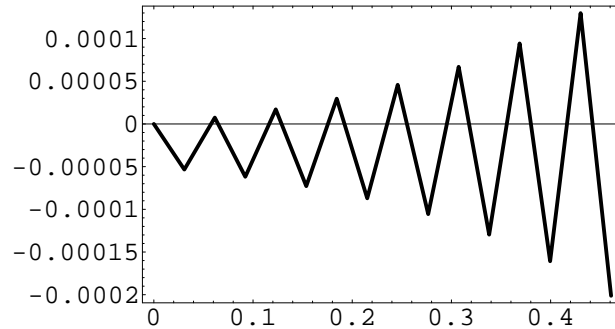
<sup>4</sup>Paul Andrien Maurice Dirac (1902-1984), britanski matematičar

Tačno rešenje ovog problema je

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\frac{1-d}{\varepsilon}}}{-1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}} (1 - e^{\frac{1-d}{\varepsilon}})}{1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}, & x = 0.5, \\ \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} (1 - e^{\frac{d}{\varepsilon}})}{-1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}} (1 - e^{-\frac{d}{\varepsilon}})}{1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}, & x \neq 0.5. \end{cases}$$

Na Slici 2.1 prikazan je grafik tačnog rešenja posmatranog test problema sa  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Takođe, na istoj slici prikazano je i numeričko rešenje dobijeno standardnim postupkom Galerkina sa linearnim Lagranžovim elementima na Šiškinovoj mreži sa  $N = 2^6$ .

Na Slici 2.2 prikazano je numeričko rešenje dobijeno istim postupkom, ali van slojeva. Uočavamo da standardni postupak Galerkina za problem konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama produkuje oscilatorna numerička rešenja, čak i na slojno-adaptivnoj mreži. U Tabeli 2.2 prikazani su greška  $E^N$ , red konvergencije  $p^N$  i Šiškinov red konvergencije  $p_S^N$  (vidi odeljak 2.12). Rezultati ukazuju na skoro drugi red konvergencije standardnog postupka Galerkina na Šiškinovoj mreži u diskretnoj maksimum normi. Da bi se izbegle oscilacije potrebno je obezbediti dodatnu stabilizaciju samog postupka.



Slika 2.2: Numeričko rešenje problema  $-10^{-3}u'' + u' = \delta_{0.5}$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  dobijeno standardnim postupkom Galerkina van slojeva

Tabela 2.2:  $L^\infty$ -norma greške, red konvergencije  $p^N$  i Šiškinov red konvergencije  $p_S^N$  za problem iz Primera 2.5.1

$\mathcal{E}$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-2}$	0.024987	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-3}$	0.025482	0.008560	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-4}$	0.025778	0.008746	0.002871	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-5}$	0.025816	0.0087915	0.002909	0.000937	0.000292	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-6}$	0.025819	0.008796	0.002914	0.000942	0.000296	0.000090	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-7}$	0.025820	0.008796	0.002915	0.000942	0.000296	0.000091	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-8}$	0.025820	0.008796	0.002915	0.000942	0.000296	0.000091	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-9}$	0.025820	0.008796	0.002915	0.000942	0.000296	0.000091	0.000027	0.000008	0.000002
$E^N$	0.025820	0.008796	0.002915	0.000942	0.000296	0.000091	0.000027	0.000008	0.000002
$p^N$	1.55343	1.59322	1.62864	1.66817	1.70172	1.72896	1.75013	1.76754	–
$p_S^N$	2.10787	2.04887	2.01725	2.00969	2.00682	2.00451	2.00381	2.00504	–

□

Da bi se izbegle oscilacije za diskretizaciju problema (2.25) izabraćemo "streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata (odjeljak 2.8). Ispitajmo najpre konvergenciju postupka Galerkina na slojno-adaptivnoj mreži (2.19). U tu svrhu ćemo izvesti ocenu za grešku interpolacije u  $L^\infty$ -normi.

## 2.6 Greška interpolacije

Važan deo ocene greške (2.12) u tačkama mreže  $u(x_i) - u_h(x_i)$  jeste greška interpolacije  $u - u^I$ . Zato najpre izvodimo njenu ocenu.

**Teorema 2.6.1** *Greška interpolacije na mreži (2.19) sa  $\tau \geq 2$ , se može oceniti sa*

$$|u(x) - u^I(x)| \leq \begin{cases} CN^{-2} \max |\psi'|^2, & x \in \overline{\Omega}_f, \\ CN^{-2}, & x \in \overline{\Omega}_c. \end{cases} \quad (2.29)$$

**Dokaz.** Prema klasičnoj teoriji, za proizvoljnu funkciju  $g \in C^2[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , važi

$$\|g - g^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \leq Ch_i^2 \|g''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}. \quad (2.30)$$

Za dokazivanje ocene (2.29) koristi se razlaganje  $u = S + E$  iz Teoreme 2.3.1 i odgovarajuća dekompozicija  $u^I = S^I + E^I$ . Dakle,

$$u - u^I = (S - S^I) + (E - E^I).$$

Iz (2.30) za regularni deo  $S - S^I$  greške interpolacije se dobija

$$|S(x) - S^I(x)| \leq Ch_i^2 \|S''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sada iz (2.15) i (2.24) se dobija

$$|S(x) - S^I(x)| \leq CN^{-2}, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2.31)$$

Posmatrajmo sada slojni deo greške  $E - E^I$ . Neka je

$$e_1(x) = e^{-\beta(d-x)/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_1$$

i

$$e_2(x) = e^{-\beta(1-x)/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_2.$$

Za funkcije  $e_1(x)$  i  $e_2(x)$  važe sledeće ocene

$$e_1(x) \leq \begin{cases} C, & x \in \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_f, \\ CN^{-\tau}, & x \in \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_c, \end{cases} \quad (2.32)$$

i

$$e_2(x) \leq \begin{cases} C, & x \in \bar{\Omega}_2 \cap \bar{\Omega}_f \\ CN^{-\tau}, & x \in \bar{\Omega}_2 \cap \bar{\Omega}_c. \end{cases} \quad (2.33)$$

Na skupu  $\bar{\Omega}_f$  koristimo ocenu dobijenu na osnovu klasične teorije

$$|E(x) - E^I(x)| \leq Ch_i^2 \|E''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Neka je  $[x_{i-1}, x_i] \subset [d - \lambda, d]$ . Tada je

$$\begin{aligned} |E(x) - E^I(x)| &\leq Ch_i^2 \varepsilon^{-2} \|e''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \\ &\leq CN^{-2} e^{2\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} \max |\psi'_1|^2 \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} e^{-\beta(d-x)/\varepsilon} \\ &\leq CN^{-2} e^{2\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} e^{-\beta(d-x_i)/\varepsilon} \max |\psi'_1|^2, \end{aligned}$$

prema oceni za  $E''$  iz Teoreme 2.3.1 i prvoj oceni o  $h_i$  iz (2.22). Važi

$$e^{2\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} e^{-\beta(d-x_i)/\varepsilon} = e^{2\beta h_i/(\tau\varepsilon)} e^{\beta(2-\tau)(d-x_i)/(\tau\varepsilon)} \leq C e^{\beta(2-\tau)\lambda/(\tau\varepsilon)} = N^{2-\tau},$$

jer je  $h_i \leq C\varepsilon$  i  $\tau \geq 2$ . Sada se konačno za  $x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [d - \lambda, d]$  dobija

$$\begin{aligned} |E(x) - E^I(x)| &\leq CN^{-2} \max |\psi'_1|^2 N^{2-\tau} \\ &\leq CN^{-2} \max |\psi'_1|^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Prethodna ocena se slično izvodi i na ostatku skupa  $\bar{\Omega}_f$ .

Na osnovu osobine (1.25) linearnog interpolanta na poddomenu  $\bar{\Omega}_c$  slojni deo greške  $E - E^I$  se može oceniti na sledeći način

$$|E(x) - E^I(x)| \leq 2\|E\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sada prema (2.16), (2.32) i (2.33) važi

$$|E(x) - E^I(x)| \leq CN^{-\tau}, \quad x \in \bar{\Omega}_c. \quad (2.35)$$

Na kraju zaključujemo da iz (2.31), (2.34) i (2.35) sledi tvrđenje teoreme. ■

**Posledica 2.6.1** Za  $\tau \geq 2$ , greška interpolacije na  $S$ -mreži je ograničena sa

$$|u(x) - u^I(x)| \leq \begin{cases} CN^{-2} \ln^2 N, & x \in \bar{\Omega}_f, \\ CN^{-2}, & x \in \bar{\Omega}_c, \end{cases}$$

dok je na  $BS$ -mreži i  $mBS$ -mreži

$$|u(x) - u^I(x)| \leq CN^{-2}, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

**Dokaz.** Dokaz se izvodi jednostavno primenom prethodne teoreme i osobina za  $\max |\psi'|$  koje su navedene za sve tri mreže u Tabeli 2.1. ■

**Napomena 2.6.1** Za slučaj  $S$ -mreže pretpostavka  $\tau \geq 2$  se može oslabiti, jer se slojni deo greške interpolacije  $E - E^I$  na  $\bar{\Omega}_f$  može oceniti na sledeći način

$$\begin{aligned} |E(x) - E^I(x)| &\leq Ch_i^2 \|E''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \\ &\leq C(\varepsilon N^{-1} \ln N)^2 \varepsilon^{-2} \|e_{1,2}\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \\ &\leq CN^{-2} \ln^2 N. \end{aligned}$$

Sada je dovoljno da je  $\tau \geq 1$  i koriste se ocene (2.23), (2.16), (2.32) i (2.33).  $\diamond$

**Teorema 2.6.2** *Neka važe Pretpostavke 2.4.1 i 2.4.2. Tada linearni interpolant  $u^I \in V_h$  funkcije  $u$  na mreži (2.19) sa  $\tau \geq 2$  zadovoljava*

$$\varepsilon |(u - u^I)'(x)| \leq \begin{cases} CN^{-1} \max |\psi'|, & x \in \bar{\Omega}_f, \\ CN^{-2}, & x \in \bar{\Omega}_c. \end{cases}$$

**Dokaz.** Prema klasičnoj teoriji, za proizvoljnu funkciju  $g \in C^2[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , važi

$$\|(g - g^I)'\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \leq Ch_i \|g''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}. \quad (2.36)$$

Za dokaz ove teoreme koristi se razlaganje  $u = S + E$  iz Teoreme 2.3.1 i odgovarajuća dekompozicija  $u^I = S^I + E^I$ . Dakle,

$$u - u^I = (S - S^I) + (E - E^I).$$

Za regularni deo greške interpolacije  $S - S^I$ , nejednakost (2.36) zajedno sa (2.15) ima za posledicu

$$|(S - S^I)'(x)| \leq Ch_i \|S''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Ako je sada  $x \in \Omega_1 \cap \Omega_f$ , onda je

$$\begin{aligned} |(S - S^I)'(x)| &\leq C\varepsilon N^{-1} e^{\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} \max |\psi'_1| \\ &\leq C\varepsilon N^{-1} e^{\beta\lambda/(\tau\varepsilon)} \max |\psi'_1| \\ &= C\varepsilon \max |\psi'| \\ &\leq CN^{-1} \max |\psi'| \end{aligned}$$

prema prvoj nejednakosti u (2.22), izboru parametra  $\lambda$ , kao i Pretpostavci 2.4.1. Ako je  $x \in \Omega_1 \cap \Omega_c$ , onda je

$$|(S - S^I)'(x)| \leq CN^{-1}$$

prema drugoj nejednakosti u (2.21).

Za slojni deo greške interpolacije  $E - E^I$  na skupu  $\Omega_1 \cap \Omega_f$  se ponovo koristi klasična ocena (2.36). Imamo da je

$$\begin{aligned} \varepsilon|(E - E^I)'(x)| &\leq C\varepsilon h_i \|E''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \\ &\leq CN^{-1} \max |\psi'_1| e^{\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} e^{-\beta(d-x)/\varepsilon} \\ &\leq CN^{-1} \max |\psi'_1| e^{\beta(d-x_{i-1})/(\tau\varepsilon)} e^{-\beta(d-x_i)/\varepsilon} \\ &= CN^{-1} \max |\psi'_1| e^{\beta h_i/(\tau\varepsilon)} e^{\beta(1-\tau)(d-x_i)/(\tau\varepsilon)} \\ &\leq CN^{-1} \max |\psi'_1|. \end{aligned}$$

Ovde se najpre koristi nejednakost iz (2.22) o koraku  $h_i$  i ocena (2.16) za  $E''$ . Potom su primenjeni nejednakost  $h_i/\varepsilon \leq C$  i pretpostavka  $\tau \geq 2$ . U slučaju kada je  $x \in [x_{i-1}, x_i] \subset \Omega_1 \cap \Omega_f$ , imamo

$$\begin{aligned} \varepsilon|(E - E^I)'(x)| &\leq \varepsilon|E'(x)| + \varepsilon|(E^I)'(x)| \\ &\leq \varepsilon\|E'\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} + C\varepsilon N \|E\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \\ &\leq C e^{-\beta(d-x_i)/\varepsilon} + C\varepsilon N e^{-\beta(d-x_i)/\varepsilon} \\ &= C(1 + \varepsilon N) e^{-\beta(d-x_i)/\varepsilon} \\ &\leq C(1 + \varepsilon N) e^{-\beta\lambda/\varepsilon} \\ &= C(1 + \varepsilon N) N^{-\tau} \\ &\leq CN^{-\tau}. \end{aligned}$$

Slično se analizira slučaj  $x \in \Omega_2$ . ■

**Posledica 2.6.2** Za  $\tau \geq 2$ , izvod greške interpolacije na  $S$ -mreži je ograničen sa

$$\varepsilon|(u - u^I)'(x)| \leq \begin{cases} CN^{-1} \ln N, & x \in \overline{\Omega}_f, \\ CN^{-2}, & x \in \overline{\Omega}_c, \end{cases}$$

dok je na  $BS$ -mreži i  $mBS$ -mreži

$$\varepsilon|(u - u^I)'(x)| \leq CN^{-1}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

**Dokaz.** Dokaz se izvodi jednostavno primenom Teoreme 2.6.2 i osobina za  $\max |\psi'|$  koje su navedene za sve tri mreže u Tabeli 2.1. ■

## 2.7 Konvergencija u $\|\cdot\|_\varepsilon$

U ovom odeljku ćemo ispitivati konvergenciju standardnog postupka Galerikina na slojno-adaptivnoj mreži za problem (2.13) u odnosu na  $\varepsilon$ -težinsku  $H^1$ -normu  $\|\cdot\|_\varepsilon$  definisanu sa

$$\|v\|_\varepsilon^2 := \varepsilon \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v(x)^2 dx.$$

Najpre ćemo pokazati da je bilinearna forma  $a(\cdot, \cdot)$  koercitivna u odnosu na normu  $\|\cdot\|_\varepsilon$ . Zaista,

$$\begin{aligned} a(w, w) &= (\varepsilon w', w') + (bw', w) \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} bw'w dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} b \frac{1}{2} (w^2)' dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx - \int_{\Omega} w^2 \left( \frac{1}{2} b' \right) dx \\ &\geq \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} \gamma w^2 dx \\ &\geq \min\{1, \gamma\} \left( \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} w^2 dx \right) \\ &= \min\{1, \gamma\} \left( \varepsilon \|w'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \min\{1, \gamma\} \|w\|_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

za sve  $w \in H_0^1(\Omega)$ .

**Teorema 2.7.1** *Neka generativne funkcije mreže (2.19) sa  $\tau \geq 2$  zadovoljavaju Pretpostavku 2.4.2 i neka važi nejednakost*

$$\max |\psi'| \ln^{1/2} N \leq CN. \quad (2.37)$$

Tada je

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq CN^{-1} \max |\psi'|. \quad (2.38)$$



**Napomena 2.7.1** Funkcije karakterizacije Šiškinove, Bahvalov-Šiškinove i modifikovana Bahvalov-Šiškinove mreže zadovoljavaju nejednakost (2.37).  $\diamond$

**Dokaz.** Neka je  $\eta = u - u^I$  i  $\chi = u^I - u_h$ . Koristeći tehniku iz [15], Teoreme 2.6.1 i 2.6.2 dobijamo

$$\|\eta\|_\varepsilon \leq CN^{-1} \max |\psi'|. \quad (2.39)$$

Za ocenu  $\chi$  najpre koristimo koercitivnost bilinearne forme  $a$  u odnosu na normu  $\|\cdot\|_\varepsilon$ , Galerkinovu ortogonalnost<sup>5</sup> i parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned} \min\{1, \gamma\} \|\chi\|_\varepsilon^2 &\leq a(\chi, \chi) = -a(\eta, \chi) = -(\varepsilon\eta', \chi') - (b\eta', \chi) \\ &= -\varepsilon(\eta', \chi') + (b'\eta, \chi) + (b\eta, \chi'). \end{aligned}$$

Primenom parcijalne integracije na prvi sabirak dobijamo

$$(\varepsilon\eta', \chi') = \varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta' \chi' dx = \varepsilon \sum_{k=1}^N \left( \eta \chi' \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta \chi'' dx \right) = 0,$$

jer je  $\eta(x_{k-1}) = \eta(x_k) = 0$  i  $\chi$  linearna funkcija. Za drugi sabirak važi

$$\begin{aligned} (b'\eta, \chi) &\leq |(b'\eta, \chi)| \leq C \int_{\Omega} |\eta \chi| dx \leq C \|\eta\|_{L^2(\Omega)} \|\chi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\eta\|_\varepsilon \|\chi\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Primenom Helderove nejednakosti treći sabirak ocenjujemo na sledeći način

$$\begin{aligned} (b\eta, \chi') &\leq |(b\eta, \chi')| \\ &\leq C \left( \int_0^{d-\lambda} |\eta \chi'| dx + \int_{d-\lambda}^d |\eta \chi'| dx + \int_d^{1-\lambda} |\eta \chi'| dx + \int_{1-\lambda}^1 |\eta \chi'| dx \right) \\ &\leq C \left( \|\eta\|_{L^\infty(0, d-\lambda)} \|\chi'\|_{L^1(0, d-\lambda)} + \|\eta\|_{L^\infty(d-\lambda, d)} \|\chi'\|_{L^1(d-\lambda, d)} \right. \\ &\quad \left. + \|\eta\|_{L^\infty(d, 1-\lambda)} \|\chi'\|_{L^1(d, 1-\lambda)} + \|\eta\|_{L^\infty(1-\lambda, 1)} \|\chi'\|_{L^1(1-\lambda, 1)} \right). \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup> $a(u - u_h, v_h) = 0$  za sve  $v_h \in V_h$

Na  $(0, d - \lambda)$  imamo

$$\begin{aligned} \|\chi'\|_{L^1(0, d-\lambda)} &= \sum_{k=1}^{N/2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\chi'| dx \leq C \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{h_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\chi| dx \\ &= CN \int_0^{d-\lambda} |\chi| dx \leq CN \sqrt{\int_0^{d-\lambda} 1^2 dx} \sqrt{\int_0^{d-\lambda} (\chi)^2 dx} \\ &= CN \sqrt{d-\lambda} \|\chi\|_{L^2(0, d-\lambda)} \leq CN \|\chi\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogno, na intervalu  $(d, 1 - \lambda)$  dobijamo

$$\|\chi'\|_{L^1(d, 1-\lambda)} \leq CN \|\chi\|_\varepsilon.$$

Na  $(d - \lambda, d)$  imamo

$$\begin{aligned} \|\chi'\|_{L^1(d-\lambda, d)} &= \int_{d-\lambda}^d |\chi'| dx \leq \sqrt{\int_{d-\lambda}^d 1^2 dx} \sqrt{\int_{d-\lambda}^d (\chi')^2 dx} \\ &= \sqrt{\lambda} \|\chi'\|_{L^2(d-\lambda, d)} = C \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\ln N} \|\chi'\|_{L^2(d-\lambda, d)} \\ &\leq C \sqrt{\ln N} \|\chi\|_\varepsilon, \end{aligned}$$

gde smo koristili Koši-Švarcovu nejednakost i  $\lambda = C\varepsilon \ln N$ . Na intervalu  $(1 - \lambda, 1)$  analogno se dobija

$$\|\chi'\|_{L^1(1-\lambda, 1)} \leq C \sqrt{\ln N} \|\chi\|_\varepsilon.$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned} \min\{1, \gamma\} \|\chi\|_\varepsilon &\leq C \left( \|\eta\|_\varepsilon + N \|\eta\|_{L^\infty(0, d-\lambda)} + \sqrt{\ln N} \|\eta\|_{L^\infty(d-\lambda, d)} \right. \\ &\quad \left. + N \|\eta\|_{L^\infty(d, 1-\lambda)} + \sqrt{\ln N} \|\eta\|_{L^\infty(1-\lambda, d)} \right), \end{aligned}$$

pa iz (2.29) i (2.39) dobijamo

$$\|\chi\|_\varepsilon \leq C \left( N^{-1} \max |\psi'| + N^{-1} + N^{-2} \max |\psi'|^2 \sqrt{\ln N} \right).$$

Uz pomoć nejednakosti (2.37) dobijamo

$$\|\chi\|_\varepsilon \leq CN^{-1} \max |\psi'|. \quad (2.40)$$

Koristeći nejednakost trougla, zatim ocene (2.39) i (2.40) dobijamo tvrđe-  
nje teoreme. ■

Teorema 2.7.1 ukazuje na prvi red konvergencije standardnog postupka Galerkinova za problem konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama na slojno-adaptivnoj mreži u energetskej normi.

## 2.8 "Streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata

U odeljku 2.5 smo videli da postupak konačnih elemenata Galerkina daje oscilatorna rešenja, čak i u slučaju slojno-adaptivnih mreža. Da bi se izbegle oscilacije koje su direktna posledica nestabilnosti pomenutog postupka, za diskretizaciju problema (2.25) bira se jedan drugi postupak konačnih elemenata - "streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata (SDFEM).

Ovu vrstu stabilizacije prvi put su primenili Hjuž i Bruks u [12] za problem konvekcije-difuzije sa dominantnom konvekcijom. Oni su predložili modifikaciju standardnog postupka Galerkina koja zapravo uključuje primenu postupka Petrov-Galerkina sa izmenjenim test funkcijama. Tako se dodaje veštačka difuzija, ali samo u pravcu konvekcije, i postiže se stabilizacija postupka. Iz tog razloga je SDFEM poznat i pod nazivom "streamline-diffusion" Petrov-Galerkinov metod.

U ovom odeljku ćemo predstaviti SDFEM za problem (2.13). Neka je data opšta mreža  $\Omega^N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  i neka je sa  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  označen lokalni korak mreže.

Neka je  $V_h$  prostor koga čine po delovima linearne funkcije koje imaju vrednost nula u tačkama  $x_0 = 0$  i  $x_N = 1$ . Diskretni problem kojim se definiše nekonformni SDFEM za problem (2.13) glasi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } u_h \in V_h \subset V \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h, \end{array} \right. \quad (2.41)$$

sa

$$a_h(v_h, w_h) = (\varepsilon v_h', w_h') + (b v_h', w_h) + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (-\varepsilon v_h'' + b v_h') b w_h' dx, \quad (2.42)$$

$$l_h(w_h) = (f, w_h) + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k f b w_h' dx,$$

i nekim parametrom  $\delta_k \in \mathbb{R}^+$ . Jasno, ako je  $\delta_k = 0$  za svako  $k$  dobija se diskretni problem koji odgovara standardnom postupku Galerkina (2.25).

”Streamline-diffusion” normu (SD-normu) definišemo na sledeći način

$$\|v\|_{SD}^2 = \varepsilon \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (v')^2 dx, \quad v \in V,$$

i u odnosu na nju pokazujemo neprekidnost i koercitivnost za bilinearnu formu  $a_h$ . Imamo da je

$$\begin{aligned} a_h(w_h, w_h) &= (\varepsilon w_h', w_h') + (b w_h', w_h) + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (-\varepsilon w_h'' + b w_h') b w_h' dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx + \int_{\Omega} b w_h' w_h dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} b (w_h^2)' dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx. \end{aligned}$$

Primenom parcijalne integracije na drugi integral u prethodnom izrazu dobijamo

$$\begin{aligned} a_h(w_h, w_h) &= \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx - \int_{\Omega} w_h^2 \left( \frac{1}{2} b' \right) dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \\ &\geq \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx + \gamma \int_{\Omega} w_h^2 dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \\ &= \varepsilon \|w_h'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \\ &= \|w_h\|_{SD}^2. \end{aligned}$$

Dakle,  $a_h$  je koercitivna bilinearna forma. Ostaje da se pokaže da je  $a_h$  neprekidna bilinearna forma. Važi

$$\begin{aligned} |a_h(w_h, v_h)| &= \left| (\varepsilon w_h', v_h') + (b w_h', v_h) + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (-\varepsilon w_h'' + b w_h') b v_h' dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \varepsilon w_h' v_h' dx \right| + \left| \int_{\Omega} b w_h' v_h dx \right| + \sum_{k=1}^N \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 w_h' v_h' dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |w_h' v_h'| dx + \int_{\Omega} |b w_h' v_h| dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( \sqrt{\delta_k} b w_h' \right) \left( \sqrt{\delta_k} b v_h' \right) dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon \left( \int_{\Omega} |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v'_h|^2 dx \right)^{1/2} + \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \int_{\Omega} |w'_h v_h| dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \sqrt{\delta_k} b w'_h \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \sqrt{\delta_k} b v'_h \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \varepsilon \left( \int_{\Omega} |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v'_h|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \frac{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}^\gamma}{\gamma} \left( \int_{\Omega} |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v_h|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |v'_h|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \max \left\{ 1, \frac{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}}{\gamma} \right\} \left[ \varepsilon \left( \int_{\Omega} |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v'_h|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \left( \int_{\Omega} |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v_h|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^N \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |v'_h|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \max \left\{ 1, \frac{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}}{\gamma} \right\} \left[ \varepsilon^{1/2} \left( \int_{\Omega} |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \gamma^{1/2} \left( \int_{\Omega} |w_h|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^N \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |w'_h|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\quad \times \left[ \varepsilon^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v'_h|^2 dx \right)^{1/2} + \gamma^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v_h|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^N \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |v'_h|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
&\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}}{\gamma} \right\} \left[ \varepsilon \int_{\Omega} |w'_h|^2 dx + \gamma \int_{\Omega} |w_h|^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |w'_h|^2 dx \right]^{1/2} \times \left[ \varepsilon \int_{\Omega} |v'_h|^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \gamma \int_{\Omega} |v_h|^2 dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 |v'_h|^2 dx \right]^{1/2} \\
&\leq M_{a_h} \|w_h\|_{SD} \|v_h\|_{SD},
\end{aligned}$$

gde je  $M_{a_h} = 2 \max \left\{ 1, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} / \gamma \right\}$ .

Sada prema Laks-Milgramovoj teoremi sledi da postoji jedinstveno rešenje  $u_h$  diskretnog problema (2.41).

Ako je  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  baza prostora  $V_h$  onda postoji jedinstvena reprezentacija

$$u_h(x) = \sum_{k=0}^N u_{h,k} \varphi_k(x), \quad u_{h,i} \in \mathbb{R}.$$

U tačkama mreže važi

$$u_i = u_h(x_i) = \sum_{k=0}^N u_{h,k} \varphi_k(x_i) = \sum_{k=0}^N u_{h,k} \delta_{ki} = u_{h,i}.$$

Diskretni problem (2.41) se može transformisati u sistem linearnih jednačina oblika

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } [u_{h,0}, u_{h,1}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^N \text{ tako da je} \\ \sum_{i=0}^N a_h(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l_h(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Na taj način se dobija sledeća diferencna šema

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^N u_i := -\varepsilon(D^+ u_i - D^- u_i) + \alpha_i D^+ u_i + \beta_i D^- u_i = l_h(\varphi_i), \\ u_0 = u_N = 0, \end{array} \right. \quad (2.44)$$

gde je  $u_i = u_h(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  i

$$D^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}}, \quad D^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i},$$

$$\alpha_i = h_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (b \varphi'_{i+1} \varphi_i + \delta_{i+1} b^2 \varphi'_{i+1} \varphi'_i) dx,$$

$$\beta_i = h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (b \varphi'_i \varphi_i + \delta_i b^2 \varphi'_i \varphi'_i) dx.$$

Struktura matrice sistema  $A = [a_{ij}] = [a_h(\varphi_j, \varphi_i)]$ , koja odgovara diferencnoj šemi (2.43), utiče na izbor "streamline-diffusion" parametra (SD-parametra)  $\delta_i$ . Matrica  $A$  je tridijagonalna matrica, jer je  $a_{ij} = 0$  za  $|i-j| >$

1. Neka je  $\bar{b} = \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}$ . Važi da je

$$\begin{aligned} a_h(\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= -\frac{\varepsilon}{h_i} - \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx - \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{h_i} - \frac{\bar{b}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx - \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx \\ &= -\frac{\varepsilon}{h_i} - \frac{\bar{b}}{2} - \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

kada je  $\delta_i \geq 0$ . Dalje je

$$\begin{aligned} a_h(\varphi_{i+1}, \varphi_i) &= -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b\varphi'_{i+1}\varphi_i dx + \delta_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2\varphi'_{i+1}\varphi'_i dx \\ &= -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) dx - \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} + \frac{\bar{b}}{2} - \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx. \end{aligned}$$

Kada je  $h_{i+1} \leq \frac{2\varepsilon}{\bar{b}}$  uzimamo da je  $\delta_{i+1} = 0$  i važi  $a_h(\varphi_{i+1}, \varphi_i) \leq 0$ . U ovom slučaju, kada je korak mreže  $h_{i+1}$  dovoljno mali, standardni postupak Galekkinina daje zadovoljavajuće rezultate. Kada je  $h_{i+1} > \frac{2\varepsilon}{\bar{b}}$  uzimamo da je

$$\delta_{i+1} = -\frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} b\varphi'_{i+1}\varphi_i dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2\varphi'_{i+1}\varphi'_i dx}$$

i važi  $a_h(\varphi_{i+1}, \varphi_i) < 0$ . Ostaje još da se ispita znak dijagonalnih elemenata. Imamo da je

$$\begin{aligned} a_h(\varphi_i, \varphi_i) &= \varepsilon \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx \\ &\quad - \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) dx + \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx + \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \\ &> \varepsilon \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \frac{\beta}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx \\ &\quad - \frac{\bar{b}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) dx + \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx + \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \frac{\beta}{2} + \frac{\bar{b}}{2} + \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 + \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Iz gornjeg razmatranja zaključujemo da SD-parametar biramo na sledeći način:

$$\delta_i = 0, \quad \text{ako je } h_i \leq \frac{2\varepsilon}{\bar{b}}, \quad (2.45)$$

$$\delta_i = - \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi'_i \varphi_{i-1} dx \right) \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx \right)^{-1}, \quad \text{ako je } h_i > \frac{2\varepsilon}{\bar{b}}. \quad (2.46)$$

Jednostavnim ocenama se u slučaju (2.46) dobijaju sledeće nejednakosti

$$\frac{\beta}{2\bar{b}^2} h_i \leq \delta_i \leq \frac{\bar{b}}{2\beta^2} h_i. \quad (2.47)$$

Uzimajući u obzir ponašanje koraka  $h_i$  na mreži  $S$ -tipa (2.19) dobijamo da je

$$\delta_i \leq CN^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.48)$$

Sa ovakvim izborom SD-parametra dobija se da je matrica sistema šeme (2.44)  $L$ -oblika. Pokažimo da je matrica  $A$   $M$ -matrica. Tražimo majorirajući vektor za matricu  $A$ . Za  $x = [1, \dots, 1]^T$  je

$$Ax = [-a_h(\varphi_{i-1}, \varphi_i), 0, \dots, 0, -a_h(\varphi_{i+1}, \varphi_i)]^T.$$

Kako je  $a_h(\varphi_{i-1}, \varphi_i) \leq 0$  i  $a_h(\varphi_{i+1}, \varphi_i) \leq 0$  sledi da je  $Ax > 0$ , pa je

$$\tau^0 = \{2, \dots, N-1\} \quad \text{i} \quad \tau^+ = \{1, N\}.$$

Za  $i = 2$  neka je  $k_0 = 2$  i  $k_1 = 1$ . Važi  $k_1 \in \tau^+(Ax)$  i  $a_{k_0 k_1} = a_{21} \neq 0$ . Za  $i = 3$  neka je  $k_0 = 3$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ . Važi  $k_2 \in \tau^+(Ax)$ ,  $a_{k_0 k_1} = a_{32} \neq 0$  i  $a_{k_1 k_2} = a_{21} \neq 0$ . Za  $i = m \in \tau^0(Ax)$  neka je  $k_0 = m$ ,  $k_1 = m-1, \dots, k_{m-2} = 2$  i  $k_{m-1} = 1$ . Važi  $k_{m-1} \in \tau^+(Ax)$  i  $a_{k_{j-1} k_j} \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Dakle, vektor  $x$  je majorirajući vektor matrice  $A$ . Na osnovu Teoreme 3.1.2 dobijamo da je matrica  $A$  inverzno monotona. Inverzno monotona matrica  $L$ -oblika je  $M$ -matrica. Znači, matrica  $A$  je  $M$ -matrica.



## 2.9 Diskretne Grinove funkcije

U ovom odeljku ćemo proučavati osobine diskretnih Grinovih funkcija  $\lambda^i$ , čija egzistencija sledi na osnovu koercitivnosti diskretne bilinearne forme  $a_h$ .

Zapišimo šemu (2.44) u sledećem obliku

$$\begin{cases} -\frac{\varepsilon}{\bar{h}_i}(p_{i+1}D^+u_i - p_iD^-u_i) + r_i\frac{u_i - u_{i-1}}{\bar{h}_i} + q_iu_i = l_h^i, \\ u_0 = u_N = 0, \end{cases}$$

sa odgovarajućom desnom stranom  $l_h^i$  i nekim koeficijentima  $p_i$ ,  $q_i$  i  $r_i$  koji imaju sledeće osobine

$$p_i \geq p > 0, \quad q_i \geq 0, \quad r_i \geq r > 0. \quad (2.49)$$

Lako se pokazuje da je za diferencnu šemu (2.44)

$$p_i = 1 - \frac{\alpha_{i-1}}{\varepsilon}, \quad q_i = 0, \quad r_i = \frac{\alpha_{i-1} + \beta_i}{h_i}.$$

Za proveru uslova (2.49) najpre su nam potrebne dodatne pretpostavke o mreži diskretizacije koje su navedene u sledećoj lemi.

**Lema 2.9.1** *Ako su uslovi*

$$\varepsilon < \min\{d, 1 - d\}\bar{b}N^{-1}, \quad (2.50)$$

$$N^{-1} \max|\phi'| \leq \frac{2\beta}{\tau\bar{b}}(1 - p), \quad (2.51)$$

zadovoljeni za neko  $0 < p < 1$ , onda je

$$p_i \geq p > 0, \quad r_i \geq \beta > 0.$$

**Dokaz.** Tražena nejednakost za  $p_i$  se pokazuje u zavisnosti od indeksa  $i$ .

Neka  $i \in I_1 \cup I_3$ . Iz uslova (2.50) sledi

$$h_i = 4(d - \lambda)(t_i - t_{i-1}) = \frac{4}{N}(d - \lambda) \geq 2dN^{-1} > \frac{2\varepsilon}{\bar{b}}, \quad i \in I_1,$$

$$h_i = 4(1 - d - \lambda)(t_i - t_{i-1}) = \frac{4}{N}(1 - d - \lambda) \geq 2(1 - d)N^{-1} > \frac{2\varepsilon}{b}, \quad i \in I_3.$$

Prema izboru (2.46) parametra  $\delta_i$ , imamo da je  $\alpha_{i-1} = 0$ , pa je  $p_i = 1 > p > 0$ .

Neka  $i \in I_2 \cup I_4$ . Iz uslova (2.51) sledi

$$h_i = \frac{\tau\varepsilon}{\beta} (\phi(t_{i-1}) - \phi(t_i)) \leq \frac{\tau\varepsilon}{\beta} N^{-1} \max |\phi'| \leq \frac{2\varepsilon}{b}(1 - p) \leq \frac{2\varepsilon}{b},$$

sa odgovarajućom funkcijom  $\phi = \phi_k$ ,  $k = 1, 2$ . Sada je  $\delta_i = 0$  i

$$\begin{aligned} p_i &= 1 - \frac{\alpha_{i-1}}{\varepsilon} = 1 - \frac{h_i}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i \varphi_{i-1} dx \geq 1 - \frac{h_i \bar{b}}{2\varepsilon} \\ &\geq 1 - \frac{\tau \bar{b}}{2\beta} N^{-1} \max |\phi'| \geq 1 - (1 - p) = p > 0. \end{aligned}$$

Na kraju imamo da je

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{\alpha_{i-1} + \beta_i}{h_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i \varphi_{i-1} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i \varphi_i dx \\ &= \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x_i - x) dx + \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx \\ &\geq \frac{\beta}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) dx + \frac{\beta}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx \\ &= \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta > 0, \end{aligned}$$

te su za  $r = \beta$  ispunjeni uslovi (2.49). ■

Pošto su uslovi (2.49) ispunjeni, može se primeniti Lema 3.3.1 kako bi zaključili da je

$$\|\lambda^i\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C, \quad \|(\lambda^i)'\|_{L^1(\Omega)} \leq C. \quad (2.52)$$

**Napomena 2.9.1** Prvo ograničenje (2.50) za parametar  $\varepsilon$  nije restriktivno, jer na osnovu Pretpostavke 2.4.1 već imamo  $\varepsilon \leq CN^{-1}$ . ◇

**Napomena 2.9.2** Drugi uslov (2.51) u prethodnoj lemi je ispunjen za  $S$ -mrežu i  $mBS$ -mrežu, ali nije zadovoljen za  $BS$ -mrežu. Međutim, numerički eksperimenti u odeljku 2.12 ukazuju da je postupak tipa SDFEM za problem konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama i na  $BS$ -mreži  $\varepsilon$ -uniformno konvergentan postupak drugog reda tačnosti. ◇

**Napomena 2.9.3** Prateći korake u dokazu prethodne leme sada smo u mogućnosti da damo bliže informacije o ponašanju SD-parametra  $\delta_i$ :

$$\begin{aligned}\delta_i &\leq CN^{-1}, \quad i \in I_1 \cup I_3, \\ \delta_i &= 0, \quad i \in I_2 \cup I_4.\end{aligned}$$

◇

## 2.10 Analiza greške u tačkama mreže

U ovom odeljku ćemo izvesti  $\varepsilon$ -uniformnu ocenu greške za SDFEM primenjen na slojno-adaptivnoj mreži S-tipa za problem (2.13).

Postupak tipa SDFEM je konzistentan, pa se greška u proizvoljnoj tački mreže svodi na

$$u(x_i) - u_h(x_i) = a_h(u^I - u, \lambda^i), \quad x_i \in \Omega^N. \quad (2.53)$$

Prvi važan rezultat ovog odeljka jeste teorema o  $\varepsilon$ -uniformnoj oceni greške.

**Teorema 2.10.1** *Neka su  $u$  i  $u_h$  rešenja problema (2.13) i (2.43), redom, i neka su zadovoljene pretpostavke Leme 2.9.1. Tada na mreži S-tipa (2.19) sa  $\tau \geq 2$ , greška u tačkama mreže ima osobinu*

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leq CN^{-2} \max |\psi'|^2, \quad x_i \in \Omega^N. \quad (2.54)$$

**Dokaz.** Neka je  $x_i$  proizvoljna tačka mreže. Prema definiciji bilinearne forme  $a_h$  i prema osobinama linearnog interpolanta  $u^I$  imamo da je

$$\begin{aligned}a_h(u^I - u, \lambda^i) &= \varepsilon \int_0^1 (u^I - u)'(\lambda^i)' dx + \int_0^1 b(u^I - u)' \lambda^i dx \\ &+ \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k u'' b(\lambda^i)' dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (u^I - u)'(\lambda^i)' dx.\end{aligned} \quad (2.55)$$

Primenom parcijalne integracije na prvi integral u (2.55), zatim osobina (1.24) i  $(\lambda^i)'' = 0$  dobija se

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_0^1 (u^I - u)'(\lambda^i)' dx &= \varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u)'(\lambda^i)' dx \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^N (u^I - u)(\lambda^i)' \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u)(\lambda^i)'' dx = 0.\end{aligned} \quad (2.56)$$

Zatim se parcijalnom integracijom transformiše drugi integral u (2.55). Na osnovu glatkosti funkcije  $b$  i pokazanih osobina diskretnih Grinovih funkcija dobijaju se sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 b(u^I - u)' \lambda^i dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} b(u^I - u)' \lambda^i dx \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^N b(u^I - u) \lambda^i \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u) (b' \lambda^i + b(\lambda^i)') dx \right| \\
&= \left| - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u) (b' \lambda^i + b(\lambda^i)') dx \right| \\
&\leq C \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \left( \|\lambda^i\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \|(\lambda^i)'\|_{L^1(\Omega)} \right) \\
&\leq C \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Za analizu trećeg integrala u (2.55) se koristi dekompozicija  $u = S + E$  iz Teoreme 2.3.1. Tada za glatki deo rešenja koristeći nejednakost (2.48), ocene (2.15) i (2.52) dobijamo

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k S'' b(\lambda^i)' dx \right| &\leq C \varepsilon N^{-1} \|S''\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|(\lambda^i)'\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq C \varepsilon N^{-1}. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Zbog osobine parametra  $\delta_i$  iz Napomene 2.9.3 i glatkosti funkcije  $b$  za slojni deo rešenja važi

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k E'' b(\lambda^i)' dx \right| \leq \\
&\leq C \varepsilon N^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |E''| |(\lambda^i)'| dx + \sum_{k=N/2+1}^{3N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |E''| |(\lambda^i)'| dx \right).
\end{aligned}$$

Lokalni korak mreže  $h_i$  se može ograničiti od dole sa

$$h_i \geq 2 \max\{d, 1 - d\} N^{-1}, \quad i \in I_1 \cup I_3,$$

pa funkcije  $\lambda^i \in V_h$  imaju osobinu

$$|(\lambda^i)'(x)| = \frac{1}{h_k} |\lambda^i(x_k) - \lambda^i(x_{k-1})| \leq CN \|\lambda^i\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq CN,$$

za svako  $x \in [x_{k-1}, x_k] \subset \bar{\Omega}_c$ . Sada je

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k E'' b(\lambda^i)' dx \right| \\
& \leq C\varepsilon \left( \sum_{k=1}^{N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |E''| dx + \sum_{k=N/2+1}^{3N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |E''| dx \right) \\
& \leq C\varepsilon \left( \sum_{k=1}^{N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon^{-2} e^{-\beta(d-x)/\varepsilon} dx + \sum_{k=N/2+1}^{3N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon^{-2} e^{-\beta(1-x)/\varepsilon} dx \right) \\
& = C\varepsilon^{-1} \left( \sum_{k=1}^{N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\beta(d-x)/\varepsilon} dx + \sum_{k=N/2+1}^{3N/4} \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\beta(1-x)/\varepsilon} dx \right) \\
& = C \left( \sum_{k=1}^{N/4} e^{-\beta(d-x)/\varepsilon} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \sum_{k=N/2+1}^{3N/4} e^{-\beta(1-x)/\varepsilon} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} \right) \\
& = CN^{-\tau}, \tag{2.59}
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili ocenu (2.16). Na kraju na osnovu ocena (2.58) i (2.59) za ocenu trećeg integrala u (2.55) se dobija

$$\left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k u'' b(\lambda^i)' dx \right| \leq C(\varepsilon N^{-1} + N^{-\tau}). \tag{2.60}$$

Posmatramo sada četvrti integral u (2.55). Primenom parcijalne integracije i primenom osobina koje važe za  $\delta_i$ ,  $b$  i  $\lambda^i$  dobija se

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (u^I - u)' (\lambda^i)' dx \right| &= \left| - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (u^I - u) (b^2 (\lambda^i)')' dx \right| \\
&\leq CN^{-1} \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}. \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Na kraju na osnovu ocena (2.56), (2.57), (2.60), (2.61) i pretpostavki  $\varepsilon \leq CN^{-1}$  i  $\tau \geq 2$  dobijamo

$$\begin{aligned}
|u(x_i) - u_h(x_i)| &= |a_h(u^I - u, \lambda^i)| \\
&\leq C(\varepsilon N^{-1} + N^{-\tau} + \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}) \tag{2.62} \\
&\leq CN^{-2} \max |\psi'|^2. \tag{2.63}
\end{aligned}$$

■

U sledećoj teoremi predstavljen je rezultat vezan za  $L^\infty$ -normu greške  $u - u_h$  koja se odnosi na ceo domen  $\Omega$ , a ne samo na tačke mreže.

**Teorema 2.10.2** *Neka su  $u$  i  $u_h$  rešenja problema (2.13) i (2.43), redom, i neka su zadovoljene pretpostavke Leme 2.9.1. Tada na mreži  $S$ -tipa (2.19) sa  $\tau \geq 2$ , greška  $u - u_h$  ima osobinu*

$$|u(x) - u_h(x)| \leq CN^{-2} \max |\psi'|^2, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2.64)$$

**Dokaz.** Podsetimo se ocene za grešku date u (2.9)

$$|u(x) - u_h(x)| \leq \|u - u^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} + \max_{0 \leq i \leq N} |u_h(x_i) - u(x_i)|.$$

Sada primenom Teoreme 2.6.1 o greški interpolacije i Teoreme 2.10.1 o oceni greške u tačkama mreže dobijamo traženi rezultat. ■

Direkta posledica prethodne teoreme i Posledice 2.6.1 jeste sledeće tvrđenje o (skoro) drugom redu konvergencije za SDFEM na  $S$ - i  $mBS$ -mreži za problem (2.13).

**Posledica 2.10.1** *Sa  $\tau \geq 2$ , za  $L^\infty$ -normu greške na  $S$ - i  $mBS$ -mreži važi*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \begin{cases} CN^{-2} \ln^2 N, & \text{na } S\text{-mreži,} \\ CN^{-2}, & \text{na } mBS\text{-mreži.} \end{cases}$$

Iako uslov (2.51) iz Leme 2.9.1 nije ispunjen za  $BS$ -mrežu, numerički eksperimenti u odeljku 2.12 ukazuju na isti red  $\varepsilon$ -uniformne konvergencije.

## 2.11 O optimalnosti postupka tipa SDFEM

Za postupak konačnih elemenata se kaže da je *optimalan* u odnosu na  $L^\infty$ -normu ako je

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}, \quad (2.65)$$

gde je  $u$  tačno rešenje problema (2.13),  $u_h$  je njegova aproksimacija dobijena datim postupkom, a  $u^I$  je interpolaciona funkcija za  $u$ .

SDFEM je skoro optimalan postupak, jer je

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + CN^{-2},$$

što sledi iz (2.62).

## 2.12 Numerički eksperimenti

U ovom odeljku se eksperimentalno proverava tvrđenje Teoreme 2.10.1. Šema (2.44) se na  $S$ -,  $BS$ - i  $mBS$ -mreži sa  $\tau = 2$  primenjuje na sve test probleme. U tabelama koje se nalaze u okviru ovog odeljka su prikazane vrednosti greške

$$E^N = \max_{\varepsilon} \max_{0 \leq i \leq N} |u_{\varepsilon}(x_i) - u_i^{\varepsilon, N}|,$$

gde je  $u_{\varepsilon}$  tačno rešenje problema, a

$$[u_0^{\varepsilon, N}, u_1^{\varepsilon, N}, \dots, u_N^{\varepsilon, N}]^T$$

je rešenje sistema (2.44) za fiksne vrednosti parametra  $\varepsilon$  i  $N$ . Dalje se izračunava red konvergencije primenom standardne formule

$$p^N = \frac{\ln \left( \frac{E^N}{E^{2N}} \right)}{\ln 2}.$$

Takođe, za Šiškinovu mrežu izračunava se i Šiškinov red konvergencije

$$p_S^N = \frac{\ln \left( \frac{E^N}{E^{2N}} \right)}{\ln \left( \frac{2 \ln N}{\ln(2N)} \right)}.$$

Svi rezultati koji se odnose na  $S$ -mrežu su prikazani za vrednosti  $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-9}$ . Rezultati za  $BS$ - i  $mBS$ -mrežu su prikazani za određene vrednosti perturbacionog parametra zbog pretpostavke

$$\lambda = \frac{\tau \varepsilon}{\beta} \ln N \leq \min \left\{ \frac{d}{2}, \frac{1-d}{2} \right\}.$$

Tako uzimamo da je  $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-6}, \dots, 10^{-9}$ . Za sve mreže parametar  $N$  uzima vrednosti  $N = 2^5, 2^6, \dots, 2^{13}$ .

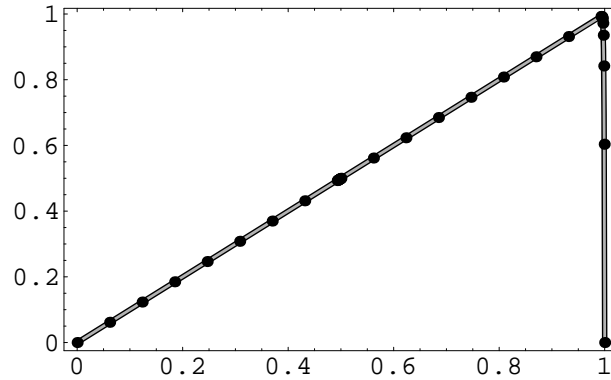
**Test problem 1.** Prvi problem koji je testiran je

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + u'(x) &= 1, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Iako su polazne funkcije glatke, ovde ćemo primeniti postupak koji smo konstruisali za problem konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama.

Tačno rešenje ovog problema, vidi Sliku 2.3, je

$$u(x) = x - \frac{e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}.$$



Slika 2.3: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 1 za  $\varepsilon = 10^{-3}$  na  $S$ -mreži sa  $N = 2^5$

Na Slici 2.3 je pored tačnog rešenja prikazano i numeričko rešenje test problema 1 sa  $\varepsilon = 10^{-3}$  dobijeno postupkom SDFEM na  $S$ -mreži.

Za  $a \in [0, 1)$  je

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow a} u(x),$$

ali

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 0.$$

Dakle, test problem 1 ima granični sloj u  $x = 1$ . Iako ovaj test problem nema unutrašnji sloj generiše se odgovarajuća slojno-adaptivna mreža sa slojem u tački  $d = 0.5$ .

U Tabelama 2.3, 2.4 i 2.5 su prikazane greška i red konvergencije za test problem 1 na  $S$ -,  $BS$ - i  $mBS$ -mreži. Prikazani numerički rezultati potvrđuju drugi red konvergencije postupka tipa SDFEM.



Tabela 2.3: Rezultati za  $E^N$ ,  $p^N$  i  $p_S^N$  za test problem 1 na  $S$ -mreži.

$\epsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-2}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-3}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-4}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-5}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-6}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-7}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-8}$	0.024986	0.008527	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-9}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$E^N$	0.024986	0.008527	0.002836	0.000923	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$p^N$	1.55103	1.58798	1.61993	1.66254	1.69979	1.72523	1.74557	1.76118	–
$p_S^N$	2.10461	2.04213	2.00646	2.003	2.00122	1.99987	1.99992	1.9987	–

Tabela 2.4: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 1 na  $BS$ -mreži.

$\epsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-6}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-7}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-8}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-9}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$E^N$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$p^N$	1.93389	1.97212	1.98738	1.99402	1.9971	1.99857	1.99929	1.99969	–

Tabela 2.5: Rezultati za  $E^N$ ,  $p^N$  i  $p_S^N$  za test problem 1 na  $mBS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$p^N$	1.89303	1.92682	1.93822	1.95041	1.95999	1.96568	1.9651	1.95017	–

**Test problem 2.** Drugi problem koji je testiran je

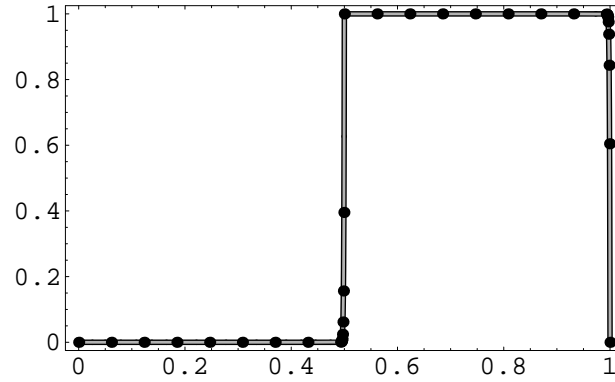
$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = \delta_{0.5}(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

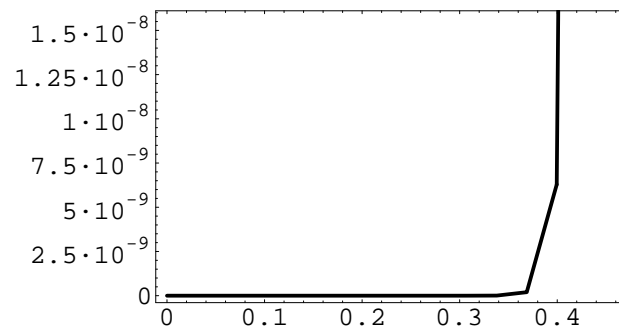
Ovo test problem je problem iz Primera 2.5.1. Podsetimo se da je tačno rešenje, vidi Sliku 2.4, dato sa

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\frac{1-d}{\varepsilon}}}{-1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}} (1 - e^{\frac{1-d}{\varepsilon}})}{1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}, & x = 0.5, \\ \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} (1 - e^{\frac{d}{\varepsilon}})}{-1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}} (1 - e^{-\frac{d}{\varepsilon}})}{1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}, & x \neq 0.5. \end{cases}$$

U Primeru 2.5.1 smo rešavali ovaj problem primenom standardnog postupka Galerkina sa linearnim Lagranžovim elementima na Šiškinovoj mreži. Uočili smo da taj postupak van slojeva produkuje oscilatorna numerička rešenja, vidi Sliku 2.2. Oscilacije su direktna posledica nestabilnosti Galerkinovog postupka. Na Slici 2.5 prikazano je numeričko rešenje van slojeva dobijeno postupkom tipa SDFEM na Šiškinovoj mreži. Primećujemo da SD-FEM postupak ne generiše oscilatorna rešenja.



Slika 2.4: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 2 za  $\varepsilon = 10^{-4}$  na  $BS$ -mreži sa  $N = 2^5$



Slika 2.5: Numeričko rešenje test problema 2 dobijeno SDFEM postupkom van slojeva

Tabela 2.6: Rezultati za  $E^N$ ,  $p^N$  i  $p_S^N$  za test problem 2 na  $S$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-2}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-3}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-4}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-5}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-6}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-7}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-8}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$10^{-9}$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$E^N$	0.024986	0.008526	0.002836	0.000922	0.000291	0.000089	0.000027	0.000008	0.000002
$p^N$	1.55103	1.58798	1.61993	1.66254	1.69979	1.72523	1.74557	1.76118	–
$p_S^N$	2.10164	2.00213	2.00643	2.005	2.0012	1.99978	1.99993	1.9987	–

Tabela 2.7: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 2 na  $BS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-6}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-7}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-8}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$10^{-9}$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$E^N$	0.004820	0.001261	0.000321	0.000081	0.000020	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-8}$
$p^N$	1.93389	1.97212	1.98738	1.99402	1.9971	1.99857	1.99929	1.99969	–

Tabela 2.8: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 2 na  $mBS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.006086	0.001638	0.000431	0.000112	0.000029	0.000007	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$p^N$	1.89303	1.92682	1.93822	1.95041	1.95999	1.96568	1.9651	1.95017	–

Rezultati za grešku i red konvergencije za test problem 2, koji su prikazani u Tabelama 2.6, 2.7 i 2.8, potvrđuju konvergenciju drugog reda SDFEM postupka.

**Test problem 3.** Treći problem koji je testiran je

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

gde je

$$f(x) = \begin{cases} 0.7, & x \leq 0.5, \\ -0.6, & x > 0.5. \end{cases}$$

Tačno rešenje ovog test problema je

$$u(x) = \begin{cases} \frac{7x}{10} + \varepsilon C_1 e^{x/\varepsilon} + C_2, & x \leq 0.5, \\ -\frac{3x}{5} + \varepsilon C_3 e^{x/\varepsilon} + C_4, & x > 0.5. \end{cases}$$

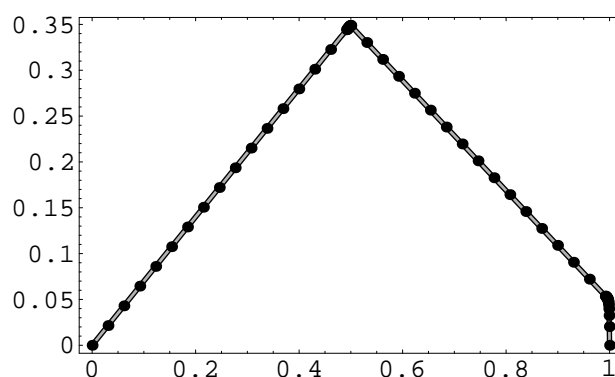
Konstante  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , određene iz uslova neprekidnosti

$$u_\varepsilon(d-0) = u_\varepsilon(d+0),$$

$$u'_\varepsilon(d-0) = u'_\varepsilon(d+0),$$

gde je  $d = 0.5$ .

Za  $\varepsilon = 10^{-3}$  na Slici 2.6 prikazani su grafici tačnog i numeričkog rešenja test problema 3 na  $S$ -mreži sa  $N = 2^6$ .



Slika 2.6: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 3 za  $\varepsilon = 10^{-3}$  na  $S$ -mreži sa  $N = 2^6$

U Tabelama 2.9, 2.10 i 2.11 prikazani su rezultati za grešku i red konvergencije za razne vrednosti parametara  $\varepsilon$  i  $N$ . Dobijeni rezultati potvrđuju drugi red konvergencije postupka tipa SDFEM.

Tabela 2.9: Rezultati za  $E^N$ ,  $p^N$  i  $p_S^N$  za test problem 3 na  $S$ -mreži.

$\epsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-2}$	0.000924	0.000315	0.000104	0.000034	0.000010	0.000003	0.000001	$2 \times 10^{-7}$	$8 \times 10^{-8}$
$10^{-3}$	0.001216	0.000415	0.000138	0.000044	0.000014	0.000004	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-4}$	0.001246	0.000425	0.000141	0.000046	0.000014	0.000004	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-5}$	0.001248	0.000426	0.000141	0.000046	0.000014	0.000004	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.001249	0.000426	0.000141	0.000046	0.000014	0.000004	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.001249	0.000426	0.000141	0.000046	0.000014	0.000004	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.001249	0.000426	0.000141	0.000046	0.000014	0.000004	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.001249	0.000426	0.000141	0.000046	0.000014	0.000004	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.001249	0.000426	0.000141	0.000046	0.000014	0.000004	0.000001	$4 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$p^N$	1.55103	1.58798	1.61993	1.66254	1.69679	1.72523	1.74557	1.76117	–
$p_S^N$	2.10451	2.04214	2.00664	2.00301	2.00212	1.99987	1.99991	1.99869	–

Tabela 2.10: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 3 na  $BS$ -mreži.

$\epsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.000240	0.000063	0.000016	0.000004	0.000001	$2 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-9}$
$10^{-6}$	0.000241	0.000063	0.000016	0.000004	0.000001	$2 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-9}$
$10^{-7}$	0.000241	0.000063	0.000016	0.000004	0.000001	$2 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-9}$
$10^{-8}$	0.000241	0.000063	0.000016	0.000004	0.000001	$2 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-9}$
$10^{-9}$	0.000241	0.000063	0.000016	0.000004	0.000001	$2 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-9}$
$E^N$	0.000241	0.000063	0.000016	0.000004	0.000001	$2 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-9}$
$p^N$	1.93389	1.97212	1.98738	1.99402	1.99709	1.99837	1.99927	2.00032	–

Tabela 2.11: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 3 na  $mBS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.000304	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$6 \times 10^{-9}$
$10^{-6}$	0.000304	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$6 \times 10^{-9}$
$10^{-7}$	0.000304	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$6 \times 10^{-9}$
$10^{-8}$	0.000304	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$6 \times 10^{-9}$
$10^{-9}$	0.000304	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$6 \times 10^{-9}$
$E^N$	0.000304	0.000081	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$6 \times 10^{-9}$
$p^N$	1.89303	1.92682	1.93822	1.95041	1.95999	1.96568	1.96509	1.95024	–

**Test problem 4.** Četvrti problem koji je testiran je

$$-\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) = 1, \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

gde je

$$b(x) = \begin{cases} 1, & x < 0.5, \\ 4, & x > 0.5. \end{cases}$$

Tačno rešenje, vidi Sliku 2.7, je

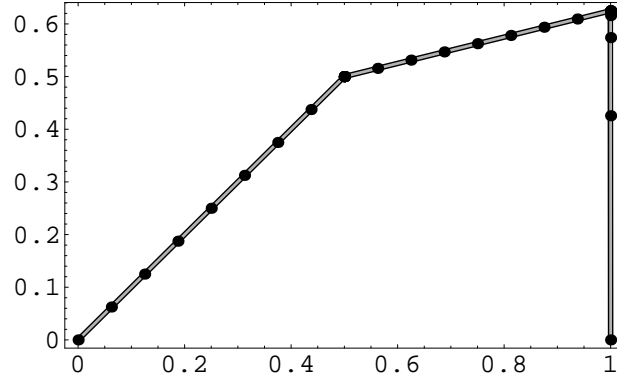
$$u(x) = \begin{cases} x + \varepsilon C_1 e^{x/\varepsilon} + C_2, & x \leq 0.5, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \varepsilon C_3 e^{4x/\varepsilon} + C_4, & x > 0.5, \end{cases}$$

gde su konstante  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , ponovo određene iz uslova neprekidnosti.

Numeričko rešenje test problema 4 sa  $\varepsilon = 10^{-5}$  na  $BS$ -mreži sa  $N = 2^6$  prikazano je na Slici 2.7.

U Tabelama 2.12, 2.13 i 2.14 prikazani su rezultati dobijeni postupkom SDFEM za test problem 4.





Slika 2.7: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 4 za  $\varepsilon = 10^{-5}$  na  $BS$ -mreži sa  $N = 2^5$

Tabela 2.12: Rezultati za  $E^N$ ,  $p^N$  i  $p_S^N$  za test problem 4 na  $S$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-2}$	0.118978	0.123336	0.032333	0.009107	0.002885	0.000889	0.000268	0.000079	0.000023
$10^{-3}$	0.120279	0.124684	0.032687	0.009206	0.002916	0.000899	0.000271	0.000080	0.000023
$10^{-4}$	0.120409	0.124819	0.032722	0.009216	0.002920	0.000900	0.000272	0.000080	0.000023
$10^{-5}$	0.120422	0.124832	0.032726	0.009217	0.002920	0.000900	0.000272	0.000080	0.000023
$10^{-6}$	0.120423	0.124834	0.032726	0.009218	0.002920	0.000900	0.000272	0.000080	0.000023
$10^{-7}$	0.120423	0.124834	0.032726	0.009218	0.002920	0.000900	0.000272	0.000080	0.000023
$10^{-8}$	0.120423	0.124834	0.032726	0.009218	0.002920	0.000900	0.000272	0.000080	0.000023
$10^{-9}$	0.120423	0.124834	0.032726	0.009218	0.002920	0.000900	0.000272	0.000080	0.000023
$E^N$	0.120423	0.124834	0.032726	0.009218	0.002920	0.000900	0.000272	0.000080	0.000023
$p^N$	1.92257	1.93148	1.82793	1.65827	1.6974	1.72676	1.74931	1.7692	–
$p_S^N$	2.28388	2.23348	2.26409	2.00165	2.00205	2.002042	2.00018	1.99773	–

Tabela 2.13: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 4 na  $BS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.023175	0.005458	0.001357	0.000340	0.000085	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.023175	0.005458	0.001357	0.000340	0.000085	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.023175	0.005458	0.001357	0.000340	0.000085	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.023175	0.005458	0.001357	0.000340	0.000085	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.023175	0.005458	0.001357	0.000340	0.000085	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.023175	0.005458	0.001357	0.000340	0.000085	0.000021	0.000005	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$p^N$	2.08593	2.00786	1.99353	1.99462	1.99756	1.99786	1.99542	1.97923	–

Tabela 2.14: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 4 na  $mBS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.015327	0.004215	0.001095	0.000286	0.000074	0.000019	0.000004	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.015327	0.004215	0.001095	0.000286	0.000074	0.000019	0.000004	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.015327	0.004215	0.001095	0.000286	0.000074	0.000019	0.000004	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.015327	0.004215	0.001095	0.000286	0.000074	0.000019	0.000004	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.015327	0.004215	0.001095	0.000286	0.000074	0.000019	0.000004	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.015327	0.004215	0.001095	0.000286	0.000074	0.000019	0.000004	0.000001	$3 \times 10^{-7}$
$p^N$	1.86235	1.94409	1.93552	1.95156	1.96006	1.96587	1.96786	1.95857	–

**Test problem 5.** Peti problem koji je testiran je

$$-\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

gde je

$$b(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0.5, \\ 4, & x > 0.5, \end{cases}$$

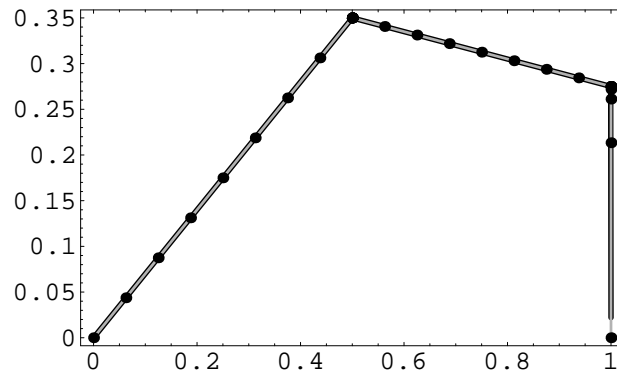
i

$$f(x) = \begin{cases} 0.7, & x \leq 0.5, \\ -0.6, & x > 0.5. \end{cases}$$

Tačno rešenje ovog test problema, vidi Sliku 2.8, je

$$u(x) = \begin{cases} \frac{7x}{10} + \varepsilon C_1 e^{x/\varepsilon} + C_2, & x \leq 0.5, \\ -\frac{3x}{20} + \frac{1}{4} \varepsilon C_3 e^{4x/\varepsilon} + C_4, & x > 0.5. \end{cases}$$

Konstante  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , određuju se iz uslova neprekidnosti.



Slika 2.8: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 5 za  $\varepsilon = 10^{-6}$  na  $S$ -mreži sa  $N = 2^5$

Tabela 2.15: Rezultati za  $E^N$ ,  $p^N$  i  $p_S^N$  za test problem 5 na  $S$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-2}$	0.051348	0.053229	0.013954	0.003930	0.001245	0.000383	0.000116	0.000034	0.000010
$10^{-3}$	0.052822	0.054757	0.014355	0.004043	0.001281	0.000394	0.000119	0.000035	0.000010
$10^{-4}$	0.052969	0.054909	0.014395	0.004054	0.001284	0.000396	0.000119	0.000035	0.000010
$10^{-5}$	0.052984	0.054925	0.014399	0.004055	0.001284	0.000396	0.000119	0.000035	0.000010
$10^{-6}$	0.052986	0.054925	0.014399	0.004055	0.001284	0.000396	0.000119	0.000035	0.000010
$10^{-7}$	0.052986	0.054925	0.014399	0.004055	0.001284	0.000396	0.000119	0.000035	0.000010
$10^{-8}$	0.052986	0.054925	0.014399	0.004055	0.001284	0.000396	0.000119	0.000035	0.000010
$10^{-9}$	0.052986	0.054925	0.014399	0.004055	0.001284	0.000396	0.000119	0.000035	0.000010
$E^N$	0.052986	0.054925	0.014399	0.004055	0.001284	0.000396	0.000119	0.000035	0.000010
$p^N$	1.97349	1.93148	1.82793	1.65827	1.6974	1.72676	1.74931	1.7692	–
$p_S^N$	2.16409	2.01348	2.00164	2.00212	2.00502	2.00035	2.00061	1.9997	–

Tabela 2.16: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 5 na  $BS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.010197	0.002401	0.000059	0.000149	0.000037	0.000009	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.010197	0.002401	0.000059	0.000149	0.000037	0.000009	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.010197	0.002401	0.000059	0.000149	0.000037	0.000009	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.010197	0.002401	0.000059	0.000149	0.000037	0.000009	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.010197	0.002401	0.000059	0.000149	0.000037	0.000009	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.010197	0.002401	0.000059	0.000149	0.000037	0.000009	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$p^N$	2.08593	2.00786	1.99353	1.99462	1.99756	1.99785	1.99542	1.97924	–

Tabela 2.17: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 5 na  $mBS$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.006743	0.001854	0.000482	0.000126	0.000032	0.000008	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.006744	0.001854	0.000482	0.000126	0.000032	0.000008	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.006744	0.001854	0.000482	0.000126	0.000032	0.000008	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.006744	0.001854	0.000482	0.000126	0.000032	0.000008	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.006744	0.001854	0.000482	0.000126	0.000032	0.000008	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.006744	0.001854	0.000482	0.000126	0.000032	0.000008	0.000002	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$p^N$	1.86235	1.94409	1.93552	1.95156	1.96006	1.96587	1.96786	1.95857	–

Rezultati za grešku i red konvergencije za test problem 5, koji su prikazani u Tabelama 2.15, 2.16 i 2.17, potvrđuju konvergenciju drugoga reda postupka tipa SDFEM.

**Test problem 6.** Test problem 6 je

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

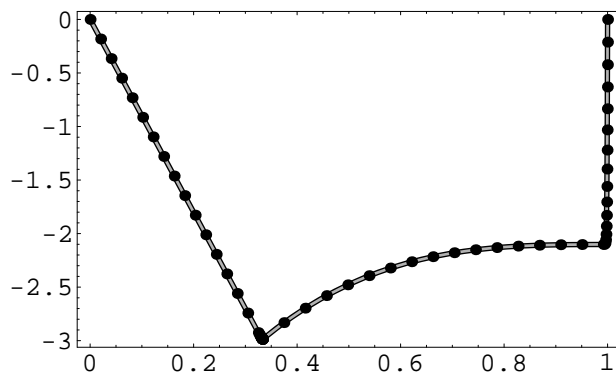
gde je

$$f(x) = \begin{cases} -9, & x \leq \frac{1}{3}, \\ 9(x-1)^2, & x > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

Tačno rešenje, vidi Sliku 2.9, je

$$u(x) = \begin{cases} -9x + \varepsilon C_1 e^{x/\varepsilon} + C_2, & x \leq \frac{1}{3}, \\ 3x^3 + 9x^2(\varepsilon - 1) + 9x(1 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2) + \varepsilon C_3 e^{x/\varepsilon} + C_4, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Iz uslova neprekidnosti sa  $d = \frac{1}{3}$  dobijaju se konstante  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .



Slika 2.9: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 6 za  $\varepsilon = 10^{-3}$  na  $mBS$ -mreži sa  $N = 2^6$

Tabela 2.18: Rezultati za  $E^N$ ,  $p^N$  i  $p_S^N$  za test problem 6 na  $S$ -mreži.

$\varepsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-2}$	0.050499	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000004
$10^{-3}$	0.052723	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000004
$10^{-4}$	0.052725	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000005
$10^{-5}$	0.052746	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000005
$10^{-6}$	0.052748	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000005
$10^{-7}$	0.052748	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000005
$10^{-8}$	0.052748	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000005
$10^{-9}$	0.052748	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000005
$E^N$	0.052748	0.018001	0.005987	0.001948	0.000065	0.000189	0.000057	0.000017	0.000005
$p^N$	1.55103	1.58798	1.61993	1.66264	1.69703	1.72488	1.74887	1.75893	–
$p_S^N$	2.10632	2.04182	2.00646	2.0021	1.99988	1.99993	1.99989	1.9997	–

Tabela 2.19: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 6 na  $BS$ -mreži.

$\epsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.010175	0.002663	0.000678	0.000171	0.000042	0.000010	0.000002	$6 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.010176	0.002663	0.000678	0.000171	0.000042	0.000010	0.000002	$6 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.010176	0.002663	0.000678	0.000171	0.000042	0.000010	0.000002	$6 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.010176	0.002663	0.000678	0.000171	0.000042	0.000010	0.000002	$6 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.010176	0.002663	0.000678	0.000171	0.000042	0.000010	0.000002	$6 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.010176	0.002663	0.000678	0.000171	0.000042	0.000010	0.000002	$6 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
$p^N$	1.93389	1.97212	1.98738	1.99402	1.9971	1.99857	1.9993	1.99976	–

Tabela 2.20: Rezultati za  $E^N$  i  $p^N$  za test problem 6 na  $mBS$ -mreži.

$\epsilon$	Broj intervala $N$								
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$10^{-5}$	0.012848	0.003459	0.000909	0.000237	0.000061	0.000015	0.000004	$1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
$10^{-6}$	0.012849	0.003459	0.000909	0.000237	0.000061	0.000015	0.000004	$1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
$10^{-7}$	0.012849	0.003459	0.000909	0.000237	0.000061	0.000015	0.000004	$1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	0.012849	0.003459	0.000909	0.000237	0.000061	0.000015	0.000004	$1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
$10^{-9}$	0.012849	0.003459	0.000909	0.000237	0.000061	0.000015	0.000004	$1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
$E^N$	0.012849	0.003459	0.000909	0.000237	0.000061	0.000015	0.000004	$1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
$p^N$	1.89303	1.92682	1.93882	1.95054	1.95987	1.96674	1.97128	1.97382	–

Rezultati za grešku i red konvergencije za test problem 6, koji su prikazani u Tabelama 2.18, 2.19 i 2.20, potvrđuju konvergenciju drugog reda postupka SDFEM.

Na kraju zaključujemo da prikazani rezultati jasno potvrđuju drugi red konvergencije za grešku u tačkama mreže, kao što pokazuje Teorema 2.10.2.



# Glava 3

## Dodatak

U ovoj glavi ćemo dati pregled nekih definicija i teorema koje su korišćene u radu.

### 3.1 Odabrane definicije i teoreme iz linearne algebre

Najpre se podestimo definicije retke, tridijagonalne, regularne, inverzne i pozitivno definitne matrice.

**Definicija 3.1.1** *Matrica  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  je retka ako je većina njenih elemenata jednaka nuli. U suprotnom je matrica gusta.*

**Definicija 3.1.2** *Matrica  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$  se naziva trakasta matrica sa širinom trake  $2m + 1$  ako je  $a_{ij} = 0$  za svako  $|i - j| > m$  ( $m < n - 1$ ). Ako je  $m = 1$  širina trake je 3, a matrica je tridijagonalna.*

**Definicija 3.1.3** *Kvadratna matrica  $A$  je regularna ako i samo ako postoji matrica  $B$  takva da je*

$$AB = BA = E.$$

*Matrica  $B$  koja zadovoljava gornju jednakost naziva se inverzna matrica za matricu  $A$ . Kvadratna matrica koja nije regularna se naziva singularna.*

**Teorema 3.1.1** *Kvadratna matrica  $A$  je regularna ako i samo ako je*

$$\det A \neq 0.$$

**Definicija 3.1.4** *Realna simetrična  $n \times n$  matrica  $A$  je pozitivno definitna ako je  $x^T Ax > 0$  za sve  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ .*

U nastavku dajemo definiciju i osobine afinog preslikavanja.

**Definicija 3.1.5** *Afino preslikavanje je preslikavanje koje tačku  $M$  preslikava u tačku  $M'$  po pravilu*

$$x' = Ax + q,$$

*gde su  $x, x'$  kolone koordinata tačaka  $M, M'$ , redom. Matrica  $A$  se naziva linearni deo afinog preslikavanja, a vektor  $q$  vektor translacije.*

Afino preslikavanje je bijektivno preslikavanje. Afinim preslikavanjem se trougao preslikava na trougao.

Pri numeričkom rešenju konturnih problema, kako kod običnih tako i kod parcijalnih diferencijalnih jednačina, pojavljuju se inverzno monotone matrice. U narednom pododjeljku ćemo navesti neke kriterijume za utvrđivanje inverzne monotonije matrica.

### 3.1.1 Inverzno monotone matrice

**Definicija 3.1.6** *Regularne matrice sa nenegativnom inverznom matricom nazivaju se inverzno monotone matrice.*

Neka je sa  $\tau$  označen skup  $\{1, 2, \dots, n\}$ , pri čemu je  $n \in \mathbb{N}$  fiksiran prirodan broj.

Neka su za  $x \in \mathbb{R}^n$  definisani skupovi  $\tau^0(x)$  i  $\tau^+(x)$ :

$$\tau^0(x) = \{i | i \in \tau, x_i = 0\}, \quad \tau^+(x) = \{i | i \in \tau, x_i > 0\}.$$

**Definicija 3.1.7** Vektor  $x > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  naziva se majorirajući vektor matrice  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$  ako je  $Ax > 0$ , ili ako je  $Ax \geq 0$ , a za svako  $i \in \tau^0(Ax)$  postoji konačno mnogo indeksa  $k_j \in \tau$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ , tako da važi

$$k_0 = i, \quad k_m \in \tau^+(Ax),$$

$$a_{k_{j-1}k_j} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Za matricu  $A$  koja ima majorirajući vektor  $x > 0$  kažemo da povezuje  $\tau^0(Ax)$  sa  $\tau^+(Ax)$ .

**Primer 3.1.1** Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Proveravamo da li je vektor  $x = [1, 1, 1, 1]^T$  majorirajući vektor matrice date matrice. Kako je  $Ax = [1, 0, 0, 1]^T$ , sledi da je

$$\tau^0(Ax) = \{2, 3\} \quad \text{i} \quad \tau^+(Ax) = \{1, 4\}.$$

Za  $i = 2$  neka je  $k_0 = 2$  i  $k_1 = 1$ . Važi  $k_1 \in \tau^+(Ax)$  i  $a_{k_0k_1} = -1 \neq 0$ . Za  $i = 3$  neka je  $k_0 = 3$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ . Važi  $k_2 \in \tau^+(Ax)$ ,  $a_{k_0k_1} = 3 \neq 0$  i  $a_{k_1k_2} = -2 \neq 0$ . Dakle, vektor  $x$  je majorirajući vektor matrice  $A$ .  $\square$

**Definicija 3.1.8** Matrica  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  je  $L_0$ -matrica ako su njeni vandijagonalni elementi nepozitivni.

**Definicija 3.1.9** Matrica  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  je  $L$ -matrica ako je  $L_0$ -matrica i ako su elementi njene glavne dijagonale pozitivni.

**Definicija 3.1.10** Matrica  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  se naziva  $M$ -matrica ako i samo ako je inverzno monotona  $L_0$ -matrica.

Sledeća teorema pokazuje pod kojim uslovima je neka  $L_0$ -matrica inverzno monotona matrica, tj.  $M$ -matrica.

**Teorema 3.1.2 (M-kriterijum)** [17] Neka za matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$  važi

$$a_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \tau.$$

Tada je  $A$  inverzno monotona matrica ako i samo ako ima majorirajući vektor.

## 3.2 Odabrane definicije i teoreme iz analize

U ovom odeljku ćemo najpre navesti teoremu srednje vrednosti. Potom slede definicije esencijalnog supremuma, nosača funkcije i bilinearne forme. Zatim ćemo govoriti o Helderovim, normiranim i pred-Hilbertovim prostorima.

**Teorema 3.2.1 (Teorema srednje vrednosti)** *Ako je funkcija  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna na  $[a, b]$  i diferencijabilna na  $(a, b)$ , onda postoji  $t \in (a, b)$  takvo da je*

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

**Definicija 3.2.1** *Neka je  $(X, \Sigma, \mu)$  merljiv prostor i neka je  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $a$  je esencijalno gornje ograničenje za  $f$  ako je skup  $\{x \in X : f(x) > a\}$  skup mere nula, to jest ako je  $f(x) \leq a$  za skoro sve  $x \in X$ . Esencijalni supremum je najmanje esencijalno gornje ograničenje, to jest*

$$\text{esssup } f = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\}) = 0\}.$$

**Definicija 3.2.2** *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  i neka je  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Nosač funkcije  $u$  je*

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

**Definicija 3.2.3** *Bilinearna forma,  $a(\cdot, \cdot)$ , na vektorskom prostoru  $X$  je preslikavanje  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  takvo da su preslikavanja  $x \mapsto a(x, y)$  i  $y \mapsto a(x, y)$  linearne forme na  $X$ .*

### 3.2.1 Helderovi prostori

**Definicija 3.2.4** *Funkcija  $f$  je Lipschitz neprekidna na  $\Omega$  ako postoji realna konstanta  $K \geq 0$  takva da za sve  $x_1, x_2 \in \Omega$  važi*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K \|x_1 - x_2\|.$$

*Najmanja takva konstanta, u oznaci  $\text{Lip}(f)$  se naziva Lipschitzova konstanta.*

**Definicija 3.2.5** *Funkcija  $f$  je Helder neprekidna na  $\Omega$  ako za sve  $x_1, x_2 \in \Omega$  važi*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K \|x_1 - x_2\|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad K > 0.$$

U prethodnim definicijama je  $\|\cdot\|$  Euklidova norma.

Helderov prostor  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  je potprostor prostora  $C(\bar{\Omega})$  i sastoji se od Helder neprekidnih funkcija sa stepenom  $\alpha$ . Za  $\alpha = 1$ , Helderov prostor  $C^{0,1}(\bar{\Omega})$  se sastoji od Lipšic neprekidnih funkcija.

Prostor  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  je Banahov prostor.

### 3.2.2 Normirani prostori

**Definicija 3.2.6** Neka je  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Preslikavanje  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  je norma na  $X$  ako važi

$$(N1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ i sve } x \in X,$$

$$(N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ za sve } x, y \in X.$$

Uređen par  $(X, \|\cdot\|)$  se naziva normiran prostor.

**Definicija 3.2.7** Neka je  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Preslikavanje  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  je seminorma na  $X$  ako važi

$$(N1) \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$(N2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ i sve } x \in X,$$

$$(N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ za sve } x, y \in X.$$

**Definicija 3.2.8** Kompletan normiran prostor  $(X, \|\cdot\|)$  se naziva Banahov prostor, tj. Banahov prostor je normiran prostor u kome je svaki Košijev niz konvergentan.

### 3.2.3 Prostori sa skalarnim proizvodom

**Definicija 3.2.9** *Neka je  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Preslikavanje  $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  sa sledećim osobinama*

$$(S1) \quad (x, x) \geq 0 \text{ za sve } x \in X,$$

$$(S2) \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(S3) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \text{ za sve } x, y, z \in X,$$

$$(S4) \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ i sve } x, y \in X,$$

$$(S5) \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \text{ za sve } x, y \in X,$$

se naziva skalarni proizvod. Uređen par  $(X, (\cdot, \cdot))$  se naziva prostor sa skalarnim proizvodom ili pred-Hilbertov prostor ili unitaran prostor.

**Lema 3.2.1** *Sa  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  je definisana norma na pred-Hilbertovom prostoru  $(X, (\cdot, \cdot))$*

**Definicija 3.2.10** *Kompletan pred-Hilbertov prostor  $(X, (\cdot, \cdot))$  se naziva Hilbertov prostor.*

## 3.3 Odabrane definicije i teoreme iz numeričke matematike

### 3.3.1 Ocene diskretnih funkcija Grina

Diskretne funkcije Grina smo definisali u Odeljku 2.1 i koristili smo ih prilikom ocene greške postupka tipa SDFEM. Sada ćemo navesti lemu koju smo koristili za dokaz Leme 2.9.1. Neke osobine funkcija Grina, kao i lema koja sledi, se mogu pronaći u [2].

**Lema 3.3.1** *Neka su zadovoljeni uslovi*

$$p_i \geq p > 0, \quad q_i \geq 0, \quad r_i \geq r > 0.$$

*Tada je*

$$0 \leq G(x_i, \xi_j) \leq r^{-1}$$

*i*

$$\sum_{i=1}^N |G(x_i, \xi_j)| h_i \leq 2/r.$$





# Prilog A

## Pregled oznaka

### A.1 Skupovi, prostori i norme

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{N}_0$	skup nenegativnih celih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{R}^+$	skup realnih pozitivnih brojeva
$\mathbb{R}^n$	vektorski prostor uređenih $n$ -torki nad poljem $\mathbb{R}$
$\Omega, \bar{\Omega}$	otvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ i njegovo zatvorenje
$\partial\Omega$	rub oblasti $\Omega$
$C^k(\bar{\Omega})$	prostor realnih i $k$ -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na $\bar{\Omega}$
$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$	prostor realnih i $k$ -puta $\alpha$ -Helder-neprekidno diferencijabilnih funkcija na $\bar{\Omega}$
$C_0^k(\Omega)$	prostor realnih i $k$ -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem
$C_0^\infty(\Omega)$	prostor realnih beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u $\Omega$
$L^p(\Omega), \ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$	prostor merljivih funkcija $u$ definisanih na $\Omega$ takvih da je $\int_\Omega  u(x) ^p dx < \infty$ , $p \in [1, \infty)$ , i odgovarajuća norma
$L^\infty(\Omega), \ \cdot\ _{L^\infty(\Omega)}$	prostor merljivih i esencijalno ograničenih funkcija na $\Omega$ i odgovarajuća norma
$L_{loc}^p(\Omega)$	prostor $p$ -lokalno integrabilnih funkcija na $\Omega$ , $p \in [1, \infty)$

$W^{k,p}(\Omega)$	prostor Soboljeva
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(\Omega)},  \cdot _{W^{k,p}(\Omega)}$	norma i seminorma na $W^{k,p}(\Omega)$
$H^k(\Omega)$	prostor Soboljeva $W^{k,2}(\Omega)$
$(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}, (\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)}$	skalarni proizvodi na $L^2(\Omega)$ i $H^k(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	prostor Soboljeva funkcija iz $H^1(\Omega)$ sa $u(x) = 0$ , $x \in \partial\Omega$
$\mathbb{P}_k(\kappa)$	prostor polinoma najvišeg stepena $k$ definisanih na skupu $\kappa$
$\mathbb{Q}_k(\kappa)$	prostor polinoma definisan u pododeljku 1.4.2
$(V, \ \cdot\ _V), (U, \ \cdot\ _U)$	proizvoljni realni Hilbertovi prostori
$V_h$	prostor konačnih elemenata
$(\cdot, \cdot)_{V_h}, \ \cdot\ _{V_h}$	skalarni proizvod i norma na $V_h$
$V + V_h$	prostor funkcija oblika $v + v_h$ , $v \in V$ , $v_h \in V_h$
$P$	linearni operator $P : V \rightarrow V_h$
$\ \cdot\ _\varepsilon$	$\varepsilon$ -težinska norma

## A.2 Operatori

$\mathcal{L}$	linearni operator iz (2.1), (2.13)
$\mathcal{L}^N$	diferencni operatori iz (2.27), (2.44)
$\Delta$	Laplasov operator
$D^\alpha$	uopšteni izvod funkcije reda $\alpha$
$[g](d)$	skok funkcije $g$ u tački $d$ , $d \in \Omega$
$\partial_x u, \frac{\partial u}{\partial x}$	parcijalni izvod prvog reda funkcije $u$
$\partial_{xy} u, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	parcijalni izvod drugog reda funkcije $u$
$\text{esssup}_{x \in \Omega}  u(x) $	esencijalni supremum za $ u $ na $\Omega$
$D^+, D^-$	diferencni operator prvog reda
$u _\kappa$	restrikcija funkcije $u$ na skup $\kappa$
$A^{-1}$	inverzna matrica za matricu $A$
$A^T$	transponovana matrica za matricu $A$

## A.3 Funkcije

$u$	rešenje konturnog problema
$b$	koeficijent konvekcije

$c$	koeficijent reakcije
$f$	desna strana (izvor) diferencijalne jednačine
$\delta_d$	Dirakova funkcija u $d$ , $d \in \Omega$
$\lambda^j$	diskretna Grinova funkcija
$G$	Grinova funkcija
$S$	regularna komponenta rešenja
$E$	slojna komponenta rešenja
$a(\cdot, \cdot), a_h(\cdot, \cdot)$	bilinearne forme
$l(\cdot), l_h(\cdot)$	linearna funkcionala
$[x]$	najveći ceo broj koji je manji ili jednak od $x$

## A.4 Parametri i funkcije diskretizacije

$\mathcal{T}, \mathcal{T}_h$	triangulacija domena $\Omega$
$\Omega^N$	mreža diskretizacije sa $(N + 1)^n$ tačaka za domena $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$\Omega_c$	regularni deo domena $\Omega$
$\Omega_f$	slojni deo domena $\Omega$
$\kappa, \kappa^o$	element triangulacije $\mathcal{T}$ i njegova unutrašnjost
$h_i$	lokalni korak mreže
$\bar{h}_i$	$\bar{h} = (h_i + h_{i+1})/2$
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$	parametri tranzicionih tačaka mreže Šiškinovog tipa
$\tau$	parametar u izrazu $\lambda$
$(\kappa, P_\kappa, \Sigma_\kappa)$	konačni element
$(\hat{\kappa}, P_{\hat{\kappa}}, \Sigma_{\hat{\kappa}})$	referencni element
$u_h$	numeričko rešenje za $u$
$u^I$	interpolaciona funkcija za $u$
$\eta$	greška interpolacije $u - u^I$
$\chi$	razlika između $u^I$ i $u_h$
$\varphi_i$	bazne funkcije konačnodimenzionalnog prostora $V_h$
$\phi_i$	generativne funkcije mreže Šiškinovog tipa
$\psi_i$	funkcije karakterizacije mreže Šiškinovog tipa
$u_i$	vrednost funkcije $u$ u tački mreže $x_i$
$E^N$	maksimalna greška u tačkama mreže
$p^N$	numerički red konvergencije

$p_S^N$ 

Šiškinov red konvergencije

## A.5 Parametri i konstante

$\varepsilon$	singularno perturbovani parametar
$N$	parametar mreže
$\alpha$	konstanta koercitivnosti bilinearne forme
$M_a, M_{a_h}$	konstante neprekidnosti bilinearne forme $a, a_h$
$M_l, M_{l_h}$	konstante neprekidnosti linearne funkcionele $l, l_h$
$\beta$	donja granica funkcije $b$
$\gamma$	donja granica funkcije $c$
$d$	tačka prekida
$\delta_k$	parametar stabilizacije postupka tipa SDFEM
$\delta_{ij}$	Kronekerov simbol
$C$	konstanta nezavisna od $\varepsilon$ i $N$

## A.6 Ostale oznake

■	kraj dokaza
◇	kraj napomene
□	kraj primera

# Prilog B

## *Mathematica* programi

U ovom prilogu ćemo predstaviti neke programe i naredbe koje su korišćene za rešavanje numeričkih eksperimenata u radu. Svi programi su urađeni uz pomoć programskog paketa *Mathematica*.

### B.1 Program za rešavanje sistema $Ax = v$ LU-dekompozicijom

Sledeći program rešava sistem  $Ax = v$  LU-dekompozicijom, gde je matrica  $A$  tridijagonalna i predstavljena je elementima ispod, na i iznad glavne dijagonale. Ovaj program je preuzet iz [19].

```
TriLUSolve[{a_List, b_List, c_List}, v_List] :=  
  Module[{i, j, l, u, f, x, n = Length[b]},  
    (*LU dekompozicija*)  
    l = {};  
    u = {b[[1]]};  
    Do[  
      u = Append[u, b[[i]] - c[[i-1]]a[[i-1]]/u[[i-1]]];  
      l = Append[l, a[[i-1]]/u[[i-1]], {i, 2, n}];  
      (*resavanje LU sistema*)  
      f = {v[[1]]};  
      Do[f = Append[f, v[[i]]-l[[i-1]]f[[i-1]]], {i, 2, n}];
```

```

x = {f[[n]]/u[[n]]};
Do[x = Prepend[x, (f[[i]]-c[[i]]x[[1]])/u[[i]]],
  {i, n-1, 1, -1}];
x
]

```

## B.2 Šiškinova mreža

Program `Shishkin` se koristi za generisanje Šiškinove mreže za slojeve sa leve strane tačaka  $d$  i 1.

```

Shishkin[n_, ε_, τ_, β_, d_] :=
Module[{λ, ψ1, ψ2, φ1, φ2, s},
  λ = Min[d/2, (1-d)/2, τ * ε * Log[n]/β];
  ψ1[s_] := Exp[-2 (1 - 2s) Log[n]];
  ψ2[s_] := Exp[-4 (1 - s) Log[n]];
  φ1[s_] := -Log[ψ1[s]];
  φ2[s_] := -Log[ψ2[s]];
  Join[
    Table[4 (d - λ) i/n, {i, 0, n/4}],
    Table[d - τ * ε * φ1[i/n]/β, {i, n/4 + 1, n/2}],
    Table[d + 4 (1 - d - λ)(i/n - 1/2), {i, n/2 + 1, 3n/4}],
    Table[1 - τ * ε * φ2[i/n]/β, {i, 3n/4 + 1, n}]
  ] // N
];

```

## B.3 Bahvalov-Šiškinova mreža

Za generisanje Bahvalov-Šiškinove mreže za slojeve sa leve strane tačaka  $d$  i 1 koristi se program `BS`.

```

BS[n_, ε_, τ_, β_, d_] :=
Module[{λ, ψ1, ψ2, φ1, φ2, s},
  λ = Min[d/2, (1-d)/2, τ * ε * Log[n]/β];
  ψ1[s_] := 1 - 2 (1 - n^(-1)) (1 - 2s);

```

```

ψ2[s_] := 1 - 4 (1 - n(-1)) (1 - s);
φ1[s_] := -Log[ψ1[s]];
φ2[s_] := -Log[ψ2[s]];
Join[
  Table[4 (d - λ) i/n, {i, 0, n/4}],
  Table[d - τ * ε * φ1[i/n]/β, {i, n/4 + 1, n/2}],
  Table[d + 4 (1 - d - λ)(i/n - 1/2), {i, n/2 + 1, 3n/4}],
  Table[1 - τ * ε * φ2[i/n]/β, {i, 3n/4 + 1, n}]
] // N
];

```

## B.4 Modifikovana Bahvalov-Šiškinova mreža

Program `mBS` se koristi za generisanje modifikovane Bahvalov-Šiškinove mreže za slojeve sa leve strane tačkaka  $d$  i 1.

```

mBS[n_, ε_, τ_, β_, d_] :=
Module[{λ, q, ψ1, ψ2, φ1, φ2, s},
  λ = Min[d/2, (1-d)/2, τ * ε * Log[n]/β];
  q = 1/2 + 1/2Log[n];
  ψ1[s_] := Exp[-(1 - 2s)/(q - 1 + 2s)];
  ψ2[s_] := Exp[-2 (1 - s)/(q - 2 + 2s)];
  φ1[s_] := -Log[ψ1[s]];
  φ2[s_] := -Log[ψ2[s]];
  Join[
    Table[4 (d - λ)i/n, {i, 0, n/4}],
    Table[d - τ * ε * φ1[i/n]/β, {i, n/4 + 1, n/2}],
    Table[d + 4 (1 - d - λ)(i/n - 1/2), {i, n/2 + 1, 3n/4}],
    Table[1 - τ * ε * φ2[i/n]/β, {i, 3n/4 + 1, n}]
  ] // N
];

```

## B.5 Test problem 5

U ovom odeljku ćemo navesti program koji je korišćen za rešavanje test problema 5 na Šiškinovoj mreži. Ovaj program se može koristiti i za ostale test

probleme, ali se može i prilagoditi svakom problemu.

```

FEMsd[b_,f_,x_,es_,{n_,ε_,τ_,β_,d_}] :=
Module[{mreza, h, u, v, w, r, i},
  mreza = Shishkin[n, ε, τ, β, d];
  h = Table[mreza[[i+1]]-mreza[[i]], {i, n}];
  δ[i_] := If[ h[[i]] ≤ 2ε/es, 0, NIntegrate[
    b[x](mreza[[i+1]] - x), {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}
    * (NIntegrate[b[x]^2, {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]})
    ^(-1)];
  u = Table[-ε/h[[i]] - (1/h[[i]]^2) * NIntegrate[
    b[x](x - mreza[[i]]), {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] -
    (δ[[i]]/h[[i]]^2) * NIntegrate[b[x]^2, {x, mreza[[i]],
    mreza[[i+1]]}], {i, 2, n-1}];
  v = Table[ε/h[[i]] + ε/h[[i+1]]+(1/h[[i]]^2) * NIntegrate
    [b[x](x - mreza[[i]]), {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}]
    - (1/h[[i+1]]^2) * NIntegrate[b[x](mreza[[i+2]] - x),
    {x, mreza[[i+1]], mreza[[i+2]]}] + (δ[[i]]/h[[i]]^2)
    * NIntegrate[b[x]^2, {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] +
    (δ[[i+1]]/h[[i+1]]^2) * NIntegrate[b[x]^2, {x,
    mreza[[i+1]], mreza[[i+2]]}], {i, n-1}];
  w = Table[-ε/h[[i+1]]+(1/h[[i+1]]^2) * NIntegrate[
    b[x](mreza[[i+2]] - x), {x, mreza[[i+1]],
    mreza[[i+2]]}] - (δ[[i+1]]/h[[i+1]]^2) * NIntegrate[
    b[x]^2, {x, mreza[[i+1]], mreza[[i+2]]}], {i, n-2}];
  r = Table[(1/h[[i]]) * NIntegrate[f[x](x - mreza[[i]]),
    {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] + (1/h[[i+1]]) *
    NIntegrate[f[x](mreza[[i+2]] - x), {x, mreza[[i+1]],
    mreza[[i+2]]}] + (δ[[i]]/h[[i]]) * NIntegrate[
    b[x]f[x], {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] -
    (δ[[i+1]]/h[[i+1]]) * NIntegrate[b[x]f[x],
    {x, mreza[[i+1]], mreza[[i+2]]}], {i, 1, n-1}];
  Join[{0}, TriLUSolve[{u, v, w}, r], {0}]];

```



# Zaključak

U ovom radu predstavljani su postupci konačnih elemenata za numeričko rešavanje singularno perturbovanih problema. Kao model za upoznavanje sa ovim postupcima korišćena je eliptična parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

Glavni deo rada posvećen je jednodimenzionalnom problemu konvekcije-difuzije sa izvorom koji ima prekid u unutrašnjoj tački  $d$  domena. Koefficient difuzije ima prekid u istoj tački. Kod takvog problema se javljaju dva sloja, unutrašnji u okolini tačke  $d$  i granični u tački  $x = 1$ . Predstavljen je standardni postupak Galerkina za rešavanje takvog problema. Međutim, numerički eksperiment je pokazao da taj postupak produkuje oscilatorna numerička rešenja, čak i u slučaju slojno-adaptivnih mreža. Da bi se izbegle oscilacije, koje su direktna posledica nestabilnosti pomenutog postupka, koristi se postupak tipa SDFEM. Za SDFEM postupak pokazana je  $\varepsilon$ -uniformna konvergencija drugog reda na slojno-adaptivnim mrežama. Numerički eksperimenti su potvrdili dobijeni rezultat.

Kod problema koji je razmatran u ovom radu koefficient reakcije  $c$  je jednak nuli. Ipak SDFEM postupak se može uopštiti i na problem

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + bu' + cu = f & \text{u } \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ |[b](d)| \leq C, \quad |[f](d)| \leq C, \end{cases}$$

gde je

- a)  $c$  glatka funkcija,

b)  $|[c](d)| \leq C$ .

Takođe, mogu se posmatrati i problemi koji imaju više od jednog unutrašnjeg sloja. Za takve probleme treba prilagoditi slojno-adaptivnu mrežu većem broju unutrašnjih slojeva.

# Literatura

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Inc., 1987
- [2] V. B. Andreev. *A priori estimates for solutions of monotone three-point difference schemes*. Preprint Lomonosov State University, 2001.
- [3] K. Atkinson and W. Han. *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*. Volume 39 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Inc., 2001.
- [4] O. Axelsson, V. A. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. SIAM Philadelphia, 2001.
- [5] S. C. Brenner, L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1994.
- [6] P. G. Ciarlet. *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, editors, Volume II of *Handbook of Numerical Analysis. Finite Element Methods (Part 1)*, pages 17-352, Elsevier Science Publ., North-Holland, 1991
- [7] R. W. Clough. *The finite element method in plane stress analysis*. Proceedings of Second ASCE Conference on Electronic Computation, Vol. 8, pages 345-378. Pittsburg, Pennsylvania, 1960.
- [8] R. Courant. *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. 49: 1-23, 1943.
- [9] P. A. Farrell, A. F. Hegarty, J. J. H. Miller, E. O'Riordan, G. I. Shishkin. *Robust Computational Techniques for Boundary Layers*. Chapman & Hall, London, 2000.

- [10] P. A. Farrell, A. F. Hegarty, J. J. H. Miller, E. O'Riordan, G. I. Shishkin. *Singularly perturbed convection-diffusion problems with boundary and weak interior layers*. Journal of Computational and Applied Mathematics 166 (2004) 133-151
- [11] C. Grossmann, H.-G. Roos, M. Stynes. *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [12] T. J. R. Hughes and A. Brooks. *A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*. In T. J. R. Hughes, editor, *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, pages 19-35, ASME, New York, 1979.
- [13] S. Larsson, V. Thomée. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Volume 45 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [14] T. Linß. *An upwind difference scheme on a novel Shishkin-type for a linear convection-diffusion problem*. J. Comp. Appl. Math., 110: 93-104, 1999.
- [15] T. Linß. *Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems*. Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden, Habilitationsschrift, 2006.
- [16] J. T. Oden. *Finite Elements: An Introduction*. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, editors, Volume II of *Handbook of Numerical Analysis. Finite Element Methods (Part 1)*, pages 3-16, Elsevier Science Publ., North-Holland, 1991
- [17] Z. Stojaković, D. Herceg. *Numeričke metode linearne algebre*. Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [18] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection - Diffusion and Flow Problems*. Springer, New York, 1996.
- [19] K. Surla, Đ. Herceg, S. Rapajić. *Mathematica za fizičare i hemičare*. Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

- [20] E. Süli. *An Introduction to the Numerical Analysis of Partial Differential Equations*. University of Oxford, 2005.
- [21] E. Süli. *Finite Element Methods for Partial Differential Equations*. University of Oxford, 2007.
- [22] V. Thomée. *From finite differences to finite elements. A short history of numerical analysis of partial differential equations*. J. Comp. Appl. Math., 128: 1-54, 2001
- [23] K. Yosida. *Functional Analysis*. Sixth Edition of *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [24] H. Zarin. *Postupci konačnih elemenata za singularno perturbovane probleme i prekidi*. Doktorska disertacija. Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, Novi Sad, 2003.
- [25] M. Zlamal: *On the finite element method*. Numerische Mathematik, 12: 394-402, 1968.



# Biografija



Rođena sam 8. avgusta 1984. godine u Vlasenici. Osnovnu školu "Braća Jakšić" završila sam u Milićima sa odličnim uspehom. Potom sam upisala opštu gimnaziju u Milićima i maturirala sam 2003. godine.

Na Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer diplomirani matematičar - profesor matematike, upisala sam se 2003. godine i diplomirala sam 28. septembra 2007. godine sa prosečnom ocenom 9.79. Tema diplomskog rada bila je "O numeričkom rešavanju jedne klase konturnih problema". Nakon završetka osnovnih studija upisala sam master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer matematika. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija.

Kao stipendista fondacije ÖAD (Österreichischer Austauschdienst) u periodu oktobar 2008. - februar 2009. boravila sam na Institutu za matematiku, Univerzitet u Beču.

Novi Sad, 10. maj 2009. godine

Snežana Gordić

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

**TZ**

Vrsta rada: Master rad

**VR**

Autor: Snežana Gordić

**AU**

Mentor: Prof. dr Helena Zarin

**MN**

Naslov rada: Numeričko rešavanje singularno perturbovanih konturnih problema sa prekidima

**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)

**JP**

Jezik izvoda: s / e

**JI**

Zemlja publikovanja: Srbija

**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina



**UGP**

Godina: 2009

**GO**

Izdavač: Autorski reprint

**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

**MA**

Fizički opis rada: (3, 110, 25, 20, 14, 0, 2)

**FO**

Naučna oblast: Matematika

**NO**

Naučna disciplina: Numerička matematika

**ND**

Predmetna odrednica/Ključne reči: singularne perturbacije, granični sloj, unutrašnji sloj, postupak konačnih elemenata, standardni postupak Galerkina, "streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata, slojno-adaptivna mreža, uniformna konvergencija

**PO****UDK:**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

**ČU**

Važna napomena:

**VN**

Izvod:

**IZ**

U tezi se istražuju primene postupaka konačnih elemenata i slojno-adaptivnih mreža radi poboljšanja tačnosti približnih rešenja određenih singularno perturbovanih problema.

Ispituje se jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije sa unutrašnjim slojevima koji su nastali zbog prekidnih polaznih funkcija. Standardni postupak Galerkina generiše oscilatorna numerička rešenja. Da bi se izbegle oscilacije koje su direkta posledica nestabilnosti pomenutog postupka, koristi se "streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata (SDFEM). Za postupak tipa SDFEM pokazuje se  $\varepsilon$ -uniformna konvergencija drugog reda na slojno-adaptivnoj mreži Šiškinovog tipa.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 7. juli 2009.

**DP**

Datum odbrane:

**DO**

Članovi komisije:

**KO**

- Predsednik: dr Katarina Surla, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet u Novom Sadu
- Član: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet u Novom Sadu
- Član: dr Helena Zarin, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: Monograph type

**DT**

Type of record: Printed text

**TR**

Contents Code: Master's thesis

**CC**

Author: Snežana Gordić

**AU**

Mentor: Helena Zarin, Ph.D.

**MN**

Title: Numerical solving of singularly perturbed boundary value problems with discontinuities

**TI**

Language of text: Serbian

**LT**

Language of abstract: English

**LA**

Country of publication: Serbia

**CP**

Locality of publication: Vojvodina

**LP**

Publication year: 2009

**PY**

Publisher: Author's reprint

**PU**

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

**PP**

Physical description: (3, 110, 25, 20, 14, 0, 2)

**PD**

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Numerical mathematics

**SD**

Subject/Key words: singular perturbation, boundary layer, interior layer, finite element method, standard Galerkin method, streamline diffusion finite element method, layer-adapted mesh, uniform convergence

**SKW**

**UC:**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

**HD**

Note:

**N**

Abstract:

**AB**

The thesis mainly explores applications of the finite element methods and layer-adapted meshes to improve the accuracy of approximate solutions of certain singular perturbation problems.

One-dimensional convection-diffusion problem with interior layers caused from discontinuous data are considered. Standard Galerkin finite element methods generate oscillations in the numerical solutions. We use streamline-diffusion finite element methods (SDFEM) in order to avoid oscillations which are the direct outcome of instability of the standard Galerkin finite element methods. For the SDFEM is established  $\varepsilon$ -uniform convergence of the second order on the layer-adapted mesh of Shishkin-type.

Accepted by the Scientific Board on: 7<sup>th</sup> July 2009

**ASB**

Defended:

**DE**

Thesis defend board:

**DB**

- President: Dr. Katarina Surla, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
- Member: Dr. Dragoslav Herceg, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
- Member: Dr. Helena Zarin, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,