UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Omalkhaer Salem Elmabruk Bleblou

Numerical Inverse Laplace Transform

- master thesis -

Novi Sad, 2011.

Ovaj rad prikazuje numerički metod za pronalaženje inverzne Laplasove transformacije zasnovane na deformaciji Bromvičeve konture koja daje dobru aproksimaciju u razmatranom numeričkom primeru.

Prvo poglavlje

Uvod

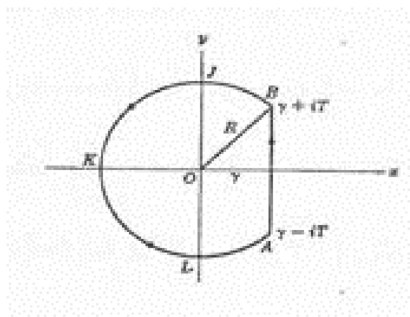
Laplasova transformacija je jednaka transformaciji integrala, koju je formulisao francuski matematičar Pjer Simon Laplas (1749-1825) a kasnije doradjena od strane britanskog fizičara Olivera Hevisajda (1850-1925). Godine 1785. Laplas je počeo sa primenom ove transformacije koja je kasnije postala snažno orudje u istraživanju diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Metod se sastoji u transformaciji složne diferencijalne jednačine u prostu algebarsku jednačinu, za koju je mnogo lakše naći rešenje. Zatim, inverzna Laplasova transformacija se koristi da bi se povratilo prvobitno rešenje složene diferencijalne jednačine.Činjenica da je Laplasova transformacija definisana u polu-beskonačnom intervalu (0, ∞) ukazuje na čestu upotrebu u oblastima početnih vrednosti koje su u vezi sa regularnim diferencijalnim jednačinama. Štaviše, Laplasova transformacija se koristi u rešavanju problema početnih i graničnih vrednosti koje su u vezi sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama, posebno kada se radi o polu-beskonačnom vremenu ili dimenzionalne promenljive kao u slučaju jednačine toplote.

Laplasova transformacija za *f* (t) obeležena simbolom L{*f* (t)} ili *F*(s) se definiše kao:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s) = L\{f(t)\} \qquad (1-1)$$

U paragrafu 2-2-2 ćemo pokazati da ako je *f* neprekidna u svakom ogranicenom intervalu $0 \le t \le N$ i poseduje eksponencijalni stepen *y* za ($\left(\left| f(t) \le Me^{2yt} \right|\right)$ $t > N$ što znači da Laplasova transformacija *F*(s) postoji za svaku *Res>y*. Neposredna formula za pronalaženje inverzne Laplasove transformacije je sledeća:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds, \qquad t > 0 \qquad (2-1)$$



(1) Forma

Zatvorena putanja *C* se sastoji od pravog segmenta L (koji počinje od *y-i*τ i završava se u *y+i*τ) i putanje C_R koji predstavlja luk od kruga ,čija je pozicija centar kruga i njegov radijus *R*. Integral postoji na pravoj *s=y* u kompleksnoj ravni *s*. Realan broj *y* je smešten sa desne strane svih singulariteta funkcije *F(s)*.

Formula (2-1) je poznata kao složena inverzna formula ili Bromvičev integral, Furije-Melin integral, ili Melinova inverzna formula.

Veliki problem u primeni Laplasove transformacije leži u teškoći pronalaženja inverzne, osim malog broja funkcija gde je moguće primeniti teoremu ostatka.

Nije moguće pronaći vrednost integrala (2-1) u zatvorenom obliku. Stoga je neophodna upotreba raznih metoda. Postoji veliki broj algoritama koji se koriste u proračunu Laplasove inverze i oni se mogu razvrstati u četiri grupe: (1) algoritmi objavljeni u Furijevom nizu (2) algoritmi objavljeni u Legerovim polinomima (3)uzastopna upotreba Džefovih funkcija (4) deformacija Bromvičeve putanje, koja je takodje jedna od važnijih tema u ovom radu. Štaviše, Tabatov rad se smatra za jedan od početničkih radova u ovom polju (9). Milovanović i Svitković su koristili konturu u obliku polu-linije postavljene na najvisi deo kompleksne ravni . U ovom radu, prikazaćemo brojne korisne metode u pronalaženju inverzne Laplasove transformacije. Ovi metodi su zasnovani na modifikaciji Bromvičeve putanje (10) i organizovani na odgovarajući način.

U drugom poglavlju prikazaćemo pozadinu istraživanja koje će biti detaljno predstavljeno u trećem poglavlju.

U paragrafu 1-2 prikazaćemo pregled nekih osnovnih definicija i rezultata dobijenih iz teorija diferencijalnih jednačina. Štaviše, ispitaćemo pojam oblasti i putanja u kompleksnoj ravni, kao i analitičke funkcije i krivolinijski integral. Dodatno, diskutovaćemo o izolovanim singularitetima i teoremi ostatka.

U paragrafu 2-2 prikazaćemo osnovni pojam Laplasove transformacije i inverzne Laplasove transformacije. Počećemo ovaj paragraf sa abstrakcijom Furijevih integrala, zbog potrebe za zasnivanjem složene inverzne formule koja će biti praćena sa pregledom osnovnih osobina Laplasove transformacije. U dodatku, definicija Laplasove inverzne formule će biti predstavljena zajedno sa metodima koji su korišćeni za njeno zasnivanje. Sve ovo je praćeno tabelom Laplasove transformacije sa parcijalnim razlomcima i složenom inverznom formulom.

U paragrafu 3-2 prikazaćemo rezime Gausove kvadratne formule koja je korišćena u trećem poglavlju. Posle toga, prikazaćemo Gaus-Legendre kvadratnu formulu zajedno sa delom koji uključuje Legendreove polinome,Gaus-Legere formulu i deo o Legereovim polinomima.

Treće poglavlje je posvećeno objašnjenju numeričke metode koja će biti korišćena za proračun vrednosti integrala u formuli (2-1). Ovaj metod je zasnovan na zameni ravne putanje u formuli (2-1), kao što smo ustanovili u paragrafu 1-3.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds = \frac{e^{st}}{\pi i}\left\{Re\int_{0}^{a} e^{-st}F\left(\sigma+\frac{iu}{t}-\frac{u}{t}\right)du\right\} \qquad (3-1)$$

Za svako: $a > Kt,\ t > 0,\ \sigma > \sigma_0$

Formula (3-1), po svojoj ulozi, nagoveštava da je upotreba Gausove kvadratne formule pogodna za dva integrala koja se javljaju u formuli. U ovom trenutku, primena Gaus-Legere formule je moguća. Da bi brze konvergiralo, najčešće je interval prvog integrala podeljen na brojne podintervale.

Zatim, Gaus- Legendre formula je upotrebljena na svaki od ovih podintervala

U paragrafu 2-3 koristimo funkciju:

$$F(s) = \frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)\,(s+3)}$$

da bismo primenili algoritme objašnjene u paragrafu 1-3 i da bismo uporedili dobijene rezultate inverzije u sledecoj funkciji:

$$f(t) = 6e^{-t} \;\; - 20e^{-2t} + 15e^{-3t}$$

Drugo poglavlje

Tematska pozadina

U ovom poglavlju izložićemo teme potrebne za treće poglavlje.Ovo uključuje pojmove kompleksne analize, Laplasove transformacije i numeričke analize.

1-2 – Pojmovi složene analize

U ovom paragrafu ćemo predstaviti rezime, nekoliko definicija i osnovnih rezultata dobijenih iz teoreme komleksnih funkcija. Prikazaćemo nekoliko od ovih rezultata bez dokazivanja, takodje ćemo ukazati na njihove izvore (6), (7) I (8) koji sadrže dokaze ovih rezultata.

1-1-2 – Oblasti i putanje u kompleksnoj ravni

C predstavlja kompleksnu ravan.

Ako $a \in C$ i $\varepsilon > 0$, onda skup $N(a, \varepsilon) = \{z: |z - a| < \varepsilon\}$ je u okolini tačke *a*.

Može se reći da je Ω podskup od C sadržan u otvorenom skupu C ako postoji okolina svake tačke iz Ω koja je sadržana u Ω. Možemo reći da je Ω zatvoren ako je njegov komplement $C \backslash \Omega$ otvoren skup.

Dva skupa Ω_1 i Ω_2 se smatraju odvojenim ako su ta dva skupa $G_1 \supseteq \Omega_1$ i $G_2 \supseteq \Omega_2$ tako da $G_1 \cap \Omega_2 = G_2 \cap \Omega_1 = \Phi$. Kažemo da je skup u vezi ako je nemoguće prikazati ga kao uniju dva odvojena skupa koja nisu prazna. Otvoren skup Ω je u vezi ako i samo ako je moguće povezati sve njegove tačke sa poligonalnom linijom koji se u potpunosti nalazi u Ω.Otvoren povezan skup se zove “sistem” (ili oblast).

Neprekidna funkcija (preslikavanje) $\gamma':[\ a,\ b\ ]\longrightarrow C$ se zove kriva i ako je ova kriva jednoznačno preslikavanje, zove se prosta kriva ili prost luk. Štaviše, ako je γ^{1} neprekidno, onda se zove glatka kriva. Ako je γ' (t)$\neq$0 za svako $t\in[a,b\ ]$ onda se zove regularna kriva.

Ako je moguće podeliti svaki interval $[a,b\ ]$ u beskonačan broj podintervala i ako γ neprekidna za sve podintervale i ako γ sadrzi i krajnje vrednosti svakog od tih podintervala, onda možemo reći da je γ neprekidno na celom intervalu $[a,b\ ]$.

Ako je γ' neprekidno u $[\ a,\ b\ ]$, onda se γ zove glatka kriva. Kažemo da je kriva zatvorena ako je γ (a) = γ (b).

Ako je γ jedina kriva u intervalu $[\ a,\ b\ ]$, zove se prosta zatvorena kriva.Ubuduce ćemo sa *y* podruzamevati da je to slika tog preslikavanja, tj kriva linija ili drugim rečima: $\gamma' = \{z : z = \gamma(t),\ t\in[\ a,\ b\ ]\}$ gde je $\gamma' \subseteq S \subseteq C$. Ako je *y* neprekidno u $[\ a,\ b\ ]$ zove se putanja u S. U stvari, postoje dva načina da se prikaže ovaj niz tačaka unutar γ. Štaviše, bilo koji od njih može biti naznačen odredjivanjem početne i (krajnje) tačke u γ.

Ako je jedan od nizova navedenih iznad primenljiv u $z=\gamma(t)$, $t\in[\ a,\ b\ ]$, onda je u $z=\gamma(-t)$, $t\in[\ -b,\ -a\ ]$ inverzni niz za γ primenljiv, gde je γ često obeležen simbolom $-\gamma$ koji je definisan Žordanovom teoremom krive. Ova teorema tvrdi da svaka prosta zatvorena putanja razdvaja ravan na dve oblasti, a znak koji se koristi za obe je γ. Jedna od oblasti je krajnja i zove se unutrašnja oblast i obeležena je simbolom *Int* γ. Druga je obeležena simbolom *Ext* γ i zove se spoljašnja oblast.

Kriva γ se smatra vektorom sa pozitivnim smerom ako je *Int* γ smešteno na severu, i ako je *Int* γ uzastopna za tačke γ' i počinje od početne tačke, osim ako se smatra da je vektor sa negativnim smerom .

Oblast G se smatra prostom kohezijom ako je moguće skupiti sve krive u G u jednu tačku u G bez prolaženja kroz tačke koje se ne nalaze u G, osim ako je G je složena kohezija.

2-1-2 – Analitičke funkcije i krivolinijski integral

Funkcija f : G $\longrightarrow$ C se smatra diferencijalnom funkcijom u tački $z_0 \in G$ ako je granica

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (1-1)$$

Teorema $[6\ ]$ **: (1)**

Za $f : G \longrightarrow C$ gde je *f (z) = (x, y) + iv (x, y)* kažemo da je *f* diferencijabilna za *z = x + iy* u G ako i samo ako su parcijalni izvodi u_x, u_y, v_x, v_y konstantni i ako ispunjavaju jednačine Koši i Riman $v_x = -u_y$ i $u_x = v_y$ u tački *z = x + iy*.

Može se reći da je funkcija *f* analitička za otvoreni skup *S*, ako je *f* diferencijabilna u svakoj tački u S. Takodje, funkcija *f* je analitička u tački z_0 ako je diferencijabilna u okolini tačke z_0. Ako *f* nije analitička u tački z_0, onda možemo reći da je z_0 izolovana tačka za funkciju *f*.

Zbir dva količnika od dve analitičke funkcije i takodje složene funkcije sastavljene od dve analitičke funkcije je analitička funkcija sa uslovom da imenilac mora da postoji pri deljenju.

Za $\gamma : [a,b] \longrightarrow C$ da bi bio putanja u G, I za $f : G \longrightarrow C$ da bi bila neprekidna funkcija u γ', možemo definisati integral *f* na konturi *y*:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\,\gamma'^{(t)}dt \qquad (2-1)$$

U slučaju da je kontura γ zatvorena kontura, ponekad možemo da koristimo simbol:

$\int_{\gamma} f(z)dz\, c$ umesto simbola $\oint_{\gamma} f(z)dz$

Za $f: G \to C$ da bi bila neprekidna funkcija. Kažemo da je F izvod suprotno funkciji *f* u *G* ako je F=*f u G*.

Teorema (2): [6]

Za *f: G* $\longrightarrow$ *C* da bi bila neprekidna funkcija i za F da bi bio izvod suprotno funkciji *f* u *G*, za svaku putanju $\gamma : [a,b] \longrightarrow G$ imamo $\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

U posebnom slučaju, ako je γ zatvorena putanja, onda:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \qquad (3-1)$$

Sledeća teorema je Koši teorema (ili Koši-Goursat teorema) i ova teorema je jedna od osnovnih teorema u teoriji kompleksnih funkcija.

Teorema (3): [7]

Ako je f analitička funkcija u oblasti prostog medju-uzajamnog odnosa D onda:

$$\oint_{c} f(z)dz = 0 \qquad (4-1)$$

Za svaku prostu zatvorenu krivu *C* njen vector ima pozitivan smer u *D.*

Rezultat ove teoreme je sledeći: ako je *D* oblast sa više medju-uzajamnih odnosa odredjenih sa krivama C_0, C_1, C_2 ...C_n i ako svaka od ovih krivi ima isti vektor onda je:

$$\int_{c_0} f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \cdots + \int_{c_n} f(z)dz \qquad (5-1)$$

Teorema (4): [6]

Ako je *f* analitička u oblasti *D* sadrži prostu zatvorenu krivu sa vektorom koji ima pozitivan smer $z \in N$ *(z, r)*$\subseteq$ *D, C,* tada:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad (6-1)$$

Ova formula je definisana sa formulom Koši integrala i može biti uopštena:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \qquad z \in N\,(z, r) \subseteq D \qquad (7-1)$$

Analitička funkcija u oblasti *G* može biti predstavljena sa jako konvergentnim nizom.

Teorema (5): [7]

Ako je f analitička u D, i $z \in D$, onda:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(a)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \qquad z \in N(z_0, r) \qquad (8-1)$$

Suprotno, ako je f napisano u ovom obliku za svako $z \in D$ onda bi f bilo analitičko u D.

3-1-2- Izolovani singulariteti i teorema Ostatka

Kažemo da je z_0 izolovan singularitet za funkciju f, ako je f analitička na $N\,(z_0, r) / \{z_0\}$.

Osnovno orudje korišteno u studiji ponašanja funkcije f u okolini izolovanog singulariteta z_0 ,objavio je Lorent za $f(z)$ i $z = z_0$.

Teorema (6): [9]

Ako je f analitička u prstenu $r_1 < |z - z_0| < r_2$, onda f može biti prikazana tako što će se koristiti samo jedna suma oblika:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r_1 < |z - z_0| < r_2 \qquad (9-1)$$

gde je:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \qquad (10-1)$$

I gde je C krug u prstenu $r_1 < |z - z_0| < r_2$ sa centrom u z_0.

Pretpostavljajući da je z_0 izolovan singularitet za funkciju f i formula:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Lorent je objavio uzimajući u obzir domen oko z_0. Kažemo da f poseduje uklonjive singularitete kod z_0 ako je $a_n = 0$ za svako $n<0$, i takodje poseduje osu u poziciji m kod z_0 ako je m najveći pozitivan ceo broj $a_m \neq 0$ i poseduje osnovne singularitete kod z_0 ako je $a_n \neq 0$ za beskonačni broj $n<0$. Prosta osa je osa locirana u I.

Ako je f analitička kod z_0, kažemo da je z_0 nula za funkciju f, i ako je $f(z)=(z- z_0)^m g(z_0)$ gde je g analitičko u z_0, I $g(z_0) \neq 0$. Ako je m=1 kažemo da je z_0 prosta nula. Primetimo da je z_0 osa u poziciji m za funkciju f ako i samo ako je z_0 nula iz pozicije m za funkciju $\frac{1}{f}$.

Pretpostavimo da je z_0 izolovan singularitet f i:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Laurentovo objavljivanje z_0.

Ostatak funkcije f u tački z_0 je definisana I zapisana kao Re*s* (f, z_0)jednako a_{-1}.

Za prostu osu: $Res\ (f, z_0) = \lim\ (z - z_0) f(z)$ I onda je $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ gde su g i h analitički u z_0 i h ima prostu nulu kod z_0 i onda je:

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \qquad (10 - 1 - 2)$$

Stoga ako je m locirano u f i predstavlja osu funkcije, generalno:

$$Re\ s(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - z_0)^n f(z)\} \qquad (11 - 1)$$

Teorema koja sledi se zove teorema Ostataka i veoma je korisna u u raznim primenama.

Teorema (7) : [8]

Ako je f analitička na prostoj zatvorenoj konturi i unutar proste zatvorene konture γ sa vektorom sa pozitivnim smerom, sa izuzetkom kada su izolovani singulariteti beskonačan broj $z_1, z_2 \ldots z_n$ onda se primenjuje sledeća formula:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re\, s(f, z_0) \qquad (12-1)$$

2-2 – Laplasova transformacija

U ovom odeljku prikazaćemo osnovne pojmove Laplasove transformacije i inverzne Laplasove transformacije.

Počećemo sa sažetkom Furijevog integrala, zbog potrebe da se dokaže složena formula refleksije.

1-2-2 – Furijevi integrali

Ako je f odredjena u intervalu $-l < t < l$ kažemo da je f jednaka funkcija u intervalu $-l < t < l$, i ako je $f(-t) = f(t)$ za svako t u intervalu $-l < t < l$, možemo reći da je f neparna funkcija u intervalu $-l < t < l$, ako je $f(-t) = -f(t)$ za svako t u intervalu $-l < t < l$.

Ako je f odredjena u intervalu $-\infty < t < \infty$,možemo reći da je f integrabilna u intervalu $-\infty < t < \infty$. Ako je $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$

Ako je f odredjena unutar intervala $-\infty < t < \infty$ možemo reći da je f periodična funkcija perioda T ako je $f(t + T) = f(t)$ za svaku vrednost t. Ako je f periodična funkcija unutar perioda T onda je:

Njen integral u bilo kom intervalu dužine *T* odgovara integralu bilo kog drugog drugog intervala dužine *T.*

Ako je *f* periodična funkcija u intervalu $-\infty < t < \infty$, onda je produžetak funkcije *f* periodična funkcija unutar svoje periode *2l* i odgovara *f* u intervalu $-\infty < t < \infty$.

Ako je *f* periodična funkcija sa periodom *2l* onda je niz:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n-1}^{n} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right) \qquad (1-2)$$

Gde je *n* = 0, 1, 2, 3,…

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-1}^{1} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \qquad (2-2)$$

n = 1, 2, 3,…

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \qquad (3-2)$$

Ove se naziva Furijev niz za funkciju *f,* i a_n i b_n se zovu Furijevi faktori za funkciju *f*.

Teorema (8) : [8]

Ako je *f* periodična funkcija sa svojim periodom *2l* i *f* je neprekidna na svakom odredjenom intervalu, onda je Furijev niz za funkciju *f* apsolutno konvergentan u svim singularitetima i njihovom zbiru. Vrednosti su *f* (*t*) za neprekidne tačke i $\frac{1}{2}\{f(t+) + f(t-)\}$ za tačke prekida.

Ako je *f* definisana unutar intervala *–l* < *t* < *l,* onda je prethodna teorema primenljiva na periodični produžetak u funkciji *f* i niz se pretvara u *f (t*) u intervalu *–l* < *t* < *l.*

Zamenjivanjem koeficijenata u nizu, dobijamo:

$$f(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-t)du$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-t)du \qquad (4-2)$$

I postavljanjem:

$\frac{\pi}{l} = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \delta\lambda_n$, $\frac{n\pi}{l} = \lambda_n$ postavljanjem $l \to \infty$ stvara sledeću jednačinu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-t)du\,d\lambda \qquad (5-2)$$

Ova formula se naziva Furijev integral. Pošto je *cos* $\lambda(u-t)$ jednaka funkcija može biti formulisana na sledeći način:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(u-t)dud\lambda \qquad (6-2)$$

Pošto je *sin* $\lambda(u-t)$ neparna funkcija u 6, onda formula takodje može biti formulisana kao:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{\lambda(u-t)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda \qquad (7-2)$$

Teorema (9): [6]

Funkcija je odredjena unutar intervala $-\infty < t < \infty$. Ako je f neprekidno u svakom odredjenom intervalu i potpuno je integrabilna u intervalu $-\infty < t < \infty$, onda je Furijeva integralna formula dokazana.

Kao u uslovu Furijevog niza *f (t)* je zamenjena sa $\frac{1}{2}\{f(t+) + f(t-)\}$ u tačkama prekida.

2-2-2 Laplasova transformacija

Funkcija *f* definisana unutar intervala $0 \leq t < \infty$. Ako postoje konstate $\gamma, N > 0, M > 0$ tako da je:

$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ za sve vrednosti *t.* Možemo reći da *f* ima eksponencijalni stepen γ kada $t \longrightarrow \infty$.

Funkcija *f* je definisana unutar intervala $0 \leq t < \infty$. Laplasova transformacija za *f* (*t*) koja je obeležena kao *F* (*s*) ili *L* {*f* (*t*)}, je definisana na sledeći način:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \ f(t)dt \qquad (8-2-2)$$

Smatra se da transformacija postoji ili nepostoji u zavisnosti da li integral konvergira ili divergira. *L* je zabeleženo kao uticajni faktor ili operator Laplasove transformacije.

Teorema (10): [9]

Ako je *f* neprekidno u svakom ogranicenom intervalu $0 \le t \le N$ i ima eksponencijalni stepen γ zbog *t* > *N*, onda Laplasova transformacija postoji za svako *s* > γ .

Da bi se dokazala ova teorema, neka je za svako *N > 0*.

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^N e^{-st} f(t)dt + \int_N^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (9-2-2)$$

Pošto je f neprekidno u svakom vezanom intervalu $0 \le t \le N$, onda prvi integral na desnoj strani postoji ,dok

$$\left|\int_N^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_N^\infty |e^{-st} f(t)|dt \le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt \le \int_0^\infty e^{-st} Me^{\gamma t}dt = \frac{M}{s-\gamma}$$

Drugi integral takodje postoji jer je *s* > γ .

Zasnovano na definiciji operatora Laplasove transformacije *L* sledi da je *L* linearni operator,drugim rečima ako su C_1, C_2 bilo koja dva stalna faktora i funkcija za Laplasovu transformaciju $f_1(t), f_2(t)$ je prisutna, onda je:

$$L\big(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} \big(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\big)dt =$$

$$= C_1 \int_0^\infty e^{-st} \; f_1(t)dt + C_2 \int_0^\infty e^{-st} \; f_2(t)dt$$

$$= C_1 L\{f_1(t) + C_2(f_2(t))\}$$

Primer 1: Ako je $f(t) = e^{at}$, onda je

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}\,dt = \lim_{K\to\infty}\int_0^{K} e^{-(s-a)t}dt = \lim_{K\to\infty}\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}\ , \qquad s > a$$

Primer 2: Pronadji *L* {*f* (*t)*} gde je

$$f(t) = 6e^{-t} - 20e^{-2t} + 15e^{-3t}$$

Sledi iz prvog primera da je linearni operator Laplasove transformacije:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{6}{s+1} - \frac{20}{s+2} + \frac{15}{s+3} = \frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

3-2-2 Promene osnovne funkcije

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}\ (n = 1,2,3,\dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-l)!}$
$\frac{1}{s^v}\quad (v > 0)$	$\frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sin h\ at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cos h\ at$

4-2-2 Druge osobine Laplasove transformacije

Ako je $F(s) = L\{f(t)\}$, onda je:

1 – Svojstva prve zamene:

$e^{at} f(t)$ $\quad$ $F(s-a)$

2 – Svojstva druge zamene:

$e^{-st}F(s)$ $\quad$ $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$

3 – Promena svojstva razmere:

$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ $\quad$ $f(at)$

4 – Transformacija izvoda:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

5 – Umnožavanje u t^n

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

6 – Ponašanje transformacije u slučaju beskonačnosti

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

7 – Teorema početne vrednosti: Uz uslov da granice postoje

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Primer 3: Pronadji:

$$L\{e^{4t} cosh5t\}, \qquad s > a$$

Rešenje:

$$L\{e^{4t}\cosh 5t\} = L\left\{e^{4t}(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2})\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{9t}+e^{-t}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-9}+\frac{1}{s+1}\right) = \frac{s-4}{s^2-8s-9}$$

5-3-2 Inverzna Laplasova transformacija

Ako Laplasova transformacijal $F(s)$ postoji za $f(t)$, drugim rečima $F(s) - L\{f(t)\}$, onda je $f(t)$ zabeleženo kao inverzna Laplasova transformacija za $F(s)$ što je izraženo u sledećem obliku: $f(t) = L^{-1}[F(s)\}$. L^{-1} je zabeleženo kao operator inverzne Laplasove transformacije. Primetimo da je L^{-1} takodje linearni operator:

$$L^{-1}\{c_1F(s) + c_2F(s)\} = c_1f_1(t) + c_2f(t) = c_1L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2L^{-1}\{F_2(s)\}$$

Primer 4: Objasnićemo suprotnu transformaciju za $f(t)$ iz primera 1:

Pošto je:

$$L\{e^{st}\} = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a$$

Onda je:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$$

Ako je $F(s) = L\{f(t)\}$, onda je:

$$L\{f(t) + N(t)\} = F(s)$$

Za bilo koju funkciju $N(t) = 0$ i za svako t osim za skup prebrojivo mnogo tačaka. Ovo znači da inverzna Laplasova transformacija nije jedinstvena.

Teorema (11): [9]

Ako su uslovi pomenuti u teoremi (10) ispunjeni, onda je inverzna Laplasova transformacija jedinstvena.

Primer 5:

Iz primera 2 i 4 i linearnog operatora inverzne Laplasove transformacije rezultira da je:

$$L^{-1}\left\{\frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{6}{s+1} - \frac{20}{s+2} + \frac{15}{(s+3)}\right\} = 6e^{t} - 20e^{2t} + 15e^{3t}$$

Primer 6: Iz primera 3 i 4 dobijamo:

$$L^{-1}\left\{\frac{s-4}{s^2-8s-9}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s-9)} + \frac{1}{2(s+1)}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-9}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{2}(e^{9t} + e^{-t})$$

Poznato je, kao što je objašnjeno u prethodna dva primera, da je jedan od glavnih indirektnih metoda za pronalaženje inverzne Laplasove formule upotreba parcijalnih razlomaka i tabele Laplasove transformacije. Što se tiče glavnog direktnog metoda, kompleksna inverzna formula se koristi za pronalaženje inverzne Laplasove transformacije.

6-3-2 Teorema (kompleksna inverziona formula)

Ako je f neprekidna i ukrštena u svakom odredjenom intervalu $0 \le t \le N$ i f ima eksponencijalni stepen u γ kada je:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \quad f(t)dt\,, \qquad t \to \infty$$

Onda je:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds\,, \qquad t > 0 \qquad\qquad (10-2-2)$$

i $f(t) = 0$ zbog $t > 0$

Integral u formuli (7-2-2) je ustanovljen u liniji *s* = γ u klompksnoj ravni *s*. Pravi broj γ je smešten desno od svih izolovanih singulariteta funkcije *F* (*s*), inače taj broj je opcionalan.

Dokaz:

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s) ds = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} \int_0^\infty e^{st - su} f(u) du ds$$

Od $s = \gamma + i\gamma$ rezultira da je desna strana jednačine:

$$\lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{2\pi}e^{yt}\int_{-T}^{T}e^{iyt}\left\{\int_{0}^{\infty}e^{-iyu}[e^{-yu}f(u)]du\right\}dy$$

Pošto *f* ima eksponencijalni stepen γ kada $t \longrightarrow \infty$, onda je e^{-yu} *f*(*u*) apsolutni integral za $t > 0$ i jednako je 0 ako je $t < 0$.

Integral u (10-2-2) je izračunat na zatvorenoj konturi *C* i objašnjen u formi (1) i sastoji se iz ravnog dela *L* (počinjući od $\gamma - iT$ I završava u $\gamma + iT$) i kontura C_R koja predstavlja luk kruga centriranog u svojoj tački porekla i radijusom *R* (koji počinje od $\gamma + iT$ i završava u $\gamma - iT$) ili $T = \sqrt{R^2+\gamma^2}$. Ova kontura je poznata kao Bromvič kontura i rezultira:

$$f(t) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}e^{st}F(s)ds = \lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C}e^{st}F(s)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}e^{st}F(s)ds\right\} \qquad (11-2-2)$$

Predpostavimo da integral na C_R vodi korenu kada $R \longrightarrow \infty$. Može biti dokazano (8-2-2) da postoje dovoljni uslovi za to i ti uslovi su postojanje dve konstante *M* i $k > 0$ tako da je:

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k} \qquad (12-2-2)$$

Na konturi C_R .

Ovaj uslov uvek može biti dokazan (8-2-2) ako je $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ gde su *P*(*s*) i *Q*(*s*) polinomi i stepen od

P(*s*) je manji nego stepen od *Q*(*s*). Pretpostavimo da integral na C_R tezi ka korenu kada $R \longrightarrow \infty$ onda

(8-2-2) postaje:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} F(s) ds = \sum Res\, f\; (e^{st}\, F(s))$$

Gde je uzet skup, unija izolovanih singulariteta funkcije $e^{st}F(s)$ je, ustvari unutar konture C_R .

Primer 6: pronadji f (t) ako je:

$$F(s) = \frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Izolovani singulariteti funkcije su prosti polovi od *s* = -1, -2, -3

i

$$Re\; s(e^{st}F(s), -1) = \frac{(-3)(-4)}{(1)(2)} e^{-t} = 6e^{-t}$$

i

$$Re\; s(e^{st}F(s), -2) = \frac{(-4)(-5)}{(-1)(1)} e^{-2t} = -20e^{-2t}$$

i

$$Re\ s(e^{st}F(s),-3)=\frac{(-5)(-6)}{(-2)(-1)}e^{-3t}=15e^{-3t}$$

i rezultat je:

$$f(t)=6e^{-t}-20e^{-2t}+15e^{-3t}$$

3-2 Pojmovi numeričke analize

U ovom paragrafu predstavićemo nekoliko osnovnih formula, medju kojima su najpoznatije: Gausova kvadratna formula, Gaus-Legendre kvadratna formula i Gaus-Legere kvadratna formula. Ove formule, kao što je spomenuto, se koriste u numeričkoj analizi da bi se dokazale neke integracije i da bi se istakli ovi principi $[1],[2],[3],[4]$ koji su uključeni u potvrdjivanje ovih rezultata.

1-3-2 Gausova kvadratna formula

Kvadratna formula je približna odredjenom integralu funkcije $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ i ova formula je obično formulisana kao zbir funkcijskih vrednosti u odredjenim tačkama unutar domena integracije. *n*- tačka Gausove kvadratne formule (Gausovo kvadratno pravilo), je kvadratna formula konstruisana da da tačan rezultat za polinome stepena *2n*-1 ili manje sa odgovarajućim izborom *n* tačaka x_1 (čvor) i *n* iz težine w_1. Domen integracije za takvu formulu je konvencionalno uzet kao $[-1,1]$, stoga formula je formulisana kao:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{-1}^{n} w_i f(x_i) \qquad (1-3-2)$$

Moguće je odrediti pogodne tačke $[4]$ x_1 , korene ortogonalnih čvorova polinoma.

Teorema (12): $[4]$

Za *q* da bude polinom stepena *n* ($n \geq 1$), tako da je:

$$\int_{a}^{b} w(x)\, x^k q(x)dx = 0 \qquad (2-3-2)$$

Za svako *k* = 0, 1, 2,...*n*-1. Stoga ako izaberemo čvor da budu nule od *q* onda postoje težine w_i koje čine Gausovu kvadraturu tačnim integralom za sve polinome stepena *2n-1* ili manje. Štaviše, svi ovi čvorovi će ležati u otvorenom intervalu (*a, b*) $[4]$.

Pre primene Gausovog kvadratnog pravila, neophodno je promeniti domen integracije iz $[a,b]$ u $[-1,1]$.

Ovo je formulisano kao:

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2})$$

Gausova kvadratna formula može biti izražena na uopsten način u obliku:

$$\int_{a}^{b} w(x)f(x)dx \qquad (3-3-2)$$

Ako podintegralna funkcija koja ima *2n* neprekidnih izvoda, greška u Gausovom kvadratnom pravilu može biti izražena u obliku $[4]$:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = \frac{f^{2n}(\xi)}{(2n)!}(p_n, p_n)$$

Za vrednost $\xi \in (a, b)$ gde je p_n ortogonalni polinom stepena *n* i:

$$(f, g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

Pod uslovom $w(x) = 1$ procena greške postaje:

$$\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{2n}(\xi), \qquad a < \xi < b$$

2-3-2 Gaus-Legendre kvadratna formula

Legendreovi polinomi su uzastopni ortogonalni polinomi P_n u intervalu $[-1,1]$ $[2]$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \qquad (4-3-2)$$

$P_n(1) = 1$ gde je $\delta_{mn} = 0$ kada je $m \neq n$ i $\delta_{nn} = 1$

Rodrigez formula za Legendreove polinome je dobijena

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{nk}}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

I praćena je:

$$P_t(x) = \frac{1}{2^t} \sum_{k=0}^{[t/_2]} (-1)^k \binom{t}{k} \binom{2t-2k}{t} x^{t-2k}$$

Legendre polinomi dobijaju učestalu formulu:

$$(t+1)P_{t+1}(x) - (2t+1)x + P_t(x) + tP_{t-1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)P_n^t(x) = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

Ovo je praćeno sa nekima prvima Legendre polinomima:

$$x$$

$$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

U čvoru Gaus-Legendre kvadratne formule i^{th} za bilo koje x_i je i^{th} nula za polinom I njegovu težinu [I]:

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P_n'(x_i))} \qquad (5-3-2)$$

3-3-2 Gaus-Legere kvadratna formula

Lagere polinomi su uzastopni ortogonalni polinomi L_n u intervalu $[0,\infty)$ za funkciju težine $w(x) = e^{-x}$.

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$$

Rodrigez formula za Legere polinome:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(e^x x^k\right)$$

Posle objavljivanja ove formule sledi da je:

$$L_n(x) = \sum_{k-0}^{n} (-1)^k n_{C_{n\_k}} \frac{x^k}{k!}$$

Dva od Legereovih polinoma takodje ispunjavaju učestalu formulu:

$$n(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

$$x_i L_n'(x_i) = -nL_{n-1}(x_i) = (n+1)L_{n+1}(x_i)$$

U Gaus-Legere kvadratnoj formuli čvor i^{th} od bilo kog x_1 je i^{th} nula za polinom L_n i njegova težina $[\mathrm{I}]$

je:

$$w_i = \frac{A_{n+1} y_n}{A_n L_n'(x_i) L_{n+1}(x_i)} = \frac{A}{A_{N-1}} \frac{Y_{n-1}}{L_{n-1}(x_i) L_n'(x_i)} \qquad (6-3-2)$$

Gde je A_n koeficijent od x^n u L_n, tako da je:

$$A_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = -\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = -\frac{1}{n}$$

U dodatku:

$$y_n = \int_0^\infty W(x)[L_n(x)]^2 dx = 1$$

Rezultat je:

$$W_i = \frac{1}{(n+1)L'_n(x_i)L_{n+1}(x_i)} = -\frac{1}{nL_{n-1}(x_i)L'_n(x_i)}$$

U upotrebi učestale formule gde je x_i nula za L_n, rezultat je sledeći:

$$nL_n(x) = (x - n - 1)L_n(x) = 0$$

$$x_i L'_n(x_i) = -nL_{n-1}(x_i) = (n+1)L_{n+1}(x_i)$$

$$w_i = \frac{1}{x_i[L'_n(x_i)]^2} = \frac{x_i}{(n+1)^2[L_{n-1}(x_i)]^2}$$

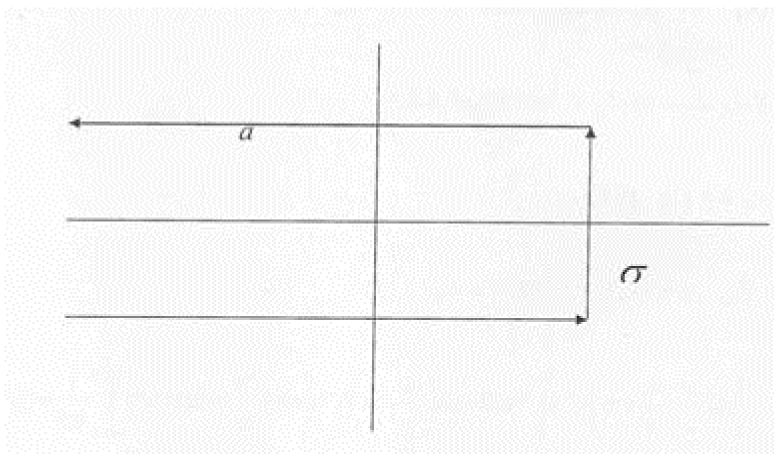
Treće poglavlje

Deformacija Bromvičeve putanje

3 Deformacija Bromvičeve konture

U ovom poglavlju predstavićemo metod za izračunavanje inverzne Laplasove transformacije zasnovane na deformaciji normalne putanje u Bromovičevoj putanji.Predložena putanja je sastavljena od granične linije.

$S = \{s: |Ims| < a, Res \leq \sigma\}$ kao u obrascu (2).



(1) Forma

Nepravilna putanja $S = \{s: |Ims| < a, Res \leq \sigma\}$ je granična linija

1-3 Osnovna teorema

$\mathfrak{I}$ je koren funkcije *F* koja ispunjava sledeće dve osobine:

(1) Svi izolovani singulariteti za funkciju *F* se nalaze u oblasti

(2) $S = \{s: |Ims| < K, Res \leq \sigma_0\}$

(3) $|F(s)| \longrightarrow 0$ uniformno kada je $s \longrightarrow \infty$ zato što je $S = \{s: |Ims| > K, Res \leq \sigma_0\}$

Zbog korena funkcije $\mathfrak{I}$ dobili smo sledeći rezultat;

Teorema (1): [10]

Za svako $a > Kt, t > 0, \sigma > \sigma_0$ sledi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s) ds = \frac{e^{st}}{\pi i} \left\{ Re \int_0^a e^{iu} F\left(\sigma + \frac{iu}{t}\right) du - Ime^{iu} \int_0^{+\infty} e^{-u} F\left(\sigma + \frac{ia}{t} - \frac{u}{t}\right) du \right\}$$

(1 - 3)

Dokaz:

S obzirom na činjenicu da funkcija *f* ima realne vrednosti, onda je:

$F(s) = \overline{F(s)}$ ili $\overline{F(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F\overline{(s)}$

Koristeći ove realne vrednosti rezultira da je:

$$2\pi i\, f(t) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s) ds = i e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} F(\sigma + iy) dy$$

$$= ie^{\sigma t}\left(\int_0^{+\infty} e^{iyt}F(\sigma+iy)dy + \int_0^{+\infty} e^{-iyt}\,F(\sigma-iy)dy\right)$$

$$= 2ie^{\sigma t}Re\left\{\int_0^{+\infty} e^{iyt}F(\sigma+iy)dy\right\} \qquad (2-3)$$

Sprovodeći zamenu $u = yt$ i birajući $a > Kt$ dobijamo:

$$f(t) = \frac{e^{st}}{\pi t}\left(Re\int_0^{a} e^{iu}\,F\left(\sigma+\frac{iu}{t}\right)du + Re\int_a^{+\infty} e^{iu}F\left(\sigma+\frac{iu}{t}\right)du\right) \qquad (3-3)$$

Ako uzmemo poslednji integral u (3-3) u kompleksnoj ravni *u* locirano u zatvorenoj putanji

$$C_R = \{u|u \in [a, a+R]\}Y\left\{u\middle|u - a = Re^{i\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}Y\{u|Re(u) = a, Im(u) \in [0, R]\}$$

Gde je *R>0.* Koristeći osobine $\Im$ I Koši teoremu ostatka nalazimo da je:

$$\oint_{C_R} e^{iu}F\left(\sigma + {}^{iu}/_{t}\right)du = 0 \qquad (4-3)$$

Što se tiče integrala na luku imamo:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{iRcos\theta} e^{-Rsin\theta} e^{iu} F\left(\sigma + \frac{iu}{t}\right) Re^{i\theta} d\theta \right| \leq R \int_0^{\pi/2} e^{-Rsin\theta} \left|F(\sigma + \frac{iu}{t})\right| d\theta$$

$$\leq \max_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left|F(\sigma + \frac{iu}{t})\right| R \int_0^{\pi/2} e^{-Rsin\theta} d\theta < \max_{\theta\in[0,\pi/2]} \left|F(\sigma + \frac{iu}{t})\right| R \int_0^{\pi/2} e^{-2\pi\theta/R} d\theta$$

$$\leq \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-\frac{2R}{\pi}}\right) \max_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|F\left(\sigma + \frac{iu}{t}\right)\right| \qquad (5-3)$$

Gde smo koristili Žordanovu nejednakost $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ za svaki $\sin\theta > \frac{2\theta}{\pi}$ $[7]$. Pošto Laplasova transformacija tezi ka nuli kada *s* tezi ka ∞ u oblasti $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$ zato Laplasova transformacija konvergira u oblasti $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$ i Ims > K.

I pošto *F* stalno teži ka nuli kada *s* teži ka ∞ u oblasti $\mathrm{Re}\, s \leq \sigma_0$ I Ims > *K*, onda integral na luku teži ka nuli kada *R* teži ka ∞.

Prethodna teorema predlaže upotrebu Gausove kvadratne formule za dva predstavljena integrala u formuli (1-3). Što se tiče drugog integrala, moguće je koristiti Gaus-Legere direktnu formulu. Da bi se dobila najbrža konvergencija, interval $[0, a)$ u prvom integralu je obično podeljen u više podintervala, posle čega se korsisti Gaus-Legendre kvadratna formula pogodna za svaki interval od tih podintervala.

Da bi se promenila Gaus-Legendre formula na intervale (a,b), neophodno je primeniti sledeću transformaciju:

$$\widetilde{W}_k^n = T_a^b(W_k^n) = \frac{b-a}{2} W_k^n, \quad \tilde{x}_k^n = T_a^b(x_k^n) = a + \frac{b-a}{2}(x_k^n + 1)$$

Gde je k=1,…,n

Pretpostavimo da je podela intervala $[0,a)$ u nepreklapajuće podintervale je sprovedeno $[\ a_v,\ldots b_v\ ], v = 1,\ldots m$ tako da $\Upsilon_{v=1}^{m}[a_v, b_v) = [0,a)$ i onda je rezultat:

$$\int_0^a e^{iu} F\left(\sigma + \frac{iu}{t}\right) du = \sum_{v=1}^{m} \int_{a_v}^{b_v} e^{iu} F\left(\sigma + \frac{iu}{t}\right) du$$

$$\approx \sum_{v=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_v} T_{a_v}^{b_v}\left(w_k^{n_v}\right) e^{iT_{v_v}^{k_v}(x_k^{n_v})} F\left(\sigma + \frac{iT_{a_v}^{b_v}(x_k^{n_v})}{t}\right) \quad (6-3)$$

Pretpostavka u prethodnoj formuli zaključuje da je upotreba Gaus-Legendre kvadratne formule različita za svaki podinterval.

Sledeća formula je dobijena iz (1-3)

$$f(t) \approx \frac{e^{st}}{\pi t}\{Re \sum_{v=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_v} T_{a_v}^{b_v}\left(w_k^{n_v}\right) e^{iT_{v_v}^{k_v}(x_k^{n_v})} F\left(\sigma + \frac{iT_{a_v}^{b_v}(x_k^{n_v})}{t}\right) - Im e^{ia} \sum_{k=1}^{N} W_K F(\sigma + \frac{ia - x_k}{t})\}$$

(7 – 3)

Osetljiva tačka se krije u načinu izbora parametara i oni su: *m* je broj podintervala; n_v, *v*=1,2,…*m* je broj čvorova (u svakom podintervalu) u Gaus-Legere kvadratnoj formuli; *a* je krajnja tačka intervala; *N* je broj čvorova u Gaus-Legere kvadratnoj formuli; i težišna linija σ koja mora da bude veća od σ_0. Iz formule (7-3) vidimo da izolovani singulariteti za funkciju *F* zavise od σ, t, a i takodje od uslova *a* > *Kt* spomenutog u osnovnoj teoremi, tako da vidimo da putanja zavisi od *t*.

Različiti rezultati u sličnim uslovima pokazuju da težišna linija σ mora biti odabrana na način tako da putanja nije smeštena blizu izolovanih tačaka funkcije *F*. Štaviše, težišna linija σ treba da bude odobrana kao izolovane tačke funkcije *F* koje su smeštene dovoljno daleko od luka $\{s\colon -\infty < Res < \sigma$, $Ims = a\}$ i takodje intervali $\lfloor a\ ,\ldots b_v),v = 1,..m$ ne smeju da budu veoma udaljeni. Prirodno, kad god su vrednosti n_v i *N* povećane – greška u proračunu vrednosti *f* (*t*) je smanjena.

2-3 Numerički primer

U ovom paragrafu predstavićemo numerički primer za izračunavanje Laplasove transformacije koristeći Gausovu kvadratnu formula prikazanu u (7-3) prethodnog paragrafa. Za ovu primenu smo izbrali funkciju

$$F(s) = \frac{(s-2)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

prikazanu u primeru 2 paragrafa 2-2-2, da bismo obezbedili njenu inverznu:

$$f(t) = 6e^{-t} - 20e^{-2t} + 15e^{-3t}$$

Pogledati primer 6 u paragrafu (3-2-2) Čak je moguće uporediti rezultate dobijene iz formule (7-3) sa tačnim vrednostima za funkciju.

Tabela (1)

Koristili smo samo pet čvorova u ovoj primeni ili drugim rečima, $n = N = 5$. Medjutim, rezultati su bili donekle prihvatljivi.Prirodno, da bi se dobili najprecizniji rezultati, broj čvorova mora da bude povećan. Tabela pokazuje dobijene rezultate.Prva kolona pokazuje korišćene vrednosti; druga kolona sadrži

t	Kontura	Tačna vrednost f(t)	Približna vrednost f(t)	Apsolutne greške
10^{-2}	0,2,4,6,10,30	0.8930	0.8923	0.0007
10^{-1}	0,2,4,6,12,18,30,60	0.1667	0.1667	0.0000
1	0,3,7,14,25,40,70,110	0.2474	0.2444	0.0030
10	0,3,7,14,25,40,70,110	0.0003	0.0006	0.0003
10^{2}	0,3,9,40	0.0000	0.0000	0.0000
10^{3}	0,3,18	0.0000	0.0000	0.0000

korišćene putanje i podintervale; treća kolona pokazuje tačne vrednosti funkcije; četvrta kolona sadrži približne vrednosti dobijene iz (7-2); peta kolona daje apsolutne greške uzimajući u obzir tačne vrednosti. Ovi rezultati opisuju proračun inverzne Laplasove transformacije korišćenjem Gausove kvadratne formule predstavljene u (7-3). Ove vrednosti se precizno odnose na poredjenje rezultata dobijenih za funkciju:

$$f(t) = 6e^{-t} - 20e^{-2t} + 15e^{-3t}$$

Koristeći postojecu inverznu za ovu funkciju da bi primenili integral u formuli (7-3) koju smo koristili za izračunavanje potrebne tačnosti u realnim vrednostima funkcije –pronadjeno je da je data dobra aproksimacija (kao što je prikazano u petoj koloni).

Mada je težišna linija σ neobavezna, neophodno je da ne bude postavljena blizu izolovane tačke funkcije kao u intervalima $\lfloor a \;\ldots b_v \rfloor, v = 1,\ldots m$ i neophodno je da ne bude veoma velika. Stoga, kad god su vrednosti *n, N* povećane, greška u proračunu vrednosti $f(t)$ je smanjena.

Reference:

1) Abramowirz, Milton i Irene A. Stegun, priručnik matematičkih funkcija, Dover, 1972.

2) Aschwarz, H.R. i Waldvogel, J., Numerička analiza, John Wiley, 1989.

3) Kahaner, David; Cleve Moler i Stephen Nash, Numeričke Metode I Softver, Prentice-Hall, (1989).

4) Steer, Jozef & Ronald Burlisch, Uvod u Numeričku Analizu, Springer (2002).

5) Henrici P., Primenjena i Proračunska složena analiza, tom_1, 2, Wiley 1974.

6) Churchill, R. V., Složena promenljiva i primena, McGraw-Hill, 1960.

7) Levinson, N. and Redheffer, R.M., Složene promenljive, Holden-Day, 1970.

8) Alfors, L.V., Složena analiza, McGraw-Hall, 1966.

9) Talbot, L.V., Tačna numerička inverzija Laplasove transformacije., J.

   Inst. Math. Appl., vol.23, pp. 97.120.1979.

10) Milovanovic,'s G.V. and Cvetkovic's A.S.; facta universitatis (Nis), elec.energ. vol. 18, no. 3,

    Dećember 2005, 515-530

Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno-matematički fakultet

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: VR	
Autor: AU	
Mentor: MN	
Naslov rada: NR	
Jezik publikacije: JP	
Jezik izvoda: JI	s/en
Zemlja publikovanja:	

ZP	
Uže geografsko područje: UGP	
Godina: GO	
Izdavač: IZ	autorski reprint
Mesto i adresa: MA	
Fizički opis rada: FO	(broj poglavlja / strana / lit. citata / tabela / slika / grafika / priloga)
Naučna oblast: NO	
Naučna disciplina: ND	
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	
UDK	
Čuva se: ČU	
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: DP	
Datum odbrane: DO	
Članovi komisije: (naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet) KO	predsednik: član: član:

University of Novi Sad

Faculty of Natural Sciences And Mathematics

Key word documentation

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	
Author: AU	
Mentor: MN	
Title: TI	
Language of text: LT	
Language of abstract: LA	en/s
Country of publication:	

CP	
Locality of publication: LP	
Publication year: PY	
Publisher: PU	
Publ. place: PP	
Physical description: PD	
Scientific field SF	
Scientific discipline SD	
Subject Key words SKW	
UC	
Holding data: HD	
Note: N	
Abstract: AB	
Accepted on Scientific Board on:	

AS	
Defended: DE	
Thesis Defend board: DB	president: member: member:

Biografija

Najah OMalkhaer rođena je 8.12.1985. godine u Libiji. 2010. počela je da studira na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite sa prosečnom ocenom 8,00.

Novi Sad, 18. april 2011. godine   Najah OMalkhaer