UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Maja Jolić

Krive u prostoru Minkovskog

- master rad -

Mentor:
dr Sanja Konjik

Novi Sad, 2016

Predgovor

Na vratima Platonove Akademije pisalo je ,,Neka ne ulazi onaj ko ne zna geometriju". Zašto je geometrija za Platona bila toliko važna da je prema poznavanju iste pravio selekciju svojih učenika? Jedno objašnjenje je u tome što je Platon smatrao da ,,Bog uvek stvara na geometrijski način" i da geometrija vodi ka istini.

Verujem da bi se i posle skoro dve i po hiljade godina, velik broj savremenih naučnika složio sa Platonom. Možda bi samo imali pitanje:

-Na koju geometriju se to odnosi?

U vreme kada je Platon stvarao, geometrijom se smatrala takozvana apsolutna ili euklidska geometrija koja je prvi put sistematično izložena u Euklidovim *Elementima*. Od tada su se, kako matematika, tako i geometrija u ogromnoj meri razvile i iznedrile pregršt novih teorija. Filozofi, matematičari i fizičari vekovima su, nastojeći da objasne svet u kom živimo, otkrivali u njemu još novih svetova, dimenzija, metričkih struktura i još novih pitanja. Sveobuhvatna teorija nije pronađena, ali se svakim otkrićem profinjuje naš pogled na svet.

Od Galileja i Njutna postavljene su osnove klasične fizike, koja prostor i vreme smatra apsolutnim i međusobno nezavisnim. Takođe podrazumeva postojanje apsolutnog referentnog sistem u odnosu na koji vreme protiče ravnomerno, a svetlost se prostire trenutno ($c = \infty$). Međutim, fizičari i matematičari 19. veka došli su do praktičnih problema koje nisu mogli objasniti u sklopu takve postavke. Rezultati do kojih su došli ukazivali su na to da prostor, kao ni vreme nije apsolutno, već zavisi od izbora referentnog sistema, ali da je brzina prostiranja svetlosti konstantna i jednaka u svim inercijalnim sistemima, bez obzira na kretanje izvora i/ili posmatrača.

Ovi rezultati podstakli su stvaranje specijalne, a zatim i opšte teorije relativnosti, koja svet posmatra kao 4-dimenzionalnu strukturu prostor-vremena. Svaki događaj ima 3 prostorne i jednu vremensku koordinatu i naziva se *svetska tačka*. Matematički aparat koji zadovoljava ove postavke, zasnovan je na geometriji prostora Minkovskog.

Da je Ajnštajn, poput Platona, osnovao svoju Akademiju za izučavanje teorije relativnosti, na njenim vratima bi verovatno pisalo da ne ulazi onaj ko ne zna geometriju prostora Minkovskog.

U ovom radu bavićemo se krivama u prostoru Minkovskog sa matematičkog aspekta. U fizičkoj interpretaciji kriva bi predstavljala putanju kretanja čestice u prostor-vremenu, koja se naziva i svetskom linijom, a tangentni vektor brzinu čestice.

U uvodnom delu rada biće izloženi osnovni pojmovi teorije krivih u prostoru $\mathbb{R}^n$, definicije regularne krive, parametrizacije dužinom luka, Freneovog okvira, Freneove krive, a specijalno, za $n = 2$ i $n = 3$ formulisaćemo Freneove jednačine i fundamentalnu teoremu.

U drugoj glavi izučavaćemo strukturu trodimenzionalnog prostora Minkovskog $\mathbb{R}^3_1$. Definisati Lorencov skalarni proizvod, kauzalni karakter vektora i potprostora. Zatim kroz nekoliko propozicija videti u kakvom su odnosu vektori i potprostori određenog kauzalnog karaktera. Uvesti Lorencov vektorski proizvod i dati potrebne osobine za konstrukciju ortonormirane baze. Na kraju glave upoznaćemo se sa vremenskom orijentacijom i nekim izometrijama prostora $\mathbb{R}^3_1$.

Treća glava predstavlja ključni deo rada. U njoj ćemo najpre uvesti osnovne pojmove teorije krivih u $\mathbb{R}^3_1$. Definisaćemo kauzalni karakter krive, parametrizaciju i pseudo-parametrizaciju dužinom luka. Zatim, na osnovu podele krivih prema kauzalnom karakteru tangentnog vektora i vektora normale, uvešćemo Freneov okvir, krivinu, torziju, nul okvir i pseudo-torziju i izvesti odgovarajuće Freneove jednačine, sa osvrtom na primere. U nastavku ćemo pokazati invarijantnost krivine i torzije u odnosu na izometrije prostora $\mathbb{R}^3_1$ i dati dokaz fundamentalne teoreme. Kroz čitavo izlaganje pravićemo paralelu sa osobinama koje važe u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$. Grafici krivih su pravljeni u programskom paketu *Wolfram Mathematica 10.0.*

* * * * * * **

Želela bih da se zahvalim mentorki, dr Sanji Konjik, na pomoći u izboru teme i izradi rada, podršci i razumevanju, kao i članovima komisije na podršci i korisnim sugestijama.

Veliku zahvalnost dugujem i mojoj porodici, prijateljima, dragom Mihajlu i svima koji su svojim prisustvom u mom životu omogućili da budem to što

jesam.

Ovaj rad posvećujem mojim nastavnicima D. Vasiću, Ž. Jovanovskom, S. Čobanov i M. Kruniću, koji su u meni probudili ljubav prema plemenitim naukama kao što su matematika, fizika, filozofija i astronomija.

U Novom Sadu, oktobar 2016.

Maja Jolić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Na samom početku rada napravićemo kratak pregled osnovnih pojmova teorije krivih u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$, pod kojim podrazumevamo trodimenzionalan realan vektorski prostor sa skalarnim proizvodom $\langle\ ,\ \rangle_e$ datim sa

$$\langle x, y\rangle_e = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad \text{za} \ \ x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Tako definisan skalarni proizvod generiše euklidsku normu

$$\|x\|_e = \sqrt{\langle x, x\rangle_e}$$

i metriku

$$d_e(x, y) = \|x - y\|_e = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Euklidski skalarni proizvod je pozitivno definitna, simetrična bilinearna forma, međutim u ovom radu susrešćemo se sa bilinearnim formama drugačije definitnosti, koje definišemo u nastavku.

1.0.1 Definicija *Simetrična bilinearna forma b na vektorskom prostoru V je*

- *pozitivno definitna akko za svako $v \in V \setminus \{0\}$ važi $b(v, v) > 0$;*
- *negativno definitna akko za svako $v \in V \setminus \{0\}$ važi $b(v, v) < 0$;*
- *nedegenerisana akko iz $b(v, w) = 0$ za svako $w \in V$, sledi $v = 0$;*
- *degenerisana akko postoji $v \neq 0$ takvo da je $b(v, w) = 0$, za sve $w \in V$.*

Sadržaj narednog poglavlja detaljno je izložen u [1] i [2].

1.1 Krive u ravni i prostoru

U matematici (parametrizovana) kriva definiše se kao neprekidno preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^n$ koje svakom parametru t iz intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ pridružuje tačku $c(t)$ prostora $\mathbb{R}^n$.

Prilikom izučavanja njihovih osobina, od velikog je značaja mogućnost aproksimacije krive linearnom funkcijom, za šta je potrebno postojanje prvog izvoda različitog od nule. Stoga se uvodi uslov regularnosti.

1.1.1 Definicija *Regularna parametrizovana kriva je preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^1$, za koje važi $\dot{c} = \frac{dc}{dt} \neq 0$ za svako $t \in I$, gde je I interval u $\mathbb{R}$.*

Kako bi se omogućila invarijantnost u odnosu na izbor parametrizacije, na skupu svih regularnih parametrizovanih krivih definiše se sledeća relacija ekvivalencije:

za krive $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ i $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ kažemo da su ekvivalentne akko postoji $\mathcal{C}^1$ difeomorfizam $\varphi : I_1 \to I_2$ za koji je $\varphi' > 0$ i $c_1 = c_2 \circ \varphi$.

Regularna kriva predstavlja klasu ekvivalencije u odnosu na gornju relaciju. Nadalje se pod pojmom krive podrazumeva regularna kriva.

Sledeći bitan pojam je *dužina luka krive* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, i definiše se kao

$$L_a^b(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_e dt.$$

Za krivu kažemo da je *parametrizovana dužinom luka* ili *prirodno parametrizovana* ako je za svaku vrednost parametra $t \in I$, $\|\dot{c}(t)\|_e = 1$. Tada je $L_a^b(c) = b - a$.

Svaka regularna kriva može se na jedinstven način (do na translaciju) parametrizovati dužinom luka. Odgovarajuća reparametrizacija data je sa

$$\bar{c} = c \circ s^{-1}, \quad \text{gde je} \quad s(t) = L_a^t(c) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\|_e d\tau.$$

Radi razlikovanja parametrizacije krive, koristimo sledeće oznake

$\mathbf{c(t)}$ - proizvoljno parametrizovana kriva

$\mathbf{\dot{c}(t)}$ - tangentni vektor za proizvoljno parametrizovanu krivu

$\mathbf{c(s)}$ - prirodno parametrizovana kriva

$\mathbf{c'(s)}$ - tangentni vektor prirodno parametrizovane krive

Skup svih linearnih kombinacija vektora $a_1, a_2, ..., a_k$ označavaćemo sa $Lin\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, što je ujedno i potprostor generisan tim skupom vektora.

U nastavku definišemo posebnu klasu krivih u $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Definicija *(Freneova kriva i Freneov n-okvir)*
Za regularnu prirodno parametrizovanu krivu $c : I \to \mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^n$ kažemo da je Freneova kriva ako su vektori $c'(s)$, $c''(s)$,..., $c^{(n-1)}(s)$ linearno nezavisni u svakoj tački $s \in I$.
Tada je Freneov n-okvir $\{e_1(s), e_2(s), ..., e_n(s)\}$ u svakoj tački krive jedinstveno određen uslovima:

(i) *$\{e_1(s), e_2(s), ..., e_n(s)\}$ je pozitivno orijentisan sistem vektora u $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *$Lin\{e_1(s), ..., e_k(s)\} = Lin\{c'(s), ..., c^{(k)}(s)\}$, za svako $k = 1, 2, ..., n-1$;*

(iii) *$\langle c^{(k)}(s), e_k(s)\rangle_e > 0$, za $k = 1, 2, ..., n-1$.*

Za konstrukciju koristi se Gram-Šmitov postupak.

1.1.1 Krive u ravni

Svaka regularna, dva puta neprekidno diferencijabilna kriva u ravni je Freneova. Freneov okvir čine:

tangentni vektor $e_1(s) = c'(s)$,

vektor normale $e_2(s)$, koji se dobija rotacijom e_1 za ugao $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smeru.

Za svako $s \in I$ važi $\|c'(s)\|_e = 1$, odnosno $\langle c'(s), c'(s)\rangle_e = 1$. Diferenciranjem dobijamo $\langle c''(s), c'(s)\rangle_e + \langle c'(s), c''(s)\rangle_e = 0$, pa je $\langle e_1(s), c''(s)\rangle_e = \langle c'(s), c''(s)\rangle_e = 0$. To znači da su vektori $c''(s)$ i $e_2(s)$ linearno zavisni i da u svakoj tački krive postoji vrednost $\kappa(s)$ za koju je $c''(s) = \kappa(s)e_2(s)$. Na taj način dolazimo do funkcije $\kappa(s)$ koja se naziva *krivina krive* i meri zakrivljenost krive, tj. koliko kriva odstupa od prave linije.

Da bi se mogli odrediti i izvodi krive višeg reda, potrebno je naći izvode Freneovog okvira, koji predstavljaju *Freneove jednačine*:

$$\begin{aligned} e_1' &= c'' = \kappa e_2 \\ e_2' &= -\kappa e_1 \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Krive u prostoru

U slučaju kada je $n = 3$ regularna kriva je Freneova ako je u svakoj tački ispunjeno $c'' \neq 0$. Odgovarajući Freneov 3-okvir čine sledeći vektori

tangentni vektor $e_1(s) = c'(s)$,

vektor (glavne) normale $e_2(s) = \dfrac{c''(s)}{\|c''(s)\|_e}$ i

vektor binormale $e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s)$.

Vektori Freneovog 3-okvira označavaju se slovima T (tangentni vektor), N (vektor normale) i B (vektor binormale). Prilikom izvođenja Freneovih jednačina u 3-dimenzionalnom slučaju javiće se dve funkcije koje figurišu u opisivanju krive. U pitanju su *krivina* $\kappa = \langle c'', e_2 \rangle = \langle e_1', e_2 \rangle$ i *torzija* $\tau := \langle e_2', e_3 \rangle$.

Freneove jednačine u matričnom obliku date su sa

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Značaj krivine i torzije dolazi do izražaja u fundamentalnoj teoremi lokalne teorije krivih, gde se pokazuje da funkcije krivine i torzije na jedinstven način (do na euklidsko kretanje) određuju krivu u prostoru.

Uopštenje ovog rezultata može se naći u [1], a ovde navodimo specijalan slučaj koji je pogodan za poređenje sa rezultatom u prostoru Minkovskog.

1.1.3 Teorema (Fundamentalna teorema lokalne teorije krivih u $\mathbb{R}^3$) *Neka su date glatke funkcije $\kappa, \tau : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, takve da je $\kappa(s) > 0$ za sve $s \in (a,b)$, tačka $s_0 \in (a,b)$, $q_0 \in \mathbb{R}^3$ i pozitivno orijentisan ortonormiran sistem $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$.*

Tada postoji jedinstvena glatka Freneova kriva $c : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ za koju je ispunjeno:

1) $c(s_0) = q_0$;

2) $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ je Freneov 3-okvir krive c u tački q_0;

3) funkcije κ i τ su krivina i torzija krive c.

Glava 2

Geometrija prostora Minkovskog $\mathbb{R}^3_1$

U septembru 1908. godine, Herman Minkovski predstavio je javnosti svoja zapažanja o strukturi prostora i vremena. Revolucionarnost ideje Minkovskog ležala je u tome da se vremenska koordinata ravnopravno priključi prostornim koordinatama i tako generiše 4-dimenzionalno prostor-vreme $\mathbb{R}^4_1$, sa osama $\{x, y, z, t\}$.

U takvom okruženju, Minkovski je uspeo da objasni fenomene koji su se javljali u specijalnoj teoriji relativnosti, a koje je bilo nemoguće objasniti u klasičnoj Njutnovoj postavci prostora i vremena. Više o tome šta je prethodilo rađanju ideje Minkovskog, kako se razvila i uticala na fiziku 20. veka, kao i deo njegovog originalnog rada[1] čitalac može naći u [5, 6].

Predmet ovog rada je izučavanje krivih u prostoru Minkovskog sa matematičkog aspekta. Stoga ćemo posmatrati jednostavniju verziju prostora Minkovskog sa dve prostorne i jednom vremenskom osom $\mathbb{R}^3_1$, koja je pogodna za vizualizaciju i poređenje sa euklidskom strukturom $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_e)$.

Sadržaj narednih poglavlja u najvećoj meri se zasniva na radovima [8, 9], a pojedina zapažanja i ideje dokaza preuzeti su iz [1, 3, 7].

[1] Herman Minkowski, "Raum und Zeit" (1909).

2.1 Osnovni pojmovi

2.1.1 Definicija *Prostor Minkovskog* $\mathbb{R}^3_1$ *je trodimenzionalan realan vektorski prostor sa skupom vektora* $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ *na kom je definisana nedegenerisana, simetrična bilinearna forma* $\langle\ ,\ \rangle$ *na sledeći način*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \quad x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3).$$

$\langle\ ,\ \rangle$ *naziva se Lorencov skalarni proizvod ili Lorencova metrika.*

Kako nadalje radimo u prostoru Minkovskog $\mathbb{R}^3_1$, Lorencov skalarni proizvod nazivaćemo skalarnim proizvodom, a posebno će biti naglašeno kada se misli na (euklidski) skalarni proizvod u $\mathbb{R}^3$.

U Definiciji 2.1.1 x_3-osa predstavlja vremensku, a x_1 i x_2 prostorne ose[2].

Zbog minusa koji se javlja ispred vremenskih koordinata, u $\mathbb{R}^3_1$ može se desiti da skalarni proizvod (nenula) vektora sa samim sobom bude pozitivan, negativan ili nula. Na osnovu toga, vrši se sledeća podela vektora.

2.1.2 Definicija *Za vektor* $v \in \mathbb{R}^3_1$ *kažemo da je*

(1) prostornog tipa ako je $\langle v, v\rangle > 0$ *ili* $v = 0$*,*

(2) vremenskog tipa ako je $\langle v, v\rangle < 0$*,*

(3) svetlosnog tipa (izotropni ili nul vektor) ako je $\langle v, v\rangle = 0$ *i* $v \neq 0$*.*

(1), (2) i (3) nazivaju se kauzalnim karakterom vektora v*.*

Skup svih vektora svetlosnog tipa u $\mathbb{R}^3_1$ čini *svetlosni konus* $\mathcal{C}$ koji je dat izrazom

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\} \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

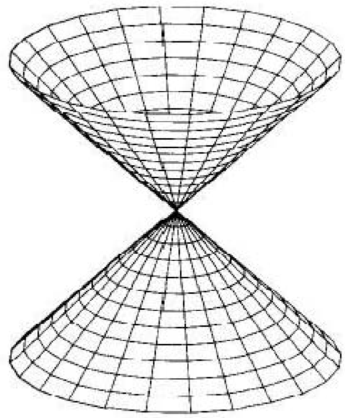
i predstavljen je na Slici 2.1[3]

Skup svih vektora vremenskog tipa u $\mathbb{R}^3_1$ je skup

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}.$$

[2]U literaturi se često za prvu osu uzima vremenska osa, pa se u skalarnom proizvodu ispred prvog člana javlja znak $-$ a ispred ostalih $+$.

[3]Slika je preuzeta iz [1].



Slika 2.1: Svetlosni konus

2.1.3 Primeri Ako posmatramo standardnu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ imamo da je

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1 \rangle &= 1 > 0 \\ \langle e_2, e_2 \rangle &= 1 > 0 \\ \langle e_3, e_3 \rangle &= -1 < 0 \end{aligned}$$

tako da su e_1 i e_2 vektori prostornog tipa, a e_3 je vremenskog tipa. Primer vektora svetlosnog tipa je $v = (1,0,1)$.

2.1.4 Napomena Skalarni proizvod $\langle \ , \ \rangle$ generiše na prostoru $\mathbb{R}^3_1$ normu

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}.$$

Na osnovu toga možemo primetiti da su jedinični (normirani) vektori u $\mathbb{R}^3_1$ oni za koje važi $\langle x, x \rangle = \pm 1$. To mogu biti vektori prostornog ili vremenskog tipa jer su svi vektori svetlosnog tipa norme 0.

U Primeru 2.1.3 videli smo da se u standardnoj bazi nalaze dva vektora prostornog i jedan vremenskog tipa. U nastavku ćemo pokazati da je broj vektora vremenskog tipa koji se nalaze u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi uvek isti i jednak dimenziji maksimalnog potprostora na kom je bilinearna forma $\langle \ , \ \rangle$ negativno definitna.

2.1.5 Propozicija *Neka je* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *ortonormirana baza prostora* $\mathbb{R}^3_1$, r *broj vektora iz* B *vremenskog tipa i* W *maksimalan potprostor od* $\mathbb{R}^3_1$ *na kom je* $\langle\ ,\ \rangle$ *negativno definitna. Tada je* $r = dim(W)$.

Dokaz. Neka za vektore $\{e_1, ..., e_r\}$ važi $\langle e_i, e_i\rangle < 0$. Jasno da je $r \geq 1$ jer bi u suprotnom Lorencov skalarni proizvod bio pozitivno definitan na $\mathbb{R}^3_1$.

Označimo sa $\mathcal{X} = Lin\{e_1, ..., e_r\}$ potprostor generisan vektorima $e_1, ..., e_r$. Tada je $\langle\ ,\ \rangle$ negativno definitan na $\mathcal{X}$, pa mora biti $\mathcal{X} \subseteq W$, odnosno

$$r = dim(\mathcal{X}) \leq dim(W).$$

Sada definišimo preslikavanje $T : W \to \mathcal{X}$ koje vektor $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3 \in W$ preslikava u $T(w) = \sum_{i=1}^{r} w_ie_i$. Lako se pokazuje da je T linearno, a u nastavku ćemo pokazati da je i injektivno, tj. da je jezgro preslikavanja $Ker(T) = \{0\}$.

Neka je $T(w) = \sum_{i=1}^{r} w_ie_i = 0$. Tada na osnovu linearne nezavisnosti vektora baze sledi da je $w_i = 0$, za sve $i = 1, ..., r$, pa je

$$w = w_{r+1}e_{r+1} + \cdots + w_3e_3 \text{ i } \langle w, w\rangle = \sum_{i=r+1}^{3} w_i^2 \langle e_i, e_i\rangle = \sum_{i=r+1}^{3} w_i^2 \geq 0.$$

Kako je $w \in W$, mora biti $w_i = 0$, za $i = r + 1, ..., 3$. Time dobijamo da je $w = 0$.

Na osnovu injektivnosti preslikavanja T imamo $dim(W) \leq dim(\mathcal{X}) = r$. $\square$

Ovom propozicijom pokazali smo da broj vektora svetlosnog tipa ne zavisi od izbora baze, pa kako je u slučaju standardne baze $r = 1$, onda je u svakoj ortonormiranoj bazi tačno jedan vektor vremenskog tipa.

Matrica metričkog tenzora koja odgovara Lorencovoj metrici (elementi matrice su skalarni proizvodi vektora baze) je oblika

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Broj vektora u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi, za koje je $\langle e_i, e_i\rangle < 0$ naziva se *indeks* bilinearne forme $\langle\ ,\ \rangle$. Stoga se Lorencov skalarni proizvod može posmatrati kao nedegenerisana, simetrična bilinearna forma indeksa 1.

2.1.1 Potprostori

Kauzalni karakter potprostora $U \subset \mathbb{R}^3$ određuje se na osnovu osobina skalarnog proizvoda indukovanog na U ($\langle\ ,\ \rangle_U$) pa imamo sledeće mogućnosti:

(1) $\langle\ ,\ \rangle_U$ je pozitivno definitan na U i tada kažemo da je U prostornog tipa

(2) $\langle\ ,\ \rangle_U$ je nedegenerisan i indeksa 1 na U i tada kažemo da je U vremenskog tipa

(3) $\langle\ ,\ \rangle_U$ je degenerisan na U i tada kažemo da je U svetlosnog tipa.

2.1.6 Napomene

1. Potprostor generisan vektorom $v \in \mathbb{R}^3_1$, $Lin\{v\}$, ima isti kauzalni karakter kao i sam vektor.

2. Pojam ortogonalnosti vektora definišemo kao u $\mathbb{R}^3$:

   za u i v kažemo da su ortogonalni ($u \perp v$) akko važi $\langle u, v\rangle = 0$.

3. Na osnovu ortogonalnosti, možemo definisati i pojam ortogonalnog komplementa u $\mathbb{R}^3_1$. Ako je U potprostor od $\mathbb{R}^3_1$, onda je ortogonalni komplement $U^\perp$ od U u $\mathbb{R}^3_1$ dat sa

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle v, u\rangle = 0, \quad \text{za sve} \quad u \in U\}.$$

Postojanje kauzalnog karaktera vektora i potprostora ispunjava ambijent $\mathbb{R}^3_1$ zanimljivim i nesvakidašnjim osobinama, koje ćemo proučiti u narednim propozicijama. Za početak navodimo neke opšte osobine vektorskih prostora koje će nam koristiti u daljim dokazima.

2.1.7 Propozicija *Neka je V $n-$dimenzioni vektorski prostor sa skalarnim proizvodom $\langle\ ,\ \rangle$ i U njegov potprostor. Tada važi:*

(i) $dim(U^\perp) = n - dim(U)$.

(ii) $(U^\perp)^\perp = U$.

(iii) Ako U nije degenerisan, onda ni $U^\perp$ nije degenerisan potprostor.

(iv) $V = U \oplus U^\perp$ *ako i samo ako* $\langle\ ,\ \rangle_U$ *nije degenerisan.*

Naredna propozicija ukazuje na odnos kauzalnog karaktera potprostora i njegovog ortogonalnog komplementa.

2.1.8 Propozicija *Neka je U potprostor prostora $\mathbb{R}^3_1$.*

$$U \text{ je} \left\{ \begin{array}{l} \text{prostornog tipa} \\ \text{vremenskog tipa} \\ \text{svetlosnog tipa} \end{array} \right\} \text{ akko je } U^\perp \left\{ \begin{array}{l} \text{vremenskog tipa} \\ \text{prostornog tipa} \\ \text{svetlosnog tipa} \end{array} \right\}.$$

Dokaz. Pokazaćemo ekvivalenciju za prvi slučaj, na osnovu koje se ostali slučajevi jednostavno izvode primenom osobine $(U^\perp)^\perp = U$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, tj. da je U prostornog tipa i $U^\perp$ nije vremenskog tipa. Jasno je da na osnovu Propozicije 2.1.7 (*iii*) $U^\perp$ ne može biti svetlosnog, te mora biti prostornog tipa. Kako je $\mathbb{R}^3_1 = U \oplus U^\perp$, dobijamo da se proizvoljan vektor vremenskog tipa $v \in \mathbb{R}^3_1$ može zapisati $v = u + \hat{u}$, gde $u \in U$ i $\hat{u} \in U^\perp$. Ali tada je $\langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, \hat{u}\rangle + \langle \hat{u}, \hat{u}\rangle > 0$, što je u kontradikciji sa kauzalnim karakterom vektora v.

($\Leftarrow$) Neka je $U^\perp$ vremenskog tipa. Tada postoji $\hat{u} \in U^\perp$ vremenskog tipa. Uzmimo da je $w = \dfrac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|}$ i w_1, w_2 takvi da skup $\{w_1, w_2, w\}$ čini ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$. Tada je $U = (U^\perp)^\perp \subseteq Lin\{w_1, w_2\}$ i $\langle\ ,\ \rangle$ je pozitivno definitan na $Lin\{w_1, w_2\}$ jer su w_1, w_2 prostornog tipa (svaka ortonormirana baza sadrži tačno jedan vektor vremenskog tipa, a to je u ovom slučaju w). Sledi da je U prostornog tipa. $\square$

2.1.9 Posledica *Ako je v vektor vremenskog (resp. prostornog, svetlosnog) tipa, onda je $v^\perp = Lin\{v\}^\perp$ prostornog (resp. vremenskog, svetlosnog) tipa.*

2.1.10 Propozicija

(i) *Dva vektora svetlosnog tipa $u, v \in \mathbb{R}^3_1$ su linearno zavisna akko $\langle u, v\rangle = 0$.*

(To znači da su vektori svetlosnog tipa ortogonalni akko su paralelni, tj. leže na istoj pravoj svetlosnog konusa.)

(ii) *Ako su u i v vektori svetlosnog ili vremenskog tipa za koje važi $\langle u, v\rangle = 0$, onda oba moraju biti svetlosnog tipa.*

(iii) *Ako su u i v dva vektora vremenskog tipa, onda je $\langle u, v\rangle \neq 0$.*

(Prema tome, dva vektora vremenskog tipa ne mogu biti ortogonalna.)

(iv) Ako je U potprostor svetlosnog tipa, onda je $dim(U \cap U^\perp) = 1$.

Dokaz.

(i) $(\Rightarrow)$ Neka su $u, v \in \mathbb{R}^3_1$ dva linearno zavisna vektora svetlosnog tipa. Tada je $\langle u, u\rangle = 0$, $\langle v, v\rangle = 0$ i postoji $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvo da $u = av$. Stoga $\langle u, v\rangle = \langle av, v\rangle = a\langle v, v\rangle = a0 = 0$.

$(\Leftarrow)$ Neka su $u, v \in \mathbb{R}^3_1$ svetlosnog tipa i $\langle u, v\rangle = 0$. Za proizvoljan vektor $w \in \mathbb{R}^3_1$ vremenskog tipa, na osnovu Posledice 2.1.9 $w^\perp$ je prostornog tipa, pa ne može sadržati vektor svetlosnog tipa (inače skalarni proizvod ne bi bio pozitivno definitan na $w^\perp$). Zbog toga je $\langle w, v\rangle \neq 0$ i $\langle w, u\rangle \neq 0$.

Ako uzmemo $a = -\dfrac{\langle w, u\rangle}{\langle w, v\rangle}$ dobijamo da je $\langle w, u + av\rangle = \langle w, u\rangle + a\langle w, v\rangle = 0$, odnosno $u + av \in w^\perp$. Kako je na $w^\perp$ skalarni proizvod pozitivno definitan, iz $\langle u+av, u+av\rangle = \langle u, u\rangle + 2a\langle u, v\rangle + a^2\langle v, v\rangle = 0$ sledi $u + av = 0$ odnosno $u = -av$.

(ii) Pretpostavimo suprotno, $\langle u, v\rangle = 0$ i bar jedan od vektora je vremenskog tipa. Bez umanjenja opštosti, uzmimo da je v vremenskog tipa. Tada je $\mathbb{R}^3_1 = Lin\{v\} \oplus Lin\{v\}^\perp$, pa u možemo predstaviti kao $u = \lambda v + w$, gde $w \in v^\perp$ ($\langle w, v\rangle = 0$) i w je prostornog tipa. Sada je

$$0 = \langle u, v\rangle = \langle \lambda v + w, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle,$$

pa kako je v vremenskog tipa mora biti $\lambda = 0$. To znači da je $u = w$ i u je prostornog tipa. Kontradikcija.

(iii) Sledi direktno iz (ii).

(iv) Kako je $U \cap U^\perp \subseteq U$ i $U \cap U^\perp \subseteq U^\perp$, na osnovu (i) iz Propozicije 2.1.7, $dim(U \cap U^\perp) \leq 1$. Sa druge strane, U je svetlosnog tipa, pa je $\langle\ ,\ \rangle$ degenerisan na U, odnosno postoji $u \in U \setminus \{0\}$ takav da je za sve $x \in U$ $\langle u, x\rangle = 0$. To znači da $u \in U \cap U^\perp$, pa je $dim(U \cap U^\perp) \geq 1$. Dakle $dim(U \cap U^\perp) = 1$. □

Naredne dve propozicije sadrže potrebne i dovoljne uslove za određivanje kauzalnog karaktera nekih potprostora u $\mathbb{R}^3_1$.

2.1.11 Propozicija *Neka je V ravan u $\mathbb{R}^3_1$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) V je potprostor vremenskog tipa.

(ii) V sadrži dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa.

(iii) V sadrži vektor vremenskog tipa.

Dokaz.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je $\{e_1, e_2\}$ ortonormirana baza potprostora V. Jedan od vektora e_1, e_2 mora biti prostornog (recimo e_1), a drugi vremenskog tipa (e_2). Posmatrajmo sada vektore $e_1 + e_2$ i $e_1 - e_2$. Jasno je da se nalaze u V i iz linearne nezavisnosti vektora e_1 i e_2 sledi i njihova linearna nezavisnost. Na osnovu osobina skalaranog proizvoda i kauzalnog karaktera e_1 i e_2 imamo

$$\langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + 2\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\langle e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle - 2\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Dakle, $e_1 + e_2$ i $e_1 - e_2$ su traženi vektori.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka su $u, v \in V$ dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa. Tada važi $\langle u, u \rangle = 0$, $\langle v, v \rangle = 0$ i $\langle u, v \rangle \neq 0$. Vektori $u + v$ i $u - v$ su u V i jedan od njih je sigurno vremenskog tipa jer

$$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \langle u, u \rangle \pm 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \pm 2\langle u, v \rangle,$$

pa će u jednom slučaju skalarni proizvod biti negativan.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Neka je vektor $v \in V$ vremenskog tipa. Tada je $V^\perp \subseteq v^\perp$ i $v^\perp$ je prostornog tipa. Stoga je i $V^\perp$ prostornog tipa, pa je V vremenskog tipa. □

2.1.12 Propozicija *Neka je U potprostor od* $\mathbb{R}^3_1$*. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) U je potprostor svetlosnog tipa.

(ii) U sadrži vektor svetlosnog tipa i ne sadrži vektor vremenskog tipa.

(iii) $U \cap \mathcal{C} = L \setminus \{0\}$ *i* $dim(L) = 1$.

Dokaz.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Kako je $\langle\ ,\ \rangle$ degenerisan na U, mora postojati vektor svetlosnog tipa. Na osnovu Propozicije 2.1.11 sledi da u U ne može postojati vektor vremenskog tipa.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka je $u \in U$ svetlosnog tipa. Tada je $Lin\{u\} \subseteq U \cap \mathcal{C}$, pa je $dim(U \cap \mathcal{C}) \geq 1$. Ako bi $dim(U \cap \mathcal{C}) = 2$, onda bi u U postojala dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa. Primenom Propozicije 2.1.11 dobijamo da bi tada U sadržao vektor vremenskog tipa, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle, $dim(U \cap \mathcal{C}) = 1$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Na osnovu pretpostavke, znamo da U sadrži vektor svetlosnog tipa, tako da U ne može biti prostornog tipa ($\langle\ ,\ \rangle_U$ nije pozitivno definitan). Takođe U ne sadrži dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa, pa na osnovu Propozicije 2.1.11 U ne može biti ni vremenskog tipa. □

2.1.13 Propozicija *Neka je P ravan u $\mathbb{R}^3_1$ i n_e vektor normale u odnosu na euklidsku metriku. Tada važi*

$$P \text{ je } \left\{ \begin{array}{l} \textit{prostornog tipa} \\ \textit{vremenskog tipa} \\ \textit{svetlosnog tipa} \end{array} \right\} \text{ akko je } n_e \text{ vektor } \left\{ \begin{array}{l} \textit{vremenskog tipa} \\ \textit{prostornog tipa} \\ \textit{svetlosnog tipa} \end{array} \right\}.$$

Dokaz. Neka je jednačina ravni P data sa $ax + by + cz = 0$ i $n_e = \alpha(a, b, c)$. Skup tačaka ravni P možemo predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by - (-c)z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (a, b, -c), (x, y, z) \rangle = 0\} \\ &= Lin\{(a, b, -c)\}^{\perp}. \end{aligned}$$

Primenom Posledice 2.1.9 i činjenice da vektori $(a, b, -c)$, (a, b, c) i n_e imaju isti kauzalni karakter dobijamo traženi rezultat. □

2.2 Vremenski konus i vremenska orijentacija

U prethodnom poglavlju sa $\mathcal{T}$ označili smo skup svih vektora vremenskog tipa. Sada za svaki vektor $u \in \mathcal{T}$ definišemo njegov vremenski konus

$$C_T(u) = \{v \in \mathcal{T} \ \mid \ \langle u, v\rangle < 0\}.$$

Jasno je da $u \in C_T(u)$, pa $C_T(u) \neq \emptyset$. Takođe, na osnovu Propozicije 2.1.10 (iii), za svaki vektor $v \in \mathcal{T}$ važi $\langle u, v\rangle < 0$ ili $\langle u, v\rangle > 0$, pa imamo da

$$(\forall v \in \mathcal{T})(v \in C_T(u) \ \veebar \ v \in C_T(-u)) \quad \text{i} \quad C_T(u) \cap C_T(-u) = \emptyset.$$

U nastavku navodimo neke osobine vremenskih konusa, čiji se dokazi mogu naći u [4, 8].

2.2.1 Propozicija

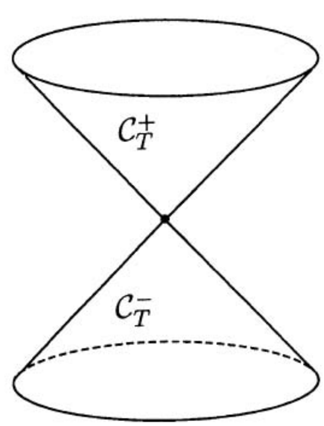
(i) Dva vektora vremenskog tipa u i v leže u istom vremenskom konusu akko $\langle u, v\rangle < 0$.

(ii) $u \in C_T(v)$ akko $v \in C_T(u)$ akko $C_T(u) = C_T(v)$.

(iii) Vremenski konusi su konveksni skupovi.

Na osnovu osobine (ii) može se zaključiti da se, bez obzira na izbor vektora $v \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ sastoji od dva vremenska konusa $C_T(v)$ i $C_T(-v)$. Radi lakšeg označavanja, uzmimo $v = e_3 = (0, 0, 1)$. Tada možemo zapisati

$$\mathcal{T} = C_T^+ \cup C_T^-, \text{ gde je } C_T^+ = C_T(e_3) \text{ i } C_T^- = C_T(-e_3).$$



Slika 2.2: Vremenski konus

Konusi C_T^+ i C_T^- nazivaju se vremenskim konusom budućnosti i vremenskim konusom prošlosti (Slika 2.2[4]), a vektori koji im pripadaju buduće usmerenim, odnosno prošlo usmerenim vektorima.

Može se reći i da je $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}$ buduće (prošlo) usmeren ako $\langle v, e_3 \rangle < 0$, tj. $v_3 > 0$ ($\langle v, -e_3 \rangle < 0$, tj. $v_3 < 0$).

Uočimo da, na osnovu svega navedenog, prilikom izbora ortonormirane baze imamo dve mogućnosti za izbor vektora vremenskog tipa. To nas dovodi do uvođenja pojma *vremenske orijentacije* prostora $\mathbb{R}^3_1$, koji definišemo u nastavku.

Polazimo od skupa svih ortonormiranih baza prostora $\mathbb{R}^3_1$, označenog sa $\mathcal{B}$, i na njemu definišemo relaciju $\sim$. Za $B, B' \in \mathcal{B}$, gde je $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ i e_3 i e'_3 su vektori vremenskog tipa, kažemo da su u relaciji

$$B \sim B' \text{ ako } e_3 \text{ i } e'_3 \text{ leže u istom vremenskom konusu (odnosno } \langle e_3, e'_3 \rangle < 0).$$

Lako se pokazuje da je $\sim$ relacija ekvivalencije i da na $\mathcal{B}$ pravi dve klase ekvivalencije, koje nazivamo *vremenskim orijentacijama*. Svakoj vremenskoj orijentaciji odgovara jedan vremenski konus (C_T^+ ili C_T^-) i obratno, svakom vremenskom konusu odgovara jedna klasa ekvivalencije na $\mathcal{B}$.

Pod vremenski orijentisanim prostorom Minkovskog smatramo $\mathbb{R}^3_1$ sa odabranom (fiksiranom) vremenskom orijentacijom (klasom ekvivalencije $[B]_\sim$, $B \in \mathcal{B}$).

2.2.2 Napomena Pored vremenske, u $\mathbb{R}^3_1$ definiše se i orijentacija kao u $\mathbb{R}^3$ u smislu da se za bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$ kaže da je pozitivno (negativno) orijentisana ako je $det(e_1, e_2, e_3) > 0$ ($det(e_1, e_2, e_3) < 0$).

[4]Slika je preuzeta iz [3].

2.3 Vektorski proizvod

Pri uvođenju vektorskog proizvoda, polazimo od iste ideje kao u euklidskom okruženju.

2.3.1 Definicija *Za vektore* $u, v \in \mathbb{R}^3_1$ *njihov (Lorencov) vektorski proizvod je jedinstveni vektor* $u \times v$ *koji za svako* $w \in \mathbb{R}^3_1$ *zadovoljava jednakost*

$$\langle u \times v, w\rangle = det(u, v, w), \tag{2.1}$$

gde je $det(u, v, w)$ *determinanta čije su kolone koordinate vektora* u, v, w *redom, u odnosu na standardnu bazu.*

Postojanje i jedinstvenost vektora $u \times v$ proizilaze iz bilinearnosti skalarnog proizvoda. Ako u jednakosti (2.1) umesto w stavimo redom vektore baze e_1, e_2, e_3, dobićemo sledeću jednakost za izračunavanje vektorskog proizvoda preko koordinata vektora

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

2.3.2 Propozicija *Lorencov vektorski proizvod zadovoljava sledeće osobine:*

(i) $u \times v = -v \times u$,

(ii) $u \times v$ *je ortogonalan na vektore* u *i* v,

(iii) $u \times v = 0$ *akko su* u *i* v *kolinearni,*

(iv) $\langle u \times v, u \times v\rangle = \langle u, v\rangle^2 - \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$.

Dokaz. Osobine (i), (ii) i (iii) slede na osnovu jednakosti (2.1) i (2.2) i osobina determinanti.
(iv) Neka su vektori $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$ iz $\mathbb{R}^3_1$. Izračunavanjem determinante (2.2) dobijamo da se vektor $u \times v$ može predstaviti preko koordinata kao

$$u \times v = (u_2v_3 - v_2u_3, -(u_1v_3 - u_3v_1), -(u_1v_2 - v_1u_2)).$$

Tada je

$$\begin{aligned} \langle u \times v, u \times v\rangle &= (u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 - (u_1v_2 - v_1u_2)^2 \\ &= v_2^2(u_3^2 - u_1^2) + v_1^2(u_3^2 - u_2^2) + v_3^2(u_1^2 + u_2^2) + 2u_1v_2u_2v_1 - \\ &- 2u_1v_3u_3v_1 - 2u_2v_3u_3v_2. \end{aligned}$$

Ako u prvoj zagradi dodamo i oduzmemo u_2^2, u drugoj u_1^2, u trećoj u_3^2 i grupišemo odgovarajuće članove, dobijamo

$$\begin{aligned}\langle u \times v, u \times v\rangle &= -(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) + (u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3)^2 \\ &= -\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle + \langle u, v\rangle^2.\end{aligned}$$

□

2.4 Neke izometrije u $\mathbb{R}^3_1$

Preslikavanje prostora u sebe samog koje očuvava rastojanje između njegovih elemenata jeste izometrija. U slučaju prostora Minkovskog, linearna transformacija $L : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ biće izometrija ako je Lorencov skalarni proizvod invarijantan u odnosu na nju, tj. ako važi

$$\langle L(x), L(x)\rangle = \langle x, x\rangle.$$

Ako su $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $\widehat{B} = \{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3\}$ dve ortonormirane baze $\mathbb{R}^3_1$, takve da je $L(e_i) = \widehat{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, onda L možemo predstaviti preko matrice Λ čije su kolone koordinate vektora e_i predstavljenih u bazi $\widehat{B}$.

Da bi L bila izometrijska transformacija, Λ treba da zadovoljava uslov

$$\Lambda^T G \Lambda = G.$$

Izometrije prostora Minkovskog nazivaju se *Lorencovim transformacijama*, a njihove matrice sa uobičajenom operacijom množenja, obrazuju *Lorencovu grupu.*

Specijalan slučaj Lorencovih transformacija su takozvane *ortohrone transformacije* koje čuvaju i vremensku orijentaciju prostora. Tačnije, buduće (prošlo) usmerene vremenske vektore slikaju u buduće (prošlo) usmerene.

U nastavku ćemo navesti jednu vrstu ortohronih Lorencovih transformacija, koje ćemo kasnije koristiti. U pitanju su bustovi[5], transformacije koje fiksiraju pravu l iz $\mathbb{R}^3_1$ i čiji bi analogon u $\mathbb{R}^3$ bile rotacije oko ose l.

Pravu l možemo posmatrati kao $1-$dimenzioni potprostor generisan vektorom $u \in \mathbb{R}^3_1$, pa u zavisnosti od njegovog kauzalnog karaktera imamo 3 vrste takvih transformacija.

[5] U engleskom jeziku koristi se termin *boost.*

1. <u>l je vremenskog tipa.</u> Uzmimo da je $e_3 = (0,0,1)$ i $l = Lin\{e_3\}$. Tada matrica odgovarajuće transformacije, Λ, ima oblik

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

2. <u>l je prostornog tipa.</u> Uzmimo da je $l = Lin\{e_1\}$, $e_1 = (1,0,0)$. Matrica je u tom slučaju data sa

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

3. <u>l je svetlosnog tipa.</u> U ovom slučaju uzećemo da je l dijagonala (x_2, x_3)-ravni, tj. $l = Lin\{e_2 + e_3\}$, $e_2 + e_3 = (0,1,1)$. Tada je

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \varphi & -\varphi \\ -\varphi & 1 - \frac{\varphi^2}{2} & \frac{\varphi^2}{2} \\ -\varphi & -\frac{\varphi^2}{2} & 1 + \frac{\varphi^2}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Glava 3

Krive u prostoru $\mathbb{R}^3_1$

U ovoj glavi upoznaćemo se sa teorijom krivih u prostoru Minkovskog. Najpre ćemo navesti osnovne pojmove i osobine krivih, zatim definisati Freneov okvir, uvesti pojam krivine i torzije, izvesti Freneove jednačine i na kraju predstaviti fundamentalnu teoremu za krive u $\mathbb{R}^3_1$.

Naglasimo da su pravila diferencijalnog i integralnog računa ista kao u $\mathbb{R}^3$ jer ne zavise od metričke strukture prostora. Zbog toga se pojmovi tangentni vektor, parametrizovana kriva, regularna kriva i dužina luka krive definišu na isti način kao što je opisano u 1.1.

3.1 Osnovni pojmovi

3.1.1 Definicija *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ regularna kriva. Kažemo da je c*

(1) prostornog tipa u tački $t \in I$ ako je vektor $\dot{c}(t)$ prostornog tipa

(2) vremenskog tipa u tački $t \in I$ ako je vektor $\dot{c}(t)$ vremenskog tipa

(3) svetlosnog tipa u tački $t \in I$ ako je vektor $\dot{c}(t)$ svetlosnog tipa.

Za krivu c kažemo da je prostornog (resp. vremenskog, svetlosnog) tipa ako je prostornog (resp. vremenskog, svetlosnog) tipa u svakoj tački intervala I.

Iz definicije sledi da su sve krive vremenskog i svetlosnog tipa regularne.

3.1.2 Primeri

1. Prava u $\mathbb{R}^3_1$, čija je jedna parametrizacija $c(t) = p + tv$, $p, v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, ima isti kauzalni karakter kao vektor pravca v jer je $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = \langle v, v \rangle$.

2. Kružna zavojnica $c(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$, $h \neq 0$, $r > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ ima tangentni vektor $\dot{c}(t) = (-r\sin t, r\cos t, h)$, za koji je $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = r^2 - h^2$, pa u zavisnosti od odnosa parametara r i h ona će biti različitog kauzalnog karaktera:

   (1) $r^2 > h^2 \Rightarrow c$ je prostornog tipa

   (2) $r^2 < h^2 \Rightarrow c$ je vremenskog tipa

   (3) $r^2 = h^2 \Rightarrow c$ je svetlosnog tipa.

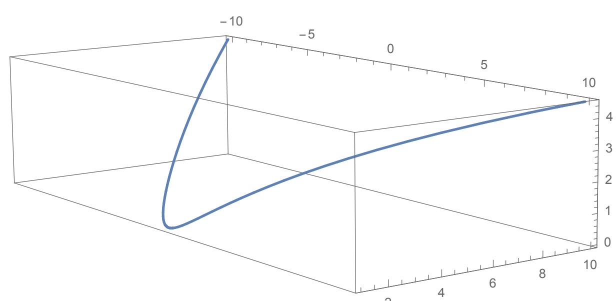
3. Neka je kriva $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ data sa $c(t) = (\cosh t, \frac{t^2}{2}, \sinh t)$. c je regularna jer $\dot{c}(t) = (\sinh t, t, \cosh t) \neq (0, 0, 0)$, a na osnovu kauzalnog karaktera $\dot{c}(t)$ imamo sledeće slučajeve:

   (1) $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = t^2 - 1 > 0$ za $t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

   (2) $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = t^2 - 1 < 0$ za $t \in (-1, 1)$

   (3) $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = t^2 - 1 = 0$ za $t \in \{-1, 1\}$

   Na Slici 3.1 dat je grafik krive za $t \in [-5, 5]$.



Slika 3.1: Grafik krive 3.

U Primeru 3. vidimo da vektor $\dot{c}(t)$ nije istog karaktera u svim tačkama intervala na kom je kriva definisana. To ukazuje da u $\mathbb{R}^3_1$ krive ne moraju obavezno biti jednog od tri navedena tipa. Ono što se može pokazati na osnovu neprekidnosti skalarnog proizvoda jeste da ako je kriva prostornog ili vremenskog tipa u tački $t_0 \in I$, onda je ona tog tipa na nekom otvorenom intervalu koji sadrži tačku t_0.

U narednim teoremama videćemo da u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ ne postoji globalna teorija krivih, tačnije da se ona svodi na teoriju u $\mathbb{R}^3$. Podsetimo se da globalna teorija krivih izučava zatvorene krive.

Za regularnu krivu $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je *zatvorena* ako postoji periodična regularna kriva $\widetilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, takva da je $\widetilde{c}|_{[a,b]} = c$, $\widetilde{c}(t+b-a) = \widetilde{c}(t)$, $c(a) = c(b)$ i $\dot{c}(a) = \dot{c}(b)$.

3.1.3 Teorema *Neka je c zatvorena regularna kriva u $\mathbb{R}^3_1$, sadržana u ravni P. Ako je c prostornog tipa, onda je i ravan P prostornog tipa.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je c prostornog, a P nije prostornog tipa. Onda je P svetlosnog ili vremenskog tipa. Pokazaćemo da oba slučaja vode u kontradikciju.

Ako je P vremenskog tipa, uzmimo da je $P = Lin\{e_1, e_2\}$, tj. da je data jednačinom $x = 0$. Tada je $c(t) = (0, y(t), z(t))$ i funkcija $y(t)$ dostiže maksimum u nekoj tački $t_0 \in [a,b]$ (neprekidna na zatvorenom intervalu). To znači da je $\dot{y}(t_0) = 0$ i $\dot{c}(t_0) = (0, 0, \dot{z}(t_0))$, a kako je c regularna kriva mora biti $\dot{z}(t_0) \neq 0$. Sada je $\langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = -\dot{z}(t_0)^2 < 0$, odnosno kriva je vremenskog tipa u tački t_0. Kontradikcija.

Ako je P svetlosnog tipa, uzmimo da je jednačina ravni $y - z = 0$. Tada je $c(t) = (x(t), y(t), y(t))$ i ako je t_0 tačka maksimuma funkcije $x(t)$ imamo $\dot{c}(t_0) = (0, \dot{y}(t_0), \dot{y}(t_0))$. Zbog regularnosti, sledi $\dot{y}(t_0) \neq 0$, ali to znači da je $\langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = \dot{y}(t_0)^2 - \dot{y}(t_0)^2 = 0$, odnosno c je svetlosnog tipa u tački t_0. Kontradikcija. $\square$

3.1.4 Teorema *Ne postoji zatvorena kriva u $\mathbb{R}^3_1$ koja je vremenskog ili svetlosnog tipa.*

Dokaz. Neka je c zatvorena kriva u $\mathbb{R}^3_1$, $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Tada postoji tačka t_0 u kojoj funkcija $z(t)$ dostiže maksimum i za koju je $\dot{z}(t_0) = 0$. U tom slučaju je $\langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = \dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2 \geq 0$, pa c nije vremenskog tipa u tački t_0, a samim tim nije vremenskog tipa. Ako bi c bila svetlosnog tipa, onda bi moralo biti ispunjeno $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$, pa kriva ne bi bila regularna u tački t_0, što vodi u kontradikciju. $\square$

Zaključujemo da ne postoji teorija o zatvorenim krivama u $\mathbb{R}^3_1$ koje su vremenskog ili svetlosnog tipa, dok se slučaj zatvorenih krivih prostornog tipa svodi na teoriju o zatvorenim krivama u euklidskom prostoru jer je ravan prostornog tipa izomorfna sa $\mathbb{R}^2$.

3.1.1 Parametrizacija dužinom luka

Poznato je da se u prostoru $\mathbb{R}^3$ svaka regularna kriva može parametrizovati dužinom luka. U prostoru Minkovskog isto važi za regularne krive prostornog ili vremenskog tipa i videćemo da se na isti način dolazi do odgovarajuće reparametrizacije, dok je za krive svetlosnog tipa pristup drugačiji i uvodi se pseudo-parametrizacija.

3.1.5 Propozicija *Neka je* $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3_1$ *regularna kriva prostornog ili vremenskog tipa. Tada postoji interval* $\widehat{I} \subset \mathbb{R}$ *i difeomorfizam* $\varphi : \widehat{I} \to [a,b]$ *takvi da za krivu* $\widehat{c} : \widehat{I} \to \mathbb{R}^3_1$*, datu sa* $\widehat{c} = c \circ \varphi$*, u svakoj tački* $u \in \widehat{I}$ *važi* $\|\widehat{c}'(u)\| = 1$*.*

Dokaz. Definišemo preslikavanje $s : [a,b] \to [0,l]$ na sledeći način

$$s(t) = L_a^t = \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau.$$

Ako je kriva c prostornog tipa, onda u svakoj tački $t \in [a,b]$ važi $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle > 0$ (nula ne može biti zbog regularnosti), a ako je vremenskog tipa, u svakoj tački $t \in [a,b]$ važi $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle < 0$.

Stoga, u oba slučaja je zadovoljeno $s'(t) = \|\dot{c}(t)\| = \sqrt{|\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|} > 0$, pa je s difeomorfizam i traženo preslikavanje je $\varphi = s^{-1}$ i $\widehat{I} = [0,l]$.

To znači da je odgovarajuća reparametrizacija dužinom luka $\widehat{c} = c \circ \varphi = c \circ s^{-1}$, jer koristeći pravilo za izvod složene i inverzne funkcije dobijamo da u svakoj tački važi

$$\|\widehat{c}'(u)\| = \|(c \circ s^{-1})'(u)\| = \|c'(s^{-1}(u))\| \frac{1}{s'(s^{-1}(u))} = 1.$$

□

3.1.6 Primer

U drugom primeru 3.1.2 videli smo da kružna zavojnica $c(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$, $t \in [0, 2\pi]$, može biti različitog kauzalnog karaktera.

Sada ćemo za slučaj kada je kriva je prostornog tipa, tj. kada važi $r^2 - h^2 > 0$, naći njenu parametrizaciju dužinom luka. Već smo izračunali da je $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle} = \sqrt{r^2 - h^2}$, pa definišemo

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 - h^2} d\tau = \sqrt{r^2 - h^2} t,$$

odakle sledi $t = \dfrac{s}{\sqrt{r^2 - h^2}}$. Time dobijamo da je parametrizacija dužinom luka za kružnu zavojnicu data sa $c(s) = (r\cos(\dfrac{s}{\sqrt{r^2-h^2}}), r\sin(\dfrac{s}{\sqrt{r^2-h^2}}), \dfrac{hs}{\sqrt{r^2-h^2}})$.

Za slučaj kada je $r^2 - h^2 < 0$, odnosno kada je zavojnica vremenskog tipa, odgovarajuća zamena parametara će biti $t = \dfrac{s}{\sqrt{|r^2 - h^2|}}$.

U slučaju krive svetlosnog tipa u svakoj tački krive važi $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle = 0$. Diferenciranjem dobijamo $\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle = 0$, pa na osnovu Propozicije 2.1.10 zaključujemo da $\ddot{c}(t)$ ne može biti vremenskog tipa. Razmatramo dve mogućnosti:

(1) ako je $\ddot{c}(t)$ svetlosnog tipa, onda su $\ddot{c}(t)$ i $\dot{c}(t)$ linearno zavisni, pa za neko $k \in \mathbb{R}$ važi $\ddot{c}(t) = k\dot{c}(t)$. Rešavanjem ove diferencijalne jednačine dobijamo

$$c(t) = ae^{kt} + b, \text{ gde su } a, b \in \mathbb{R}^3_1 \text{ i } a \text{ je vektor svetlosnog tipa.}$$

To znači da c predstavlja parametrizaciju prave svetlosnog tipa.

(2) ako je $\ddot{c}(t)$ je prostornog tipa, onda možemo naći odgovarajuću reparametrizaciju krive c za koju je $\|\ddot{c}(s)\| = 1$ i tada kažemo da je c *pseudo-parametrizovana dužinom luka.* Postupak je opisan u narednoj teoremi.

3.1.7 Teorema *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kriva svetlosnog tipa, čija putanja nije prava linija. Tada postoji reparametrizacija od c data sa $\hat{c}(s) = (c \circ \varphi)(s)$, za koju je $\|\hat{c}''(s)\| = 1$.*

Dokaz. Ako označimo $\hat{c}(s) = (c \circ \varphi)(s)$ i primenimo pravilo za izvod složene funkcije dobijamo da je $\hat{c}''(s) = \varphi''(s)\dot{c}(t) + \varphi'(s)^2\ddot{c}(t)$. Sledi

$$\|\hat{c}''(s)\|^2 = \langle \hat{c}''(s), \hat{c}''(s)\rangle = \varphi'(s)^4\langle \ddot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle = \varphi'(s)^4\|\ddot{c}(t)\|^2.$$

Da bi $\|\hat{c}''(s)\| = 1$ dovoljno je odrediti $\varphi(s)$ tako da zadovoljava jednačinu

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\ddot{c}(\varphi(s))\|}}.$$

$\square$

3.1.8 Primer Kružna zavojnica $c(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$, $t \in [0, 2\pi]$ je svetlosnog tipa ako važi $r^2 = h^2$. Uzmimo da je $h = r$ (analogno bi bilo i u slučaju kada je $h = -r$). Tada je vektor prvog izvoda $\dot{c}(t) = (-r\sin t, r\cos t, r)$, $\|\dot{c}(t)\| = 0$, a vektor drugog izvoda je $\ddot{c}(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0)$ i $\|\ddot{c}(t)\| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = r$.

Ako hoćemo da zavojnica bude pseudo-parametrizovana dužinom luka, treba naći preslikavanje $\varphi(s)$ za koje je $\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\ddot{c}(\varphi(s))\|}} = \frac{1}{\sqrt{r}}$. Integracijom dobijamo da je jedno rešenje $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{r}}$ i da je tražena pseudo-parametrizacija

$$c(s) = (r\cos(\frac{s}{\sqrt{r}}), r\sin(\frac{s}{\sqrt{r}}), \sqrt{r}s).$$

3.1.9 Napomena Reparametrizacijom krive ne menja se njen kauzalni karakter. Naime, ako je $\hat{c} = c \circ \varphi$ reparametrizacija krive c, onda je $\hat{c}'(s) = \dot{c}(\varphi(s))\varphi'(s)$. Sledi

$$\langle \hat{c}'(s), \hat{c}'(s)\rangle = \varphi'(s)^2 \langle \dot{c}(\varphi(s)), \dot{c}(\varphi(s))\rangle,$$

pa su vektori $\hat{c}'(s)$ i $\dot{c}(t)$ istog kauzalnog karaktera.

3.2 Freneov okvir i Freneove jednačine

U ovom poglavlju ćemo, razmatrajući posebno svaki od slučajeva kauzalnog karaktera krive, videti kako izgledaju Freneov okvir i Freneove jednačine u $\mathbb{R}^3_1$, kao i funkcije krivine i torzije.

Posmatraćemo glatke krive c parametrizovane ili pseudo-parametrizovane dužinom luka koje nisu prave linije.

Specijalno, ako je c prava, jedan oblik parametrizacije je $c(s) = sv + p$ ($v \in \mathbb{R}^3_1$ je vektor pravca, a p je tačka na pravoj). Tada je $c'(s) = v = const$ i $c'' = 0$, pa nema promene tangentnog vektora duž krive i kažemo da je u tom slučaju krivina nula. Sa druge strane, ako pođemo od toga da za neku krivu važi $c''(s) = 0$, dvostrukom integracijom dobijamo da je $c(s) = sv + p$, tj. da je c prava u $\mathbb{R}^3_1$.

Takođe, može se desiti da se prava parametrizuje tako da nije u svakoj tački $c''(t) = 0$, na primer $c(t) = e^t v + p$, ali u tom slučaju su $c'(t)$ i $c''(t)$ kolinearni vektori.

Zbog toga ćemo, da bi izbegli slučaj prave linije, zahtevati da je za svako s ispunjen uslov $c''(s) \neq 0$ i da vektori $c'(s)$ i $c''(s)$ nisu kolinearni.

Vektore Freneovog okvira označavaćemo sa

- $T(s) = c'(s)$ - tangentni vektor
- $N(s)$ - vektor normale
- $B(s)$ - vektor binormale.

Napomenimo da su, bez obzira na kauzalni karakter krive, vektori $T(s)$ i $T'(s)$ ortogonalni. Taj rezultat se dobija diferenciranjem jednakosti $\langle T(s), T(s)\rangle = \mu$, gde μ u zavisnosti od karaktera vektora $T(s)$ može biti 1, -1 ili 0.

Za konstrukciju Freneovog okvira i izvođenje Freneovih jednačina biće nam potrebne osobine Lorencovog vektorskog proizvoda i postupak predstavljanja vektora iz $\mathbb{R}^3_1$ preko vektora ortonormirane baze.

Ako su data dva jedinična vektora e_1 i e_2, takva da je $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ i $\langle e_1, e_1\rangle = \epsilon$, $\langle e_2, e_2\rangle = \eta$, gde $\epsilon, \eta \in \{1, -1\}$, onda za $e_3 := e_1 \times e_2$ na osnovu Propozicije 2.3.2 (ii), (iv) važi

$$\langle e_3, e_1\rangle = 0,\ \langle e_3, e_2\rangle = 0 \text{ i } \langle e_3, e_3\rangle = \langle e_1, e_2\rangle^2 - \langle e_1, e_1\rangle\langle e_2, e_2\rangle = -\epsilon\eta,$$

pa skup $\{e_1, e_2, e_3\}$ čini ortonormiran sistem u $\mathbb{R}^3_1$.

Za proizvoljan vektor $X = X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$ ispunjeno je:

$$\langle X, e_i\rangle = X_i\langle e_i, e_i\rangle = \mu_i X_i, \text{ gde je } \mu_1 = \epsilon,\ \mu_2 = \eta,\ \mu_3 = -\epsilon\eta \in \{1, -1\},$$

pa samim tim važi $X_i = \mu_i\langle X, e_i\rangle$, za $i = 1, 2, 3$. Stoga se X može zapisati kao

$$X = \epsilon\langle X, e_1\rangle e_1 + \eta\langle X, e_2\rangle e_2 - \epsilon\eta\langle X, e_3\rangle e_3. \tag{3.1}$$

3.2.1 Krive vremenskog tipa

Neka je c prirodno parametrizovana kriva vremenskog tipa. Tada je u svakoj tački krive $T(s)$ vektor vremenskog, a prema Posledici 2.1.9 $T'(s) \neq 0$ prostornog tipa. Krivinu krive c, $\kappa(s)$ i vektor normale $N(s)$ definišemo kao

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| \quad \text{i} \quad N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}.$$

Može se zapisati $T'(s) = \kappa(s)N(s)$, odnosno $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle$.

Vektor binormale dobijamo kao Lorencov vektorski proizvod tangentnog vektora i vektora normale

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Kako je $B(s)$ ortogonalan sa $T(s)$, mora biti prostornog tipa.

Time dolazimo do Freneovog 3-okvira $\{T(s), N(s), B(s)\}$, koji za svako s čini ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$. Kako je ispunjeno $det(T(s), N(s), B(s)) = \langle T(s) \times N(s), B(s)\rangle = \langle B(s), B(s)\rangle = 1 > 0$, baza je i pozitivno orijentisana.

Torziju definišemo kao vrednost $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle$ i time imamo sve potrebne veličine za izvođenje Freneovih jednačina, koje dobijamo predstavljanjem $T'(s)$, $N'(s)$ i $B'(s)$ preko vektora Freneove baze, oslanjajući se na postupak kao u (3.1). U nastavku ćemo koristiti oznake T, N, B umesto $T(s), N(s), B(s)$ radi kraćeg zapisa.

Kako je $\langle T, T\rangle = -1$, $\langle N, N\rangle = 1$ i $\langle B, B\rangle = 1$, vektori T', N', B' su sledećeg oblika:

(1) $T' = -\langle T', T\rangle T + \langle T', N\rangle N + \langle T', B\rangle B$
Zbog ortogonalnosti T' sa T i B prvi i treći sabirak su jednaki nuli, a $\langle T', N\rangle = \kappa$, pa imamo
$$T' = \kappa N.$$

(2) $N' = -\langle N', T\rangle T + \langle N', N\rangle N + \langle N', B\rangle B$
Diferenciranjem $\langle T, N\rangle = 0$ i $\langle N, N\rangle = 1$ dobijamo $\langle N', T\rangle = -\langle T', N\rangle = -\kappa$ i $\langle N', N\rangle = 0$. Uvodimo veličinu $\tau = \langle N', B\rangle$, koja predstavlja torziju. Time dobijamo da je druga Freneova jednačina
$$N' = \kappa T + \tau B.$$

(3) $B' = -\langle B', T\rangle T + \langle B', N\rangle N + \langle B', B\rangle B$
Diferenciranje jednačina $\langle B, T\rangle = 0$, $\langle B, N\rangle = 0$ i $\langle B, B\rangle = 1$, redom,

dobijamo $\langle B', T\rangle = -\langle T', B\rangle = 0$, $\langle B', N\rangle = -\langle N', B\rangle = -\tau$ i $\langle B', B\rangle = 0$, odnosno

$$B' = -\tau N.$$

Jednačine predstavljene u matričnom obliku:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

3.2.2 Krive prostornog tipa

Neka je kriva c prostornog tipa. Tada je tangentni vektor $T(s)$ prostornog tipa, dok za vektor $T'(s)$ imamo više mogućnosti.

T' je prostornog tipa

U ovom slučaju je, kao kod krive vremenskog tipa, krivina $\kappa(s) = \|T'(s)\|$, vektor normale $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ i vektor binormale $B(s) = T(s) \times N(s)$, s tim što je sada $\epsilon = \langle T, T\rangle = 1$, $\eta = \langle N, N\rangle = 1$, $\langle B, B\rangle = -\epsilon\eta = -1$ i $B(s)$ je vremenskog tipa, pa je $det(T, N, B) = \langle T \times N, B\rangle = \langle B, B\rangle < 0$ i Freneov okvir $\{T, N, B\}$ je negativno orijentisan. Torzija je data sa $\tau(s) = -\langle N', B\rangle$, a znak minus se javlja jer je B vremenskog tipa. Predstavljajući vektore T', N', B' preko baze $\{T, N, B\}$ dobijamo Freneove jednačine u sledećem obliku:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

T' je vremenskog tipa

Veličine $\kappa(s)$, $N(s)$ i $B(s)$ definišu se kao u prethodnom slučaju, a razlika je u tome što sada važi $\epsilon = 1$, $\eta = -1$, $\langle B, B\rangle = 1$ i B je prostornog tipa. Baza $\{T, N, B\}$ je pozitivno orijentisana, a torzija je data sa $\tau = \langle N', B\rangle$. Freneove jednačine su

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

T' je svetlosnog tipa

U ovom slučaju je $\|T'\| = \sqrt{\langle T', T' \rangle} = 0$, pa se ne uvodi pojam krivine, dok je vektor normale $N(s) = T'(s)$.

Kako je T prostornog tipa, $Lin\{T\}^{\perp}$ je vremenskog tipa, pa sadrži dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa. Jedan od njih je $N(s)$ ($\langle T', T \rangle = 0$), a drugi vektor ćemo uzeti za vektor binormale $B(s)$, s tim što njegove koordinate određujemo tako da važi $\langle N(s), B(s) \rangle = -1$.

Ovako dobijen Freneov okvir $\{T, N, B\}$ je skup linearno nezavisnih vektora, ali nije ortonormiran sistem. Zbog toga što sadrži vektore svetlosnog tipa (nul vektore), naziva se i nul okvir[1].

Funkcija $\tau(s)$, data izrazom $\tau(s) = -\langle N', B \rangle$ naziva se *pseudo-torzija*, a Freneove jednačine su

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

3.2.3 Krive svetlosnog tipa

Posmatramo krivu c, pseudo parametrizovanu dužinom luka, za koju je tangentni vektor $T(s) = c'(s)$ svetlosnog tipa, za svako s. Za vektor normale uzimamo vektor $N(s) = T'(s)$. Iz ortogonalnosti sa $T(s)$ sledi da $T'(s)$ može biti prostornog ili svetlosnog tipa, ali kako vektori c' i c'' nisu kolinearni, onda T i T' nisu linearno zavisni, pa na osnovu Propozicije 2.1.10 (i) sledi da T' mora biti prostornog tipa. Zbog pseudo parametrizacije dužinom luka, $T'(s)$ je i jedinični vektor, pa se krivina krive ne definiše jer važi $\langle T', N \rangle = \langle T', T' \rangle = 1$.

Za vektor binormale uzimamo vektor svetlosnog tipa $B(s)$, linearno nezavisan sa $T(s)$ i ortogonalan na $N(s)$, takav da važi $\langle B, T \rangle = -1$. Time opet dobijamo da je Freneov okvir $\{T, N, B\}$ nul okvir.

Pseudo-torzija je funkcija $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s) \rangle$, dok su Freneove jednačine oblika

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

3.2.1 Definicija *U prostoru Minkovskog $\mathbb{R}^3_1$, Freneove krive su krive vremenskog ili prostornog tipa, parametrizovane dužinom luka, za koje važi $\langle c'', c'' \rangle \neq 0$ (vektor normale je prostornog ili vremenskog tipa).*

[1] Null frame.

Za Freneove krive, Freneove jednačine se mogu objediniti na sledeći način.

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\eta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \epsilon\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

U nastavku videćemo primere Freneovih jednačina za neke od gore navedenih slučajeva krive.

3.2.2 Primeri

1. U Primeru 3.1.6 videli smo kako izgleda prirodna parametrizacija kružne zavojnice. Sada ćemo za slučaj krive vremenskog tipa ($r = 4$ i $h = 5$) naći Freneov okvir.

   Neka je $c(t) = (4\cos(\frac{s}{3}), 4\sin(\frac{s}{3}), \frac{5s}{3})$.

   Tangentni vektor je $T(s) = c'(s) = (-\frac{4}{3}\sin(\frac{s}{3}), \frac{4}{3}\cos(\frac{s}{3}), \frac{5}{3})$ i $\langle T(s), T(s)\rangle = -1$.

   Vektor normale $N(s) = (-\cos(\frac{s}{3}), -\sin(\frac{s}{3}), 0)$ je prostornog tipa.

   Za vektor binormale dobija se $B(s) = T(s) \times N(s) = (\frac{5}{3}\sin(\frac{s}{3}), -\frac{5}{3}\cos(\frac{s}{3}), -\frac{4}{3})$, i on je takođe prostornog tipa.

   Krivina i torzija su konstantne i iznose $\kappa = \frac{4}{9}$, $\tau = \frac{5}{9}$.

2. Sledeća kriva je kružna zavojnica prostornog tipa ($r = 5$, $h = 4$) i data je jednačinom
$$c(t) = (5\cos(\frac{s}{3}), 5\sin(\frac{s}{3}), \frac{4s}{3}).$$

   Vektori Freneovog okvira su: $T(s) = c'(s) = (-\frac{5}{3}\sin(\frac{s}{3}), \frac{5}{3}\cos(\frac{s}{3}), \frac{4}{3})$, koji je prostornog tipa.

   Dalje je $T'(s) = (-\frac{5}{9}\cos(\frac{s}{3}), -\frac{5}{9}\sin(\frac{s}{3}), 0)$, pa sledi da je vektor normale $N(s) = (-\cos(\frac{s}{3}), -\sin(\frac{s}{3}), 0)$ takođe prostornog tipa, a krivina iznosi $\kappa = \frac{5}{9}$.

   Sada je $B(s) = (\frac{4}{3}\sin(\frac{s}{3}), \frac{4}{3}\cos(\frac{s}{3}), -\frac{5}{3})$ vremenskog tipa, a torzija $\tau = \frac{4}{9}$.

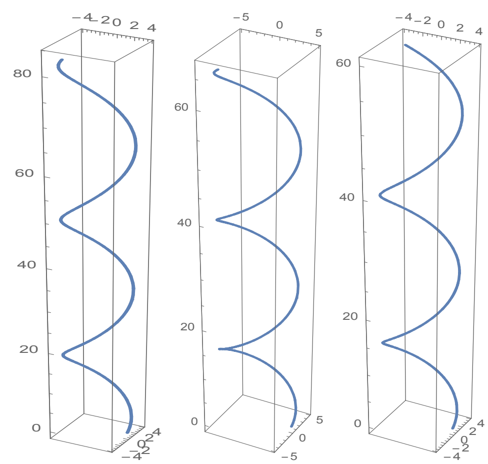
3. Posmatrajmo sada krivu svetlosnog tipa iz Primera 3.1.8 za $r = h = 4$, pseudo-parametrizovanu dužinom luka, $c(s) = (4\cos(\frac{s}{2}), 4\sin(\frac{s}{2}), 2s)$.

   Tangentni vektor $T(s) = (-2\sin(\frac{s}{2}), 2\cos(\frac{s}{2}), 2)$ je svetlosnog tipa, a $N(s) = c''(s) = (-\cos(\frac{s}{2}), -\sin(\frac{s}{2}), 0)$ je prostornog i $||N(s)|| = 1$.

Sada za vektor binormale uzimamo vektor svetlosnog tipa, ortogonalan na N i linearno nezavisan sa T, takav da važi $\langle B, T\rangle = -1$. Iz tri navedena uslova dobijamo tri jednačine iz kojih možemo izračunati koordinate vektora $B = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{array}{lcl} \langle B, B\rangle = 0 & \Rightarrow & b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0 \\ \langle B, N\rangle = 0 & \Rightarrow & -b_1\cos(\frac{s}{2}) - b_2\sin(\frac{s}{2}) = 0 \\ \langle B, T\rangle = -1 & \Rightarrow & -2b_1\sin(\frac{s}{2}) + 2b_2\cos(\frac{s}{2}) - 2b_3 = -1. \end{array}$$

Rešenje je $B(s) = (\frac{1}{4}\sin(\frac{s}{2}), -\frac{1}{4}\cos(\frac{s}{2}), \frac{1}{4})$, a pseudo-torzija ove krive data je sa $\tau = -\langle N', B\rangle = -\frac{1}{8}$.



Slika 3.2: Grafici krivih iz Primera 1., 2. i 3.

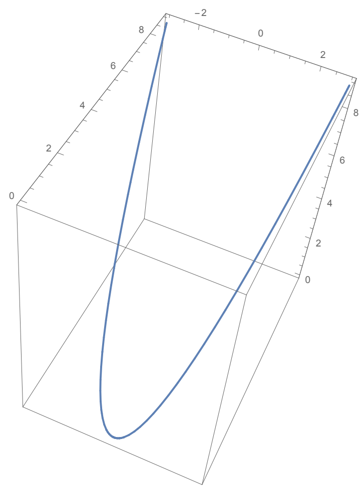
4. Kriva $c(s) = (s, s^2, s^2)$ je prostornog tipa sa vektorom normale svetlosnog tipa. U tom slučaju imamo nul okvir, koji čine vektori:

$$T(s) = (1, 2s, 2s),\ N(s) = (0, 2, 2) \text{ i } B(s) = (s, s^2 - \tfrac{1}{4}, s^2 + \tfrac{1}{4}).$$

Vektor binormale određujemo kao u prethodnom primeru, koristeći uslove koji treba da zadovoljavaju vektori T, N, B:

$$\langle B, B\rangle = 0,\ \langle B, N\rangle = -1 \text{ i } \langle B, T\rangle = 0.$$

U ovom slučaju krivina se ne definiše, a $\tau = 0$ jer je $N' = 0$. Ova kriva leži u ravni generisanoj vektorima $(1, 1, 1)$ i $(-1, 1, 1)$, koja je svetlosnog tipa.



Slika 3.3: Grafik krive iz Primera 4.

3.3 O krivama u ravni

U narednim propozicijama videćemo na koji način torzija opisuje položaj krive u prostoru $\mathbb{R}^3_1$. Najpre imamo rezultat koji važi i u euklidskom prostoru.

3.3.1 Propozicija *Freneova kriva $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ parametrizovana dužinom luka nalazi se u ravni ako i samo ako je njena torzija jednaka nuli.*

Dokaz. Ako se kriva nalazi u ravni, tada je vektor binormale B konstantan, pa je $B' = 0$. Iz Freneovih jednačina imamo $B' = -\eta\tau N$, odakle sledi da mora biti $\tau = 0$.

Sa druge strane, ako pođemo od toga da je $\tau = 0$, dobijamo da je $B' = -\eta\tau N = 0$, odnosno da je vektor B konstantan. To znači da se kriva nalazi u ravni generisanoj vektorima T i N. □

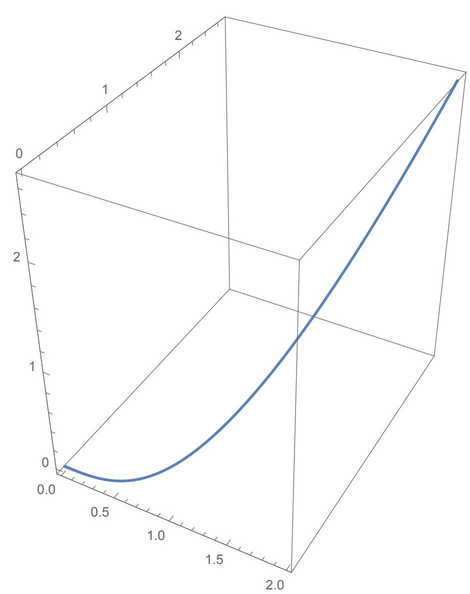
Sada ćemo posmatrati dva specijalna slučaja krivih kod kojih smo definisali nul okvir i pseudo-torziju.

3.3.2 Propozicija *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kriva prostornog tipa sa vektorom normale svetlosnog tipa. Ako je pseudo-torzija krive c jednaka nuli, onda ona leži u ravni.*

Dokaz. Ako je pseudo-torzija jednaka nuli, iz Freneovih jednačina sledi da je $N' = 0$, odnosno da je vektor $N(s)$ konstantan. Uzmimo da je $N(s) = v$, tačka $s_0 \in I$ i definišimo funkciju $f(s) = \langle c(s) - c(s_0), v\rangle$. Tada je $f'(s) = \langle T(s), v\rangle = 0$, pa je $f(s)$ konstantno, a kako je $f(s_0) = 0$, sledi $f(s) = 0$ za svako $s \in I$. Vektor $\Delta c(s) = c(s) - c(s_0)$ ortogonalan je sa fiksnim vektorom v u svakoj tački, pa zaključujemo da kriva leži u ravni, čiji je vektor normale v. $\square$

3.3.3 Napomena U gornjoj propoziciji naveden je samo jedan smer tvrđenja. Da obratno ne važi pokazaćemo sledećim primerom.

Kriva $c(s) = (s, \frac{s^3}{3}, \frac{s^3}{3})$, $s > 0$, nalazi se u ravni određenoj jednačinom $y - z = 0$ (Slika 3.4).



Slika 3.4: Kriva u ravni $y - z = 0$.

Njoj pridružen Freneov okvir čine vektori

$$\begin{aligned} T(s) &= (1, s^2, s^2) \quad \text{(prostornog tipa)} \\ N(s) &= T'(s) = (0, 2s, 2s) \quad \text{(svetlosnog tipa)} \\ B(s) &= (\frac{s}{2}, \frac{s^3}{4} - \frac{1}{4s}, \frac{s^3}{4} + \frac{1}{4s}) \quad \text{(svetlosnog tipa),} \end{aligned}$$

a pseudo-torzija je $\tau(s) = -\langle N', B\rangle = -(2s(\frac{s^3}{4} - \frac{1}{4s}) - 2s(\frac{s^3}{4} + \frac{1}{4s})) = \frac{1}{s}$.

Zaključujemo da ako kriva prostornog tipa leži u ravni, njena pseudo-torzija ne mora biti jednaka nuli.

3.3.4 Propozicija *Ako se kriva svetlosnog tipa nalazi u ravni, onda je ona prava linija.*

Dokaz. Neka je c kriva svetlosnog tipa koja leži u ravni P. Tada P može biti svetlosnog ili vremenskog tipa.

Ako je P svetlosnog tipa, ona sadrži jedan vektor svetlosnog tipa, označimo ga sa u. Kako je tangentni vektor $T(s)$ svetlosnog tipa, on je u svakoj tački $s \in I$ kolinearan sa fiksnim pravcem u, pa c mora biti prava.

U slučaju da je P vremenskog tipa, ona sadrži dva linearno nezavisna vektora svetlosnog tipa, označimo ih sa u i v. Kako je vektor T u ravni P, može se predstaviti kao linearna kombinacija vektora u i v, $T = \alpha u + \beta v$. Tada važi

$$0 = \langle T, T\rangle = \alpha^2\langle u, u\rangle + \beta^2\langle v, v\rangle + 2\alpha\beta\langle u, v\rangle = 2\alpha\beta\langle u, v\rangle.$$

Kako su u i v linearno nezavisni $\langle u, v\rangle \neq 0$, pa mora biti $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$. To znači da je vektor $T(s)$ kolinearan sa jednim od vektora u $(\beta = 0)$ i v $(\alpha = 0)$. Zbog neprekidnosti $T(s)$, u pitanju je isti vektor za svako $s \in I$. Time dobijamo da je c prava u P. □

U prostoru $\mathbb{R}^3$ krive u ravni $(\tau = 0)$ koje imaju konstantnu krivinu mogu biti deo prave $(\kappa = 0)$ ili kružnice poluprečnika $r = \frac{1}{\kappa}$. Kružnice se mogu posmatrati kao putanje koje nastaju rotacijom tačke oko fiksne ose. U poglavlju 2.4 videli smo kako izgledaju matrice bustova, transformacija u $\mathbb{R}^3_1$ analognim rotacijama u $\mathbb{R}^3$. Sada ćemo ispitati koje su to krive koje nastaju njihovom primenom, odnosno kako izgledaju kružnice u $\mathbb{R}^3_1$.

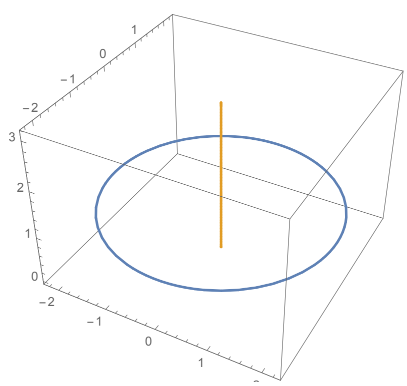
1) Prvo ćemo posmatrati bustove za vremensku osu $l = Lin\{(0, 0, 1)\}$, čija je matrica Λ data sa (2.3). Neka je $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ početna tačka. Primenom Λ na p_0 dobijamo

$$(x, y, z) = \Lambda p_0 = (x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi, x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi, z_0).$$

Dobijene tačke zadovoljavaju jednačine

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = r^2, \qquad z = z_0$$

pa je dobijena kriva kružnica u ravni $z = z_0$ poluprečnika r. Na Slici 3.5 prikazana je putanja za $p_0 = (1, 2, 1)$, a narandžastom bojom osa l.



Slika 3.5: Bust za osu vremenskog tipa

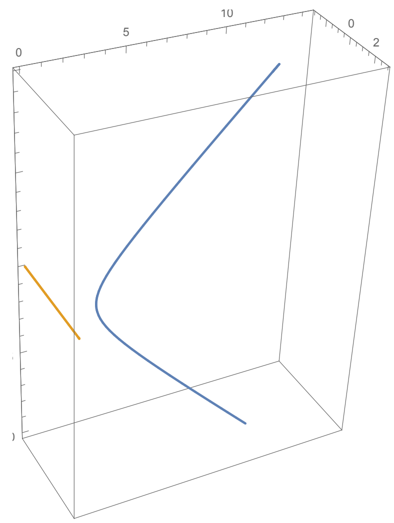
2) Sada ćemo uzeti da je osa $l = Lin\{(1, 0, 0)\}$ prostornog tipa. Primenom njoj odgovarajuće matrice (2.4) na tačku $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, dobijamo tačke oblika

$$(x, y, z) = \Lambda p_0 = (x_0, y_0 \sinh\varphi + z_0 \sinh\varphi, y_0 \sinh\varphi + z_0 \cosh\varphi),$$

za koje važi

$$y^2 - z^2 = y_0^2 - z_0^2, \qquad x = x_0,$$

pa se one nalaze na hiperboli u ravni $x = x_0$. U zavisnosti od znaka $y_0^2 - z_0^2$ i položaja tačke p_0, dobijena putanja će biti jedna od grana te hiperbole. Na Slici 3.6 prikazana je dobijena putanja sa osom l za $p_0 = (1, 2, 1)$.



Slika 3.6: Bust za osu prostornog tipa

3) Ostao je još slučaj kada je osa svetlosnog tipa, uzećemo $l = Lin\{(0,1,1)\}$, pa je matrica transformacije data sa (2.5) i primenom dobijamo

$$(x, y, z) = \Lambda p_0 = (x_0+\varphi(y_0-z_0), y_0-\varphi x_0-\frac{\varphi^2}{2}(y_0-z_0), z_0-\varphi x_0-\frac{\varphi^2}{2}(y_0-z_0))$$

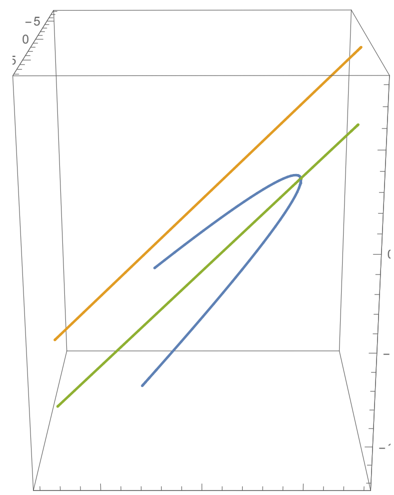
Vidimo da dobijena kriva zadovoljava uslov $y - z = y_0 - z_0$, pa posmatramo sledeće mogućnosti.

Ako se početna tačka p_0 nalazi u ravni $y-z = 0$, tada će dobijene putanje biti prave kroz p_0, paralelne sa osom l.

Primetimo da je ravan data jednačinom $y - z = 0$ generisana vektorima $e_1 = (1, 0, 0)$ i $(0, 1, 1)$, a to je upravo $l^\perp$. Ukoliko početna tačka p_0 ne pripada $l^\perp$, tj. $y_0 - z_0 \neq 0$, onda možemo izraziti φ kao $\varphi = \frac{x-x_0}{y_0-z_0}$ i predstaviti

$$y = y(x) = \frac{x_0^2 + 2y_0(y_0 - z_0) - x^2}{2(y_0 - z_0)},$$

odakle vidimo da je dobijena kriva parabola u ravni $y - z = y_0 - z_0$, čija je osa paralelna sa l. Na Slici 3.7 prikazana je dobijena kriva sa osom l (narandžasto) i osom parabole (zeleno).



Slika 3.7: Bust za osu svetlosnog tipa

3.4 Fundamentalna teorema teorije krivih

Ovim poglavljem zaokružićemo izlaganje o krivama u prostoru Minkovskog. Videćemo na koji način funkcije krivine i torzije određuju parametrizovanu krivu.

Za početak, setimo se da u prostoru $\mathbb{R}^3$ važi da se primenom euklidskog kretanja na krivu (rotacije i translacije) krivina i torzija ne menjaju. Prirodno bi bilo očekivati takav rezultat u $\mathbb{R}^3_1$, ali u slučaju primene transformacija karakterističnih za strukturu tog prostora.

U poglavlju 2.4 videli smo kako izgledaju izometrije prostora $\mathbb{R}^3_1$, pa možemo uočiti da su analogon euklidskom kretanju transformacije oblika $L : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$, $Lx = Ax + b$, gde je A matrica Lorencove transformacije, a b proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^3_1$. Ovakvo preslikavanje nazivaćemo Lorencovo kretanje.

3.4.1 Teorema

(i) *Za Freneovu krivu $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ krivina je invarijantna u odnosu na Lorencovo kretanje, a torzija je invarijantna do na promenu znaka.*

(ii) *Ako je kriva $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ svetlosnog tipa ili prostornog sa vektorom normale svetlosnog tipa, tada je pseudo-torzija invarijantna u odnosu na Lorencovo kretanje.*

Dokaz.

(i) Neka je A matrica transformacije za koju važi $AGA^T = G$ $(det(A) = \pm 1)$ i preslikavanje $M : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ dato sa $Mx = Ax + b$, gde je $b \in \mathbb{R}^3_1$. Označimo $\gamma = M \circ c$. Treba pokazati da krive c i γ imaju istu krivinu i torziju (do na znak).

Ako je Freneov okvir za krivu c dat sa $\{T, N, B\}$, a za krivu γ $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$, onda su oni u sledećem odnosu

$$T_\gamma = \gamma' = (M \circ c)' = Ac' = AT \tag{3.7}$$

$$N_\gamma = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|} = \frac{(M \circ c)''}{\|(M \circ c)''\|} = \frac{Ac''}{\|Ac''\|} = \frac{Ac''}{|det(A)|\|c''\|} = AN \tag{3.8}$$

$$B_\gamma = T_\gamma \times N_\gamma = AT \times AN = det(A)A(T \times N) = \pm AB. \tag{3.9}$$

Na osnovu izbora matrice A, jasno je da su krive c i γ istog kauzalnog karaktera, kao i vektori Freneovog okvira. Stoga je $\langle T_\gamma, T_\gamma \rangle = \langle T, T \rangle = \epsilon$, $\langle N_\gamma, N_\gamma \rangle = \langle N, N \rangle = \eta$ i $\langle B_\gamma, B_\gamma \rangle = \langle B, B \rangle = -\epsilon\eta$, pa na osnovu Freneovih jednačina

$$\begin{aligned} N' &= -\epsilon\kappa T' - \epsilon\eta\tau B' \\ N'_\gamma &= -\epsilon\kappa_\gamma T'_\gamma - \epsilon\eta\tau_\gamma B'_\gamma \end{aligned}$$

i (3.7), (3.8), (3.9) sledi $\kappa_\gamma = \kappa$ i $\tau_\gamma = \pm\tau$.

(ii) Neka je c kriva prostornog tipa sa vektorom normale svetlosnog tipa. Tada je $T_\gamma = \gamma' = (M \circ c)' = Ac' = AT$ i $T'_\gamma = AT'$, pa je vektor T'_γ svetlosnog tipa i $N_\gamma = T'_\gamma = AT' = AN$.

Vektor AB je svetlosnog tipa i zadovoljava uslove

$$\begin{aligned} \langle AB, T_\gamma \rangle &= \langle AB, AT \rangle = \langle B, T \rangle = 0 \\ \langle AB, N_\gamma \rangle &= \langle AB, AN \rangle = \langle B, N \rangle = -1, \end{aligned}$$

tako da po konstrukciji Freneovog okvira važi $B_\gamma = AB$.

U ovom slučaju je $\langle T'_\gamma, N_\gamma \rangle = \langle T, N \rangle = 1$ i

$$\tau_\gamma = -\langle N'_\gamma, B_\gamma \rangle = -\langle AN', AB \rangle = \tau.$$

Analogno ovom slučaju, traženi rezultat se dobija i ako je kriva c svetlosnog tipa. $\square$

U uvodnom delu videli smo da za Freneove krive u $\mathbb{R}^3$ krivina i torzija, sa datim početnim uslovima, na jedinstven način određuju krivu. U slučaju Freneovih krivih u $\mathbb{R}_1^3$ rezultat se razlikuje u tome što za date početne uslove postoji više različitih krivih koje ih zadovoljavaju, tačnije postoje 3 krive.

Pod terminom različite podrazumevamo krive takve da ne postoji Lorencovo kretanje kojim se jedna može preslikati u drugu.

Objašnjenje za ovaj rezultat proizilazi iz postojanja kauzalnog karaktera vektora i osobine da se u svakoj ortonormiranoj bazi prostora $\mathbb{R}_1^3$ nalazi tačno jedan vektor vremenskog tipa. U zavisnosti od toga koji je od vektora u početnoj bazi vremenskog tipa, javiće se tri slučaja.

3.4.2 Teorema *Neka su* $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}_1^3$ *diferencijabilne funkcije,* $\kappa > 0$*,* $s_0 \in I$*,* $q_0 \in \mathbb{R}_1^3$ *i neka je* $\{E_1, E_2, E_3\}$ *ortonormiran skup vektora u* $\mathbb{R}_1^3$*.*
Tada postoje tri različite glatke Freneove krive $c : I \to \mathbb{R}_1^3$ *za koje važi:*

(i) $c(s_0) = q_0$*;*

(ii) $\{E_1, E_2, E_3\}$ *je Freneov okvir za krivu* c *u tački* q_0*;*

(iii) κ *je krivina, a* τ *torzija krive* c*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je u bazi $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ vektor E_1 vremenskog tipa i da je $\mathcal{B}$ pozitivno orijentisana. Da bismo našli Freneovu krivu, najpre ćemo odrediti njoj odgovarajući Freneov okvir koji treba da zadovoljava Freneove jednačine (3.2). Tako dolazimo do sistema ODJ

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

sa početnim uslovima

$$\begin{aligned} T(s_0) &= E_1 \\ N(s_0) &= E_2 \\ B(s_0) &= E_3. \end{aligned}$$

Neka je skup $\{T(s), N(s), B(s)\}$ jedinstveno rešenje tog sistema. Pokažimo da on u svakoj tački $s \in I$ čini ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}_1^3$, sa istim kauzalnim karakterom vektora kao i početna baza.
Definisaćemo funkcije $y_i(s)$, $i = 1, ..., 6$, na sledeći način

$$y_1(s) = \langle T(s), T(s)\rangle,\ \ y_2(s) = \langle N(s), N(s)\rangle,\ \ y_3(s) = \langle B(s), B(s)\rangle,$$
$$y_4(s) = \langle T(s), N(s)\rangle,\ \ y_5(s) = \langle T(s), B(s)\rangle \ \text{ i } \ y_6(s) = \langle N(s), B(s)\rangle.$$

Izvode funkcija $y_i(s)$ možemo, primenom Freneovih jednačina, predstaviti kao

$$\begin{aligned}
y_1'(s) &= \langle T(s), T(s)\rangle' = 2\langle T, T'\rangle = 2\kappa\langle T, N\rangle = 2\kappa y_4 \\
y_2'(s) &= \langle N(s), N(s)\rangle' = 2\langle N', N\rangle = 2\kappa\langle T, N\rangle + 2\tau\langle B, N\rangle = 2\kappa y_4 + 2\tau y_6 \\
y_3'(s) &= \langle B(s), B(s)\rangle' = 2\langle B, B'\rangle = -2\tau\langle B, N\rangle = -2\tau y_6 \\
y_4'(s) &= \langle T(s), N(s)\rangle' = \kappa\langle N, N\rangle + \kappa\langle T, T\rangle + \tau\langle T, B\rangle = \kappa y_2 + \kappa y_1 + \tau y_5 \\
y_5'(s) &= \langle T(s), B(s)\rangle' = \kappa\langle N, B\rangle - \tau\langle N, T\rangle = \kappa y_6 - \tau y_4 \\
y_6'(s) &= \langle N(s), B(s)\rangle' = \kappa\langle T, B\rangle + \tau\langle B, B\rangle - \tau\langle N, N\rangle = \kappa y_5 + \tau y_3 - \tau y_2
\end{aligned}$$

i time dobijamo sistem ODJ sa početnim uslovima u tački s_0 $(-1, 1, 1, 0, 0, 0)$. Direktnom proverom dobijamo da je jedno rešenje sistema skup konstantnih funkcija

$$y_1(s) = -1,\ y_2(s) = 1,\ y_3(s) = 1,\ y_4(s) = 0,\ y_5(s) = 0 \text{ i } y_6(s) = 0,$$

a zbog jedinstvenosti, to je i jedino rešenje. Sledi da u svakoj tački $s \in I$ skup $\{T(s), N(s), B(s)\}$ čini ortonormiran sistem prostora $\mathbb{R}^3_1$, sa vektorom vremenskog tipa $T(s)$.

Sada definišemo preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ sa

$$c(s) = q_0 + \int_{s_0}^{s} T(u)du. \tag{3.10}$$

Uočavamo da važi $c'(s) = T(s)$, pa je c kriva vremenskog tipa sa tangentnim vektorom T. Iz konstrukcije skupa $\{T, N, B\}$ sledi da je vektor normale za krivu c $N_c = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{\kappa N}{|\kappa|\|N\|}$, a kako je funkcija $\kappa > 0$, važi $N_c = N$. Sada na osnovu konstrukcije Freneovog okvira, dobijamo da vektor binormale za c mora biti B. Znači da je $\{T, N, B\}$ Freneov okvir za krivu c i da su κ i τ njena krivina i torzija.

Drugi slučaj dobijamo kada je vektor E_2 vremenskog tipa, a E_1 i E_3 prostornog i baza $\mathcal{B}$ pozitivno orijentisana.
Tada rešavamo sistem ODJ na osnovu Freneovih jednačina (3.4), krivu c definišemo kao u (3.10). U ovom slučaju je $c'(s) = T(s)$ prostornog tipa, pa je kriva c prostornog tipa sa vektorom normale $N(s)$ vremenskog tipa.

Treći slučaj se dobija ako je vektor E_3 vremenskog tipa, a baza $\mathcal{B}$ negativno orijentisana. Sistem ODJ od kog polazimo tada odgovara Freneovim jednačinama (3.3), a rešenje će biti kriva prostornog tipa sa vektorom normale prostornog tipa. $\square$

3.4.3 Napomena Vidimo da u prostoru Minkovskog, fundamentalna teorema teorije krivih, daje postojanje, ali ne i jedinstvenost. Ukoliko bi u postavci teoreme za početni ortonormiran sistem $\{E_1, E_2, E_3\}$ bio dat kauzalni karakter vektora, imali bismo postojanje jedinstvene krive koja zadovoljava date uslove.

U narednoj teoremi posmatraćemo slučaj kada su zadati pseudo-torzija i početni nul okvir, a treba naći pseudo-parametrizovanu krivu kojoj oni odgovaraju. Znamo da se nul okvir $\{T, N, B\}$ koji odgovara krivi c sastoji od dva vektora svetlosnog i jednog prostornog tipa. Ako je T prostornog, u pitanju je kriva prostornog tipa, a ako je N prostornog onda je kriva svetlosnog tipa. Slučaj da je B prostornog, a T i N svetlosnog tipa ne odgovara nijednom od kauzalnih karaktera krive, tako da će se u dokazu ove teoreme javiti dve mogućnosti.

3.4.4 Teorema *Neka je $\tau : I \to \mathbb{R}^3_1$ glatka funkcija, tačka $s_0 \in I$, $q_0 \in \mathbb{R}^3_1$ i $\{E_1, E_2, E_3\}$ nul okvir prostora $\mathbb{R}^3_1$. Tada postoji kriva c prostornog tipa sa vektorom normale svetlosnog tipa i kriva svetlosnog tipa čija je pseudo-torzija τ i $\{E_1, E_2, E_3\}$ nul okvir u tački s_0.*

Dokaz. Neka je vektor E_1 prostornog tipa. Na osnovu Freneovih jednačina (3.5) postavljamo sistem ODJ

$$\begin{aligned} T'(s) &= N(s) \\ N'(s) &= \tau N(s) \\ B'(s) &= T(s) - \tau B(s) \end{aligned}$$

sa početnim uslovima

$$T(s_0) = E_1, \quad N(s_0) = E_2, \quad B(s_0) = E_3.$$

Jedinstveno rešenje sistema označićemo sa $\{T, N, B\}$. Definišući funkcije $y_i(s)$, $i = 1, ..., 6$, kao u prethodnoj teoremi dobijamo sistem ODJ

$$\begin{aligned} y_1' &= \langle T, T\rangle' = 2\langle T, N\rangle = 2y_4 \\ y_2' &= \langle N, N\rangle' = 2\tau\langle N, N\rangle = 2\tau y_2 \\ y_3' &= \langle B, B\rangle' = 2\langle T, B\rangle - 2\tau\langle B, B\rangle = 2y_5 - 2\tau y_3 \\ y_4' &= \langle T, N\rangle' = \langle N, N\rangle + \tau\langle T, N\rangle = y_+\tau y_4 \\ y_5' &= \langle T, B\rangle' = \langle N, B\rangle + \langle T, T\rangle - \tau\langle T, B\rangle = y_6 + y_1 - \tau y_5 \\ y_6' &= \langle N, B\rangle' = \langle T, N\rangle = y_4 \end{aligned}$$

sa početnim uslovima $(1,0,0,0,0,-1)$, čije je jedinstveno rešenje

$$y_1(s) = 1,\ y_2(s) = 0,\ y_3(s) = 0,\ y_4(s) = 0,\ y_5(s) = 0 \text{ i } y_6(s) = -1.$$

Time smo pokazali da je skup $\{T, N, B\}$ nul okvir u svakoj tački $s \in I$. Traženu krivu dobijamo kao

$$c(s) = q_0 + \int_{s_0}^{s} T(u)du.$$

Kako je $c'(s) = T(s)$, sledi da je c prostornog tipa sa vektorom normale $N(s)$ svetlosnog tipa. Da je pseudo-torzija krive c funkcija τ sledi iz konstrukcije nul okvira.

Za slučaj kada je E_2 prostornog tipa, polazeći od jednačina (3.6), dobićemo kao rešenje nul okvir, kom odgovara kriva svetlosnog tipa. $\square$

Zaključak

Prostor Minkovskog je sa matematičke strane zanimljiv za izučavanje jer pokazuje kako se malom promenom u definiciji metrike javljaju nove osobine prostora i uspostavljaju nove veze među elementima. Neke, za euklidski prostor nezamislive stvari, u prostoru Minkovskog postaju moguće. Videli smo da nenula vektori mogu biti istovremeno i kolinearni i ortogonalni, kao i to da ulogu kružnica igraju i parabole i hiperbole.

Mi smo se fokusirali na trodimenzionalan prostor i predstavili osnovne pojmove i tvrđenja koja se odnose kako na sam prostor tako i na teoriju krivih u njemu. U 4-dimenzionalnom slučaju, $\mathbb{R}^4_1$, pridružen Freneov okvir sastoji se od 4 vektora, a krivu opisuju tri funkcije krivine. Sa dimenzijom i krivinom više javlja se i više mogućnosti za proučavanje i klasifikaciju krivih.

Literatura

[1] Kühnel, W. *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[2] Carmo, M. do *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[3] Naber, G. L. *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity.* Springer, 2011.

[4] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity.* Academic Press, New York, 1983.

[5] Petkov, V. (urednik) *Minkowski Spacetime: A Hundred Years Later* Fundamental Theories of Physics, Vol. 165 Springer, 2010.

[6] Petkov, V. (urednik) *Space, Time, and Spacetime* Fundamental Theories of Physics, Vol. 167 Springer, 2010.

[7] Sachs, R. K., Wu, H.-H. *General Relativity for Mathematicians.* Springer-Verlag, New York, 1977.

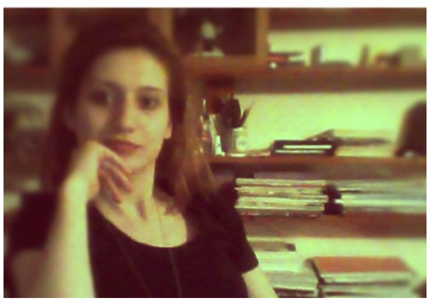
[8] López, R. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. arXiv:0810.3351v1 [math.DG], 2008.

[9] López, R. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. arXiv:0810.3351v2 [math.DG], 2014.

[10] Formiga, J. B., Romero, C. On the differential geometry of curves in Minkowski space. arXiv:gr-qc/0601002v1, 2005.

[11] Nešović, E. *Diferencijalna geometrija krivih u prostoru Minkovskog.* Doktorska disertacija, Univerzitet u Kragujevcu, 2002.

Biografija



Maja Jolić rođena je 18. oktobra 1991. godine u Kikindi. Osnovnu školu ,,Vasa Stajić" u Mokrinu završava kao đak generacije 2006. godine i iste upisuje prirodno-matematički smer u Gimnaziji ,,Dušan Vasiljev" u Kikindi. 2010. godine osvaja drugu nagradu na republičkom takmičenju iz matematike i kao nosilac Vukove diplome završava srednju školu. Nakon toga upisuje osnovne studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, koje završava 7.9.2013. godine sa prosekom 9,89. Zatim upisuje master studije na istom fakultetu i opredeljuje se za modul Teorijska matematika. Zaključno sa septembrom 2015. godine ispolagala je sve ispite na master studijama sa prosekom 9,90. Od oktobra 2015. godine zaposlena je na Fakultetu tehničkih nauka kao saradnik u nastavi za užu naučnu oblast Matematika.

Novi Sad, oktobar 2016.

Maja Jolić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Maja Jolić
AU

Mentor: dr Sanja Konjik
MN

Naslov rada: Krive u prostoru Minkovskog
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2016.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: (3, 54, 11, 0, 2, 9, 0)
(broj poglavlja, strana, literarnih citata, tabela, slika, grafika, priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: prostor Minkovskog, kauzalni karakter, Freneova kriva, Freneov okvir, Freneove jednačine
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

Cilj ovog rada je upoznavanje sa osnovama teorije krivih u prostoru Minkovskog i poređenje sa osobinama koje važe u trodimenzionom euklidskom prostoru. Prva glava sadrži kratak pregled osnovnih pojmova teorije krivih u $\mathbb{R}^3$. Druga glava posvećena je geometriji prostora Minkovskog. U njoj su definisani Lorencov skalarni proizvod, kauzalni karakter vektora i potprostora, Lorencov vektorski proizvod i izučena su njihova svojstva. U trećoj glavi najpre su dati uvodni pojmovi o krivama u prostoru Minkovskog, definišu se kauzalni karakter krive, parametrizacija i pseudo-parametrizacija dužinom luka, Freneov okvir, krivina i torzija. Date su Freneove jednačine za svaki od slučajeva krive, sa odgovarajućim primerima, i dokaz fundamentalne teoreme teorije krivih u prostoru Minkovskog.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 21.4.2015.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master thesis
CC

Author: Maja Jolić
AU

Mentor: Sanja Konjik, Ph.D.
MN

Title: Curves in Minkowski space
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2016.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (3, 54, 11, 0, 2, 9, 0)
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis
SD

Subject/Key words: Minkowski space, causal character, Frenet curves, Frenet frame, Frenet equations
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

The aim of this thesis is to give an introduction to the theory of curves in Minkowski space and compare their properties with those of curves specific for the three dimensional Euclidean space. First chapter contains a basic overview of the theory of curves in $\mathbb{R}^3$. Second chapter deals with the geometry of Minkowski space. We define Lorentzian inner product, causal character of vectors and subspaces, Lorentzian vector product and we study their properties. At the beginning of the third chapter we give the fundamentals of curves in Minkowski space, define causal character of curves, arc-length and pseudo arc-length parametrization, Frenet frame, curvature and torsion. We provide Frenet equations for each type of the curves, with examples, and proof of the fundamental theorem of the local theory of curves in Minkowski space.

Accepted by the Scientific Board on: 21/04/2015
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Danijela Rajter-Ćirić, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Sanja Konjik, Ph.D., associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor
Member:	Marko Nedeljkov, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad