



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



O SDFEM postupku za perturbovane probleme sa diskontinuitetima

-master rad-

mentor:
dr Helena Zarin

student:
Jovana Vasić (401m/14)

Novi Sad, 2017.

Sadržaj

Predgovor	v
Uvod	1
1 Postupci konačnih elemenata	5
1.1 Prostori funkcija	5
1.1.1 Prostori neprekidnih funkcija	5
1.1.2 Prostori integrabilnih funkcija	6
1.1.3 Prostori Soboljeva	8
1.2 Postupak konačnih elemenata	10
1.3 Klasifikacija postupaka konačnih elemenata	18
1.3.1 Konformni postupci konačnih elemenata	18
1.3.2 Nekonformni postupci konačnih elemenata	21
1.4 Konačni elementi.....	22
1.5 Prostori konačnih elemenata	27
1.6 Lagranžov interpolant	28
2 Problemi konvekcije-difuzije sa unutrašnjim slojevima	30
2.1 Problemi konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama	30
2.2 Dekompozicija rešenja	31
2.3 Postupak konačnih elemenata Galerkina.....	33
3 Slojno-adaptivne mreže	42
3.1 Duran-Šiškinova mreža	42
3.2 Šiškinova mreža	45

4	”Streamline-diffusion” postupak konačnih elemenata i analiza greške	47
4.1	SDFEM	47
4.2	Opšta analiza greške	53
4.3	Greška interpolacije	56
4.4	Diskretne Grinove funkcije	59
4.5	Analiza greške u tačkama mreže	61
5	Numerički eksperimenti	65
6	Dodatak	71
6.1	Odabrane definicije i teoreme iz linearne algebre.....	71
6.2	Odabrane definicije i teoreme iz analize.....	72
6.2.1	Helderovi prostori.....	73
6.2.2	Normirani prostori.....	74
6.2.3	Prostori sa skalarnim proizvodom.....	74
6.3	Odabrane definicije i teoreme iz numeričke matematike.....	75
6.3.1	Ocene diskretnih funkcija Grina.....	75
A	Pregled oznaka	77
A.1	Skupovi, prostori i norme.....	77
A.2	Operatori.....	78
A.3	Funkcije.....	78
A.4	Parametri i funkcije diksretizacije.....	79
A.5	Parametri i konstante.....	79
A.6	Ostale oznake.....	80

B	<i>Mathematica</i> programi	81
B.1	Program za rešavanje sistema $Ax = v$ LU –dekompozicijom.....	81
B.2	Duran-Šiškinova mreža.....	82
B.3	Šiškinova mreža.....	82
B.4	Test problem 1.....	83
B.5	Test problem 2.....	84
	Zaključak	87
	Literatura	88
	Biografija	92
	Ključna dokumentacijska informacija	93
	Key words documentation	96

Predgovor

Parcijalne diferencijalne jednačine predstavljaju matematičke modele mnogih fizičkih, hemijskih i bioloških pojava. Često su jednačine koje se razmatraju dosta komplikovane i nalaženje analitičkog rešenja je nemoguće ili nepraktično. Stoga se traže numeričke aproksimacije nepoznatog analitičkog rešenja.

Singularno perturbovani problemi (SPP) su parametarski zavisne diferencijalne jednačine čije rešenje ispoljava neuniformno ponašanje kada parametar teži ka nekoj graničnoj vrednosti. Neuniformnost ovih problema ogleda se u pojavi slojeva u kojima se rešenje naglo menja kada perturbacioni parametar teži nuli. Zbog neefikasnosti rešavanja ovih problema standardnim numeričkim postupcima, javlja se potreba za primenom adekvatnijih metoda, kao što su postupci konačnih elemenata. SPP pripadaju savremenoj oblasti numeričke matematike i ovoj oblasti istraživanja se posvećuje sve više pažnje. Ovi problemi se primenjuju u aerodinamici, mehanici fluida, finansijskoj matematici, prenosu toplote, modelovanju procesa zagađenja životne sredine i hemijskoj kinetici.

U radu će se koristiti postupak konačnih elemenata. Postupcima konačnih elemenata se aproksimiraju ne samo klasična, nego i neklasična rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina. To je jedna od glavnih prednosti ovih postupaka nad ostalim standardnim numeričkim postupcima. Problem se postavlja u prostoru Soboljeva¹, to jest, u Banahovom² prostoru slabo diferencijalnih funkcija i polazi se od slabe formulacije diferencijalne jednačine. Domen se razlaže na konačnu uniju disjunktih poddomena. Zatim se nad svakim poddomenom (*elementom*) tačno rešenje aproksimira polinomom i na taj način se formira globalno diskretno rešenje u obliku po delovima polinomne funkcije, koja pripada određenom konačnodimenzionalnom prostoru (*prostoru konačnih elemenata*). Konvergenciju postupaka konačnih elemenata moguće je postići zgušnjavanjem mreže, povećavanjem stepena polinoma ili kombinovanjem oba načina. Tako se dobijaju *h*-verzija, *p*-verzija ili *hp*-verzija konačnih elemenata. U zavisnosti od razlaganja domena, baza prostora konačnih elemenata se bira tako da njene funkcije imaju male nosače. Posledica izbora takve baze je da formirani diskretni problem i njemu odgovarajući sistem linearnih jednačina imaju retku matricu, te je njihovo računa-

¹Sergei Sobolev (1908-1989), ruski matematičar

²Stefan Banach (1892-1945), poljski matematičar

nje olakšano.

Za dokazivanje uniformnosti postupaka konačnih elemenata koristimo sledeće: na osnovu dekompozicije rešenja dolazimo do nekih osobina rešenja i njegovih izvoda, zatim dobijene informacije o rešenju koristimo za konstrukciju slojno-adaptivne mreže i prilikom izvođenja greške interpolacije. Na kraju se izvodi analiza greške.

Ovaj master rad se sastoji od 6 poglavlja.

U prvom poglavlju se predstavlja opšta teorija o prostorima funkcija i postupcima konačnih elemenata, koji je predstavljen na linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini drugog reda sa homogenim Dirihleovim³ konturnim uslovima, čiji specijalni slučaj predstavlja SPP. Date su Laks⁴-Milgramova⁵ teorema i lema Cea,⁶ kao glavna tvrđenja teorije konačnih elemenata. Definisani su konačni elementi, prostor konačnih elemenata i dati su njihovi primeri. Takođe je predstavljen Lagranžov⁷ interpolant.

Drugo poglavlje je posvećeno jednodimenzionalnim SPP sa unutrašnjim slojevima. Postojanje ovakvih slojeva, pored uobičajenih konturnih slojeva, posledica je prekidnih polaznih funkcija. U ovoj glavi se posmatra linearni jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) - bu'(x) &= f(x), \quad \text{za } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

čiji su koeficijenti funkcije sa diskontinuitetom u tačno jednoj unutrašnjoj tački d domena $\Omega = (0, 1)$. U nastavku se proveravaju uslovi Laks-Milgramove teoreme za postojanje slabog i diskretnog rešenja. Takođe je opisan Galerkinov metod konačnih elemenata i prikazana je dekompozicija rešenja na kojoj se zasniva analiza greške pomenutog postupka.

U trećem poglavlju su predstavljene slojno-adaptivne mreže, specijalno konstruisane za dati problem: Šiškinova⁸ mreža i Duran⁹-Šiškinova mreža, za koju su dokazane i osobine koraka mreže.

³Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar

⁴Peter David Lax (1926-), mađarsko-američki matematičar

⁵Arthur Norton Milgram (1912-1961), američki matematičar

⁶Jean C ea (1932-), alžirski matematičar

⁷Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), francuski matematičar

⁸Grigorii Ivanovich Shishkin (1939-), ruski matematičar

⁹Ricardo Guillermo Dur an (1954-), argentinski matematičar

U četvrtoj glavi se najpre predstavlja "*streamline-diffusion*" (SDFEM) postupak konačnih elemenata sa linearnim baznim funkcijama, kojim rešavamo gore pomenuti problem. Potom se u maksimum normi izvode ocene za grešku interpolacije, kao i za konačnu ocenu greške, posebno u tačkama izabrane mreže, a posebno na celom domenu.

U petoj glavi se numerički verifikuju dobijeni rezultati u programskom paketu *Mathematica* i vrši se poređenje sa rezultatima koji su poznati u literaturi.

U šestoj glavi se daje pregled definicija i teorema korišćenih u radu.

Na kraju su data dva priloga. Prvi prilog sadrži oznake koje su korišćene u radu, a u drugom prilogu su predstavljeni programi koji su korišćeni pri izvođenju numeričkih eksperimenata.

Ogromnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Heleni Zarin, koja je svojim savetima, primedbama i stručnim usmeravanjem doprinela izradi ovog master rada. Takođe joj se zahvaljujem na strpljenju tokom dobijanja svih rezultata.

Zahvaljujem se i članovima komisije, dr Đorđu Hercegu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu i dr Ljiljani Teofanov, vanrednom profesoru Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu.

Novi Sad, maj 2017. godine

Jovana Vasić

Uvod

Glavna tema ovog rada su singularno perturbovani problemi konvekcije-difuzije.

Šta su singularno perturbovani problemi? Miller je u [15] dao sledeće objašnjenje: *Opravdanje za ime "singularna perturbacija" je to što se priroda diferencijalnih jednačina menja u graničnom slučaju, kada je singularno perturbovani parametar jednak nuli. Na primer, promena nelinearne parabolične jednačine u nelinearnu hiperboličnu jednačinu.*

Roos je u [16] opisao singularno perturbovane probleme na sledeći način: *Postoje diferencijalne jednačine koje zavise od malog pozitivnog parametra ε čija rešenja (ili njihovi izvodi) teže prekidnoj granici dok ε teži nuli.*

Oba izvora vode do sledeće definicije u kojoj je formalno opisano šta su singularno perturbovani problemi.

Definicija 0.0.1 [14] *Neka je B prostor funkcija sa normom $\|\cdot\|_B$ i neka je $D \subset \mathbb{R}^d$ domen parametara. Nепrekidna funkcija $u : D \rightarrow B$, $\varepsilon \mapsto u(\varepsilon)$ je regularna za $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* \in \partial D$ ako postoji funkcija $u^* \in B$ takva da je*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} \|u(\varepsilon) - u^*\|_B = 0,$$

inače je $u(\varepsilon)$ singularna za $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^$.*

Neka je (P_ε) problem čije je rešenje $u(\varepsilon) \in B$ za svako $\varepsilon \in D$. Kažemo da je (P_ε) singularno perturbovan problem za $\varepsilon \mapsto \varepsilon^ \in \partial D$ u normi $\|\cdot\|_B$ ako je $u(\varepsilon)$ singularna za $\varepsilon \mapsto \varepsilon^*$.*

U skladu sa ovom definicijom posmatrajmo sledeću jednodimenzionalnu diferencijalnu jednačinu:

$$-\varepsilon u'' - bu' = f \quad \text{u} \quad (c, d), \quad u(c) = \gamma_c, \quad u(d) = \gamma_d, \quad (P)$$

gde su polazne funkcije u (P) realne i definisane na odgovarajućim domenima. Realan broj $\varepsilon \in (0, 1]$ koji množi najviši izvod nepoznate funkcije u , najčešće uzima veoma male vrednosti. Problem tipa (P) sa $\varepsilon = 0$ i odgovarajućim konturnim uslovom naziva se *redukovani problem*. Njegovo rešenje se najčešće označava sa $u_0 = u(\cdot, 0)$. Za problem tipa (P) se kaže da je *singularno perturbovan* ako njegovo rešenje $u = u(\cdot, \varepsilon)$ ne konvergira ka rešenju odgovarajućeg redukovanog problema, kada ε teži nuli. U tom slučaju se ε naziva *singularno perturbovanim parametrom*.

Napomena 0.0.1 Definicija 0.0.1 je zavisna od norme. Na primer, za problem

$$-\varepsilon u''(x) - u'(x) = 1, \quad \text{za } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (1)$$

tražimo rešenje $u \in C^2(0, 1) \cap C[0, 1]$, gde je $0 < \varepsilon \ll 1$. Za $\varepsilon = 0$ imamo

$$-u'(x) = 1, \quad \text{za } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (2)$$

ali za razliku od (1) problem (2) nema rešenje u $C^2(0, 1) \cap C[0, 1]$. Rešenje od (1) je

$$u(x, \varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + 1 - x.$$

Rešenje u od (1) možemo predstaviti kao funkciju dve promenljive

$$u : [0, 1] \times (0, 1] : (x, \varepsilon) \mapsto u(x, \varepsilon).$$

Problem (1) je singularno perturbovan u C^0 i L^∞ normi jer je za $(x, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = 1 \neq 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x, \varepsilon).$$

Prema ovome u kao funkcija dve promenljive poseduje klasičnu singularnost u tački $(0, 0)$. Međutim, u L^2 normi ovaj problem nije singularno perturbovan jer postoji funkcija $u^* : x \mapsto 1 - x$ za koju je

$$\|u(\varepsilon) - u^*\|_{L^2(0,1)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}).$$

□

Napomena 0.0.2 Granični uslovi takođe imaju isto važnu ulogu. Posmatrajmo problem

$$-\varepsilon u''(x) - u'(x) = 1, \quad \text{za } x \in (0, 1), \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

Ovaj problem je singularno perturbovan u C^1 normi, ali nije u C^0 normi.

□

U opštem slučaju, rešenje singularno perturbovanog problema se zajedno sa svojim izvodima naglo menja na određenim delovima domena. Uske podoblasti na kojima se javljaju promene se nazivaju *slojevima* i mogu se

nalaziti u okolini ruba ili u unutrašnjosti domena. Tačan položaj i širina slojeva zavise od geometrije domena, konturnih uslova, kao i glatkosti polaznih funkcija.

Pri numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema, osnovni cilj je konstrukcija robustnih ili ε -uniformno konvergentnih numeričkih postupaka, to jest, postizanje uniformne konvergencije u odnosu na perturbacione parametre. Usvajamo sledeću definiciju parametarski-uniformne konvergencije za slučaj problema sa malim parametrom ε .

Definicija 0.0.2 [13] *Neka je u rešenje singularno perturbovanog problema i neka je u_h aproksimacija za u koja je dobijena numeričkim postupkom sa parametrom diskretizacije N . Za numerički postupak se kaže da je ε -uniformno konvergentan (ili robustan) u normi $\|\cdot\|$, ako je*

$$\|u - u_h\| \leq \vartheta(N), \quad \text{za } N \geq N_0,$$

gde su funkcija ϑ i $N_0 > 0$ nezavisni od ε i

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta(N) = 0.$$

Konstrukciji ε -uniformno konvergentnih postupaka (parametarski - uniformnih metoda) za rešavanje singularno perturbovanih problema (SPP) možemo prići na dva načina. Prvi prilaz koristi činjenicu da je u većini SPP ponašanje rešenja u okolini slojeva eksponencijalne prirode. Zasniva se na zameni standardnih operatora fitovanim, koji opisuju singularno perturbovanu prirodu problema i koristi mreže čiji su čvorovi proizvoljno raspoređeni. Nedostatak ovog pristupa je što se teško uopštava za probleme u više dimenzija. Drugi prilaz koristi standardnu diskretizaciju na slojno - adaptivnim mrežama, to jest, koristi mreže koje su prilagođene da obezbede parametarski-uniformnu konvergenciju, a te mreže se zovu slojno-adaptivne. Ove mreže zahtevaju poznate informacije o ponašanju rešenja. Ocene izvoda rešenja su potrebne za konstrukciju mreže i za analizu greške. Pri numeričkom rešavanju SPP, za aproksimaciju rešenja u slojnim delovima domena, poželjno je da mreža bude dovoljno gusta kako bi dobili numeričko rešenje sa prihvatljivom tačnošću, a za aproksimaciju rešenja van slojeva dovoljno je da se koristi gruba mreža. Na ovakvim mrežama problem se efikasno rešava i u slojevima i van njih. Zato je potrebno pažljivo izvršiti diskretizaciju domena. Ovaj pristup se koristi u kombinaciji sa raznim numeričkim metodama, kao što su konačni elementi, veštačka difuzija, "streamline-diffusion",

postupak konačnih elemenata Petrov¹⁰-Galerkina¹¹, itd. U slučaju kada ponašanje rešenja nije unapred poznato, moguće je koristiti adaptivne postupke koji konstruišu mrežu na osnovu informacija o numeričkom rešenju.

¹⁰Aleksei Zinovyevich Petrov (1910-1972), ruski matematičar

¹¹Boris Grigoryevich Galerkin (1871-1945), ruski matematičar

Glava 1

Postupci konačnih elemenata

U ovoj glavi govorimo o postupcima konačnih elemenata za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda i njihovim osobinama. Prateći [1, 24] navedena je teorema o egzistenciji slabog rešenja, objašnjen je pojam konačnog elementa i predstavljen je Lagranžov interpolant.

1.1 Prostori funkcija

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup. U ovom odeljku se uvode posebne klase realnih funkcija koje su definisane na skupu Ω .

1.1.1 Prostori neprekidnih funkcija

Neka je sa \mathbb{N}_0 označen skup nenegativnih celih brojeva. *Multi-indeks*

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

je uređena n -torka elemenata iz skupa \mathbb{N}_0 .

Dužina multi-indeksa $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je nenegativan ceo broj

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Slično, ako je $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, onda je $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ diferencijalni operator reda $|\alpha|$, to jest, važi:

$$D^\alpha u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Multi-indeks $(0, \dots, 0)$ označavamo sa $\mathbf{0}$; jasno $|\mathbf{0}| = 0$ i $D^{(0, \dots, 0)} u = u$.

Primer 1.1.1 Pretpostavimo da je $n = 3$ i $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, 3$. Tada za u , funkciju tri promenljive x_1, x_2, x_3 je

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=3} D^\alpha u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3} \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3^2} \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_3^3}. \end{aligned}$$

◇

Neka je sa $C_0^\infty(\Omega)$ označen prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u Ω i $C^k(\Omega)$ skup svih realnih neprekidnih funkcija u definisanih na Ω sa osobinom da su izvodi $D^\alpha u$ neprekidni na Ω za svako $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, gde je $|\alpha| \leq k$. Pretpostavimo da je Ω ograničen otvoren skup. Tada $C^k(\bar{\Omega})$ predstavlja skup svih funkcija $u \in C^k(\Omega)$ tako da se $D^\alpha u$ može proširiti sa Ω do neprekidne funkcije na $\bar{\Omega}$ (zatvorenju skupa Ω), za svako $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq k$.

1.1.2 Prostori integrabilnih funkcija

Sada razmatramo klasu prostora koji se sastoje od (Lebeg¹²-) integrabilnih funkcija.

Označimo sa $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, skup merljivih funkcija u za koje je

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

Za dve funkcije $u, v \in L^p(\Omega)$, kažemo da su jednake ako je $u(x) = v(x)$ za $x \in \Omega$, osim na skupu mere nula. $L^p(\Omega)$ su Banahovi prostori sa normom

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty).$$

Prostor $L^2(\Omega)$ je i Hilbertov¹³ prostor sa skalarnim proizvodom definisanim sa

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

¹²Henri Léon Lebesgue (1875-1941), francuski matematičar

¹³David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

Očigledno je

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (u, u)_{L^2(\Omega)}.$$

Za $p = \infty$ sa $L^\infty(\Omega)$ označen je skup funkcija $u \in \Omega$, tako da $|u|$ ima konačan esencijalni supremum na Ω , to jest, postoji pozitivna konstanta M takva da je $|u(x)| \leq M$ za skoro svako¹⁴ $x \in \Omega$. Najmanji takav broj M se zove esencijalni supremum od $|u|$ i pišemo $M = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$. $L^\infty(\Omega)$ je takođe

Banahov prostor sa normom

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

gde je $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{\Gamma \subset \Omega} \sup_{x \in \Omega \setminus \Gamma} |u(x)|$, a Γ je proizvoljan skup mere nula.

Lema 1.1.1 (Helderova¹⁵ nejednakost) [1, 24] *Za svake dve funkcije $u \in L^p(\Omega)$ i $v \in L^q(\Omega)$, za koje je $1/p + 1/q = 1$, q konjugovani eksponent dat sa $q = \frac{p}{p-1}$ i $1 \leq p, q \leq \infty$, važi $uv \in L^1(\Omega)$ i*

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v(x)\|_{L^q(\Omega)}.$$

U slučaju $p = q = 2$ Helderova nejednakost poznata je pod imenom Koši¹⁶-Švarcova¹⁷ nejednakost.

Sa $L^p_{loc}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, označen je skup svih funkcija $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, takvih da za svako $x \in \Omega$ postoji otvorena okolina \mathcal{U} , takva da je $\mathcal{U} \subset \Omega$ i $u \in L^p(\mathcal{U})$. Funkcije iz $L^p_{loc}(\Omega)$ nazivamo *lokalno p -integrabilnim funkcijama*.

Lema 1.1.2 (Nejednakost Minkovskog¹⁸) [1, 24] *Za $1 \leq p \leq \infty$ i $u, v \in L^p(\Omega)$ važi*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

¹⁴Osobina $P(x)$ je tačna za skoro svako $x \in \Omega$, ako je $P(x)$ tačna za svako $x \in \Omega \setminus \Gamma$ gde je Γ podskup od Ω sa Lebegovom merom nula.

¹⁵Otto Ludwig Hölder (1859-1937), nemački matematičar

¹⁶Augustin- Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

¹⁷Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), nemački matematičar

¹⁸Hermann Minkowski (1864-1909), nemački matematičar

1.1.3 Prostor Soboljeva

Ovde dajemo definiciju i navodimo neke osobine prostora Soboljeva, koji imaju važnu ulogu u savremenoj teoriji diferencijalnih jednačina. Više o ovim prostorima se može naći u [1, 24].

Podsetimo se pojma slabog izvoda. Neka je u glatka funkcija i neka je v proizvoljna funkcija kompaktnog nosača u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sa neprekidnim izvodima proizvoljnog reda, to jest, $u \in C^k(\Omega)$ i $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Parcijalnom integracijom se dobija

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x)v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x)D^\alpha v(x) dx, \quad |\alpha| \leq k.$$

Definicija 1.1.1 [24] *Lokalno 1-integrabilna funkcija $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ ima slabi izvod $w = D^\alpha u \in L_{loc}^1(\Omega)$ reda α (izvod funkcije u reda $|\alpha|$ u slabom smislu), ako je*

$$(w, \phi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \phi)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{za svako } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Slabi izvod lokalno p -integrabilne funkcije je, ako postoji, jedinstven. Ako je u dovoljno glatka funkcija, onda se njeni izvodi u slabom smislu poklapaju sa odgovarajućim izvodima u klasičnom tačkastom smislu. Drugim rečima, ako je funkcija diferencijabilna u klasičnom smislu, tada njen slabi izvod postoji i jednak je klasičnom izvodu. I za slabi i za klasični izvod funkcije u koristimo oznaku $D^\alpha u$.

Sada dajemo definiciju prostora Soboljeva.

Definicija 1.1.2 [1, 24] *Za dati ceo broj $k \geq 0$ i $p \in [1, \infty]$ prostor Soboljeva reda k definisan je sa*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq k\}.$$

Na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ su definisane norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty, \end{cases}$$

i seminorma

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Lako se pokazuje da je $W^{k,p}(\Omega)$ normiran prostor. Štaviše, imamo sledeći rezultat.

Teorema 1.1.1 [1, 24] *Prostor Soboljeva $W^{k,p}(\Omega)$ je Banahov prostor.*

U nastavku se umesto $W^{k,2}(\Omega)$ upotrebljava oznaka $H^k(\Omega)$; slovo H se koristi u čast Davida Hilberta. $H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^k(\Omega).$$

U radu će se najčešće pominjati prostor

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n \right\},$$

sa odgovarajućom normom

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2},$$

i seminormom

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Prostor Soboljeva $H_0^k(\Omega)$ se definiše kao komplementiranje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$. $H_0^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)}$ i normom $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$. U slučaju kada je Ω otvoren,

ograničen i povezan skup sa Lipšic¹⁹-neprekidnim (regularnim) rubom²⁰ $\partial\Omega$ (dovoljno glatkom granicom²¹ skupa Ω), prostor $H_0^1(\Omega)$ ima osobinu

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Lema 1.1.3 (Poenkare²²-Fridrihova²³ nejednakost) [24] *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen i otvoren skup i neka $u \in H_0^1(\Omega)$. Tada postoji konstanta $c^*(\Omega)$ nezavisna od u , takva da je*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq c^* \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx.$$

Veza između prostora $W^{k,p}(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ i $C^m(\bar{\Omega})$ opisana je u *teoremi o potapanju* koja se može naći u [3].

Neprekidne funkcije su H^1 -funkcije u jednodimenzionalnom slučaju i H^2 -funkcije u dvodimenzionalnom slučaju.

1.2 Postupak konačnih elemenata

Metod konačnih elemenata se zasniva na aproksimaciji tačnog rešenja deo po deo polinomnim funkcijama. Naziv "postupci konačnih elemenata" se prvi put pojavio 1960. godine, a prvi značajan matematički rezultat vezan za ovaj postupak dao je Zlamal²⁴ 1968. godine u [27].

Danas se ovaj metod koristi u svim oblastima koje se bave modelovanjem prirodnih pojava pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina, jer se njime mogu rešavati problemi na veoma složenim domenima proizvoljnog oblika, kao i problemi sa graničnim uslovima koji sadrže izvode. O metodu konačnih elemenata možemo pronaći u [4, 5, 6, 24, 25]. Ovaj postupak je veoma značajan i u rešavanju singularno perturbovanih problema [7, 8, 14, 15] i [17].

Eliptične parcijalne diferencijalne jednačine se najčešće modeliraju Laplasovom²⁵ jednačinom

¹⁹Rudolf Lipschitz (1832-1903), nemački matematičar

²⁰Rub $\partial\Omega$ je Lipšic-neprekidan (ili regularan) ako se može lokalno opisati Lipšic-neprekidnim funkcijama.

²¹ Ω je poligonalni domen u \mathbb{R}^2 ili poliedar u \mathbb{R}^3 .

²²Jules Henri Poincare (1854-1912), francuski matematičar

²³Kurt Otto Firdrichs (1901-1982), nemačko-američki matematičar

²⁴Miloš Zlámal (1924-), češki matematičar

²⁵Pierre Simon Laplace (1749-1827), francuski matematičar i astronom

$$\Delta u = 0$$

i Poasonovom²⁶ jednačinom

$$-\Delta u = f,$$

gde je $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ Laplasov operator.

Za predstavljanje postupka konačnih elemenata korišćićemo kao model linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa homogenim Dirihleovim konturnim uslovima na otvorenom i ograničenom domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad \text{u } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

gde koeficijenti a_{ij}, b_i, c i funkcija f zadovoljavaju sledeće uslove:

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i \in C(\bar{\Omega}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$c \in C(\bar{\Omega}),$$

$$f \in C(\bar{\Omega}),$$

i

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \text{za svako } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.3)$$

gde je \tilde{c} konstanta nezavisna od x i ξ .

Napomena 1.2.1 [3, 24] Slučaj nehomogenih konturnih uslova se jednostavno analizira uvođenjem odgovarajuće transformacije. \square

²⁶Siméon Denis Poisson (1781-1840), francuski matematičar i fizičar

Definicija 1.2.1 [24] Klasično rešenje problema (1.1) – (1.2) jeste svaka funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1.1) i konturni uslov (1.2).

U opštem slučaju, egzistencija klasičnog rešenja nije uvek garantovana jer to zavisi od glatkosti $\partial\Omega$ i funkcija (1.1) – (1.2), [24].

Kako bismo mogli da se bavimo parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa nedovoljno glatkim podacima, generalizujemo pojam klasičnog rešenja. Uopštenje pojma klasičnog rešenja jeste slabo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine.

Pretpostavimo da je u klasično rešenje problema (1.1) – (1.2). Množenjem polazne jednačine (1.1) test funkcijom $v \in C_0^1(\Omega)$ dobijamo

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) \cdot v \, dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} cu \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

Primenom parcijalne integracije na prvi integral i koristeći da je $v = 0$ na $\partial\Omega$, dobijamo

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx,$$

za svako $v \in C_0^1(\Omega)$. Primećujemo da ova jednakost ima smisla i ako nije $u \in C^2(\Omega)$. Naime, dovoljno je pretpostaviti da $u \in L^2(\Omega)$ i $\partial u / \partial x_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Kako u treba da zadovoljava Dirihleove konturne uslove, pretpostavimo da $u \in H_0^1(\Omega)$. Dakle, razmatramo sledeći problem: naći $u \in H_0^1(\Omega)$ tako da je

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx,$$

za svako $v \in C_0^1(\Omega)$. Primetimo da je $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Jasno, ako $u \in H_0^1(\Omega)$ i $v \in H_0^1(\Omega)$ (umesto $v \in C_0^1(\Omega)$) gornja jednakost je i dalje tačna. Primetimo da više nije potrebna pretpostavka $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, jer koeficijenti a_{ij} u gornjoj jednakosti nisu pod znakom izvoda. Dovoljno je pretpostaviti $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Takođe, dovoljne su pretpostavke $b_i \in L^\infty(\Omega)$ i $c \in L^\infty(\Omega)$. Zato uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 1.2.2 [24] Neka $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ i $f \in L^2(\Omega)$. Funkcija $u \in H_0^1(\Omega)$ je slabo rešenje problema (1.1) – (1.2) ako važi

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (1.4)$$

za svako $v \in H_0^1(\Omega)$.

Jednačinu (1.4) zovemo *slabom formulacijom* problema (1.1)–(1.2). Svako klasično rešenje je istovremeno i slabo, dok obrnuto ne mora da važi. Naime, ako (1.1) i (1.2) imaju slabo rešenje, možda ono neće biti dovoljno glatko da bi bilo klasično.

Ako uvedemo sledeće oznake:

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c w v dx, \quad (1.5)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad (1.6)$$

onda se problem (1.4) može formulisati na sledeći način:

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.7)$$

Navodimo osobine bilinearne forme a i linearne funkcionele l .

Definicija 1.2.3 [5, 24] Neka je $(V, \|\cdot\|)$ realni normirani prostor. Bilinearne forma $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je

i) neprekidna (ili ograničena) ako postoji konstanta $M_\alpha > 0$ tako da je

$$|a(w, v)| \leq M_\alpha \|w\| \|v\|, \text{ za svako } w, v \in V,$$

ii) V-eliptična (ili koercitivna) ako postoji konstanta $\alpha > 0$ tako da je

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2, \text{ za svako } w \in V.$$

Definicija 1.2.4 [5, 24] *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ realni normirani prostor. Linearna funkcionala $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ je ograničena ako postoji konstanta $M_l > 0$ tako da je*

$$|l(v)| \leq M_l \|v\|, \quad \text{za svako } v \in V.$$

Sada ćemo navesti glavnu teoremu o egzistenciji jedinstvenog slabog rešenja u eliptičnog problema (1.1)–(1.2), to jest, teoremu o egzistenciji rešenja problema (1.7). Ova teorema je poznata pod nazivom Laks-Milgramova teorema. Dokaz ove teoreme se može pronaći u [3], [5] i [6].

Teorema 1.2.1 (Laks-Milgramova teorema) [5, 24] *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ realni Hilbertov prostor. Za neprekidnu, V -eliptičnu bilinearnu formu $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i ograničenu linearnu funkcionalu $l : V \rightarrow \mathbb{R}$, apstraktni varijacioni problem*

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in V \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \quad \text{za svako } v \in V, \end{cases} \quad (1.8)$$

ima jedinstveno rešenje.

Vratimo se sada na slabu formulaciju (1.7) eliptičnog problema (1.1) – (1.2). Lako se pokazuje da je za svako fiksno $w \in H_0^1(\Omega)$ preslikavanje $v \mapsto a(v, w)$ linearno. Slično, za svako fiksno $v \in H_0^1(\Omega)$ preslikavanje $w \mapsto a(v, w)$ je linearno. Zato je funkcija a iz (1.5), to jest, $a(\cdot, \cdot)$, bilinearna forma na $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Pokažimo da je bilinearna forma a neprekidna u odnosu na H^1 -normu. Primenom Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \max_{x \in \Omega} |a_{ij}(x)| \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| + \sum_{i=1}^n \max_{x \in \Omega} |b_i(x)| \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx \right| \\ &\quad + \max_{x \in \Omega} |c(x)| \left| \int_{\Omega} w(x)v(x) dx \right| \\ &\leq \hat{c} \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \\
& + \left[\left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
& \leq \hat{c} \left[\left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
& \times \left[\left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right],
\end{aligned}$$

gde je

$$\hat{c} = \max \left\{ \max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{x \in \Omega} |a_{ij}(x)|, \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in \Omega} |b_i(x)|, \max_{x \in \Omega} |c(x)| \right\}.$$

Dalje, majorizacijom desne strane u prethodnom, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| & \leq 2n\hat{c} \left[\int_{\Omega} |w|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right]^{1/2} \\
& \times \left[\int_{\Omega} |v|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Uzimajući $M_a = 2n\hat{c}$ imamo da je

$$|a(w, v)| \leq M_a \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dakle, bilinearna forma a je neprekidna.

Pokažimo da je bilinearna forma a koercitivna. Da bismo to uradili pretpostavićemo da $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Koristeći (1.3), imamo da je

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v^2) dx + \int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx,$$

gde smo umesto $\frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v$ pisali $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(v^2)$. Primenom parcijalne integracije na drugi izraz na desnoj strani prethodne nejednakosti dobijamo

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left(c(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) |v|^2 dx.$$

Pretpostavimo da koeficijenti b_i , $i = 1, 2, \dots, n$ i c zadovoljavaju nejednakost

$$c + \frac{1}{2} \operatorname{div} b = c + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (1.9)$$

Tada je

$$a(v, v) \geq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx. \quad (1.10)$$

Primenom Poenkare-Fridrihove nejednakosti dobijamo

$$a(v, v) \geq \frac{\tilde{c}}{c^*} \int_{\Omega} |v|^2 dx. \quad (1.11)$$

Iz (1.10) i (1.11) sledi da je

$$a(v, v) \geq \alpha \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) = \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (1.12)$$

gde je $\alpha = \tilde{c}/(1 + c^*)$. Dakle, bilinearna forma a je koercitivna.

Proverimo da li je l ograničena linearna funkcionala. Preslikavanje $v \mapsto l(v)$ je linearno jer za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $v, w \in H_0^1(\Omega)$ važi

$$\begin{aligned} l(\alpha v + \beta w) &= \int_{\Omega} f(x)(\alpha v(x) + \beta w(x)) dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \beta \int_{\Omega} f(x)w(x) dx \\ &= \alpha l(v) + \beta l(w). \end{aligned}$$

Primenom Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \right| \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

za sve $v \in H_0^1(\Omega)$. U poslednjoj nejednakosti smo koristili nejednakost $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Uzimajući $M_l = \|f\|_{L^2(\Omega)}$ dobijamo da je l ograničena linearna funkcionala.

Kako su zadovoljene sve pretpostavke Laks-Milgramove teoreme sledi da postoji jedinstveno slabo rešenje u problema (1.1) – (1.2).

Teorema 1.2.2 *Neka $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ i neka važe (1.3) i (1.9). Tada problem (1.1) – (1.2) ima jedinstveno slabo rešenje $u \in H_0^1(\Omega)$. Štaviše,*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dokaz: Postojanje i jedinstvenost slabog rešenja posmatranog problema smo već pokazali. Dokažimo navedenu nejednakost. Važi

$$\begin{aligned}
\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u, u) = l(u) = (f, u)_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |(f, u)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

gde smo koristili (1.12), (1.7), Koši-Švarcovu nejednakost i definiciju norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

■

1.3 Klasifikacija postupaka konačnih elemenata

Postupci konačnih elemenata mogu se klasifikovati u dve grupe: konformni i nekonformni postupci konačnih elemenata.

Prvu grupu *konformnih FEM* čine oni postupci čiji prostor konačnih elemenata leži u prostoru u kome se traži rešenje polaznog problema. Takođe, smatra se da su u slaboj formulaciji, koju pretežno čine integrali, sva izračunavanja tačna. Standardni postupak Galerkina i postupak Petrov-Galerkina su konformni FEM.

Druga grupa *nekonformnih FEM* obuhvata sva ostala odstupanja koja mogu nastati iz različitih razloga, na primer, pojava prekida kod susednih elemenata (diskontinualni Galerkinov FEM), krivolinijski oblik domena (izoparametarski FEM), upotreba numeričke integracije za izračunavanje koeficijenta diskretnog problema.

Pored ove dve grupe postoje i druge vrste postupaka konačnih elemenata, kao što su mešoviti i hibridni FEM, koji polaze od opštijeg oblika varijacionog problema.

1.3.1 Konformni postupci konačnih elemenata

Prilikom konstrukcije približnog rešenja varijacionog problema (1.8) u konformnom slučaju se polazi od konačnodimenzionalnog potprostora $V_h \subset V$. Pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi Laks-Milgramove teoreme.

Diskretni problem kojim se definiše *Galerkinov postupak konačnih elemenata* glasi:

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \text{ za svako } v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.13)$$

Primenom Laks-Milgramove teoreme na prostor V_h dobija se da postoji jedinstveno rešenje $u_h \in V_h$ problema (1.13).

Ovaj problem možemo prikazati kao sistem linearnih jednačina. Neka je V_h prostor dimenzije N i neka je $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ njegoza baza. Diskretno rešenje u_h se može predstaviti u obliku

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_{h,i} \varphi_i.$$

Dakle, diskretni problem (1.13) se može zapisati na sledeći način:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } [u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^N \text{ tako da je} \\ \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Dobijeni sistem linearnih jednačina je dimenzije $N \times N$.

Matrica A ovog sistema sa elementima $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ naziva se "*stiffness*" *matrica* ili *matrica sistema*. Vektor desne strane $[l(\varphi_1), l(\varphi_2), \dots, l(\varphi_N)]^T$ u (1.14) naziva se "*load*" *vektor*. "Stiffness" matrica $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, je pozitivno definitna, to jest,

$$Y^T A Y > 0 \quad \text{za sve } O \neq Y \in \mathbb{R}^N.$$

Neka je $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \neq 0$ i neka je

$$w = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i.$$

Tada zbog V-eliptičnosti bilinearne forme a važi

$$\begin{aligned} Y^T A Y &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i a_{ji} y_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i a(\varphi_i, \varphi_j) y_j \\ &= a \left(\sum_{i=1}^N y_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N y_j \varphi_j \right) = a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Dakle, A je pozitivno definitna matrica.

"Stiffness" matrica je regularna jer je a koercitivna ili V-eliptična bilinearna forma. Dokažimo ovo. Pretpostavimo suprotno, da je A singularna matrica. Tada postoji $0 \neq Y \in \mathbb{R}^N$ tako da je $AY = 0$, pa je $Y^T A Y = 0$. Međutim, to je nemoguće jer je A pozitivno definitna matrica.

Na osobine matrice sistema diskretnog problema direktno utiče izbor baze $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$. U opštem slučaju polazi se od dva važna principa prilikom odabira baze. Prvi princip je da bazne funkcije imaju što manje nosače u domenu problema. Drugi princip podrazumeva da je broj baznih funkcija čiji nosači imaju neprazan presek što manji. Ovi zahtevi dovode do toga da "stiffness" matrica bude retka, te je rešavanje diskretnog problema dosta olakšano.

U nastavku ćemo videti da izbor konačnodimenzionalnog prostora V_h ima veliki uticaj na ocenu greške. Glavni rezultat na ovu temu je lema Cea, čiji dokaz se može pronaći u [3] i [5].

Lema 1.3.1 (Cea) [5, 24] *Neka su pretpostavke Laks-Milgramove teoreme ispunjene i neka je $V_h \subset V$ konačnodimenzionalni linearan prostor. Ako su redom u i u_h rešenja varijacionog i diskretnog problema, tada važi*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M_\alpha}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

gde su M_α konstanta neprekidnosti i α konstanta koercitivnosti bilinearne forme a .

Napomena 1.3.1 Kada se na rešavanje eliptičnog problema (1.1) – (1.2) primeni Galerkinov postupak konačnih elemenata dobija se

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_\alpha}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

□

Napomena 1.3.2 U dokazu leme Cea koristi se osobina

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \text{za svako } v_h \in V_h,$$

koja je poznata pod nazivom "osobina Galerkinove ortogonalnosti."

□

Kod *Petrov-Galerkinovog postupka konačnih elemenata*, prilikom rešavanja nekih problema, koriste se različiti prostori kojima pripadaju približna rešenja u_h i test funkcije v_h . Ovaj postupak predstavlja generalizaciju (standardnog) postupka Galerkina. Posmatramo opštiji varijacioni problem

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in U \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \text{ za svako } v \in V. \end{cases} \quad (1.15)$$

Egzistencija rešenja problema (1.15) data je u uopštenoj Laks-Milgramovoj teoremi koja sledi u nastavku.

Teorema 1.3.1 [3] *Neka su $(U, \|\cdot\|_U)$ i $(V, \|\cdot\|_V)$ realni Hilbertovi prostori, $a : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma i $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena linearna funkcionala. Ako postoje konstante M_α i α tako da je*

$$|a(u, v)| \leq M_\alpha \|u\|_U \|v\|_V, \quad u \in U, \quad v \in V, \quad (1.16)$$

$$\inf_{0 \neq u \in U} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq \alpha > 0, \quad (1.17)$$

$$\sup_{u \in U} a(u, v) > 0, \quad \text{za svako } v \in V, \quad v \neq 0, \quad (1.18)$$

tada problem (1.15) ima jedinstveno rešenje $u \in U$.

Ocenu greške između tačnog i odgovarajućeg diskretnog rešenja problema (1.15) daje uopštena lema Cea koja sledi u nastavku.

Lema 1.3.2 [3] *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 1.3.1 i neka su $U_h \subset U$ i $V_h \subset V$ linearni konačnodimenzionalni prostori jednakih dimenzija. Ako uslovi (1.16) – (1.18) važe kada se U_h i V_h zamene umesto U i V , redom, tada diskretni problem*

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in U_h \text{ tako da je} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \text{ za svako } v_h \in V_h, \end{cases} \quad (1.19)$$

ima jedinstveno rešenje $u_h \in U_h$ i

$$\|u - u_h\|_U \leq \left(1 + \frac{M_\alpha}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|_U.$$

1.3.2 Nekonformni postupci konačnih elemenata

Posmatrajmo ponovo problem (1.8) i pretpostavimo da važe pretpostavke Laks-Milgramove teoreme. Prilikom rešavanja konkretnih modela različitih pojava, usled uticaja brojnih faktora, formiraju se diskretni problemi oblika

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \text{ za svako } v_h \in V_h, \end{cases} \quad (1.20)$$

pri čemu su bilinearna forma a_h i ograničena linearna funkcionala l_h definisane na konačnodimenzionalnom prostoru $V_h \subset V$. Znači, nije potrebno da su a_h i l_h definisane na V , a to sledi jer a_h i l_h najčešće predstavljaju kvadraturene formule kojima se aproksimiraju a i l .

Kao i diskretan problem (1.13), i diskretan problem (1.20) se može transformisati u sistem linearnih jednačina

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } [u_{h,1}, u_{h,2}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^N \text{ tako da je} \\ \sum_{i=1}^N a_h(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l_h(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

1.4 Konačni elementi

Važan korak u postupku konačnih elemenata jeste izbor prostora V_h i njegove baze. Prvi korak u konstrukciji prostora V_h je dekompozicija (triangulacija) domena na jednostavne podskupove, uglavnom poliedre. Funkcije iz V_h su na svakom podskupu triangulacije polinomi određenog stepena. Da bi V_h bio potprostor od $H^1(\Omega)$ potrebno je da su funkcije iz V_h neprekidne, a za $V_h \subset H^2(\Omega)$ je potrebno da prvi izvodi budu neprekidne funkcije, kao i da je domen odgovarajuće dimenzije. Neprekidnost se postiže izborom stepena slobode za koje se uzimaju vrednosti funkcija.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ označen domen posmatranog problema koji je otvoren i ograničen skup.

Definicija 1.4.1 [5, 24] Triangulacija ili mreža je razlaganje $\tau = \{\kappa\}$ domena Ω u konačni broj podskupova κ , koje zovemo elementi, tako da su zadovoljene sledeće osobine:

- i) svaki element $\kappa \in \tau$ je zatvoren i povezan skup čija je unutrašnjost κ° neprazna, a rub $\partial\kappa$ je Lipšic-neprekidan;
- ii) $\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \tau} \kappa$;
- iii) za svaka dva različita elementa $\kappa_i, \kappa_j \in \tau$, važi $\kappa_i^\circ \cap \kappa_j^\circ = \emptyset$.

Napomena 1.4.1 Iako pojam mreže iz prethodne definicije označava razlaganje domena, za jednodimenzionalni problem je uobičajeno da se pod ovim

pojmom podrazumeva skup deobenih tačaka. \square

U jednodimenzionalnim problemima elementi su intervali, a u dvodimenzionalnim problemima elementi mreže su uglavnom trouglovi ili četvorouglovi.

Da bismo predstavili konačne elemente na što jednostavniji način, u nastavku se pretpostavlja da je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poligonalni domen koji se može razložiti na ravnostrane trouglove ili četvorouglove.

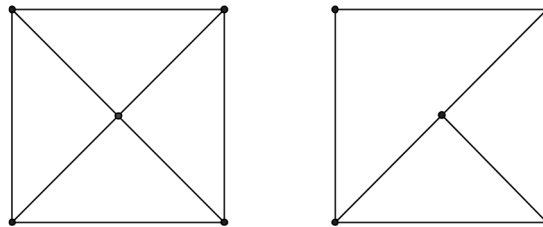
Definicija 1.4.2 [5, 24] *Za triangulaciju $\tau = \{\kappa\}$ domena Ω se kaže da je*

i) dopustiva (ili ograničena) ako za svaka dva različita elementa $\kappa_i, \kappa_j \in \tau$ je $\kappa_i \cap \kappa_j$ ili prazan skup, ili zajednički čvor ili zajednička stranica (ivica, dužina intervala);

ii) regularna po obliku ako postoji konstanta $\varrho > 0$ takva da za svaki element $\kappa \in \tau$ prečnika h_κ i njegovu upisanu kružnicu prečnika ρ_κ važi

$$\frac{h_\kappa}{\rho_\kappa} \leq \varrho.$$

Slika 1 prikazuje primer dopustive i nedopustive triangulacije.



Slika 1: Dopustiva (levo) i nedopustiva triangulacija (desno)

Nakon izvršene triangulacije domena prelazimo na izbor odgovarajućeg konačnodimenzionalnog prostora V_h . Ovom temom ćemo se baviti u narednom odeljku, a sada uvodimo definiciju pojma konačnog elementa.

Definicija 1.4.3 [5, 24] Konačni element je uređena trojka $(\kappa, P_\kappa, \Sigma_\kappa)$ sa sledećim osobinama:

i) $\kappa \subset \mathbb{R}^2$ je zatvoren skup čija je unutrašnjost neprazna i rub Lipsčic-neprekidan;

ii) P_κ je potprostor $C(\kappa)$ konačne dimenzije s (njegove bazne funkcije se nazivaju ”shape” funkcijama);

iii) Σ_κ je skup s linearno nezavisnih funkcionala definisanih na P_κ , gde je svako $p \in P_\kappa$ na jedinstven način definisano preko s funkcionala iz Σ_κ .

Neka je $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s\}$ skup s linearno nezavisnih funkcionala iz Σ_κ . Tada postoji s "shape" funkcija $p_i \in P_\kappa$, $i = 1, 2, \dots, s$, koje zadovoljavaju

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

gde je δ_{ij} Kronekerov²⁷ simbol, to jest,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Takođe, važi

$$p = \sum_{i=1}^s \phi_i(p) p_i, \quad \text{za svako } p \in P_\kappa.$$

Linearne funkcionele ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, s$, se zovu *stepeni slobode* konačnog elementa.

Navodimo primere trougaonih konačnih elemenata.

Neka je $\kappa \subset \mathbb{R}^2$ trougao i neka je sa $P_\kappa = \mathbb{P}_k(\kappa)$ označen skup svih polinoma stepena najviše k definisanih na κ .

Primer 1.4.1 *Linearni Lagranžov konačni element* je trojka $(\kappa, \mathbb{P}_1(\kappa), \Sigma_\kappa)$, gde je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa.$$

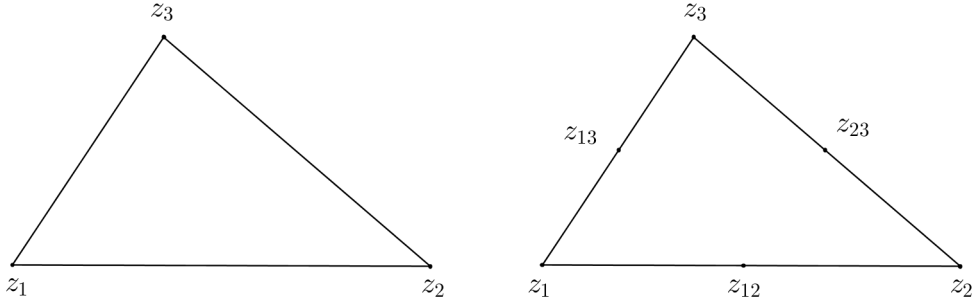
Tačke z_i predstavljaju temena trougla κ . Skup κ zove se linearni Lagranžov trougao (vidi Sliku 2, levo). \diamond

Primer 1.4.2 Posmatramo jednodimenzionalni problem sa domenom $\Omega = (\alpha, \beta)$. Neka je $\tau = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N\}$ mreža sa elementima $\kappa_i = [x_{i-1}, x_i]$, $x_0 = \alpha$, $x_N = \beta$. Linearni Lagranžov konačni element $(\kappa_i, P_{\kappa_i}, \Sigma_{\kappa_i})$ je definisan sa

$$P_{\kappa_i} = \mathbb{P}_1(\kappa_i), \quad \Sigma_{\kappa_i} = \{\phi_1, \phi_2\}, \\ \phi_1(p) = p(x_{i-1}), \quad \phi_2(p) = p(x_i), \quad p \in P_{\kappa_i}.$$

"Shape" funkcije prostora P_{κ_i} su oblika

²⁷Leopold Kronecker (1823-1891), nemački matematičar



Slika 2: Linearni Lagranžov trougao (levo) i kvadratni Lagranžov trougao (desno)

$$p_{\kappa_i,1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}, \quad p_{\kappa_i,2}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Odgovarajući prostor konačnih elemenata V_h sastoji se od po delovima linearnih neprekidnih funkcija v_h . Svaka funkcija $v_h \in V_h$ se može prikazati kao linearna kombinacija "hat" funkcija $\varphi_i : [x_0, x_N] \rightarrow [0, 1]$ (vidi Sliku 3) koje su date sa

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} p_{\kappa_i,2}(x), & x \in \kappa_i, \\ p_{\kappa_{i+1},1}(x), & x \in \kappa_{i+1}, \\ 0, & x \notin \kappa_i \cup \kappa_{i+1}, \end{cases} \quad (1.22)$$

za $i = 1, 2, \dots, N - 1$ i

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} p_{\kappa_1,1}(x), & x \in \kappa_1, \\ 0, & x \notin \kappa_1, \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} p_{\kappa_N,2}(x), & x \in \kappa_N, \\ 0, & x \notin \kappa_N. \end{cases}$$

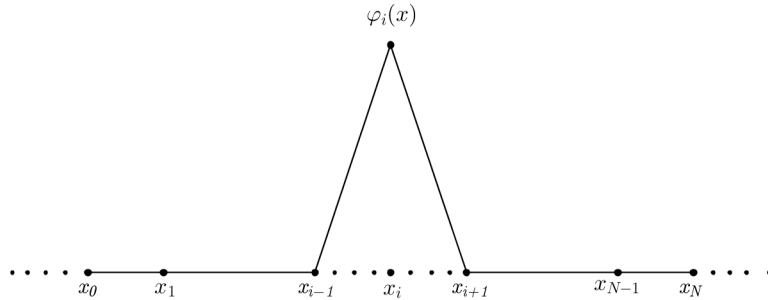
◇

Primer 1.4.3 *Kvadratni Lagranžov konačni element* je trojka $(\kappa, \mathbb{P}_2(\kappa), \Sigma_\kappa)$, gde je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_{12}, \phi_{13}, \phi_{23}\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad \phi_{ij}(p) = p(z_{ij}), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke z_i predstavljaju temena trougla κ , a tačke $z_{ij} = (z_i + z_j)/2$, $1 \leq i < j \leq 3$ predstavljaju sredine stranica trougla κ . Skup κ se zove kvadratni Lagranžov trougao (vidi Sliku 2, desno). ◇

Na isti način se konstruiše Lagranžov konačni element $(\kappa, \mathbb{P}_k(\kappa), \Sigma_\kappa)$ za proizvoljan stepen polinoma k . U tom slučaju je



Slika 3: Bazne funkcije za linearne konačne elemente

$$\dim(\mathbb{P}_k(\kappa)) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2),$$

dok je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_i : i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke z_i predstavljaju tri temena trougla κ , $3(k-1)$ tačaka na stranicama trougla κ i $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ unutrašnjih tačaka. Unutrašnje tačke su izabrane tako da određuju konačni element sa $k-3$ stepena slobode.

U prethodnim primerima stepeni slobode ϕ_i su bili definisani preko vrednosti u tačkama odgovarajućeg argumenta. Takođe, za stepene slobode je moguće koristiti parcijalne izvode. Na taj način se dobijaju *Hermitovi*²⁸ konačni elementi.

Postoje i drugi tipovi trougaonih konačnih elemenata i oni se međusobno razlikuju po izabranim stepenima slobode i "shape" funkcijama, kao što je Belov²⁹, Argirisov³⁰, Toherov³¹ trougao, itd. Više o ovome se može naći u [9].

Navodimo primere pravougaonih konačnih elemenata.

Ako je κ pravougaoni element u \mathbb{R}^2 , onda se u literaturi često koristi linearni prostor $\mathbb{Q}_k(\kappa)$ koga čine funkcije

$$p(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq k} c_{ij} x^i y^j, \quad c_{ij} \in \mathbb{R},$$

definisane na κ . Dimenzija ovog prostora je $(k+1)^2$ i važi $\mathbb{P}_k(\kappa) \subset \mathbb{Q}_k(\kappa) \subset \mathbb{P}_{2k}(\kappa)$.

²⁸Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar

²⁹Steven R. Bell (1954-), američki matematičar

³⁰Chris Argyris (1923-2013), grčko-američki matematičar

³¹Keith Douglas Tocher (1921-1981), engleski matematičar

Primer 1.4.4 Za $k = 1$ *bilinearni Lagranžov konačni element* (vidi Sliku 4, levo) je trojka $(\kappa, P_\kappa = \mathbb{Q}_1(\kappa), \Sigma_\kappa)$ gde je

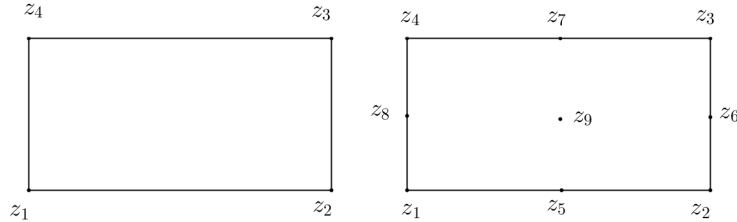
$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke z_i , $i = 1, 2, 3, 4$, predstavljaju temena pravougaonika κ . ◇

Primer 1.4.5 Za $k = 2$ *bikvadratni Lagranžov konačni element* (vidi Sliku 4, desno) je trojka $(\kappa, P_\kappa = \mathbb{Q}_2(\kappa), \Sigma_\kappa)$ gde je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_9\}, \quad \phi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_\kappa.$$

Ovde su z_i , $i = 1, 2, 3, 4$ temena pravougaonika κ , tačke z_i , $i = 5, 6, 7, 8$ sredine stranica pravougaonika κ , a tačka z_9 se nalazi u preseku dijagonala pravougaonika κ . ◇



Slika 4: Bilinearni Lagranžov pravougaonik (levo) i bikvadratni Lagranžov pravougaonik (desno)

Pravougaoni Lagranžov konačni element za proizvoljni stepen k je trojka $(\kappa, P_\kappa = \mathbb{Q}_k(\kappa), \Sigma_\kappa)$ gde je

$$\Sigma_\kappa = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{(k+1)^2}\}, \quad \phi_i(p) = p(z_{ij}), \quad p \in P_\kappa.$$

Tačke z_{ij} , $i, j = 0, 1, \dots, k$, predstavljaju uređen par (z_i, z_j) , gde je $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_k = 1$.

Postoje i drugi pravougaoni konačni elementi kao što su bikubni Lagranžov, redukovani bikvadratni, itd. što se može pronaći u [6] i [9].

1.5 Prostori konačnih elemenata

U ovom odeljku ćemo govoriti o konstrukciji *prostora konačnih elemenata* V_h u kome se traži približno rešenje. Najpre je potrebno izvršiti razlaganje domena polaznog problema na konačan broj poddomena κ . Potom je potrebno opredeliti se za osobine svakog elementa. Element κ zajedno sa "shape" funkcijama i stepenima slobode predstavlja konačni element.

Definicija 1.5.1 *Prostor konačnih elemenata je dat sa*

$$V_h = \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v_h|_{\kappa} \in P_{\kappa}, \text{ za svako } \kappa \in \tau\}.$$

Različiti izbori konačnih elemenata imaju direktnog uticaja na globalne osobine funkcija iz V_h . Za linearni i kvadratni Lagranžov trougao, kubni Hermitov trougao, bilinearni i bikvadratni Lagranžov pravougaonik važi da je

$$V_h \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Za prostore konačnih elemenata koji sadrže i diferencijabilne funkcije, na primer, prostori koji koriste Argirisov ili Belov trougao, važi

$$V_h \subset C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega).$$

U Primeru 1.4.2, za tako konstruisan prostor konačnih elemenata V_h , dimenzija je $N + 1$. Funkcije φ_i , koje se mogu posmatrati kao globalne bazne funkcije za V_h , imaju osobinu

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

1.6 Lagranžov interpolant

Kada se formira prostor konačnih elemenata prelazi se na analizu greške aproksimacije u kojoj mogu da se koriste razni operatori. Lema Cea ukazuje na mogućnost korišćenja interpolacione funkcije $u^I \in V_h$ u greški aproksimacije $\|u - u_h\|$. Pošto se bavimo funkcijama u iz prostora Soboljeva, potrebna je precizna definicija interpolacione funkcije u^I . Posmatrajmo samo Lagranžove konačne elemente, kod kojih stepeni slobode koriste vrednosti u određenim tačkama elemenata, a u analizi greške ćemo koristiti interpolacionu funkciju. *Interpolaciona funkcija* $u^I \in V_h$, za datu funkciju u , ili kraće *interpolant*, se kod takvih konačnih elemenata definiše po delovima koristeći mrežu τ na sledeći način:

Definicija 1.6.1 [9] *Lagranžov interpolant funkcije u je*

$$u^I|_{\kappa} = u|_{\kappa}, \quad \kappa \in \tau,$$

gde je za konačni element $(\kappa, P_{\kappa}, \Sigma_{\kappa})$, lokalni interpolant $u|_{\kappa}$ dat sa

$$u_{\kappa}^I(x) = \sum_{i=1}^s \phi_i(u) p_i(x), \quad x \in \kappa.$$

Očigledno je $\phi_i(u_{\kappa}^I) = \phi_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, s$ i $p_{\kappa}^I = p$, za svako $p \in P_{\kappa}$.

Neka je u funkcija definisana na $\Omega = (\alpha, \beta)$. Tada je u jednodimenzionalnom slučaju i za Primer 1.4.2, interpolant $u^I \in V_h$ po delovima linearna funkcija za koju je

$$u_{\kappa_i}^I(x) = \sum_{j=1}^2 \phi_j(u) p_{\kappa_i, j}(x) = u(x_{i-1}) \varphi_{i-1}(x) + u(x_i) \varphi_i(x), \quad x \in \kappa_i.$$

Sada su trivijalno zadovoljeni uslovi

$$u^I(x_i) = u(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (1.24)$$

koji su uobičajeni za neprekidne interpolacione funkcije. Interpolant definisan na ovaj način poseduje sledeću osobinu:

$$\begin{aligned} |u^I(x)| &\leq |u(x_{i-1})| \varphi_{i-1}(x) + |u(x_i)| \varphi_i(x) \\ &\leq \|u\|_{L^{\infty}(\kappa_i)} (\varphi_{i-1}(x) + \varphi_i(x)) = \|u\|_{L^{\infty}(\kappa_i)}, \quad x \in \kappa_i. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Glava 2

Problemi konvekcije - difuzije sa unutrašnjim slojevima

2.1 Problemi konvekcije - difuzije sa prekidnim funkcijama

Posmatramo linearni jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije čiji su koeficijenti funkcije sa prekidom u tačno jednoj unutrašnjoj tački d domena $\Omega = (0, 1)$. Ako je $\bar{\Omega} = [0, 1]$, $\Omega_1 = (0, d)$ i $\Omega_2 = (d, 1)$, problem se svodi na pronalaženje funkcije $u \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C^1(\bar{\Omega})$ koja zadovoljava

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) := -\varepsilon u''(x) - b(x)u'(x) = f(x), & x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ |[b](d)| \leq C, \quad |[f](d)| \leq C. \end{cases} \quad (2.1)$$

gde je $0 < \varepsilon \ll 1$ perturbacioni parametar, d ne zavisi od ε , $|[g](d)|$ skok proizvoljne funkcije g u tački d , a C je oznaka za opštu pozitivnu konstantu koja ne zavisi od ε i mreže diskretizacije. Pretpostavimo da su b i f glatke funkcije na $\bar{\Omega} \setminus \{d\}$, kao i da je

$$b(x) \geq \beta > 0, \quad \frac{1}{2}b'(x) \geq \gamma > 0, \quad \text{za sve } x \in \bar{\Omega} \setminus \{d\}, \quad (2.2)$$

za neke pozitivne konstante β i γ . Pod ovim pretpostavkama, postoji jedinstveno rešenje problema (2.1), [12, 19].

U narednoj teoremi su dati uslovi za egzistenciju klasičnog rešenja problema (2.1) u slučaju kada su b i f glatke funkcije na celom domenu.

Teorema 2.1.1 [15] *Neka koeficijenti operatora \mathcal{L} u (2.1) pripadaju prostoru $C^{0,\alpha}(\Omega)$ i neka važe pretpostavke (2.2) na celom domenu. Tada postoji jedinstveno rešenje $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ odgovarajućeg problema. Štaviše, kada $b, f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, tada je $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$.*

Teorema 2.1.2 [26] *Za funkcije $b, f \in C^3(\bar{\Omega})$ rešenje u problema konvekcije-difuzije (2.1)-(2.2) se može dekomponovati u obliku $u=S+E$, gde regularna komponenta S i slojna komponenta E zadovoljavaju $\mathcal{L}S = f$, $\mathcal{L}E = 0$, i za svako $x \in \Omega$, $k = 0, 1, 2, 3$,*

$$|S^{(k)}(x)| \leq C, \quad |E^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k}e^{-\beta x/\varepsilon}.$$

Napomena 2.1.1 U slučaju veće glatкости funkcija b i f ocene izvoda u Teoremi 2.1.2 važe i za $k > 3$. \square

U dekompoziciji rešenja $u = S + E$, S predstavlja regularnu komponentu, to jest, deo rešenja koji je sa svojim izvodima ε -uniformno ograničen, a E predstavlja slojnu komponentu koja opisuje ponašanje rešenja u slojevima. Ova dekompozicija se koristi pri analizi greške, konstrukciji slojno-adaptivnih mreža i za dobijanje greške interpolacije.

Za dovoljno glatke polazne funkcije b i f rešenje u problema (2.1) – (2.2) ima granični sloj u okolini $x = 0$ i zbog prekidnosti ovih funkcija dodatno se pojavljuje i jedan unutrašnji sloj u okolini tačke prekida $x = d$.

2.2 Dekompozicija rešenja

Kako bismo konstruisali slojno-adaptivnu mrežu i analizirali grešku, potrebno je da znamo nešto o ponašanju rešenja u problema (2.1).

U dokazu teoreme o dekompoziciji rešenja u problema (2.1) koristi se sledeća lema, koju navodimo bez dokaza.

Lema 2.2.1 [8] *Neka $b, f \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Pretpostavimo da je*

$$b(x) \geq \beta > 0, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Ako je $u \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ rešenje problema

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) - b(x)u'(x) = f(x), & x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \\ |[b](d)| \leq C, \quad |[f](d)| \leq C. \end{cases}$$

onda važe ocene

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \max\{|u_0|, |u_1|\} + \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})},$$

$$\|u^{(k)}\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \leq C\varepsilon^{-k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Kada su koeficijent konvekcije b i f u (2.1) glatke funkcije, osobine rešenja su prikazane u Teoremi 2.1.2 o dekompoziciji rešenja. Ovde se dekompozicija vrši posebno na svakom od poddomena Ω_1 i Ω_2 , gde se na svakom od njih ponaosob primenjuje Teorema 2.1.2.

Teorema 2.2.1 Rešenje u problema (2.1) se može dekomponovati u obliku

$$u = S + E,$$

gde za $k = 0, 1, \dots, q$ važi

$$|S^{(k)}(x)| \leq C, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.3)$$

$$|E^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k} \begin{cases} e^{-\beta x/\varepsilon}, & x \in \Omega_1, \\ e^{-\beta(x-d)/\varepsilon}, & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

a maksimalni red q zavisi od glatkosti funkcija b i f na $\bar{\Omega} \setminus \{d\}$.

Dokaz: Prema Lemi 2.2.1 je

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})},$$

pa je funkcija u ε -uniformno ograničena.

Na intervalu Ω_1 , rešenje u problema (2.1) zadovoljava

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) := -\varepsilon u''(x) - b(x)u'(x) = f(x), & x \in \Omega_1, \\ u(0) = 0, \quad u(d) = r, \end{cases} \quad (2.5)$$

gde je $r \in \mathbb{R}$. Primenom Leme 2.2.1 na problem (2.5) dobijamo

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_1)} \leq \max\{0, |r|\} + \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_1)} = |r| + \frac{1}{\beta} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_1)}.$$

Kako je funkcija u ε -uniformno ograničena, sledi da je $|r| \leq C$. Prema Teoremi 2.1.2 postoji dekompozicija $u = S_1 + E_1$ na Ω_1 takva da važi

$$|S_1^{(k)}(x)| \leq C, \quad |E_1^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k} e^{-\beta x/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_1,$$

i $k = 0, 1, \dots, q$.

Na intervalu Ω_2 , rešenje u problema (2.1) zadovoljava

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) := -\varepsilon u''(x) - b(x)u'(x) = f(x), & x \in \Omega_2, \\ u(d) = r, \quad u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

i prema Teoremi 2.1.2 postoji dekompozicija $u = S_2 + E_2$ na Ω_2 takva da važi

$$|S_2^{(k)}(x)| \leq C, \quad |E_2^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k} e^{-\beta(x-d)/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_2,$$

i $k = 0, 1, \dots, q$.

Primetimo da je r isto u (2.5) i (2.6) jer je funkcija $u \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C^1(\bar{\Omega})$ jedinstvena prema Teoremi 2.1.1.

Na kraju je dovoljno uzeti $S = S_1$, $E = E_1$ na Ω_1 i $S = S_2$, $E = E_2$ na Ω_2 . ■

Ova teorema ukazuje na postojanje graničnog sloja u $x = 0$. Ovde je dodatno pokazana i egzistencija unutrašnjeg sloja u okolini $x = d$.

2.3 Postupak konačnih elemenata Galerkina

Predstavljamo postupak konačnih elemenata koji se koristi za numeričko rešavanje problema (2.1).

Polazimo od standardne slabe formulacije problema (2.1) koja glasi:

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.7)$$

gde je $V = H_0^1(\Omega)$ Hilbertov prostor, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma, $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ linearna funkcionala za koje važi

$$a(w, v) := (\varepsilon w', v') - (b w', v), \quad l(v) = (f, v), \quad w, v \in H_0^1(\Omega),$$

i (\cdot, \cdot) je skalarni proizvod na prostoru $L^2(\Omega)$.

Egzistencija rešenja u problema (2.7) dobija se primenom Laks-Milgramove teoreme.

Pokazujemo da je l linearna funkcionala na $V = H_0^1(\Omega)$. Neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $v, w \in H_0^1(\Omega)$. Tada

$$\begin{aligned} l(\alpha v + \beta w) &= \int_{\Omega} f(x)(\alpha v(x) + \beta w(x)) \, dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx + \beta \int_{\Omega} f(x)w(x) \, dx \end{aligned}$$

$$= \alpha l(v) + \beta l(w).$$

Pokažimo sada da je linearna funkcionala l ograničena. Primenom Koši-Švarcove nejednakosti i nejednakosti $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ dobijamo

$$\begin{aligned} |l(v)| &= |(f, v)| \\ &= \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \right| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

za sve $v \in H_0^1(\Omega)$. Stavljajući da je $M_l = \|f\|_{L^2(\Omega)}$, dobijamo da je linearna funkcionala l ograničena.

Trivijalno se pokazuje da je a bilinearna forma na $V \times V$ jer su $w \mapsto a(w, v)$ i $v \mapsto a(w, v)$ su linearna preslikavanja za fiksno $v \in H_0^1(\Omega)$ i za fiksno $w \in H_0^1(\Omega)$, redom.

Sada pokazujemo neprekidnost bilinearne forme a . Primenom nejednakosti trougla, osobina norme i Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &= |(\varepsilon w', v') - (bw', v)| \leq |(\varepsilon w', v')| + |(-bw', v)| \\ &= \left| \int_{\Omega} \varepsilon w'(x)v'(x) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} -b(x)w'(x)v(x) \, dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |w'(x)v'(x)| \, dx + \| -b \|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \int_{\Omega} |w'(x)v(x)| \, dx \\ &\leq \max \{ \varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \} \left[\int_{\Omega} |w'(x)v'(x)| \, dx + \int_{\Omega} |w'(x)v(x)| \, dx \right] \\ &\leq \max \{ \varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \} \left[\left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \Big] \\
& \leq \max \{ \varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \} \left[\left(\int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
& \quad \times \left[\left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
& \leq 2 \max \{ \varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \} \left[\int_{\Omega} |w(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\
& \quad \times \left[\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Uzimajući $M_\alpha = 2 \max \{ \varepsilon, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \}$ imamo da je

$$|a(w, v)| \leq M_\alpha \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dakle, bilinearna forma a je neprekidna u H^1 -normi.

Pokažimo da je bilinearna forma a koercitivna. Važi

$$\begin{aligned}
a(w, w) &= (\varepsilon w', w') - (bw', w) \\
&= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx - \int_{\Omega} bw'w dx \\
&= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx - \int_{\Omega} b \frac{1}{2} (w^2)' dx.
\end{aligned}$$

Primenom parcijalne integracije na drugi integral i primenom prve pretpostavke iz (2.2), za $w \in H_0^1(\Omega)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
a(w, w) &= \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} w^2 \left(\frac{1}{2}b'\right) dx \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} \gamma w^2 dx \\
&\geq \alpha \left(\int_{\Omega} (w')^2 dx + \int_{\Omega} w^2 dx \right) = \alpha \|w\|_{H^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

gde je $\alpha = \min\{\varepsilon, \gamma\}$. Dakle, bilinearna forma a je koercitivna.

Mogli smo pokazati jedinstvenost rešenja problema (2.7) uz pomoć naredne definicije i leme.

Definicija 2.3.1 ε - težinska $H_0^1(\Omega)$ norma (energetska norma) je data sa $\|v\|_E^2 := \varepsilon(v', v') + (v, v)$, $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sada navodimo lemu o koercitivnosti bilinearne forme u odnosu na energetska normu.

Lema 2.3.1 Za svako $v \in H_0^1(\Omega)$ važi $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_E^2$, to jest, bilinearna forma a je koercitivna.

Dokaz: Želimo da ograničimo bilinearnu formu

$$a(v, v) = \varepsilon(v', v') - b(v', v) = \varepsilon(v', v') - \int_{\Omega} bv'v dx,$$

od dole. Koristeći da je $v'v = \frac{1}{2}(v^2)'$ i drugu pretpostavku iz (3.2) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \varepsilon(v', v') - \frac{1}{2} \int_{\Omega} b(v^2)' dx \\
&= \varepsilon(v', v') - \frac{1}{2} \left(v^2 b|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} v^2 b' dx \right) \\
&= \varepsilon(v', v') + \frac{1}{2} (b'v, v) \\
&\geq \min \{1, \gamma\} (\varepsilon(v', v') + (v, v)) = \alpha \|v\|_E^2,
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. ■

Pokažimo da je bilinerna forma a neprekidna u odnosu na energetska normu. Primenom nejednakosti trougla, osobina norme i Definicije 2.3.1 dobijamo

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| &= |(\varepsilon w', v') - (bw', v)| \leq |(\varepsilon w', v')| + |(-bw', v)| \\
&= \left| \int_{\Omega} \varepsilon w'(x) v'(x) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} -b(x) w'(x) v(x) \, dx \right| \\
&\leq \varepsilon \int_{\Omega} |w'(x) v'(x)| \, dx + \int_{\Omega} |b w'(x) v(x)| \, dx \\
&\leq \varepsilon \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \max\{1, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}\} \left[\varepsilon \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \max\{1, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}\} \left[\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\Omega} |w'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\
& \leq 2 \max \{1, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}\} \left[\varepsilon \int_{\Omega} |w'(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\
& \quad \times \left[\varepsilon \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \\
& \leq 2 \max \{1, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}\} [\varepsilon(w', w') + (w, w)]^{\frac{1}{2}} [\varepsilon(v', v') + (v, v)]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Uzimajući $M_\alpha = 2 \max \{1, \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}\}$ imamo da je

$$|a(w, v)| \leq M_\alpha \|w\|_E \|v\|_E.$$

Dakle, bilinearna forma a je neprekidna u energetskej normi.

Sada, Lema 2.3.1 zajedno sa Laks - Milgramovom teoremom daje jedinstvenost rešenja (2.7).

Polazimo od slabe formulacije (2.7) problema (2.1) – (2.2) i predstavljamo postupak konačnih elemenata na opštoj mreži

$$\Omega^N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

to jest,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Neka je sa

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

označen lokalni korak mreže i neka je

$$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Neka je $V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$ prostor koga čine po delovima linearne funkcije koje imaju vrednost nula u tačkama $x_0 = 0$ i $x_N = 1$. Sama konstrukcija i neke osobine ovog prostora su već prikazane u Primeru 1.4.2 (njegove bazne funkcije su (1.22)).

Diskretni problem kojim se definiše konformni FEM za problem (2.1) glasi:

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \text{ za svako } v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.8)$$

Kao što smo već rekli, takav postupak se zove postupak konačnih elemenata Galerkina. Na osnovu Laks-Milgramove teoreme sledi da postoji jedinstveno diskretno rešenje problema (2.8).

Diskretno rešenje u_h se može predstaviti u obliku

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \varphi_i(x),$$

gde $u_{h,i} \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, N$, i važi

$$u_h(x_j) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \varphi_i(x_j) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \delta_{ij} = u_{h,j}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Diskretni problem (2.8) se može transformisati u sistem linearnih jednačina oblika

$$\begin{cases} \text{traži se } [u_{h,0}, u_{h,1}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tako da je} \\ \sum_{i=0}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

Na taj način se dobija sledeća diferencna šema

$$\begin{cases} \mathcal{L}^N u_i := -\varepsilon(D^+ u_i - D^- u_i) - (\alpha_i D^+ u_i + \beta_i D^- u_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx \\ u_0 = u_N = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

gde je $u_i = u_h(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, i diferencni operatori D^+ i D^- su definisani sa

$$D^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}}, \quad D^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i},$$

i

$$\alpha_i = h_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b \varphi'_{i+1} \varphi_i \, dx, \quad \beta_i = h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi'_i \varphi_i \, dx.$$

U nastavku ispitujemo osobine "stiffness" matrice $A = [a_{ij}] = [a(\varphi_j, \varphi_i)]$, koja odgovara šemi (2.9). Da bi se dobio L - oblik matrice A , potrebno je da važi $a_{ii} > 0$ i $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$. Važi $a_{ij} = 0$ kada je $|i - j| > 1$, to jest, A je tridijagonalna matrica.

Takođe je

$$\begin{aligned} a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) &= \varepsilon(\varphi'_{i+1}, \varphi'_i) - (b\varphi'_{i+1}, \varphi_i) = \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_{i+1} \varphi'_i \, dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} b \varphi'_{i+1} \varphi_i \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} - \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) \, dx < 0. \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= \varepsilon(\varphi'_{i-1}, \varphi'_i) - (b\varphi'_{i-1}, \varphi_i) \\ &= \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-1} \varphi'_i \, dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi'_{i-1} \varphi_i \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) \, dx \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{1}{h_i^2} \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{1}{2} \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}. \end{aligned}$$

Uz uslov

$$h_i \leq \frac{\varepsilon}{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}},$$

dobijamo da važi

$$a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{1}{2}\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})} = \frac{-2\varepsilon + \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}h_i}{2h_i} \leq \frac{-\varepsilon}{2h_i} < 0.$$

Za dijagonalne elemente je ispunjeno

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_i) &= \varepsilon(\varphi'_i, \varphi'_i) - (b\varphi'_i, \varphi_i) \\ &= \varepsilon \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_i dx \right) - \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i \varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b\varphi'_i \varphi_i dx \right) \\ &= \varepsilon \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) - \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx + \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) dx \\ &> \frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}} - \frac{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx \\ &\quad + \frac{\beta}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) dx = \frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}} - \frac{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}}{2} + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Uz uslov $h_i \leq \frac{\varepsilon}{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{d\})}}$, dobijamo da važi $a(\varphi_i, \varphi_i) > 0$.

Dakle, A je L -matrica ukoliko je korak mreže dovoljno mali u poređenju sa ε , odnosno kada je mreža gusta. Kada je prethodni uslov narušen, to jest, kada je korak mreže veliki, matrica A nema L - oblik, pa nije M -matrica. Zbog toga je narušena stabilnost ovog postupka. Posledica nestabilnosti postupka jeste pojava oscilacija, [8]. Iz tog razloga će se za rešavanje polaznog problema koristiti stabilizovana verzija postupka konačnih elemenata, o čemu će više reči biti u Glavi 4.

Glava 3

Slojno-adaptivne mreže

Pri numeričkom rešavanju SPP, za aproksimaciju rešenja van slojeva dovoljno je koristiti grubu mržu. U slojnim delovima domena je poželjno da mreža bude dovoljno gusta kako bi sa prihvatljivom tačnošću dobili numeričko rešenje. Zato je potrebno pažljivo izvršiti diskretizaciju domena. Zbog toga se generišu *slojno-adaptivne mreže* ("layer-adapted meshes"). *Tranzicione tačke* su tačke domena u kojima mreža prelazi iz fine u grubu ili obratno.

U ovom odeljku se za diskretizaciju polaznog domena koristi Duran - Šiškinova mreža koja se prvi put spominje u [18]. U ovom radu je mreža prilagođena slojevima u $x = 0$ i $x = d$, gde je i rekurzivno zadata, dok je van slojeva ekvidistantna.

3.1 Duran-Šiškinova mreža

Neka je $N > 4$ paran ceo broj koji nazivamo *parametar diskretizacije*. Posmatramo mrežu $\Omega^N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ i lokalni korak mreže $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$.

Tranzicione tačke Duran-Šiškinove mreže su σ_0 i $d + \sigma_1$, gde je

$$\sigma_0 = \tau_0 \varepsilon \ln N < \frac{d}{4}$$

i

$$\sigma_1 = \tau_1 \varepsilon \ln N < \frac{d}{4},$$

pri čemu su τ_j , $j = 0, 1$, proizvoljno izabrane konstante.

Za dati parametar $0 < h < 1$, tačke Duran-Šiškinove mreže na intervalu $\bar{\Omega} = [0, 1]$ su

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_0 = 0 \\
x_1 = h\varepsilon \\
x_i = x_{i-1} + hx_{i-1} = h\varepsilon(1+h)^{i-1}, \quad i = 2, \dots, M_0 \\
x_{M_0+i} = x_{M_0} + i \frac{d - x_{M_0}}{\frac{N}{2}} = \tilde{\sigma}_0 + 2iN^{-1}(d - \tilde{\sigma}_0), \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\
x_{M_0+\frac{N}{2}} = d \\
x_{M_0+\frac{N}{2}+i} = x_{M_0+\frac{N}{2}} + h\varepsilon(1+h)^{i-1} \\
\quad = d + h\varepsilon(1+h)^{i-1}, \quad i = 1, \dots, M_1 \\
x_{M_0+\frac{N}{2}+M_1+i} = x_{M_0+\frac{N}{2}+M_1} + i \frac{1 - x_{M_0+\frac{N}{2}+M_1}}{\frac{N}{2}} \\
\quad = d + \tilde{\sigma}_1 + 2iN^{-1}(1 - d - \tilde{\sigma}_1), \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2},
\end{array} \right. \quad (3.1)$$

gde je

$$x_{M_0} = \tilde{\sigma}_0 = h\varepsilon(1+h)^{M_0-1}$$

i

$$x_{M_0+\frac{N}{2}+M_1} = d + \tilde{\sigma}_1 = d + h\varepsilon(1+h)^{M_1-1}.$$

U ovim tačkama smo izabrali najmanje brojeve M_0 i M_1 takve da je

$$\sigma_0 \leq \tilde{\sigma}_0 = h\varepsilon(1+h)^{M_0-1}$$

i

$$\sigma_1 \leq \tilde{\sigma}_1 = h\varepsilon(1+h)^{M_1-1}.$$

To znači da je

$$h\varepsilon(1+h)^{M_0-i} < \sigma_0, \quad \text{za } i > 1$$

i

$$h\varepsilon(1+h)^{M_1-i} < \sigma_1, \quad \text{za } i > 1.$$

Broj tačkaka u ekvidistantnom delu mreže je N i on se zadaje unapred, dok se broj tačkaka mreže, M_0 i M_1 , u delovima domena u kojima se javljaju slojevi, dobija iz pomenutih uslova.

Pretpostavka u radu je da su zadovoljeni uslovi $\tilde{\sigma}_i \leq \frac{d}{4}$, $i = 0, 1$, što je tipičan slučaj za singularno perturbovane probleme. Perturbacioni parametar je tada dovoljno mali, npr. $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Konstruisali smo tačke Duran-Šiškinove mreže koja je ekvidistantna na $\bar{\Omega}_c = [\tilde{\sigma}_0, d] \cup [d + \tilde{\sigma}_1, 1]$ i postepeno izdeljena na $\bar{\Omega}_f = [0, \tilde{\sigma}_0] \cup [d, d + \tilde{\sigma}_1]$.

Navodimo lemu o koracima Duran-Šiškinove mreže.

Lema 3.1.1 *Koraci $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, M_0 + M_1 + N$ mreže (3.1) su:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_1 = h\varepsilon & \\ h_i = h^2\varepsilon(1+h)^{i-2}, & i = 2, \dots, M_0 \\ h_i = 2N^{-1}(d - \tilde{\sigma}_0), & i = M_0 + 1, \dots, M_0 + \frac{N}{2} \\ h_{M_0 + \frac{N}{2} + 1} = h\varepsilon & \\ h_i = h^2\varepsilon(1+h)^{j-2}, & i = M_0 + \frac{N}{2} + j, j = 2, \dots, M_1 \\ h_i = 2N^{-1}(1 - d - \tilde{\sigma}_1), & i = M_0 + \frac{N}{2} + M_1 + 1, \dots, M_0 + M_1 + N, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

i imaju sledeće osobine:

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_i \leq hx < h, & i = 2, \dots, M_0 \\ h_i \leq CN^{-1}, & i = M_0 + 1, \dots, M_0 + \frac{N}{2} \\ h_i \leq h(x - d) \leq hx < h, & i = M_0 + \frac{N}{2} + 2, \dots, M_0 + \frac{N}{2} + M_1 \\ h_i \leq CN^{-1}, & i = M_0 + \frac{N}{2} + M_1 + 1, \dots, M_0 + M_1 + N, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

za $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Dokaz: Jednakosti u (3.2) se trivijalno pokazuju na osnovu definicije tačkaka mreže (3.1). Što se tiče (3.3) imamo sledeće: za $i = 2, \dots, M_0$ važi $h_i = x_i - x_{i-1} = hx_{i-1} \leq hx$, za $x \in [x_{i-1}, x_i]$, za $i = M_0 + 1, \dots, M_0 + \frac{N}{2}$ važi

$h_i = 2N^{-1}(d - \tilde{\sigma}_0) \leq 2N^{-1} = CN^{-1}$. Analogno važi za $i = M_0 + \frac{N}{2} + M_1 + 1, \dots, M_0 + M_1 + N$. Za $i = M_0 + \frac{N}{2} + 2, \dots, M_0 + \frac{N}{2} + M_1$ važi $h_i = h^2\varepsilon(1+h)^{j-2} = h(h\varepsilon(1+h)^{j-2}) = h(x_{i-1} - d) \leq h(x - d)$, za $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

■

Pretpostavka 3.1.1 Izabrali smo $\sigma_{0,1} = \tau_{0,1}\varepsilon \ln N$, jer u suprotnom je N^{-1} jako malo u odnosu na ε , preciznije $N^{-1} \leq Ce^{-1/\varepsilon}$. Pretpostavimo i da je $\varepsilon \leq CN^{-1}$.

3.2 Šiškinova mreža

U ovom odeljku ćemo pomenuti mrežu Šiškinovog tipa (S-mrežu) koja se zbog svoje jednostavnosti često sreće u literaturi. Prva analiza metoda konačnih elemenata na ovoj mreži je urađena u radu [22]. Više detalja o Šiškinovoj mreži, kao i njenoj upotrebi može se naći u [11, 14, 15, 16].

Deo po deo ekvidistantna Šiškinova mreža za dvoparametarski singularno perturbovani problem je prilagođena slojevima u $x = 0$ i $x = d$.

Neka su σ_0 i $d + \sigma_1$ tranzicione tačke Duran-Šiškinove mreže.

Konstruišemo mrežu tako da je ekvidistantna na $\bar{\Omega}_c = [\sigma_0, d] \cup [d + \sigma_1, 1]$ i postepeno izdeljena na $\bar{\Omega}_f = [0, \sigma_0] \cup [d, d + \sigma_1]$. Svaki od ovih podintervala se deli na $\frac{N}{4}$ jednakih delova, gde je N prirodan broj deljiv sa 4.

Tranzicione tačke biraju se tako da je

$$x_{\frac{N}{4}} = \sigma_0, \quad x_{\frac{N}{2}} = d, \quad x_{\frac{3N}{4}} = d + \sigma_1.$$

Zbog postojanja dodatnog unutrašnjeg sloja u tački $x = d$, potrebno je da se koriste dve *generativne funkcije mreže*³² ϕ_1 i ϕ_2 , koje glase

$$\phi_1(t) = 4t \ln N$$

i

$$\phi_2(t) = 2(2t - 1) \ln N.$$

Ove dve funkcije su obe neprekidne, po delovima neprekidno diferencijabilne, monotono opadajuće i imaju osobine

³²Strogo monotona funkcija $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ koja preslikava uniformnu mrežu po ξ u slojno-adaptivnu mrežu po x sa $x = \phi(\xi)$ se naziva generativna funkcija mreže.

$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1\left(\frac{1}{4}\right) = \ln N,$$

$$\phi_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \phi_2\left(\frac{3}{4}\right) = \ln N.$$

Tačke mreže su date sa

$$x_i = \begin{cases} \tau_0 \varepsilon \phi_1\left(\frac{i}{N}\right), & i = 0, \dots, \frac{N}{4} \\ \sigma_0 + 2iN^{-1}(d - \sigma_0), & i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{2} \\ d + \tau_1 \varepsilon \phi_2\left(\frac{i}{N}\right), & i = \frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{3N}{4} \\ d + \sigma_1 + 2\left(iN^{-1} - \frac{1}{2}\right)(1 - d - \sigma_1), & i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.4)$$

Glava 4

”Streamline-diffusion” postupak konačnih elemenata i analiza greške

4.1 SDFEM

Postupak konačnih elemenata Galerkina daje oscilatorna rešenja, čak i u slučaju slojno-adaptivnih mreža, [8]. Da bi se izbegle oscilacije koje su direktna posledica nestabilnosti pomenutog postupka, za diskretizaciju problema (2.7) bira se jedan drugi postupak konačnih elemenata - ”*streamline-diffusion*” postupak konačnih elemenata (SDFEM).

Ovu vrstu stabilizacije su prvi put primenili Hjuž i Bruks u [10] za problem konvekcije-difuzije sa dominantnom konvekcijom. Predložili su modifikaciju standardnog postupka Galerkina koja uključuje primenu postupka Petrov - Galerkina sa izmenjenim test funkcijama. Iz tog razloga je SDFEM poznat i pod nazivom ”streamline-diffusion” Petrov-Galerkinov metod.

U ovom odeljku ćemo predstaviti SDFEM za problem (2.1).

Posmatramo opštu mrežu $\Omega^N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ i neka je sa $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$ označen lokalni korak mreže.

Neka je V_h prostor koga čine po delovima linearne funkcije koje imaju vrednost nula u tačkama $x_0 = 0$ i $x_N = 1$. Diskretni problem kojim se definiše nekonformni SDFEM za problem (2.1) glasi

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in V_h \subset V \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \text{ za svako } v_h \in V_h, \end{cases} \quad (4.1)$$

sa

$$a_h(v_h, w_h) = (\varepsilon v_h', w_h') - (b v_h', w_h) - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (-\varepsilon v_h'' - b v_h') b w_h' dx, \quad (4.2)$$

$$l_h(w_h) = (f, w_h) - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k f b w_h' dx,$$

i nekim parametrom $\delta_k \in \mathbb{R}^+$. Ako je $\delta_k = 0$ za svako k dobija se diskretni problem koji odgovara standardnom postupku Galerkina (2.7).

”Streamline-diffusion” normu (*SD-normu*) definišemo na sledeći način

$$\|v\|_{SD}^2 = \varepsilon \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (v')^2 dx, \quad v \in V,$$

i u odnosu na nju pokazujemo neprekidnost i koercitivnost bilinearne forme a_h .

Imamo da je

$$\begin{aligned} a_h(w_h, w_h) &= (\varepsilon w_h', w_h') - (b w_h', w_h) - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (-\varepsilon w_h'' - b w_h') b w_h' dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx - \int_{\Omega} b w_h' w_h dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{2} b (w_h^2)' dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \end{aligned}$$

Primenom parcijalne integracije na drugi integral u prethodnom izrazu dobijamo

$$\begin{aligned} a_h(w_h, w_h) &= \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx + \int_{\Omega} w_h^2 \left(\frac{1}{2} b'\right) dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \\ &\geq \varepsilon \int_{\Omega} (w_h')^2 dx + \gamma \int_{\Omega} w_h^2 dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx \\ &= \varepsilon \|w_h'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (w_h')^2 dx = \|w_h\|_{SD}^2. \end{aligned}$$

Dakle, a_h je koercitivna bilinearna forma. Tada homogeni problem

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = 0, \text{ za svako } v_h \in V_h, \end{cases} \quad (4.3)$$

ima samo trivijalno rešenje $u_h = 0$, pa diskretni problem (4.1) ima jedinstveno rešenje.

Ako je $\{\varphi_0, \dots, \varphi_N\}$ baza prostora V_h , onda postoji jedinstvena reprezentacija

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \varphi_i(x), \quad u_{h,i} \in \mathbb{R}.$$

U tačkama mreže važi

$$u_j = u_h(x_j) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \varphi_i(x_j) = \sum_{i=0}^N u_{h,i} \delta_{ij} = u_{h,j}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Diskretni problem (4.1) se može transformisati u sistem linearnih jednačina oblika

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traži se } [u_{h,0}, u_{h,1}, \dots, u_{h,N}]^T \in \mathbb{R}^N \text{ tako da je} \\ \sum_{i=0}^N a_h(\varphi_i, \varphi_j) u_{h,i} = l_h(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Na taj način se dobija sledeća diferencna šema

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^N u_i := -\varepsilon(D^+ u_i - D^- u_i) - (\alpha_i D^+ u_i + \beta_i D^- u_i) = l_h(\varphi_i) \\ u_0 = u_N = 0, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

gde je $u_i = u_h(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ i diferencni operatori D^+ i D^- su definisani sa

$$D^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}}, \quad D^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i},$$

$$\alpha_i = h_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (b \varphi'_{i+1} \varphi_i - \delta_{i+1} b^2 \varphi'_{i+1} \varphi'_i) dx, \quad \beta_i = h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (b \varphi'_i \varphi_i - \delta_i b^2 \varphi'_i \varphi'_i) dx.$$

Struktura matrice sistema $A = [a_{ij}] = [a_h(\varphi_j, \varphi_i)]$, koja odgovara diferencnoj šemi (4.5), utiče na izbor "streamline-diffusion" parametra (*SD-parametra*) δ_i . Da bi se dobio L -oblik matrice A , potrebno je da važi $a_{ii} > 0$ i $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$. Matrica A je tridijagonalna matrica, jer je $a_{ij} = 0$ za $|i - j| > 1$.

Neka je $\bar{b} = \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{d\})}$. Važi

$$\begin{aligned}
a_h(\varphi_{i+1}, \varphi_i) &= \varepsilon(\varphi'_{i+1}, \varphi'_i) - (b\varphi'_{i+1}, \varphi_i) - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k(-\varepsilon\varphi''_{i+1} - b\varphi'_{i+1})b\varphi'_i dx \\
&= \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_{i+1}\varphi'_i dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} b\varphi'_{i+1}\varphi_i dx + \delta_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2\varphi'_{i+1}\varphi'_i dx \\
&= -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} - \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) dx - \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \\
&\leq -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} - \frac{\bar{b}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) dx - \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \\
&= -\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} - \frac{\bar{b}}{2} - \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx.
\end{aligned}$$

Kad je $\delta_{i+1} \geq 0$, važi $a_h(\varphi_{i+1}, \varphi_i) < 0$. Dalje je

$$\begin{aligned}
a_h(\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= \varepsilon(\varphi'_{i-1}, \varphi'_i) - (b\varphi'_{i-1}, \varphi_i) - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k(-\varepsilon\varphi''_{i-1} - b\varphi'_{i-1})b\varphi'_i dx \\
&= \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-1}\varphi'_i dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_{i-1}\varphi_i dx + \delta_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2\varphi'_{i-1}\varphi'_i dx \\
&= -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx - \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx \\
&\leq -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{\bar{b}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx - \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx \\
&= -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{\bar{b}}{2} - \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx.
\end{aligned}$$

Kada je $h_i \leq \frac{\varepsilon}{\bar{b}}$, uzimamo da je $\delta_i = 0$ i važi

$$a_h(\varphi_{i-1}, \varphi_i) \leq -\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{\bar{b}}{2} = \frac{-2\varepsilon + \bar{b}h_i}{2h_i} \leq -\frac{\varepsilon}{2h_i} < 0.$$

Kada je $h_i > \frac{\varepsilon}{\bar{b}}$, onda δ_i biramo iz uslova

$$-(b\varphi'_{i-1}, \varphi_i) + \delta_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 \varphi'_{i-1} \varphi'_i dx = 0,$$

i tada dobijamo

$$a_h(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \varepsilon(\varphi'_{i-1}, \varphi'_i) = -\frac{\varepsilon}{h_i} < 0.$$

Prethodni uslov se svodi na

$$\delta_i = \frac{b(\varphi'_{i-1}, \varphi_i)}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 \varphi'_{i-1} \varphi'_i dx} = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi'_{i-1} \varphi_i dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 \varphi'_{i-1} \varphi'_i dx} = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi'_i \varphi_i dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 \varphi'_i \varphi'_i dx}.$$

Ostaje još da se ispita znak dijagonalnih elemenata. Imamo da je

$$\begin{aligned} a_h(\varphi_i, \varphi_i) &= \varepsilon(\varphi'_i, \varphi'_i) - (b\varphi'_i, \varphi_i) - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (-\varepsilon \varphi''_i - b\varphi'_i) b \varphi'_i dx \\ &= \varepsilon \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_i dx \right) - \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi'_i \varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b \varphi'_i \varphi_i dx \right) \\ &\quad + \delta_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 \varphi'_i \varphi'_i dx + \delta_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 \varphi'_i \varphi'_i dx \\ &= \varepsilon \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) - \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x - x_{i-1}) dx \\ &\quad + \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) dx + \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx + \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \\ &> \varepsilon \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) - \frac{\bar{b}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx \\ &\quad + \frac{\beta}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) dx + \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx + \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx \\ &= \varepsilon \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) - \frac{\bar{b}}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta_i}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2 dx + \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 dx. \end{aligned}$$

Uz uslov $h_i \leq \frac{\varepsilon}{\bar{b}}$, uzimamo $\delta_i = 0$, pa dobijamo

$$a_h(\varphi_i, \varphi_i) > \frac{\varepsilon}{h_i} - \frac{\bar{b}}{2} = \frac{2\varepsilon - \bar{b}h_i}{2h_i} \geq \frac{\varepsilon}{2h_i} > 0.$$

Kada je $h_i > \frac{\varepsilon}{\bar{b}}$, onda δ_i biramo iz uslova

$$- \int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i\varphi_i \, dx + \delta_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2\varphi'_i\varphi'_i \, dx = 0,$$

i tada dobijamo

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = \varepsilon \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta_{i+1}}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b^2 \, dx > 0.$$

Prethodni uslov se svodi na

$$\delta_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i\varphi_i \, dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2\varphi'_i\varphi'_i \, dx}.$$

Iz gornjeg razmatranja zaključujemo da SD-parametar biramo na sledeći način:

$$\text{ako je } h_i \leq \frac{\varepsilon}{\bar{b}}, \text{ onda je } \delta_i = 0, \quad (4.6)$$

i

$$\text{ako je } h_i > \frac{\varepsilon}{\bar{b}}, \text{ onda } \delta_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i\varphi_i \, dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} b^2\varphi'_i\varphi'_i \, dx}. \quad (4.7)$$

Jednostavnim ocenama se u slučaju (4.7) dobijaju sledeće nejednakosti

$$\frac{\beta}{2\bar{b}^2}h_i \leq \delta_i \leq \frac{\bar{b}}{2\beta^2}h_i. \quad (4.8)$$

Uzimajući u obzir ponašanje koraka h_i na Duran-Šiškinovoj mreži (3.1), dobijamo da je na ekvidistantnom delu

$$\delta_i \leq CN^{-1}. \quad (4.9)$$

Na slojnom delu važi

$$\begin{aligned} \delta_1 &\leq Ch_1 \leq Ch\varepsilon, \\ \delta_{M_0 + \frac{N}{2} + 1} &\leq Ch_{M_0 + \frac{N}{2} + 1} \leq Ch\varepsilon, \\ \delta_i &\leq Ch_i \leq Ch, \quad i = 2, \dots, M_0, \\ \delta_i &\leq Ch_i \leq Ch, \quad i = M_0 + \frac{N}{2} + j, \quad j = 2, \dots, M_1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sa ovakvim izborom SD-parametra dobija se da je matrica sistema šeme (4.5) L -oblika.

U nastavku se prezentuje opšti pristup iz [20] u oceni greške koji koristi reprezentaciju greške za koju se ne može reći da je u potpunosti nova, jer je uobičajeno da se u analizi SPP koriste diskretne Grinove funkcije. Slične ideje se mogu pronaći u [17] i [21].

4.2 Opšta analiza greške

Posmatrajmo sledeći opšti problem

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in V \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v), \text{ za svako } v \in V, \end{cases} \quad (4.11)$$

gde je V Hilbertov prostor, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma i $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ linearna funkcionala. Ograničavamo se na konformni postupak konačnih elemenata, to jest, polazimo od konačnodimenzionalnog potprostora $V_h \subset V$.

Diskretni problem glasi

$$\begin{cases} \text{traži se } u_h \in V_h \text{ tako da je} \\ a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \text{ za svako } v_h \in V_h, \end{cases} \quad (4.12)$$

gde su a_h i l_h bilinearna forma i linearna funkcionala definisane na potprostoru V_h . Pretpostavimo da problemi (4.11) i (4.12) imaju jedinstvena rešenja, to jest, da su zadovoljene pretpostavke Laks-Milgramove teoreme.

Neka je $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ skup baznih funkcija N -dimenzionalnog prostora V_h .

Definicija 4.2.1 Biortogonalna baza prostora V_h u odnosu na bilinearnu formu a_h je skup funkcija $\{\lambda^1, \dots, \lambda^N\} \subset V_h$ takav da svako λ^j ima osobinu

$$a_h(\varphi_i, \lambda^j) = \delta_{ij}, \quad \text{za svako } i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.13)$$

gde je δ_{ij} Kronekerov simbol. Funkcije λ^j se nazivaju diskretnim Grinovim³³ funkcijama.

Pitanje da li je Definicija 4.2.1 dobro formulisana zavisi od jednačine (4.13) i jedinstvenosti njenog rešenja λ^j za svako $j = 1, 2, \dots, N$. Ako, na primer, bilinearna forma a_h ima osobinu V_h -eliptičnosti, tada homogeni problem (4.3) ima samo trivijalno rešenje $u_h = 0$, pa (4.13) ima jedinstveno rešenje. Pitanja egzistencije i jedinstvenosti funkcija λ^j zavise od polaznog problema konvekcije-difuzije i izabranog postupka konačnih elemenata.

Pretpostavimo da za prostor V_h postoji biortogonalna baza. Tada, kao direktna posledica (4.13), sledi postojanje jedinstvene reprezentacije

$$v_h = \sum_{k=1}^N a_h(v_h, \lambda^k) \varphi_k \quad (4.14)$$

za svako $v_h \in V_h$.

Takođe, moguće je definisati linearni operator $P : V \rightarrow V_h$ sa

$$Pv = \sum_{k=1}^N a_h(v, \lambda^k) \varphi_k, \quad v \in V.$$

Zbog osobine (4.14) operator P je projekcioni operator na V_h , to jest, važi $Pv_h = v_h$, za svako $v_h \in V_h$.

Neka je data opšta mreža $\Omega^N = \{x_0, \dots, x_N\} \subset [0, 1]$, gde je

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da za funkciju u postoji dobro definisana interpolaciona funkcija $u^I \in V_h$ na Ω^N .

Kako je $Pu^I = u^I$, greška $u - u_h$ se može predstaviti u obliku

$$u - u_h = u - u^I + P(u^I - u) + Pu - u_h \quad (4.15)$$

³³George Green (1793-1841), engleski matematičar

Ovakva reprezentacija greške se sastoji iz tri dela. Prvi deo $u - u^I$ se naziva *greška interpolacije*, drugi deo $P(u^I - u)$ *greška projekcije* i treći $Pu - u_h$ *greška konzistencije*. Poslednji deo je dobio ovakav naziv jer je $Pu - u_h = 0$ u slučaju konzistentnog postupka konačnih elemenata.³⁴ Zaista, u slučaju konzistentnog postupka konačnih elemenata dobija se

$$Pu = \sum_{k=1}^N a_h(u, \lambda^k) \varphi_k = \sum_{k=1}^N l_h(\lambda^k) \varphi_k = \sum_{k=1}^N a_h(u_h, \lambda^k) \varphi_k = u_h.$$

U narednim odeljcima ćemo uz pomoć (4.15) izvesti ocenu greške u tačkama mreže

$$|u(x_i) - u_h(x_i)|, \quad x_i \in \Omega^N.$$

Takođe, osobine izabranog konačnodimenzionalnog prostora V_h se koriste za dobijanje tačnijih podataka o ponašanju greške u pomenutim tačkama i o oceni greške na podintervalima $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Neka V_h koristi linearne Lagranžove elemente. Sada se lako može izvesti ocena greške $u - u_h$ na svakom elementu $\kappa_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$. Prvo pretpostavimo da je već pokazana ε -uniformna ocena greške u tačkama mreže tipa

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leq \vartheta(N), \quad x_i \in \Omega^N,$$

gde je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta(N) = 0.$$

Neka je $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ proizvoljno i neka $x \in \kappa_i$. Tada primenom nejednakosti trougla dobijamo

$$|u(x) - u_h(x)| \leq |u(x) - u^I(x)| + |u^I(x) - u_h(x)|.$$

Drugi sabirak u ovoj nejednakosti ocenjuje se sa

$$\begin{aligned} & |u^I(x) - u_h(x)| \\ &= |u(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) + u(x_i)\varphi_i(x) - u_h(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) - u_h(x_i)\varphi_i(x)| \\ &\leq |u(x_{i-1}) - u_h(x_{i-1})|\varphi_{i-1}(x) + |u(x_i) - u_h(x_i)|\varphi_i(x) \leq \vartheta(N), \end{aligned}$$

³⁴Za postupak konačnih elemenata kažemo da je *konzistentan* ako važi

$$a_h(u, v_h) = l_h(v_h), \quad \text{za svako } v_h \in V_h.$$

za $i = 2, 3, \dots, N - 1$. Funkcije φ_i , koje se javljaju u gornjoj oceni, definisane su u (1.22). Ista ocena greške se dobija i za $i = 1$ i $i = N$. Dakle, na svakom podintervalu κ_i se dobija

$$|u(x) - u_h(x)| \leq \|u - u^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} + \vartheta(N). \quad (4.16)$$

Vratimo se ponovo na reprezentaciju greške (4.15). Neka je $x_i \in \Omega^N$ fiksirana tačka mreže. Tada se greška u izabranoj tački mreže svodi na

$$\begin{aligned} u(x_i) - u_h(x_i) &= u(x_i) - u^I(x_i) + P(u^I - u)(x_i) + (Pu - u_h)(x_i) \\ &= P(u^I - u)(x_i) + (Pu - u_h)(x_i), \end{aligned}$$

jer je za linearni interpolant u^I ispunjeno (1.24). Pri tome je greška projekcije

$$P(u^I - u)(x_i) = \sum_{k=0}^N a_h(u^I - u, \lambda^k) \varphi_k(x_i) = a_h(u^I - u, \lambda^i). \quad (4.17)$$

U opštem slučaju se greška konzistencije $Pu - u_h$ može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} Pu - u_h &= \sum_{k=0}^N a_h(u, \lambda^k) \varphi_k - \sum_{k=0}^N a_h(u_h, \lambda^k) \varphi_k \\ &= \sum_{k=0}^N a_h(u, \lambda^k) \varphi_k - \sum_{k=0}^N l_h(\lambda^k) \varphi_k + \sum_{k=0}^N l(\lambda^k) \varphi_k - \sum_{k=1}^{N-1} a(u, \lambda^k) \varphi_k \\ &= \sum_{k=0}^N (a_h - a)(u, \lambda^k) \varphi_k + \sum_{k=0}^N (l - l_h)(\lambda^k) \varphi_k. \end{aligned}$$

Sada je greška konzistencije u tački mreže x_i data sa

$$(Pu - u_h)(x_i) = (a_h - a)(u, \lambda^i) + (l - l_h)(\lambda^i). \quad (4.18)$$

Na kraju, iz (4.17) i (4.18) zaključujemo da greška u tački mreže ima oblik

$$u(x_i) - u_h(x_i) = a_h(u^I - u, \lambda^i) + (a_h - a)(u, \lambda^i) + (l - l_h)(\lambda^i). \quad (4.19)$$

4.3 Greška interpolacije

Važan deo ocene greške u tačkama mreže (4.19) je greška interpolacije $u - u^I$. Zato izvodimo njenu ocenu.

Teorema 4.3.1 Greška interpolacije na mreži (3.1) se može oceniti sa

$$|u(x) - u^I(x)| \leq \begin{cases} CN^{-2}, & x \in \bar{\Omega}_c, \\ Ch^2, & x \in \bar{\Omega}_f. \end{cases} \quad (4.20)$$

Dokaz: Prema klasičnoj teoriji, za proizvoljnu funkciju $g \in C^2[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ važi

$$\|g - g^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \leq Ch_i^2 \|g''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}. \quad (4.21)$$

Za dokazivanje ocene (4.20) koristi se razlaganje $u = S + E$ iz Teoreme 2.2.1 i odgovarajuća dekompozicija $u^I = S^I + E^I$. Dakle,

$$u - u^I = (S - S^I) + (E - E^I).$$

Za regularni deo $S - S^I$ greške interpolacije, koristeći (4.21) dobijamo

$$\|S - S^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |S(x) - S^I(x)| \leq C \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h_i^2 |S''(x)|,$$

za $i = 1, \dots, M_0 + M_1 + N$.

Za $i = M_0 + 1, \dots, M_0 + \frac{N}{2}$, to jest, na ekvidistantnom delu, koristeći (2.3) i (3.3) dobijamo

$$\|S - S^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \leq CN^{-2}. \quad (4.22)$$

Analogno i za $i = M_0 + \frac{N}{2} + M_1 + 1, \dots, M_0 + M_1 + N$.

U slojnom delu, za $i = 2, \dots, M_0$, koristeći (2.3) i (3.3) dobijamo

$$\|S - S^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \leq Ch^2. \quad (4.23)$$

Analogno i za $i = M_0 + \frac{N}{2} + 2, \dots, M_0 + \frac{N}{2} + M_1$.

Posmatrajmo sada slojni deo greške $E - E^I$. Neka je

$$e_1(x) = e^{-\beta x/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_1,$$

i

$$e_2(x) = e^{-\beta(x-d)/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_2.$$

Za funkcije $e_1(x)$ i $e_2(x)$ važe sledeće ocene:

$$e_1(x) \leq \begin{cases} C, & x \in \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_f, \\ CN^{-\beta\tau_0}, & x \in \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_c, \end{cases} \quad (4.24)$$

i

$$e_2(x) \leq \begin{cases} C, & x \in \bar{\Omega}_2 \cap \bar{\Omega}_f, \\ CN^{-\beta\tau_1}, & x \in \bar{\Omega}_2 \cap \bar{\Omega}_c. \end{cases} \quad (4.25)$$

Na ekvidistantnom delu, to jest, na poddomenu $\bar{\Omega}_c$, koristeći osobinu (1.25) linearnog interpolanta, slojni deo greške $E - E^I$ se može oceniti na sledeći način:

$$|E(x) - E^I(x)| \leq 2\|E\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sada, prema (2.4), (4.24) i (4.25) i pretpostavci $\beta\tau_j \geq 2$, $j = 0, 1$ važi

$$|E(x) - E^I(x)| \leq CN^{-2}, \quad x \in \bar{\Omega}_c. \quad (4.26)$$

Na skupu $\bar{\Omega}_f$ koristimo ocenu dobijenu na osnovu klasične teorije

$$|E(x) - E^I(x)| \leq Ch_i^2 \|E''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (4.27)$$

Neka je $[x_{i-1}, x_i] \subset [0, \tilde{\sigma}_0]$. Na osnovu (3.3) važi $h_i \leq hx$, $i = 2, \dots, M_0$. Koristeći (2.4), (4.24) i (4.27) dobijamo

$$\begin{aligned} \|E - E^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} &= \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |E(x) - E^I(x)| \leq Ch_i^2 \varepsilon^{-2} \|e_1''\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \\ &\leq Ch^2 \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |x^2 \varepsilon^{-2} e^{-\beta x/\varepsilon}|, \end{aligned}$$

a kako je $\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |x^2 \varepsilon^{-2} e^{-\beta x/\varepsilon}| \leq C$, to jest, ova funkcija je uniformno ograničena na \mathbb{R}^+ , dobijamo

$$\|E - E^I\|_{L^\infty[x_{i-1}, x_i]} \leq Ch^2, \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [0, \tilde{\sigma}_0]. \quad (4.28)$$

Prethodna ocena se slično izvodi i na ostatku skupa $\bar{\Omega}_f$.

Na kraju zaključujemo da iz (4.22), (4.23), (4.24) i (4.25) sledi tvrđenje teoreme. ■

4.4 Diskretne Grinove funkcije

U ovom odeljku ćemo proučavati osobine diskretnih Grinovih funkcija λ^i , čija egzistencija sledi na osnovu koercitivnosti diskretne bilinearne forme a_h .

Na intervalu $\bar{\Omega}$ posmatramo problem

$$\mathcal{L}^N u_i := -\varepsilon(pu_{\bar{x}})_{\hat{x},i} - r_{i+1}u_{\hat{x},i} + q_i u_i = l_h^i, \quad x_i \in \Omega, \quad u_0 = u_N = 0, \quad (*)$$

gde je

$$(u_i - u_{i-1})/h_i = u_{\bar{x},i}, \quad (u_{i+1} - u_i)/h_{i+1} = u_{x,i} = u_{\bar{x},i+1}, \quad (u_{i+1} - u_i)/\bar{h}_i = u_{\hat{x},i},$$

sa odgovarajućom desnom stranom l_h^i i nekim koeficijentima p_i , q_i i r_i koji imaju sledeće osobine

$$p_i \geq p > 0, \quad q_i \geq 0, \quad r_{i+1} \geq r > 0. \quad (4.29)$$

U skladu sa ovim, problem (*) se može zapisati u obliku

$$-\frac{\varepsilon}{\bar{h}_i}(p_{i+1}D^+u_i - p_iD^-u_i) - \frac{r_{i+1}}{\bar{h}_i}(u_{i+1} - u_i) + q_i u_i = l_h^i, \quad u_0 = u_N = 0.$$

Za diferencnu šemu (4.5) važi

$$p_i = 1 - \frac{\beta_i}{\varepsilon}, \quad q_i = 0, \quad r_{i+1} = \frac{\alpha_i + \beta_{i+1}}{h_{i+1}}. \quad (4.30)$$

Pokazujemo da su ispunjeni uslovi (4.29).

Ako je $\delta_i \neq 0$, to jest, kada je $h_i > \frac{\varepsilon}{b}$, onda je $p_i = 1$.

Ako je $\delta_i = 0$, to jest, kada je $h_i \leq \frac{\varepsilon}{b}$, onda je

$$p_i = 1 - \frac{h_i}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_i \varphi'_i dx \geq 1 - h_i \frac{\bar{b}}{2\varepsilon} \geq 1 - \frac{\varepsilon \bar{b}}{b 2\varepsilon} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, $p_i \geq \frac{1}{2}$.

Na kraju imamo da je

$$\begin{aligned}
r_{i+1} &= \frac{\alpha_i + \beta_{i+1}}{h_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b\varphi'_{i+1}\varphi_i \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b\varphi'_{i+1}\varphi_{i+1} \, dx \\
&= \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x_{i+1} - x) \, dx + \frac{1}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x - x_i) \, dx \\
&\geq \frac{\beta}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) \, dx + \frac{\beta}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \, dx \\
&= \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta > 0,
\end{aligned}$$

te su za $r = \beta$ ispunjeni uslovi (4.29).

Sada se može primeniti Lema 6.3.1 kako bi zaključili da je

$$\|\lambda^i\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C, \quad \|(\lambda^i)'\|_{L^1(\Omega)} \leq C. \quad (4.31)$$

Napomena 4.4.1 Ako na slojnom delu posmatramo korake Duran-Šiškinove mreže h_i iz (3.2), možemo da damo bliže informacije o ponašanju SD-parametra δ_i . Naime, važi

$$h_i = h^2\varepsilon(1+h)^{i-2} < h\sigma_0 = h\tau_0\varepsilon\ln N, \quad i = 2, \dots, M_0,$$

i

$$h_i = h^2\varepsilon(1+h)^{j-2} < h\sigma_1 = h\tau_1\varepsilon\ln N, \quad i = M_0 + \frac{N}{2} + j, \quad j = 2, \dots, M_1.$$

Ako uvedemo pretpostavku da je h dovoljno malo u odnosu na N , to jest, da je

$$h \leq \frac{1}{\tau_0 \bar{b} \ln N}$$

i

$$h \leq \frac{1}{\tau_1 \bar{b} \ln N},$$

dobijamo da je $h_i \leq \frac{\varepsilon}{\bar{b}}$, pa na osnovu (4.6) važi $\delta_i = 0$.

4.5 Analiza greške u tačkama mreže

Izvešćemo ε -uniformnu ocenu greške za SDFEM primenjen na Duran-Šiškinovoj mreži za problem (2.1).

Postupak tipa SDFEM je konzistentan, pa se na osnovu (4.19) greška u proizvoljnoj tački svodi na

$$u(x_i) - u_h(x_i) = a_h(u^I - u, \lambda^i), \quad x_i \in \Omega^N. \quad (4.32)$$

Sada navodimo teoremu o ε -uniformnoj oceni greške.

Teorema 4.5.1 *Neka su u i u_h rešenja problema (2.1) i (4.4) redom. Tada na Duran-Šiškinovoj mreži (3.1) sa $\tau \geq 2$, greška u tačkama mreže ima osobinu*

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leq \begin{cases} CN^{-2}, & x \in \bar{\Omega}_c, \\ C(N^{-2} + h^2), & x \in \bar{\Omega}_f. \end{cases} \quad (4.33)$$

Dokaz: Neka je x_i proizvoljna tačka mreže. Prema definiciji bilinearne forme a_h i prema osobinama linearnog interpolanta u^I imamo da je

$$\begin{aligned} a_h(u^I - u, \lambda^i) &= \varepsilon \int_0^1 (u^I - u)'(\lambda^i)' dx - \int_0^1 b(u^I - u)' \lambda^i dx \\ &- \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k u'' b(\lambda^i)' dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (u^I - u)'(\lambda^i)' dx. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Primenom parcijalne integracije na prvi integral u (4.34), zatim osobina (1.24) i $(\lambda^i)'' = 0$ dobija se

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^1 (u^I - u)'(\lambda^i)' dx &= \varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u)'(\lambda^i)' dx \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^N (u^I - u)(\lambda^i)' \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u)(\lambda^i)'' dx = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Zatim se parcijalnom integracijom transformiše drugi integral u (4.34). Na osnovu glatkosti funkcije b i pokazanih osobina diskretnih Grinovih funkcija dobijaju se sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_0^1 b(u^I - u)' \lambda^i dx \right| = \left| \int_0^1 b(u^I - u)' \lambda^i dx \right| = \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} b(u^I - u)' \lambda^i dx \right| \\
& = \left| \sum_{k=1}^N b(u^I - u) \lambda^i \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u) (b' \lambda^i + b(\lambda^i)') dx \right| \\
& = \left| - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u^I - u) (b' \lambda^i + b(\lambda^i)') dx \right| \leq \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} |(u^I - u) (b' \lambda^i + b(\lambda^i)')| dx \\
& \leq C \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} (\|\lambda^i\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \|(\lambda^i)'\|_{L^1(\Omega)}) \\
& \leq C \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Za analizu trećeg integrala u (4.34) koristi se dekompozicija $u = S + E$ iz Teoreme 2.2.1. Tada za glatki deo rešenja, koristeći ocene (4.9), (2.3), (4.31) i osobine parametra δ_i iz Napomene 4.1.1 dobijamo

$$\begin{aligned}
& \left| - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k S'' b(\lambda^i)' dx \right| = \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k S'' b(\lambda^i)' dx \right| \\
& \leq C \varepsilon N^{-1} \|S''\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|(\lambda^i)'\|_{L^1(\Omega)} \leq C \varepsilon N^{-1} \leq C N^{-2}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Zbog ocena (4.9), glatkosti funkcije b i osobina parametra δ_i iz Napomene 4.1.1 za slojni deo rešenja važi

$$\begin{aligned}
& \left| - \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k E'' b(\lambda^i)' dx \right| = \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k E'' b(\lambda^i)' dx \right| \\
& \leq C \varepsilon N^{-1} \left(\sum_{k=M_0+1}^{M_0+\frac{N}{2}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |E''| |(\lambda^i)'| dx + \sum_{k=M_0+\frac{N}{2}+M_1+1}^{M_0+M_1+N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |E''| |(\lambda^i)'| dx \right).
\end{aligned}$$

Lokalni korak mreže h_i na ekvidistantnom delu se može ograničiti od dole sa

$$h_i \geq 2\max\{d, 1-d\}N^{-1},$$

pa funkcije $\lambda_i \in V_h$ imaju osobinu

$$|(\lambda^i)'(x)| = \frac{1}{h_k} |\lambda^i(x_k) - \lambda^i(x_{k-1})| \leq CN \|\lambda^i\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq CN,$$

za svako $x \in [x_{k-1}, x_k] \subset \bar{\Omega}_c$.

Koristeći ovo i (2.4) dobijamo

$$\begin{aligned} \left| -\sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k E'' b(\lambda^i)' dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k E'' b(\lambda^i)' dx \right| \\ &\leq C\varepsilon \left(\sum_{k=M_0+1}^{M_0+\frac{N}{2}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon^{-2} e^{-\beta x/\varepsilon} dx + \sum_{k=M_0+\frac{N}{2}+M_1+1}^{M_0+M_1+N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon^{-2} e^{-\beta(x-d)/\varepsilon} dx \right) \\ &= C\varepsilon^{-1} \left(\sum_{k=M_0+1}^{M_0+\frac{N}{2}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\beta x/\varepsilon} dx + \sum_{k=M_0+\frac{N}{2}+M_1+1}^{M_0+M_1+N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-\beta(x-d)/\varepsilon} dx \right) \\ &= C \left(\sum_{k=M_0+1}^{M_0+\frac{N}{2}} e^{-\beta x/\varepsilon} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \sum_{k=M_0+\frac{N}{2}+M_1+1}^{M_0+M_1+N} e^{-\beta(x-d)/\varepsilon} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} \right) \\ &= C(N^{-\beta\tau_0} + N^{-\beta\tau_1}). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Na kraju, na osnovu ocena (4.37) i (4.38), za ocenu trećeg integrala u (4.34) se dobija

$$\begin{aligned} \left| -\sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k u'' b(\lambda^i)' dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon \delta_k u'' b(\lambda^i)' dx \right| \\ &\leq CN^{-2} + C(N^{-\beta\tau_0} + N^{-\beta\tau_1}). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Posmatramo sada četvrti integral u (4.34). Primenom parcijalne integracije i primenom osobina koje važe za δ_i , b i λ_i dobija se

$$\left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k b^2 (u^I - u)' (\lambda^i)' dx \right| = \left| -\sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (u^I - u) (b^2 (\lambda^i)')' dx \right|$$

$$\leq CN^{-1} \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}. \quad (4.40)$$

Na kraju, na osnovu ocena (4.35), (4.36), (4.39), (4.40), (4.20) i pretpostavki $\tau_0 \geq 2$ i $\tau_1 \geq 2$ dobijamo

$$\begin{aligned} |u(x_i) - u_h(x_i)| &= |a_h(u^I - u, \lambda^i)| \\ &\leq C(N^{-2} + N^{-\beta\tau_0} + N^{-\beta\tau_1} + \|u - u^I\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}) \\ &\leq \begin{cases} CN^{-2}, & x \in \bar{\Omega}_c, \\ C(N^{-2} + h^2), & x \in \bar{\Omega}_f. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Glava 5

Numerički eksperimenti

U ovoj glavi se eksperimentalno proverava tvrđenje Teoreme 4.5.1. Šema (4.5) se na Duran-Šiškinovoj mreži i na S-mreži sa $\tau_j = 2$, $j = 0, 1$, primenjuje na sve test probleme. U tabelama koje se nalaze u okviru ove glave su prikazane vrednosti greške

$$E^N = \max_{\varepsilon} \max_{0 \leq i \leq N} |u_{\varepsilon}(x_i) - u_i^{\varepsilon, N}|,$$

gde je u_{ε} tačno rešenje problema, a

$$[u_0^{\varepsilon, N}, u_1^{\varepsilon, N}, \dots, u_N^{\varepsilon, N}]^T$$

je rešenje sistema (4.5) za fiksne vrednosti parametra ε i N . Dalje se izračunava red konvergencije primenom standardne formule

$$p^N = \frac{\ln\left(\frac{E^N}{E^{2N}}\right)}{\ln 2}.$$

Test problem 1. Prvi problem koji je testiran je

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) - u'(x) &= 1, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Ovaj test problem je iz Napomene 0.0.1.

Iako su polazne funkcije glatke, ovde ćemo primeniti postupak koji smo konstruisali za problem konvekcije-difuzije sa prekidnim funkcijama.

Tačno rešenje ovog problema, vidi Sliku 5, je

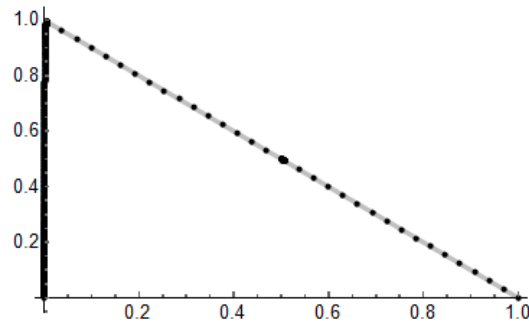
$$u(x) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + 1 - x.$$

U Tabeli 2.1 su prikazane greška i red konvergencije za test problem 1 na Duran-Šiškinovoj mreži gde je $\varepsilon = 10^{-8}$, $\tau_0 = \tau_1 = 2$ i $h = N^{-1}$.

Tabela 2.1: Rezultati za E^N i p^N za test problem 1 na Duran-Šiškinovoj mreži

N	E^N	p^N
32	3.54883×10^{-5}	1.98061
64	8.99211×10^{-6}	1.99018
128	2.26338×10^{-6}	1.99506
256	5.67786×10^{-7}	1.99604
512	1.42337×10^{-7}	2.03635
1024	3.46988×10^{-8}	0.36599
2048	2.69241×10^{-8}	-

Numerički rezultati pokazuju drugi red konvergencije postupka tipa SDFEM po N . Vidimo da za $N = 1024$, $N = 2048$, itd., red konvergencije pada. Gubitak tačnosti pri izračunavanju greške u diskretnoj maksimum normi je posledica verovatno rešavanja sistema linearnih jednačina velikih dimenzija ili nagomilavanja grešaka izračunavanja prilikom primene ugrađene naredbe `NIntegrate` na veoma uskim intervalima.



Slika 5: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 1 za $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = 0.01$ i $N = 32$ na Duran-Šiškinovoj mreži

U Tabeli 2.2 je prikazano poređenje rezultata iz Tabele 2.1 sa rezultatima dobijenim na Šiškinovoj mreži, sa istim vrednostima parametara kao u prethodnoj tabeli. Sa N_S i E_S^N su redom označeni broj podintervala Šiškinove mreže, odnosno odgovarajuća greška u diskretnoj maksimum normi.

Tabela 2.2: Rezultati za E^N za test problem 1 na Duran-Šiškinovoj i Šiškinovoj mreži

N	$N + M_0 + M_1$	E^N	N_S	E_S^N
32	386	3.54883×10^{-5}	388	4.63804×10^{-4}
64	876	8.99211×10^{-6}	876	1.17414×10^{-4}
128	1962	2.26338×10^{-6}	1964	2.92475×10^{-5}
256	4338	5.67786×10^{-7}	4340	7.30749×10^{-6}
512	9496	1.42337×10^{-7}	9496	1.82509×10^{-6}

U cilju poređenja, Šiškinova mreža je izabrana tako da ima približno isti broj tačaka kao i Duran-Šiškinova mreža. Dobijeni rezultati pokazuju da su za isti metod dobijene manje greške na Duran-Šiškinovoj mreži nego na Šiškinovoj mreži.

U Tabeli 2.3 je prikazana greška za test problem 1 na Duran-Šiškinovoj mreži gde je $\varepsilon = 10^{-8}$, $\tau_0 = \tau_1 = 2$ i $N = 1024$.

Tabela 2.3: Rezultati za E^N za test problem 1 na Duran-Šiškinovoj mreži

h	$N + M_0 + M_1$	E^N
0.06	1214	1.27761×10^{-4}
0.04	1326	5.77223×10^{-5}
0.02	1688	1.46771×10^{-5}
0.01	2482	3.70124×10^{-6}
0.008	2898	2.37295×10^{-6}
0.006	3616	1.33719×10^{-6}

Vrednosti za h , koje su veće od 0.06, nisu prikazane u tabeli, jer ne ispunjavaju uslov

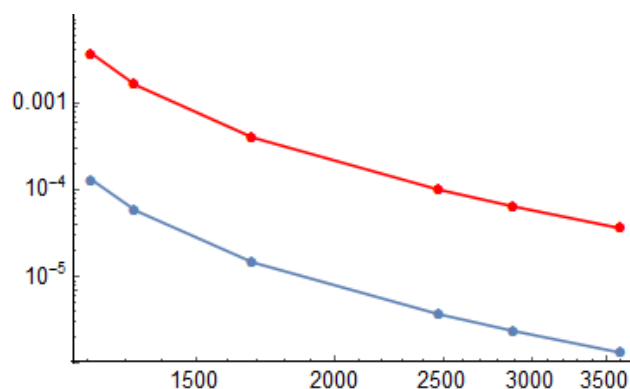
$$h \leq \frac{1}{\tau_j b \ln N}, \quad j = 0, 1.$$

Na Slici 6 vidimo da pad krive koja opisuje ponašanje greške, odgovara padu krive koja opisuje ponašanje h^2 , pa smo eksperimentalno konstatovali drugi red konvergencije i po parametru h .

Test problem 2. Drugi problem koji je testiran je

$$-\varepsilon u''(x) - b(x)u'(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$



Slika 6: Crvena kriva povezuje tačke čija je x - koordinata broj tačaka mreže, a y -koordinata vrednost za h^2 , dok plava kriva povezuje tačke čija je x - koordinata broj tačaka mreže, a y - koordinata vrednost greške

gde je

$$b(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0.5, \\ 4, & x > 0.5, \end{cases}$$

i

$$f(x) = \begin{cases} 0.7, & x \leq 0.5, \\ -0.6, & x > 0.5. \end{cases}$$

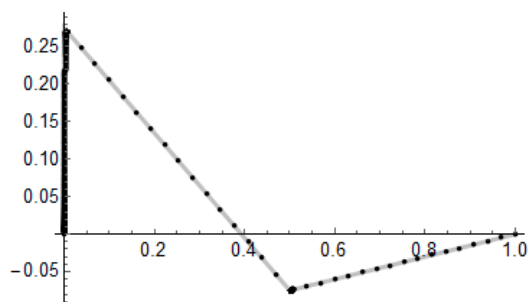
Tačno rešenje ovog problema, vidi Sliku 7, je

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{7x}{10} - \varepsilon C_1 e^{-x/\varepsilon} + C_2, & x \leq 0.5, \\ \frac{3x}{20} - \frac{1}{4} \varepsilon C_3 e^{-4x/\varepsilon} + C_4, & x > 0.5. \end{cases}$$

Konstante C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, određuju se iz uslova neprekidnosti

$$u(d-0) = u(d+0), \quad u'(d-0) = u'(d+0), \quad d = 0.5.$$

U Tabeli 2.4 su prikazane greška i red konvergencije za test problem 2 na Duran-Šiškinovoj mreži gde je $\varepsilon = 10^{-8}$, $\tau_0 = \tau_1 = 2$ i $h = N^{-1}$.



Slika 7: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje test problema 2 za $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = 0.01$ i $N = 32$ na Duran-Šiškinovoj mreži

Tabela 2.4: Rezultati za E^N i p^N za test problem 2 na Duran-Šiškinovoj mreži

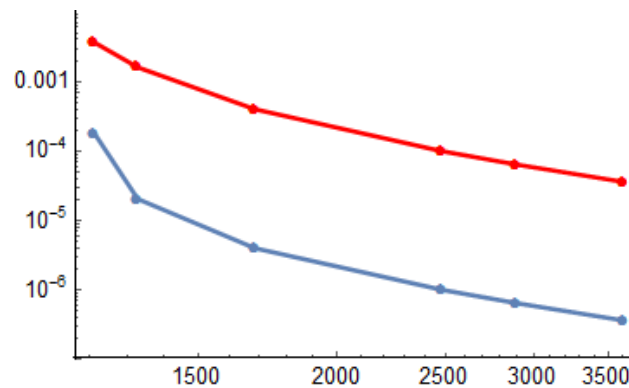
N	E^N	p^N
32	9.75924×10^{-6}	1.98063
64	2.47279×10^{-6}	1.99014
128	6.22436×10^{-7}	1.99473
256	1.56178×10^{-7}	1.99655
512	3.9138×10^{-8}	1.98248
1024	9.90402×10^{-9}	1.57751
2048	3.31844×10^{-9}	-

Numerički rezultati pokazuju drugi red konvergencije postupka tipa SDFEM po N .

U Tabeli 2.5 je prikazano poređenje rezultata iz Tabele 2.4 sa rezultatima dobijenim na Šiškinovoj mreži, sa istim vrednostima parametara kao u prethodnoj tabeli. Sa N_S i E_S^N su redom označeni broj podintervala Šiškinove mreže, odnosno odgovarajuća greška u diskretnoj maksimum normi.

Tabela 2.5: Rezultati za E^N za test problem 2 na Duran-Šiškinovoj i Šiškinovoj mreži

N	$N + M_0 + M_1$	E^N	N_S	E_S^N
32	386	9.75924×10^{-6}	388	3.17165×10^{-2}
64	876	2.47279×10^{-6}	876	2.18217×10^{-2}
128	1962	6.22436×10^{-7}	1964	1.35697×10^{-2}
256	4338	1.56178×10^{-7}	4340	2.53775×10^{-4}
512	9496	3.9138×10^{-8}	9496	8.01571×10^{-5}
1024	20616	9.90402×10^{-9}	20616	2.47219×10^{-5}



Slika 8: Crvena kriva povezuje tačke čija je x -koordinata broj tačaka mreže, a y -koordinata vrednost za h^2 , dok plava kriva povezuje tačke čija je x -koordinata broj tačaka mreže, a y -koordinata vrednost greške

U cilju poređenja, Šiškinova mreža je izabrana tako da ima približno isti broj tačaka kao i Duran-Šiškinova mreža. Dobijeni rezultati pokazuju da su za isti metod dobijene manje greške na Duran-Šiškinovoj mreži nego na Šiškinovoj mreži.

U Tabeli 2.6 je prikazana greška za test problem 2 na Duran-Šiškinovoj mreži gde je $\varepsilon = 10^{-8}$, $\tau_0 = \tau_1 = 2$ i $N = 1024$.

Tabela 2.6: Rezultati za E^N za test problem 2 na Duran-Šiškinovoj mreži

h	$N + M_0 + M_1$	E^N
0.06	1214	1.74729×10^{-4}
0.04	1326	2.0524×10^{-5}
0.02	1688	4.03623×10^{-6}
0.01	2482	1.01783×10^{-6}
0.008	2898	6.52592×10^{-7}
0.006	3616	3.67711×10^{-7}

Vrednosti za h , koje su veće od 0.06, nisu prikazane u tabeli, jer ne ispunjavaju uslov

$$h \leq \frac{1}{\tau_j \bar{b} \ln N}, \quad j = 0, 1.$$

Na Slici 8 vidimo da pad krive koja opisuje ponašanje greške, odgovara padu krive koja opisuje ponašanje h^2 , pa smo eksperimentalno konstatovali drugi red konvergencije i po parametru h .

Glava 6

Dodatak

U ovoj glavi ćemo dati pregled nekih definicija i teorema koje su korišćene u radu.

6.1 Odabrane definicije i teoreme iz linearne algebre

Najpre se podsetimo definicije retke, tridijagonalne, regularne, inverzne i pozitivne definitne matrice.

Definicija 6.1.1 Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je retka ako je većina njenih elemenata jednaka nuli. U suprotnom je matrica gusta.

Definicija 6.1.2 Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ se zove trakasta matrica sa širinom trake $2m+1$ ako je $a_{ij} = 0$ za svako $|i - j| > m$ ($m < n - 1$). Ako je $m=1$ širina trake je 3, a matrica je tridijagonalna.

Definicija 6.1.3 Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako postoji matrica B takva da je

$$AB = BA = E.$$

Matrica B koja zadovoljava gornju jednakost zove se inverzna matrica za matricu A . Kvadratna matrica koja nije regularna naziva se singularna.

Teorema 6.1.1 Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je

$$\det A \neq 0.$$

Definicija 6.1.4 Realna simetrična $n \times n$ matrica A je pozitivno definitna ako je $x^T A x > 0$ za sve $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

U nastavku dajemo definiciju i osobine afnog preslikavanja.

Definicija 6.1.5 Afino preslikavanje je preslikavanje koje tačku M preslikava u tačku M' po pravilu

$$x' = Ax + q,$$

gde si x i x' kolone koordinata tačaka M i M' , redom. Matrica A se zove linearni deo afinog preslikavanja, a vektor q vektor translacije.

Afino preslikavanje je bijektivno preslikavanje. Afinim preslikavanjem se trougao preslikava na trougao.

Pri numeričkom rešenju konturnih problema, kako kod običnih tako i kod parcijalnih diferencijalnih jednačina, pojavljuju se inverzno monotone matrice.

Definicija 6.1.6 Regularne matrice sa nenegativnom inverznom matricom nazivaju se inverzno monotone matrice.

Definicija 6.1.7 Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je L_0 -matrica ako su njeni vandijagonalni elementi nepozitivni.

Definicija 6.1.8 Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je L -matrica ako je L_0 -matrica i ako su elementi njene glavne dijagonale pozitivni.

Definicija 6.1.9 Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je M -matrica ako i samo ako je inverzno monotona L_0 -matrica.

6.2 Odabrane definicije i teoreme iz analize

U ovom odeljku ćemo najpre navesti teoremu srednje vrednosti. Potom slede definicije esencijalnog supremuma, nosača funkcije i bilinearne forme. Zatim ćemo govoriti o Helderovim, normiranim i pred-Hilbertovim prostorima.

Teorema 6.2.1 (Teorema srednje vrednosti) *Ako je funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b) , onda postoji $t \in (a, b)$ takvo da je*

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

Definicija 6.2.1 Neka je (X, Σ, μ) merljiv prostor i neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. a je esencijalno gornje ograničenje za f ako je skup $\{x \in X : f(x) > a\}$ skup mere nula, to jest, ako je $f(x) \leq a$, za skoro sve $x \in X$. Esencijalni supremum je najmanje esencijalno gornje ograničenje, to jest,

$$\operatorname{esssup} f = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\}) = 0\}.$$

Definicija 6.2.2 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Nosač funkcije u je

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Definicija 6.2.3 Bilinearna forma, $a(\cdot, \cdot)$, na vektorskom prostoru X je preslikavanje $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ takvo da su preslikavanja $x \mapsto a(x, y)$ i $y \mapsto a(x, y)$ linearne forme na X .

6.2.1 Helderovi prostori

Definicija 6.2.4 Funkcija f je Lipšic neprekidna na Ω ako postoji realna konstanta $K \geq 0$ takva da za sve $x_1, x_2 \in \Omega$ važi

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K\|x_1 - x_2\|.$$

Najmanja takva konstanta, u oznaci $\operatorname{Lip}(f)$ se naziva Lipšicova konstanta.

Definicija 6.2.5 Funkcija f je Helder neprekidna na Ω ako za sve $x_1, x_2 \in \Omega$ važi

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K\|x_1 - x_2\|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad K > 0.$$

U prethodnim definicijama je $\|\cdot\|$ Euklidova norma.

Helderov prostor $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ je potprostor prostora $C(\bar{\Omega})$ i sastoji se od Helder neprekidnih funkcija sa stepenom α . Za $\alpha = 1$, Helderov prostor $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ se sastoji od Lipšic neprekidnih funkcija.

Prostor $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ je Banahov prostor.

6.2.2 Normirani prostori

Definicija 6.2.6 Neka je X vektorski prostor nad \mathbb{R} . Prslkavanje $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ je norma na X ako važi

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ i sve } x \in X,$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ za sve } x, y \in X.$$

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normirani prostor.

Definicija 6.2.7 Neka je X vektorski prostor nad \mathbb{R} . Prslkavanje $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ je seminorma na X ako važi

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ i sve } x \in X,$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ za sve } x, y \in X.$$

Definicija 6.2.8 Kompletan normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ se naziva Banahov prostor, to jest, Banahov prostor je normiran prostor u kome je svaki Košijev niz konvergentan.

6.2.3 Prostori sa skalarnim proizvodom

Definicija 6.2.9 Neka je X vektorski prostor nad \mathbb{R} . Prslkavanje $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sa sledećim osobinama

$$(S1) \quad (x, x) \geq 0 \text{ za sve } x \in X,$$

$$(S2) \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(S3) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \text{ za sve } x, y, z \in X,$$

$$(S4) \quad (\lambda x, y) = \lambda (x, y) \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ i sve } x, y \in X,$$

$$(S5) \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \text{ za sve } x, y \in X,$$

se naziva skalarni proizvod. Uređeni par $(X, (\cdot, \cdot))$ se naziva prostor sa skalarnim proizvodom ili pred-Hilbertov prostor ili unitaran prostor.

Lema 6.2.1 Sa $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ je definisana norma na pred-Hilbertovom prostoru $(X, (\cdot, \cdot))$.

Definicija 6.2.10 Kompletan pred-Hilbertov prostor $(X, (\cdot, \cdot))$ se naziva Hilbertov prostor.

6.3 Odabrane definicije i teoreme iz numeričke matematike

6.3.1 Ocene diskretnih funkcija Grina

Diskretne funkcije Grina smo definisali u Odeljku 4.4 i koristili smo ih prilikom ocene greške postupka tipa SDFEM. Sada ćemo navesti lemu koju smo koristili za dokaz u Odeljku 4.4. Neke osobine funkcija Grina, kao i lema koja sledi, se mogu pronaći u [2].

Lema 6.3.1 *Neka su zadovoljeni uslovi*

$$p_i \geq p > 0, \quad q_i \geq 0, \quad r_i \geq r > 0.$$

Tada je

$$0 \leq G(x_i, \xi_j) \leq r^{-1}$$

i

$$\sum_{i=1}^N |G(x_i, \xi_j)| h_i \leq 2/r.$$

Prilog A

Pregled oznaka

A.1 Skupovi, prostori i norme

\mathbb{N}	skup prirodnih brojeva
\mathbb{N}_0	skup nenegativnih celih brojeva
\mathbb{R}	skup realnih brojeva
\mathbb{R}^+	skup realnih pozitivnih brojeva
\mathbb{R}^n	vektorski prostor uređenih n -torki nad poljem \mathbb{R}
$\Omega, \bar{\Omega}$	otvoren i ograničen skup u \mathbb{R}^n i njegovo zatvorenje
$\partial\Omega$	rub oblasti Ω
$C^k(\bar{\Omega})$	prostor realnih i k -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na $\bar{\Omega}$
$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$	prostor realnih i k -puta α -Helder-neprekidno diferencijabilnih funkcija na $\bar{\Omega}$
$C_0^k(\Omega)$	prostor realnih i k -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem
$C_0^\infty(\Omega)$	prostor realnih beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u Ω
$L^p(\Omega), \ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$	prostor merljivih funkcija u definisanih na Ω takvih da je $\int_\Omega u(x) ^p dx < \infty$, $p \in [1, \infty)$, i odgovarajuća norma
$L^\infty(\Omega), \ \cdot\ _{L^\infty(\Omega)}$	prostor merljivih i esencijalno ograničenih funkcija na Ω i odgovarajuća norma
$L_{loc}^p(\Omega)$	prostor p -integrabilnih funkcija na Ω , $p \in [1, \infty)$
$W^{k,p}(\Omega)$	prostor Soboljeva
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(\Omega)}, \cdot _{W^{k,p}(\Omega)}$	norma i seminorma na $W^{k,p}(\Omega)$
$H^k(\Omega)$	prostor Soboljeva $W^{k,2}(\Omega)$
$(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}, (\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)}$	skalarni proizvodi na $L^2(\Omega)$ i $H^k(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	prostor Soboljeva funkcija iz $H^1(\Omega)$ sa $u(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$
$\mathbb{P}_k(\kappa)$	prostor polinoma najvišeg stepena k definisanih na skupu κ
$\mathbb{Q}_k(\kappa)$	prostor polinoma definisan u odeljku 1.4

$(V, \ \cdot\ _V), (U, \ \cdot\ _U)$	proizvoljni realni Hilbertovi prostori
V_h	prostor konačnih elemenata
$(\cdot, \cdot)_{V_h}, \ \cdot\ _{V_h}$	skalarni proizvod i norma na V_h
$V + V_h$	prostor funkcija oblika $v + v_h$, $v \in V$, $v_h \in V_h$
P	linearni operator $P : V \rightarrow V_h$
$\ \cdot\ _\varepsilon$	ε -težinska norma

A.2 Operatori

\mathcal{L}	linearni operator iz (2.1)
$\mathcal{L}^{\mathcal{N}}$	diferencni operatori iz (2.9) i (4.5)
Δ	Laplasov operator
D^α	uopšteni izvod funkcije reda α
$[g](d)$	skok funkcije g u tački d , $d \in \Omega$
$\partial_x u, \frac{\partial u}{\partial x}$	parcijalni izvod prvog reda funkcije u
$\partial_{xy} u, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	parcijalni izvod drugog reda funkcije u
$\text{esssup}_{x \in \Omega} u(x) $	esencijalni supremum za $ u $ na Ω
D^+, D^-	diferencni operator prvog reda
$u _\kappa$	restrikcija funkcije u na skup κ
A^{-1}	inverzna matrica za matricu A
A^T	transponovana matrica za matricu A

A.3 Funkcije

u	rešenje konturnog problema
b	koeficijent konvekcije
f	desna strana (izvor) diferencijalne jednačine
δ_d	Dirakova funkcija u d , $d \in \Omega$
λ^j	diskretna Grinova funkcija
G	Grinova funkcija
S	regularna komponenta rešenja
E	slojna komponenta rešenja
$a(\cdot, \cdot), a_h(\cdot, \cdot)$	bilinearne forme
$l(\cdot), l_h(\cdot)$	linearna funkcionala
$\lfloor x \rfloor$	najveći ceo broj koji je manji ili jednak od x

A.4 Parametri i funkcije diskretizacije

$\mathcal{T}, \mathcal{T}_h$	triangulacija domena Ω
Ω^N	mreža diskretizacije sa $(N + 1)^n$ tačaka za domena $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
Ω_c	regularni deo domena Ω
Ω_f	slojni deo domena Ω
κ, κ^o	element triangulacije \mathcal{T} i njegova unutrašnjost
h_i	lokalni korak mreže
\bar{h}_i	$\bar{h} = (h_i + h_{i+1})/2$
σ_0, σ_1	parametri tranzicionih tačaka Duran-Šiškinove mreže
τ_0, τ_1	parametri u izrazu σ_0, σ_1 , redom
M_0, M_1	najmanji brojevi takvi da je $\sigma_j \leq \tilde{\sigma}_j = h\varepsilon(1 + h)^{M_j-1}$, $j = 0, 1$
$(\kappa, P_\kappa, \Sigma_\kappa)$	konačni element
$(\hat{\kappa}, P_{\hat{\kappa}}, \Sigma_{\hat{\kappa}})$	referencni element
u_h	numeričko rešenje za u
u^I	interpolaciona funkcija za u
η	greška interpolacije $u - u^I$
χ	razlika između u^I i u_h
φ_i	bazne funkcije konačnodimenzionalnog prostora V_h
ϕ_i	generativne funkcije mreže Šiškinovog tipa
ψ_i	funkcije karakterizacije mreže Šiškinovog tipa
u_i	vrednost funkcije u u tački mreže x_i
E^N	maksimalna greška u tačkama mreže
p^N	numerički red konvergencije

A.5 Parametri i konstante

ε	singularno perturbovani parametar
N	parametar mreže
h	parametar tačaka Duran-Šiškinove mreže
α	konstanta koercitivnosti bilinearne forme
M_α, M_{α_h}	konstante neprekidnosti bilinearne forme a, a_h
l, l_h	konstante neprekidnosti linearne funkcionele l, l_h
β	donja granica funkcije b

d	tačka prekida
δ_k	parametar stabilizacije postupka tipa SDFEM
δ_{ij}	Kronekerov simbol
C	konstanta nezavisna od ε i N

A.6 Ostale oznake

- kraj teoreme
- kraj napomene
- ◇ kraj primera

Prilog B

Mathematica programi

U ovom prilogu ćemo predstaviti neke programe i naredbe koje su korišćene za rešavanje numeričkih eksperimenata u radu. Svi programi su urađeni uz pomoć programskog paketa *Mathematica*.

B.1 Program za rešavanje sistema $Ax = v$ LU–dekompozicijom

Sledeći program rešava sistem $Ax = v$ LU–dekompozicijom, gde je matrica A tridijagonalna i predstavljena je elementima ispod, na i iznad glavne dijagonale. Ovaj program je preuzet iz [23].

```
TriLUSolve[{a_List, b_List, c_List}, v_List] :=
Module[{i, j, l, u, f, x, n=Length[b]},
(*LU dekompozicija*)
l = {};
u = {b[[1]]};
Do[
u = Append[u, b[[i]] - c[[i-1]]a[[i-1]]/u[[i-1]]];
l = Append[l, a[[i-1]]/u[[i-1]], {i, 2, n}];
(*rešavanje LU sistema*)
f = {v[[1]]};
Do[f = Append[f, v[[i]]-l[[i-1]]f[[i-1]]], {i, 2, n}];
x = {f[[n]]/u[[n]]};
Do[x = Prepend[x, (f[[i]]-c[[i]]x[[1]])/u[[i]],
{i, n-1, 1, -1}];
x
]
```

B.2 Duran-Šiškinova mreža

Program `DuranShishkin` se koristi za generisanje Duran-Šiškinove mreže za slojeve sa desne strane tačaka 0 i d .

```
DuranShishkin[n_, M0_, M1_, τ0_, τ1_, ε_, d_, h_] :=  
  Module[{σ0, σ1},  
    σ0 = Min[d/4, τ0 * ε * Log[n]];  
    σ1 = Min[d/4, τ1 * ε * Log[n]];  
    Join[ {0},  
      Table[h * ε * (1 + h)^(i - 1), {i, 1, M0}],  
      Table[h * ε * (1 + h)^(M0 - 1) + i * (d - h * ε * (1 + h)^(  
        M0 - 1))/(n/2), {i, 1, n/2 - 1}],  
      {d},  
      Table[d + h * ε * (1 + h)^(i - 1), {i, 1, M1}],  
      Table[d + h * ε * (1 + h)^(M1 - 1) + i * (1 - d - h * ε *  
        (1 + h)^(M1 - 1))/(n/2), {i, 1, n/2}]  
    ]//N  
  ];
```

B.3 Šiškinova mreža

Program `Shishkin` se koristi za generisanje Šiškinove mreže za slojeve sa desne strane tačaka 0 i d .

```
Shishkin[n_, τ0_, τ1_, ε_, d_] :=  
  Module[{σ0, σ1},  
    σ0 = Min[d/4, τ0 * ε * Log[n]];  
    σ1 = Min[d/4, τ1 * ε * Log[n]];  
    Join[  
      Range[0, σ0, 4 * n^(-1) * σ0],  
      Range[σ0 + 4 * n^(-1) * (d - σ0), d, 4 * n^(-1) * (d - σ0)],  
      Range[d + 4 * n^(-1) * σ1, d + σ1, 4 * n^(-1) * σ1],  
      Range[d + σ1 + 4 * n^(-1) * (1 - d - σ1), 1, 4 * n^(-1) *  
        (1 - d - σ1)]  
    ]//N  
  ];
```

B.4 Test problem 1

U ovom odeljku ćemo navesti program koji je korišćen za rešavanje test problema 1 na Duran-Šiškinovoj mreži.

```

FEMsdtMAX[es_, {n_, MO_, M1_,  $\tau$ 0_,  $\tau$ 1_,  $\varepsilon$ _, d_, h_}] :=
Module[{mreza, H,  $\delta$ , u, v, w, r, i, z, resApp, resEx},
  mreza = DuranShishkin[n, MO, M1,  $\tau$ 0,  $\tau$ 1,  $\varepsilon$ , d, h];
  H = Table[mreza[[i+1]] - mreza[[i]], {i, MO + M1 + n}];
   $\delta$ [i_] := If[H[[i]]  $\leq$   $\varepsilon$ /es, 0, NIntegrate[(mreza[[i+1]]-x),
    {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] * (NIntegrate[1,
    {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}]-1);
  u = Table[- $\varepsilon$ /H[[i]] + (1/H[[i]]2) *
    NIntegrate[(x - mreza[[i]]), {x, mreza[[i]],
    mreza[[i+1]]}] - ( $\delta$ [i]/H[[i]]2) * NIntegrate[1,
    {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}], {i, 2, MO + M1 + n - 1}];
  v = Table[ $\varepsilon$ /H[[i]] +  $\varepsilon$ /H[[i+1]] - (1/H[[i]]2) *
    NIntegrate[(x - mreza[[i]]), {x, mreza[[i]],
    mreza[[i+1]]}] + (1/H[[i+1]]2) *
    NIntegrate[(mreza[[i+2]] - x), {x, mreza[[i+1]],
    mreza[[i+2]]}] + ( $\delta$ [i]/H[[i]]2) * NIntegrate[1,
    {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] + ( $\delta$ [i+1]/H[[i+1]]2) *
    NIntegrate[1, {x, mreza[[i+1]], mreza[[i+2]]}],
    {i, MO + M1 + n - 1}];
  w = Table[-  $\varepsilon$ /H[[i+1]] - 1/H[[i+1]]2 *
    NIntegrate[(mreza[[i+2]] - x), {x, mreza[[i+1]],
    mreza[[i+2]]}] - ( $\delta$ [i+1]/H[[i+1]]2) * NIntegrate[1,
    {x, mreza[[i+1]], mreza[[i+2]]}], {i, MO + M1 + n - 2}];
  r = Table[(1/H[[i]]) * NIntegrate[(x - mreza[[i]]),
    {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] + (1/H[[i+1]]) *
    NIntegrate[(mreza[[i+2]] - x), {x, mreza[[i+1]],
    mreza[[i+2]]}] - ( $\delta$ [i]/H[[i]]) * NIntegrate[1,
    {x, mreza[[i]], mreza[[i+1]]}] + ( $\delta$ [i+1]/H[[i+1]]) *
    NIntegrate[1, {x, mreza[[i+1]], mreza[[i+2]]}],
    {i, 1, MO + M1 + n - 1}];
  z = Join[ {0}, TriLUSolve[{u, v, w}, r], {0}];
  resApp = Transpose[{mreza, z}];
  resEx = (Exp[N[-(1/ $\varepsilon$ ))] - Exp[N[-(mreza/ $\varepsilon$ )]) /
    (1 - Exp[N[-(1/ $\varepsilon$ )]) + 1 - mreza;
  Return[Max[Abs[z - resEx]] ]//N ];

```

B.5 Test problem 2

U ovom odeljku ćemo navesti program koji je korišćen za rešavanje test problema 2 na Duran-Šiškinovoj mreži.

```
GausLegendre[m_] := Module[{x, w},
  x = Table[0, {m}];
  w = Table[0, {m}];
  If[m==1,
    x = {0};
    w = {2}];
  If[m==2,
    x = {-0.577350269189626, 0.577350269189626};
    w = {1, 1}];
  If[m==3,
    x = {-0.774596669241483, 0, 0.774596669241483};
    w = {0.555555555555556, 0.888888888888889, 0.555555555555556}];
  If[m==4,
    x = {-0.861136311594053, -0.339981043584856,
          0.339981043584856, 0.861136311594053};
    w = {0.347854845137454, 0.652145154862546,
          0.652145154862546, 0.347854845137454}];
  If[m==5,
    x = {-0.906179845938664, -0.538469310105683, 0,
          0.538469310105683, 0.906179845938664};
    w = {0.236926885056189, 0.478628670499366,
          0.568888888888889, 0.478628670499366,
          0.236926885056189}];
  If[m==6,
    x = {-0.932469514203152, -0.661209386466265,
          -0.238619186083197, 0.238619186083197,
          0.661209386466265, 0.932469514203152};
    w = {0.171324492379170, 0.360761573048139,
          0.467913934572691, 0.467913934572691,
          0.360761573048139, 0.171324492379170}];
  {x, w}
];
```

```

FEMsdtMAX[es_, {n_, M0_, M1_, τ0_, τ1_, ε_, d_, h_ }, mm_] :=
Module[{m, H, δ, u, v, w, r, i, z, b, f, resApp, resEx, s, ww},
  {s, ww} = GausLegendre[mm];
  m = DuranShishkin[n, M0, M1, τ0, τ1, ε, d, h];
  H = Table[m[[i+1]] - m[[i]], {i, M0 + M1 + n}];
  b[x_] := If[x ≤ 0.5, 1, 4];
  f[x_] := If[x ≤ 0.5, 0.7, -0.6];
  δ[i_] := If[H[[i]] ≤ ε/es, 0,
    (H[[i]]/2) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b * [(H[[i]]/2) * s[[j]] +$ 
    (m[[i]] + m[[i+1]])/2) * (1 - s[[j]])) *
    ( $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b * [(H[[i]]/2) * s[[j]] +$ 
    (m[[i]] + m[[i+1]])/2)^2)^{-1};
  u = Table[-ε/H[[i]] + (1/4) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b * [(H[[i]]/2) *$ 
  s[[j]] + (m[[i]] + m[[i+1]])/2) * (1 + s[[j]]))
  - δ[i]/(2H[[i]]) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b * [(H[[i]]/2) * s[[j]] +$ 
  (m[[i]] + m[[i+1]])/2)^2), {i, 2, M0 + M1 + n - 1}];
  v = Table[ε/H[[i]] + ε/H[[i+1]] - (1/4) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b *$ 
  [(H[[i]]/2) * s[[j]] + (m[[i]] + m[[i+1]])/2] *
  (1 + s[[j]])) + (1/4) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b *$ 
  [(H[[i+1]]/2) * s[[j]] + (m[[i+1]] + m[[i+2]])/2] *
  (1 - s[[j]])) + δ[i]/(2H[[i]]) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b *$ 
  [(H[[i]]/2) * s[[j]] + (m[[i]] + m[[i+1]])/2)^2 +
  δ[i+1]/(2H[[i+1]]) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b * [(H[[i+1]]/2) *$ 
  s[[j]] + (m[[i+1]] + m[[i+2]])/2)^2),
  {i, M0 + M1 + n - 1}];
  w = Table[-ε/H[[i+1]] - (1/4) *  $\sum_{j=1}^{mm} (ww[[j]] * b *$ 
  [(H[[i+1]]/2) * s[[j]] + (m[[i+1]] + m[[i+2]])/2] *

```

```

(1 - s[[j]]) -  $\delta[i+1]/(2H[[i+1]]) * \sum_{j=1}^{mm} (w[[j]] * b * [(H[[i+1]]/2) * s[[j]] + (m[[i+1]] + m[[i+2]])/2]^2),$ 
{i, M0 + M1 + n - 2}];
r = Table[(H[[i]]/4) *  $\sum_{j=1}^{mm} (w[[j]] * f * [(H[[i]]/2) * s[[j]] + (m[[i]] + m[[i+1]])/2) * (1 + s[[j]]) + (H[[i+1]]/4) * \sum_{j=1}^{mm} (w[[j]] * f * [(H[[i+1]]/2) * s[[j]] + (m[[i+1]] + m[[i+2]])/2) * (1 - s[[j]]) - (\delta[i]/2) * \sum_{j=1}^{mm} (w[[j]] * b * [(H[[i]]/2) * s[[j]] + (m[[i]] + m[[i+1]])/2) * f * [(H[[i]]/2) * s[[j]] + (m[[i]] + m[[i+1]])/2) + (\delta[i+1]/2) * \sum_{j=1}^{mm} (w[[j]] * b * [(H[[i+1]]/2) * s[[j]] + (m[[i+1]] + m[[i+2]])/2) * f * [(H[[i+1]]/2) * s[[j]] + (m[[i+1]] + m[[i+2]])/2),$ 
{i, M0 + M1 + n - 1}];
z = Join[ {0}, TriLUSolve[{u, v, w}, r], {0}];
resApp = Transpose[{mreza, z}];
resEx = Table[If[m[[i]] ≤ 0.5, U1[m[[i]]], U2[m[[i]]]], {i, Length[m]};
[Max[Abs[z - resEx]]]

```

pri čemu su $U1[x_]$ i $U2[x_]$ tačna rešenja ovog test problema sa izračunatim konstantama C_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Zaključak

U ovom radu predstavljeni su postupci konačnih elemenata za numeričko rešavanje singularno perturbovanih problema. Kao model za upoznavanje sa ovim postupcima korišćena je eliptična parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

Glavni deo rada posvećen je jednodimenzionalnom problemu konvekcije-difuzije sa izvorom koji ima prekid u unutrašnjoj tački d domena. Koeficijent konvekcije ima prekid u istoj tački. Kod takvog problema se javljaju dva sloja, unutrašnji u okolini tačke d i granični u tački $x = 0$. Predstavljen je standardni postupak Galerkina za rešavanje takvog problema. Međutim, ovaj postupak produkuje oscilatorna numerička rešenja, čak i u slučaju slojno-adaptivnih mreža. Da bi se izbegle oscilacije, koje su direktna posledica nestabilnosti pomenutog postupka, koristi se postupak tipa SDFEM. Za SDFEM postupak pokazana je konvergencija drugog reda u diskretnoj maksimum normi na slojno-adaptivnoj mreži. Numerički eksperimenti su potvrdili dobijeni rezultat.

Kod problema koji je razmatran u ovom radu, koeficijent reakcije c je jednak nuli. Ipak SDFEM postupak se može uopštiti i na problem

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' - bu' + cu = f & \text{u } \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ |[b](d)| \leq C, \quad |[f](d)| \leq C, \end{cases}$$

gde je

- a) c glatka funkcija,
- b) $|[c](d)| \leq C$.

Takođe, mogu se posmatrati i problemi koji imaju više od jednog unutrašnjeg sloja. Za takve probleme treba prilagoditi slojno-adaptivnu mrežu većem broju unutrašnjih slojeva.

Literatura

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Part III, 2011.
- [2] V. B. Andreev. *The Green Function and A Priori Estimates of Solutions of Monotone Three-Point Singularly Perturbed Finite-Difference Schemes*. Moscow State University, Moscow, Russia, 2001.
- [3] K. Atkinson and W. Han. *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*. Volume 39 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Inc., 2001.
- [4] O. Axelsson and V. A. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. SIAM Philadelphia, 2001.
- [5] D. Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 2007.
- [6] S. C. Brenner, L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1994.
- [7] S. Franz. *Singularly perturbed problems with characteristic layers*. PhD Thesis, TU Dresden, 2008.
- [8] S. Gordić. *Numeričko rešavanje singularno perturbovanih konturnih problema sa prekidima*. Master rad, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, 2009.
- [9] C. Grossmann, H.-G. Roos, M. Stynes. *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [10] T. J. R. Hughes and A. Brooks. *A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*. In T. J. R. Hughes, editor, *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, pages 19-35, ASME, New York, 1979.
- [11] N. V. Kopteva, E. O’Riordan. *Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations*. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 7(3) (2010) 393-415.
- [12] T. Linß. *Analysis of a finite-difference scheme for a singularly perturbed problem with two small parameters*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 289: 355-366, 2004.

- [13] T. Linß. *Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems*. Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität, Dresden, Habilitationsschrift, 2006.
- [14] T. Linß. *Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [15] J. J. H. Miller, E. O’Riordan, G. I. Shishkin. *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [16] H.-G. Roos. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: a survey covering 2008-2012*. ISRN Applied Mathematics, 2012 (2012) 30 pages.
- [17] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection - Diffusion and Flow Problems*. Springer, New Your, 1996.
- [18] H.-G. Roos, Lj. Teofanov, Z. Uzelac. *Graded meshes for higher order FEM*. Journal of Computational Mathematics, 33(1) (2015) 1-16.
- [19] H.-G. Roos, Z. Uzelac. *The SDFEM for a convection-diffusion problem with two small parameters*. Computational Methods in Applied Mathematics, 3 (2003) 443-458.
- [20] H.-G. Roos and H. Zarin. *A second order scheme for singularly perturbed differential equations with discontinuous source term*. J. Numer. Math., 10(4): 275289, 2002.
- [21] M. Stynes and E. O’Riordan. *A finite element method for a singularly perturbed boundary value problem*. Numer. Math., 50: 1-15, 1986.
- [22] M. Stynes and E. O’Riordan. *A uniformly convergent Galerkin method on a Shishkin mesh for a convection-diffusion problem*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 214(1) (1997) 36-54.
- [23] K. Surla, Đ. Herceg, S. Rapajić. *Mathematica za fizičare i hemičare*. Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Novi Sad, 1998.
- [24] E. Süli. *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*. University of Oxford, 2012.
- [25] V. Thomée. *From finite differences to finite elements. A short history of numerical analysis of partial differential equations*. J. Comp. Appl. Math., 128: 1-54, 2001.

- [26] H. Zarin. *Postupci konačnih elemenata za singularno perturbovane probleme i prekidi*. Doktorska disertacija, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, 2003.
- [27] M. Zlamal. *On the finite element method*. Numerische Mathematik, 12: 394-402, 1968.

Biografija



Rođena sam 15. februara 1991. godine u Šapcu. Osnovnu školu "Jovan Cvijić" završila sam u Zminjaku sa odličnim uspehom. Potom sam upisala Ekonomsko-trgovinsku školu u Šapcu i maturirala sam 2010. godine.

Na Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer Diplomirani profesor matematike, upisala sam se 2010. godine i diplomirala sam 18. septembra 2014. godine sa prosečnom ocenom 8,57. Nakon završetka osnovnih studija upisala sam master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer Master profesor matematike. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija.

Novi Sad, maj 2017. godine

Jovana Vasić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Jovana Vasić

AU

Mentor: Prof. dr Helena Zarin

MN

Naslov rada: O SDFEM postupku za perturbovane probleme sa diskontinuitetima

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2017

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3

MA

Fizički opis rada: (6 poglavlja/ 86 strana/ 27 literatura/ 8 slika)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Numerička matematika

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: singularne perturbacije, granični sloj, unutrašnji sloj, postupak konačnih elemenata, standardni postupak Galerkina, "streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata, slojno-adaptivna mreža, uniformna konvergencija

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

U tezi se istražuju primene postupaka konačnih elemenata i slojno-adaptivnih mreža radi poboljšanja tačnosti približnih rešenja određenih singularno perturbovanih problema. Ispituje se jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije sa unutrašnjim slojevima koji su nastali zbog prekidnih polaznih funkcija. Standardni postupak Galerkina generiše oscilatorna numerička rešenja. Da bi se izbegle oscilacije koje su direktna posledica nestabilnosti pomenutog postupka, koristi se "streamline-diffusion" postupak konačnih elemenata (SDFEM). Za postupak tipa SDFEM pokazuje se ϵ -uniformna konvergencija drugog reda na Duran-Šiškinovoj mreži.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 09. juni 2016.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Đorđe Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Ljiljana Teofanov, vanredni profesor, Fakultet tehničkih nauka,
Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Helena Zarin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Jovana Vasić

AU

Mentor: Helena Zarin, Ph.D.

MN

Title: On SDFEM metod for perturbed problems with discontinuities

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: (6 chapters/ 86 pages/ 27 references/ 8 photograph)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Subject/Key words: singular perturbation, boundary layer, interior layer, finite element method, standard Galerkin method, streamline diffusion finite element method, layer-adapted mesh, uniform convergence

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

The thesis mainly explores applications of the finite element methods and layer-adapted meshes to improve the accuracy of approximate solutions of certain singular perturbation problems. One-dimensional convection-diffusion problem with interior layers caused from discontinuous data are considered. Standard Galerkin finite element methods generate oscillations in the numerical solutions. We use streamline-diffusion finite element methods (SDFEM) in order to avoid oscillations which are the direct outcome of instability of the standard Galerkin finite element methods. For the SDFEM is established ε -uniform convergence of the second order on the Duran-Shishkin mesh.

Accepted by the Scientific Board on: 9th June 2016

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

- President: Dr. Đorđe Herceg, full professor, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad
- Member: Dr. Ljiljana Teofanov, associate professor, Faculty of Technical Sciences,
University of Novi Sad
- Member: Dr. Helena Zarin, full professor, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad, mentor

