UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Grković

# METOD REIDEMEISTER-SCHREIERA I NJEGOVO UOPŠTENJE ZA POLUGRUPE

*— završni rad na diplomskim akademskim studijama —*

Mentor:
dr Igor Dolinka
redovni profesor PMF-a

Novi Sad, 2010.

# Predgovor

U ovom radu prikazaćemo kako se rezultati iz kombinatorne teorije grupa uspešno transliraju na teoriju polugrupa, tačnije posmatraćemo Reidemeister-Schreierov metod koji predstavlja jednu od najznačajnih teorija kombinatorne teorije grupa i izložićemo kako se uz male modifikacije ovaj metod koristi za nalaženje prezentacije potpolugrupe i podgrupe date polugrupe definisane prezentacijom. Takođe, prikazaćemo kako uz pomoć ovog metoda možemo dobiti prezentaciju Schützenbergerove grupe za proizvoljnu $\mathcal{H}$-klasu date polugrupe.

U Glavi 1 smo uveli pojam slobodne grupe, polugrupe, monoida, kao i osnovna tvrđenja koja su u vezi sa tim pojmovima. Takođe, dali smo formalnu definiciju prezentacije grupe, polugrupe, monoida, i to su ujedno i osnovni pojmovi koji nam trebaju u ovom radu.

U Glavi 2 smo posmatrali problem traženja prezentacije podgrupe proizvoljne grupe definisane prezentacijom. Uveli smo pojam funkcije prepisivanja i dali opštu teoremu koja nam daje prezentaciju podgrupe pomoću procesa prepisivanja. Zatim smo dobijenu prezentaciju uprostili pomoću takozvane Reidemeisterove funkcije prepisivanja i na taj način dobili Reidemeisterovu teoremu o reprezentaciji podgrupe. Dalje, definisali smo pojam Schreierovog koset reprezentacijskog sistema i uz pomoć njega prikazali još jedno pojednostavljenje dato u vidu Reidemeister-Schreierove teoreme o reprezentaciji podgrupe.

Cilj Glave 3 je uopštenje Reidemeister-Schreierovog metoda na potpolugrupe i podgrupe proizvoljne polugrupe date prezentacijom. Analogno kao u Glavi 2, počeli smo od opšte teoreme koja nam daje prezentaciju polugrupe pomoću procesa prepisivanja, a zatim prikazali pojednostavljenje te prezentacije koje je napravljeno analognim metodama. Sličan postupak smo primenili i za podgrupe polugrupa.

U Glavi 4 smo prikazali primenu Reidemeister-Schreierovog metoda na traženje prezentacije Schützenbergerove grupe za proizvoljnu $\mathcal{H}$-klasu polugrupe definisane prezentacijom. Takođe, prikazali smo kako kao posledice rezultata Glave 3 možemo naći prezentaciju Schützenbergerove grupe $\mathcal{H}$-klase koja sadrži idempotent, odnosno maksimalne podgrupe date polugrupe.

U Glavi 5 prikazujemo jedan primer na kom smo pokušali da demonstriramo koliko je Reidemeister-Schreierov metod moćan metod za rešavanje problema koji

se tiču traženja prezentacije podstruktura.

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svojoj porodici, "baka" Veri, kao i Zoranu Tojiću koji su mi predstavljali najveću podršku ne samo tokom pisanja ovog rada, nego i u životu. Takođe, zahvaljujem se prof. dr Petru Markoviću, koji me je tokom kursa *Teorija grupa* na master studijama upoznao sa osnovama kombinatorne teorije grupa i pokazao mi moć i lepotu iste. Naravno, najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Igoru Dolinki, koji me je uveo u svet algebre, pokazao čari teorije polugrupa, poštovao moje afinitete, a pre svega pratio i usmeravao moj rad svih ovih godina.

Novi Sad, oktobar 2010. Ivana Grković

# Sadržaj

# Glava 1

# Osnovni pojmovi

U ovoj glavi upoznaćemo se sa osnovnim pojmovima i definicijama kao i nekim od tvrđenja koje ćemo koristiti u nastavku ovog rada.

## 1.1 Slobodne grupe, slobodne polugrupe

**Definicija 1.1.** Neka je $X$ podskup (polu)grupe $F$. Tada kažemo da je $F$ *slobodna (polu)grupa nad* $X$ ako za proizvoljnu (polu)grupu $G$ i proizvoljno preslikavanje $\phi : X \to G$ postoji jedinstveni homomorfizam $\phi^* : F \to G$ koji proširuje $\phi$.

U sledećim tvrđenjima ćemo navesti neke od najznačajnijih osobina slobodnih grupa (polugrupa).

**Teorema 1.2.** *Neka su $F_1, F_2$ slobodne grupe (polugrupe, monoidi) nad $X_1$ i $X_2$, redom. Ako je $|X_1| = |X_2|$ onda su grupe (polugrupe, monoidi) $F_1$ i $F_2$ izomorfne.*

*Dokaz.* Neka su $F_1, F_2$ slobodne grupe (polugrupe, monoidi) nad $X_1$ i $X_2$ i neka je $|X_1| = |X_2|$. Tada postoji bijekcija $f : X_1 \to X_2$. Kako je $X_1 \subseteq F_1$ i $X_2 \subseteq F_2$, sledi da su preslikavanjima $f$ i $f^{-1}$ određene funkcije $\phi_1 : X_1 \to F_2$ i $\phi_2 : X_2 \to F_1$, a pošto su $F_1$ i $F_2$ slobodne grupe (polugrupe, monoidi) nad $X_1$, odnosno $X_2$, ta preslikavanja se mogu proširiti do homomorfizama $\phi_1^* : F_1 \to F_2$ i $\phi_2^* : F_2 \to F_1$. Dalje, imamo da je restrikcija funkcije $\phi_1^*\phi_2^*$ na skupu $X_1$ u stvari funkcija $f_1 f_2 = id_{X_1}$, tj. funkcija $\phi_1^*\phi_2^* : F_1 \to F_1$ je homomorfno proširenje identičnog preslikavanja $X_1 \to F_1$. Kako je i $id_{F_1} : F_1 \to F_1$ homomorfno proširenje istog preslikavanja na osnovu jedinstvenosti homomorfnih proširenja kod slobodnih grupa dobijamo da je $\phi_1^*\phi_2^* = id_{F_1}$. Analogno, dobijamo da je i $\phi_2^*\phi_1^* = id_{F_2}$. Zaključujemo da je $\phi_1^*$ izomorfizam, što je i trebalo pokazati. $\square$

Prethodna teorema nam daje jedinstvenost slobodne grupe (slobodne polugrupe, slobodnog monoida) u zavisnosti od kardinalnosti njene baze, što nam daje za pravo da kada govorimo o slobodnim grupama (polugrupama, monoidima) nad skupom $X$ u stvari govorimo o (do na izomorfizam) jednoj grupi (polugrupi, monoidu).

**Primer 1.1.** ***Slobodna polugrupa.*** Neka je $X$ neki neprazan skup. *Reč nad* $X$ je svaki konačan niz elemenata iz $X$. Skup $X$ se naziva *azbuka*, a njegovi elementi *slova*. Ako reč $w$ ima $n$ slova, kažemo da je $n$ *dužina reči* $w$ i pišemo $|w| = n$. Reč koja nema nijedno slovo, tj. reč dužine 0, se naziva *prazna reč*, i označavamo je sa $\lambda$. Skup svih reči nad nepraznim skupom $X$ obeležavamo sa $X^*$, a skup svih nepraznih reči nad $X$ sa $X^+$. Operacija $\cdot$ na $X^*$ definisana za reči $u = a_1 \dots a_n$ i $v = b_1 \dots b_m$ sa:

$$u \cdot v = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m,$$

se naziva *konkatenacija* (dopisivanje) *reči*. Primetimo da je operacija konkatenacije asocijativna, pa dobijamo da je $(X^+, \cdot)$ polugrupa, tj. $(X^*, \cdot, \lambda)$ monoid. Pokažimo da je $(X^+, \cdot)$ slobodna polugrupa nad skupom $X$:

Neka je $(S, *)$ proizvoljna polugrupa i $\phi : X \to S$ proizvoljno preslikavanje. Definišimo preslikavanje $\varphi : X^+ \to S$ na sledeći način: za proizvoljnu reč $w \in X^+$, $w = a_1 \dots a_n$ neka je $\varphi(w) = \varphi(a_1 \dots a_n) = \phi(a_1) \dots \phi(a_n)$. Nije teško videti da je $\varphi$ zaista homomorfno proširenje preslikavanja $\phi$, što nam daje da $(X^+, \cdot)$ jeste slobodna polugrupa nad $X$.

Kako nam Teorema 1.2. daje jedinstvenost, u buduće ćemo pod slobodnom polugrupom nad skupom $X$ podrazumevati slobodnu polugrupu reči $(X^+, \cdot)$. Slično, dobijamo i da je $(X^*, \cdot, \lambda)$ slobodan monoid koji ćemo, takođe zahvaljujući jedinstvenosti posmatrati kao predstavnika svih slobodnih monoida nad skupom $X$ a zvaćemo ga slobodan monoid reči nad $X$. $\square$

**Primer 1.2.** ***Slobodna grupa.*** Neka je $X$ proizvoljan skup. Označimo sa $X^{-1}$ skup $\{x^{-1} | \, x \in X\}$, gde su $x^{-1}$ novi simboli. Za proizvoljnu reč $w \in (X \cup X^{-1})^*$, $w = a_1 \dots a_n$ definišemo reč $w^{-1} = {a_n}^{-1} \dots {a_1}^{-1}$, gde je $\lambda^{-1} = \lambda$, $a_i^{-1} = a_i^{-1}$ ako $a_i \in X$, i $a_i^{-1} = a_i$ ako $a_i \in X^{-1}$. Reč $w^{-1}$ nazivamo *inverzan element* elementa $w$. Kao što je u prethodnom primeru razmatrano, $S = ((X \cup X^{-1})^+, \cdot)$ je polugrupa, dok je $S^1 = ((X \cup X^{-1})^*, \cdot, \lambda)$ monoid.

*Elementarna transformacija reči* $w$ sastoji od dopisivanja ili brisanja dela oblika $aa^{-1}$, $a \in X^{\pm 1}$. Kažemo da su reči $w_1$ i $w_2$ ekvivalentne, u oznaci $w_1 \sim w_2$, ako postoji konačan niz elementarnih transformacija kojim se reč $w_1$ svodi na reč $w_2$. Ovo je očigledno relacija ekvivalencije, šta više na monoidu $S^1$ zajedno sa funkcijom $\iota$ ova relacija je kongruencija. Naime, važi : ako je $u_1 \sim u_2$ i $v_1 \sim v_2$ onda važi $u_1 u_2 \sim v_1 v_2$ kao i ${u_1}^{-1} \sim {u_2}^{-1}$. Stoga možemo posmatrati faktor algebru $F = S^1 / \sim$, koja je ustvari grupa, i to baš slobodna grupa nad skupom $[X]$, tj. skupom klasa ekvivalencije, što ćemo i pokazati.

Reč $w$ se naziva *redukovana* ako ne sadrži podreč oblika $aa^{-1}$, $a \in X^{\pm 1}$. Pokažimo da svaka klasa ekvivalencije sadrži tačno jednu redukovanu reč. Jasno je da sadrži bar jednu jer sukcesivnim brisanjem svih podreči oblika $aa^{-1}$ iz proizvoljne reči $w$ moramo na kraju stići do redukovane reči. Dakle, preostaje nam da pokažemo da nijedna klasa ne može sadržati više od jedne redukovane reči, tj. da dve različite redukovane reči $u$ i $v$ ne mogu biti ekvivalentne. Pretpostavimo suprotno, neka su reči $u$ i $v$ ekvivalentne. Tada se $u$ elementarnim transformacijama može svesti na $v$. Neka je $u = w_1, \ldots, w_n = w$ niz gde je za svako $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ reč $w_{i+1}$ dobijena elementarnom transformacijom reči $w_i$, takav da je $N = \sum_{i=1}^{n} |w_i|$ minimalno. Kako su reči $u$ i $v$ redukovane sledi da je $|u| = |w_1| < |w_2|$ kao i $|w_{n-1}| > |w_n| = |v|$, pa postoji neko $i$ takvo da je $|w_i| > |w_{i-1}|, |w_{i+1}|$. To praktično znači da je $w_i$ nastala od $w_{i-1}$ umetanjem podreči oblika $aa^{-1}$, dok je $w_{i+1}$ nastala od $w_i$ brisanjem podreči oblika $bb^{-1}$. U odnosu na položaj podreči $aa^{-1}$ i $bb^{-1}$ u reči $w_i$ razlikujemo 3 slučaja:

**Slučaj 1:** *$aa^{-1}$ i $bb^{-1}$ se poklapaju.* Tada je u stvari $w_{i-1} = xy$, $w_i = xaa^{-1}y$, $w_{i+1} = xy$, pa je $w_{i-1} = w_{i+1}$, što je u kontradikciji sa minimalnošću $N$.

**Slučaj 2:** *$aa^{-1}$ i $bb^{-1}$ se preklapaju, ali se ne poklapaju.* Tada je, bez umanjenja opštosti, $w_{i-1} = xay$, $w_i = xaa^{-1}ay$, $w_{i+1} = xay$, pa je $w_{i-1} = w_{i+1}$, što nam daje kontradikciju kao u slučaju 1.

**Slučaj 3:** *$aa^{-1}$ i $bb^{-1}$ se ne dodiruju.* Tada imamo $w_{i-1} = xybb^{-1}z$, $w_i = xaa^{-1}ybb^{-1}z$ i $w_{i+1} = xaa^{-1}yz$, pa niz

$$w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n$$

možemo zameniti nizom

$$w_1, \ldots, w_{i-1}, \tilde{w}, w_{i+1}, \ldots, w_n,$$

gde je $\tilde{w} = xyz$. Međutim, onda je $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |w_j| + |\tilde{w}| = N - 4$ što je opet kontradikcija sa minimalnošću $N$.

Dakle, pokazali smo da svaka klasa ekvivalencije sadrži jednu i samo jednu redukovanu reč.

Pokažimo sada da važi sledeće tvrđenje.

**Teorema 1.3.** *Grupa $F$ definisana u Primeru 1.2. je slobodna grupa nad skupom $[X]$.*

*Dokaz.* Neka je $H$ proizvoljna grupa i neka je $\phi : \{[x] | \, x \in X\} \to H$ proizvoljno preslikavanje. Pokažimo prvo da važi $|\{[x] | \, x \in X\}| = |X|$. Jasno, $|\{[x] | \, x \in X\}| \leq |X|$. Neka su sada $x_1, x_2$ različiti elementi skupa $X$. Tada je i $[x_1] \neq [x_2]$ jer su $x_1$ i $x_2$ redukovane reči (pošto su slova) a, kao što smo već pokazali, svaka klasa ekvivalencije sadrži tačno jednu redukovanu reč. Sledi da je $|\{[x] | \, x \in X\}| \geq |X|$ tj. $|\{[x] | \, x \in X\}| = |X|$. Zbog toga, preslikavanje $\phi$ indukuje preslikavanje $\psi : X \to H$. Definišemo preslikavanje $\psi^*$ kao ekstenziju preslikavanja $\psi$ na sledeći način: za $w \in (X \cup X^{-1})^*$, $w = a_1{}^{\epsilon_1} \dots a_n{}^{\epsilon_n}$, $a_i \in X, \epsilon_i \in \{-1, 1\}$, neka je $\psi^*(w) = \psi^*(a_1{}^{\epsilon_1} \dots a_n{}^{\epsilon_n}) = \psi(a_1)^{\epsilon_1} \dots \psi(a_n)^{\epsilon_n}$. Kako je $H$ grupa, $\psi^*$ preslikava ekvivalentne reči na iste elemente grupe $H$, pa $\psi^*$ indukuje preslikavanje $\phi^* : F \to H$, koje je u stvari homomorfno proširenje preslikavanja $\phi$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Grupu $F$ slobodnu za skup $[X]$ označavaćemo sa $\mathcal{F}_X$. Jedna od nama najznačajnijih osobina slobodnih grupa je njena veza sa proizvoljnim grupama, a ta veza je data u sledećoj teoremi.

**Teorema 1.4.** *Neka je $G$ proizvoljna grupa generisana skupom $S$. Tada postoji skup $X$ iste kardinalnosti kao skup $S$, takav da je $G$ izomorfna faktor grupi slobodne grupe $\mathcal{F}_X$.*

*Dokaz.* Neka je grupa $G$ generisana skupom $S$, neka je $X$ proizvoljna azbuka, takva da je $|S| = |X|$. Tada postoje bijekcije iz $S$ u $X$ i iz $X$ u $[X]$, pa kako je $S \subseteq G$ preslikavanje $\phi : S \to G$, dato sa $\phi(s) = s$ nam zajedno sa pomenutim bijekcijama daje preslikavanje $\overline{\phi} : [X] \to G$. Kako je $\mathcal{F}_X$ slobodna grupa sa bazom $[X]$, preslikavanje $\overline{\phi}$ se može homomorfno proširiti do preslikavanja $\overline{\phi}^* : \mathcal{F}_X \to G$. Kako je $S$ generatorni skup grupe $G$ sledi da je $\overline{\phi}^*$ sirjektivno preslikavanje pa po teoremi o homomorfizmu sledi da je $G$ zaista izomorfna faktor grupi slobodne grupe $\mathcal{F}_X$. $\square$

Analogno, važi odgovarajuća teorema za polugrupe (monoide), odnosno važi tvrđenje koje sledi.

**Teorema 1.5.** *Neka je $S$ proizvoljna polugrupa (monoid) generisana skupom $Y$. Tada postoji skup $X$ iste kardinalnosti kao skup $Y$, takav da je $S$ izomorfna faktor polugrupi (monoidu) slobodne polugrupe (slobodnog monoida) reči nad $X$.*

## 1.2 Prezentacije

**Definicija 1.6.** Neka je $X$ proizvoljna azbuka i $\mathfrak{R} \subseteq X^+ \times X^+$. Uređeni par $\langle X \,|\, \mathfrak{R} \rangle$ se naziva *polugrupna prezentacija.* Elementi skupa $X$ se nazivaju *generatori*, dok se elementi skupa $\mathfrak{R}$ nazivaju *relatori.* Uređeni par $(u, v) \in \mathfrak{R}$ po dogovoru pišemo $u = v$, a umesto

$$\langle \{x_1, x_2, \dots\} \,|\, \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots\} \rangle$$

pišemo $\langle x_1, x_2, \dots \,|\, u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots \rangle$.

Ova definicija je čisto sintaksna, a ako u njoj zamenimo $X^+$ sa $X^*$ dobijamo definiciju *monoidske prezentacije.* Sledeća definicija nam daje i semantiku polugrupnih, tj. monoidskih prezentacija.

**Definicija 1.7.** *Polugrupa $S$ je definisana polugrupnom prezentacijom* $\langle X \,|\, \mathfrak{R} \rangle$ ako je $S \cong A^+/\rho$ gde je $\rho$ najmanja kongruencija koja sadrži $\mathfrak{R}$.

Ako u prethodnoj definiciji reč polugrupa zamenimo rečju monoid, a $A^+$ sa $A^*$ dobijamo definiciju monoida definisanog monoidskom prezentacijom.

**Definicija 1.8.** *Grupa $G$ je definisana grupnom prezentacijom* $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ ako je $G \cong \mathcal{F}_X/\rho$ gde je $\rho$ najmanja kongruencija koja sadrži $\mathfrak{R}$.

Kako u grupi umesto relatora $u = v$ možemo posmatrati relator $uv^{-1} = 1$, jedan od standardnih načina zadavanja prezentacije $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ je da se skup $\mathfrak{R}$ posmatra kao skup reči $uv^{-1}$, a ne kao skup uređenih parova. Jasno, za tako definisano $\mathfrak{R}$ grupu definisanu prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ možemo posmatrati i kao grupu izomorfnu grupi $\mathcal{F}_X/N_{\mathfrak{R}}$ gde je $N_{\mathfrak{R}}$ najmanja normalna podgrupa koja sadrži $\mathfrak{R}$, tj. $N_{\mathfrak{R}}$ je normalno zatvorenje od $\mathfrak{R}$.

Takođe, grupu možemo posmatrati i preko monoidske prezentacije. Naime, grupa generisana grupnom prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ izomorfna je monoidu datom monoidskom prezentacijom $\langle X \cup X^{-1} \,|\, \mathfrak{R} \cup \{xx^{-1} = 1, x^{-1}x = 1 : x \in X\}\rangle$

U buduće ćemo umesto sintagme "polugrupa(monoid, grupa) $S$ je definisana polugrupnom (monoidskom, grupnom) prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$", koristiti sintagmu "polugrupa (monoid, grupa) $S$ je definisana prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$". Takođe, kako su elementi posmatrnih algebarskih struktura u bijekciji sa elementima (tj. rečima) odgovarajućih faktor algebri uobičajeno je da se elementi struktura posmatraju kao odgovarajuće reči. Da ne bi došlo do zabune, za reči $w_1, w_2 \in X^+$ ukoliko su identički jednake pisaćemo $w_1 \equiv w_2$, a ako one predstavljaju isti element polgrupe(monoida) $S$ tj. grupe $G$ pišemo $w_1 = w_2$. Tako, na primer ako je polugrupa definisana prezentacijom $\langle a, b \,|\, ab = ba\rangle$ onda je $aba = a^2b$, ali je $aba \not\equiv a^2b$.

**Definicija 1.9.** Neka je $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ proizvoljna polugrupna (monoidska, grupna) prezentacija, i $w_1, w_2 \in X^+$ ($X^*$, $(X \cup X^{-1})^*$) proizvoljne reči. Kažemo da je $w_2$ dobijena od $w_1$ direktnom primene relacije iz $\mathfrak{R}$ ako postoje $\alpha, \beta \in X^*$, i $(u, v) \in \mathfrak{R}$ takvi da je $w_1 \equiv \alpha u \beta$ i $w_2 \equiv \alpha v \beta$. Ukoliko postoji konačan niz $w_1 \equiv \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n \equiv w_2$ takav da je $\alpha_i$ dobijena od $\alpha_{i-1}$ direktnom primenom relacije iz $\mathfrak{R}$, za sve $i \in \{2, \dots, n\}$, onda kažemo da je relator $w_1 = w_2$ *posledica od* $\mathfrak{R}$.

Tada važi sledeća teorema.

**Teorema 1.10.** *Naka je $S$ polugrupa generisana skupom $X$ i neka je $\mathfrak{R} \subseteq X^+ \times X^+$. Tada je $S$ definisana prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ ako i samo ako su ispunjena sledeća dva uslova:*

(1) *$u = v$ važi u $S$ za sve $(u, v) \in \mathfrak{R}$,*

(2) *ako su $u, v \in X^+$ proizvoljne reči takve da $u = v$ u $S$ onda je $u = v$ posledica od $\mathfrak{R}$.*

Ova teorema važi i za monoide i za grupe ukoliko simbol $X^+$ svuda zamenimo sa $X^*$, odnosno sa $(X \cup X^{-1})^*$.

Kao što smo već napomenuli prezentacija je čisto sintaksni pojam, a često nam je i zgodno manipulisati prezanticajama ne uplićući se u semantiku polugrupe (grupe, monoida) koja je tom prezentacijom definisana.

**Definicija 1.11.** Prezentacija $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ je *konačno generisana* ako je $X$ konačan skup, a *konačno relatorna* ako je skup $\mathfrak{R}$ konačan. Ukoliko su i $X$ i $\mathfrak{R}$ konačni skupovi kažemo da je $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ *konačno prezentirana*.

Ukoliko je $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ konačno prezentirana postoji metod koji nam omogućava da prezentaciju $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ za polugrupu (grupu, monoid) $G$ prevedemo na prezentaciju $\langle X^* | \mathfrak{R}^* \rangle$ koja takođe definiše $G$. To nam omogućavaju takozvane Tietzeove transformacije.

**Definicija 1.12.** Neka je $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ proizvoljna prezentacija. Sledeće transformacije nazivamo Tietzeovim:

(T1) dodavanje uređenog para $(u, v)$ skupu relatora ukoliko je $u = v$ posledica od $\mathfrak{R}$,

(T2) brisanje uređenog para $(u, v)$ iz skupa relatora ako je $u = v$ posledica od $\mathfrak{R} \setminus \{(u, v)\}$,

(T3) dodavanje novog simbola $a \notin X$ generatornom skupu $X$ i novog relatora $(a, w)$ skupu $\mathfrak{R}$, gde je $w$ proizvoljna reč iz $X^+$,

(T4) ukoliko skup $\mathfrak{R}$ sadrži relator oblika $(a, w)$, gde je $a \in X$, a $w \in (X \setminus \{a\})^+$, onda brisanje slova $a$, relatora $(a, w)$ i zamenjivanje svih preostalih pojavljivanja slova $a$ sa rečju $w$.

Tietzeove transformacije smo dali u terminologiji polugrupa iz razloga što su polugrupe najopštija struktura koju u ovom radu posmatramo, a ukoliko u (T3) umesto $X^+$ napišemo $X^*$, odnosno $(X \cup X^{-1})^*$, i u (T4) umesto $(X \setminus \{a\})^+$ napišemo $(X \setminus \{a\})^*$, tj. $((X \setminus \{a\}) \cup (X \setminus \{a\})^{-1}))^*$, dobijamo Tietzeove transformacije za monoide, odnosno grupe. Šta više, ove transformacije su originalno i formulisane za grupe. Sledeća teorema opravdava postojanje i daje svrhu Tietzeovim transformacijama.

**Teorema 1.13.** *Dve konačne prezentacije definišu iste polugrupe (monoide, grupe) ako i samo ako je moguće svesti jednu na drugu konačnom primenom Tietzeovih transformacija.*

Uslov konačnosti nije neophodan u direktnoj implikaciji gornje teoreme.

**Teorema 1.14.** *Neka je $S$ polugrupa definisana prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R} \rangle$ i neka je $\langle X^* \,|\, \mathfrak{R}^* \rangle$ prezentacija dobijena od prezentacije $\langle X \,|\, \mathfrak{R} \rangle$ Tietzeovim transformacijama. Tada je polugrupa $S$ definisana prezentacijom $\langle X^* \,|\, \mathfrak{R}^* \rangle$*

# Glava 2

# Reidemeister-Schreierov metod

U ovoj glavi posmatramo problem nalaženja prezentacije podgrupe date grupe tj. posmatraćemo sledeće: ako je data grupa $G$ svojom prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ i proizvoljan skup $Y \subseteq (X \cup X^{-1})^*$, naći prezentaciju podgrupe $H$ generisane skupom $Y$.

## 2.1 Prezentacija podgrupe pomoću procesa prepisivanja

Posmatrajmo grupu $G$ datu prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ i njenu podgrupu $H$ generisanu skupom $Y = \{y_i | \, y_i \in A^*, i \in I\}$, gde je $A = X \cup X^{-1}$. Kako su generatori skupa $Y$ reči mi ćemo posmatrati novu azbuku $B = \{b_i | \, i \in I\}$ koja je u bijekciji sa skupom $Y$ i na taj način umesto reči iz generatornog skupa $Y$ posmatraćemo slova iz skupa $B$. Reč $b_{i_1} \cdots b_{i_n}$ iz $B^*$ reprezentuje element $y_{i_1} \cdots y_{i_n}$ iz $H$. Formalno, ako je $\phi_1$ bijekcija između skupova $B$ i $Y$ i $\phi_1(b_i) = y_i$ onda definišemo preslikavanje $\phi : B^* \to A^*$ na sledeći način:

$$\phi(b_{i_1} \cdots b_{i_n}) = \phi_1(b_{i_1}) \cdots \phi_1(b_{i_n}) = y_{i_1} \cdots y_{i_n}.$$

Preslikavanje $\phi$, koje je očigledno i homomorfizam, nazivaćemo *reprezentacijska funkcija.*

Dalje, cilj nam je da svaku reč iz $A^*$ koja predstavlja element podgrupe $H$ (*u oznaci* $(A^*)|_H$) "prepravimo" do odgovarajuće reči iz $B^*$, pa ćemo definisati još jednu funkciju, koja će nam to i omogućiti.

**Definicija 2.1.** Neka je $\tau : (A^*)|_H \to B^*$ preslikavanje koje zadovoljava

$$\phi(\tau(w)) = w \text{ u } G, \text{ za sve } w \in (A^*)|_H.$$

Funkciju $\tau$ nazivamo *funkcija prepisivanja (engl. rewriting function)* ili *proces prepisivanja (engl. rewriting process).*

Proces prepisivanja nije obavezno jedinstven, niti je obavezno homomorfizam a nije ni dat konstruktivno, za razliku od reprezentacijske funkcije. Ipak, aksioma izbora nam garantuje postojanje procesa prepisivanja, što nam je u ovom trenutku dovoljno. Takođe, funkciju $\tau$ možemo izabrati tako da važi $\tau(\lambda) = \lambda$.

Motivacija za posmatranje procesa prepisivanja prilikom rešavanja problema traženja prezentacije proizvoljne podgrupe grupe G, leži u sledećoj teoremi.

**Teorema 2.2.** *Neka je $G$ grupa definisana prezentacijom $\langle X|\,\mathfrak{R}\rangle$, i neka je $H$ njena podgrupa generisana skupom $Y = \{y_i|\, i \in I\} \subseteq A^*$. Neka je $B = \{b_i|\, i \in I\}$ nova azbuka, a $\phi$ i $\tau$ reprezentacijska funkcija, odnosno funkcija prepisivanja. Tada je grupa $H$ definisana prezentacijom $\langle B|\,\mathfrak{R}_H\rangle$, gde su elementi skupa $\mathfrak{R}_H$ sledeće relacije:*

(R1) $b_i = \tau(y_i)$, *za sve* $i \in I$*;*

(R2) $\tau(u) = \tau(v)$, *za sve* $u, v \in (A^*)|_H$ *takve da je* $u = v$ *u* $\mathcal{F}_X$*;*

(R3) $\tau(uv) = \tau(u)\tau(v)$, *za sve* $u, v \in (A^*)|_H$*;*

(R4) $\tau(wRw^{-1}) = \lambda$, *za sve* $R \in \mathfrak{R}$ *i sve* $w \in A^*$*.*

*Dokaz.* Za dokaz ove teoreme dovoljno nam je da pokažemo da relacije $\phi(u) = \phi(v)$ važe u grupi $G$ ako je $u = v$ relator oblika (R1) − (R4) i da je proizvoljna reč $w \in B^*$ takva da je $\phi(w) = 1$ u $H$, u stvari posledica od $\mathfrak{R}$.

Pokažimo prvo da su relacije (R1)−(R4) zaista relatori. Na osnovu definicije funkcije prepisivanja $\tau$ i osobine da je $\phi$ homomorfizam dobijamo:
(R1): $\phi(b_i) = \phi(\tau(y_i))$,
(R2): $\phi(\tau(u)) = u = v = \phi(\tau(v))$,
(R3): $\phi(\tau(uv)) = uv = \phi(\tau(u))\phi(\tau(v)) = \phi(\tau(u)\tau(v))$,
(R4): $\phi(\tau(wRw^{-1})) = wRw^{-1} = 1$ u $G$.

Neka je sada $r = b_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots b_{i_n}^{\epsilon_n}$, $b_i \in B$, $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ proizvoljni relator. Pokažimo da se $r$ može redukovati do prazne reči pomoću relatora (R1)−(R4). Ako u relaciji (R3) zamenimo reč $v$ sa $u^{-1}$ i iskoristimo (R2) dobijamo $\tau(u)\tau(u^{-1}) = \lambda$, odnosno $\tau(u^{-1}) = \tau(u)^{-1}$. Iz toga, primenom relacije (R3) dobijamo da važi:

$$\tau(u_1^{\epsilon_1} \cdots u_k^{\epsilon_k}) = \tau(u_1)^{\epsilon_1} \cdots \tau(u_k)^{\epsilon_k},$$

gde $u_i \in A^*$, a $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$. Na osnovu prethodnog i relacije (R1) imamo da je:

$$r = \tau(y_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \tau(y_{i_n})^{\epsilon_n} = \tau(y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\epsilon_n})$$

Kako je $r$ relator, tj. $\phi(r) = 1$ u $H$ i kako je po definiciji $\phi(\tau(w)) = w$ u $G$, imamo da je

$$1 = \phi(r) = y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\epsilon_n} \text{ u G, tj. } y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\epsilon_n} \in N_{\mathfrak{R}},$$

pa postoje relatori $R_1, \ldots, R_l \in \mathfrak{R}$ i reči $w_1, \ldots, w_l$ iz $G$ takvi da je:

$$y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\epsilon_n} = (w_1 R_1 w_1^{-1})^{\eta_1} \cdots (w_l R_l w_l^{-1})^{\eta_l},$$

gde je $\eta_i \in \{-1, 1\}$.

Dalje, važi:

$$r = \tau(y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\epsilon_n}) = \tau((w_1 R_1 w_1^{-1})^{\eta_1} \cdots (w_l R_l w_l^{-1})^{\eta_l}),$$

tj.

$$r = \tau(w_1 R_1 w_1^{-1})^{\eta_1} \cdots \tau(w_l R_l w_l^{-1})^{\eta_l},$$

pa na osnovu relacije (R4) sledi da se $r$ svodi na praznu reč, što je i trebalo pokazati. $\square$

Najveći nedostatak prezentacije dobijene iz prethodne teoreme, osim toga što je prilično glomazna je i to što ni proces proces prepisivanja, ni $(A^*)|_H$ nisu efektivno konstruisani. Pametnim izborom generatornog skupa $B$ i procesa prepisivanja ova prezentacija se može uprostiti. U sledećem poglavlju ćemo pokazati kakav su to "pametan izbor" napravili Reidemeister i Schreier i na koji način su oni uprostili ovu prezentaciju.

## 2.2 R-S proces prepisivanja i prezentacija podgrupe proizvoljne grupe

Neka je grupa $G$ data svojom prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ i neka je $H$ njena podgrupa generisana skupom $Y = \{y_i | \, i \in I\} \subseteq A^*$. Teorema 2.2. nam daje prezentaciju podgrupe $H$, koja se kao što smo već i napomenuli može uprostiti. Jedan od načina je uz pomoć takozvane desne koset reprezentacijske funkcije čija definicija sledi.

**Definicija 2.3.** Funkcija $\delta : A^* \to A^*$ se naziva *desna koset reprezentacijska funkcija za $G$ po $H$* ako proizvoljnu reč $w$ slika u $\delta(w) = \overline{w}$, pri čemu je $\overline{w}$ predstavnik desnog koseta $Hw$, a reči $\overline{w}$ formiraju desni koset reprezentacijski sistem za $G$ po $H$ koji sadrži praznu reč.

Navešćemo neke od očiglednih osobina desne koset reprezentacijske funkcije:

(1) $\overline{w} = \lambda$ akko $w$ definiše element iz $H$,

(2) $\overline{\overline{w}} = \overline{w}$,

(3) $\overline{uv} = \overline{\overline{u}v}$.

Uz pomoć ove funkcije konstruisaćemo Reidemeisterov sistem prepisivanja. Neka je $\delta$ desna koset reprezentacijska funkcija, i neka je $T$ desni koset reprezentacijski sistem za $G$ po $H$. Elemente već pominjanog generatornog skupa $B$ umesto sa $b_i$ označićemo sa $s_{t,x}$, a sam generatorni skup označićemo sa $S$. Funkciju $\phi$ koja nam prevodi generatore skupa $S$ na reči grupe $H$ definišemo na sledeći način:

$$\phi(s_{t,x}) = tx(\overline{tx})^{-1}, \text{ gde su } t \in T \text{ i } x \in X \text{ proizvoljni.}$$

Pokažimo da je skup $S$ zaista generatorni skup podgrupe $H$.

**Teorema 2.4.** *Neka je grupa $G$ data svojom prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ i $H$ njena podgrupa. Neka je $\delta$ desna koset reprezentacijska funkcija za $G$ po $H$, i $T$ desni koset reprezentacijski sistem za $G$ po $H$. Tada je skup*

$$S = \{s_{t,x} | \, t \in T, x \in X\}$$

*generatorni skup podgrupe $H$.*

*Dokaz.* Neka su $t \in T$ i $x \in X$ proizvoljni. Elementi $tx$ i $\overline{tx}$ reprezentuju isti koset pa element $tx(\overline{tx})^{-1}$ pripada $H$ tj. $\phi(s_{t,x}) \in H$.

Pokažimo sada da se proizvoljan element podgrupe $H$ može predstaviti kao proizvod elemenata $\phi(s_{t,x})$, gde $s_{t,x} \in S$, i njihovih inverza. Prvo, primetimo sledeće. Neka je $s_{t,x} \in S$ proizvoljan. Označimo sa $p$ element skupa $T$ takav da je $p = \overline{tx^{-1}}$. Tada je:

$$\phi(s_{p,x}) = px(\overline{px})^{-1} = \overline{tx^{-1}}x(\overline{\overline{tx^{-1}}x})^{-1} = \overline{tx^{-1}}x(\overline{tx^{-1}x})^{-1} = \overline{tx^{-1}}x(\overline{t})^{-1} =$$

$$\overline{tx^{-1}}xt^{-1} = (tx^{-1}(\overline{tx^{-1}})^{-1})^{-1} = \phi((s_{t,x^{-1}})^{-1}),$$

tj.

$$s_{t,x^{-1}} = (s_{p,x})^{-1}. \qquad (*)$$

Na osnovu $(*)$ sledi da ako pokažemo da skup $\{s_{t,x} | \, t \in T, x \in X^{\pm 1}\}$ generiše grupu $H$ automatski dobijamo i da je $\{s_{t,x} | \, t \in T, x \in X\}$ generatorni skup.

Neka je $w = x_1 \ldots x_n$, $x_i \in X^{\pm 1}$ proizvoljni element iz $H$. Neka je dalje $t_1 = \lambda$, a $t_{i+1} = \overline{t_i x_i}$ za sve $i \in \{1, \ldots n\}$. Tada je:

$$w = t_1 x_1 \ldots x_n = t_1 x_1 (\overline{t_1 x_1})^{-1} (\overline{t_1 x_1})(x_2 \ldots x_n) =$$

$$= \phi(s_{t_1,x_1}) \overline{t_1 x_1} (x_2 \ldots x_n) = \phi(s_{t_1,x_1}) t_2 x_2 (x_3 \ldots x_n) =$$

$$= \phi(s_{t_1,x_1}) t_2 x_2 (\overline{t_2 x_2})^{-1} (\overline{t_2 x_2})(x_3 \ldots x_n) = \phi(s_{t_1,x_1}) \phi(s_{t_2,x_2}) (\overline{t_2 x_2})(x_3 \ldots x_n) =$$

$$= \phi(s_{t_1,x_1}) \phi(s_{t_2,x_2}) t_3 (x_3 \ldots x_n) = \cdots = \phi(s_{t_1,x_1}) \phi(s_{t_2,x_2}) \ldots \phi(s_{t_n,x_n}) t_{n+1}.$$

Polažimo sada da je $t_{n+1} = \lambda$. Imamo da je

$$t_1 = \lambda,$$

$$t_2 = \overline{t_1 x_1} = \overline{x_1},$$
$$t_3 = \overline{t_2 x_2} = \overline{\overline{x_1} x_2} = \overline{x_1 x_2},$$

pa ako ovaj postupak produžimo dobijamo da je

$$t_{n+1} = \overline{x_1 \dots x_n} = \overline{w},$$

a kako je $w \in H$ sledi da je predstavnik njegovog koseta u stvari $\lambda$, odnosno $t_{n+1} = \lambda$. Dobili smo da je

$$w = \phi(s_{t_1,x_1})\phi(s_{t_2,x_2}) \dots \phi(s_{t_n,x_n}),$$

pa pošto je $w$ proizvoljan element, sledi da se svaka reč iz $H$ može dobiti kao proizvod elemnata iz $\{s_{t,x} | t \in T, x \in X^{\pm}\}$, pa i iz $\{s_{t,x} | t \in T, x \in X\}$, čime je dokaz kompletiran. □

**Posledica 2.5.** *Ako je grupa $G$ konačno generisana i $H$ njena podgrupa konačnog indeksa onda je $H$ konačno generisana.*

*Dokaz.* Neka je grupa $G$ generisana skupom $X$ i neka je $|X| = n$, gde $n \in \mathbb{N}$. Neka je $H$ njena proizvoljna podgrupa takva da je $[G : H] = m$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je $|S| = |\{s_{t,x} | t \in T, x \in X\}| = nm$ a kako je po prethodnoj teoremi $B$ generatorni skup grupe $H$ sledi da je $H$ konačno generisana. □

Definišimo sada proces prepisivanja $\tau$.

**Definicija 2.6.** Neka je $u = u_1 \cdots u_n \in (A^*)|_H$, i neka je $\tau : (A^*)|_H \to S^*$ funkcija definisana sa:

$$\tau(u) = s_{t_1,u_1} \cdots s_{t_n,u_n},$$

gde je

$$t_1 = \lambda, \quad t_i = \overline{t_{i-1} x_{i-1}}, \qquad \text{za sve } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Funkciju $\tau$ nazivamo Reidemeisterov proces prepisivanja.

Kurt Reidemeister (1893–1971) u svom originalnom radu, naravno, nije koristio procese prepisivanja, međutim kako mi suštinski koristimo njegove ideje i današnju terminologiju, funkciju prepisivanja $\tau$ ćemo nazvati po njegovom imenu. Naravno, moramo opravdati i termin "prepisivanje" u nazivu funkcije $\tau$, odnosno treba pokazati da važi $\phi(\tau(u_1 \cdots u_n)) = u_1 \cdots u_n$. Na osnovu definicija preslikavanja $\tau$ i homomorfizma $\phi$ dobijamo:

$$\phi(\tau(u_1 \cdots u_n)) = \phi(s_{t_1,u_1} \cdots s_{t_n,u_n}) = \phi(s_{t_1,u_1}) \cdots \phi(s_{t_n,u_n}).$$

Kako smo u dokazu Teoreme 2.4. pokazali da je:

$$\phi(s_{t_1,u_1})\cdots\phi(s_{t_n,u_n}) = u_1\cdots u_n,$$

sledi da je

$$\phi(\tau(u)) = u,$$

tj. $\tau$ jeste funkcija prepisivanja.

**Lema 2.7.** *Neka je $G$ grupa data prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ i neka je $H$ njena podgrupa. Ako je $\tau$ Reidemeisterov proces prepisivanja za $H$, onda važi:*

(1) *ako su $u, v \in (A^*)|_H$ takve da je $u = v$ u $\mathcal{F}_X$ onda je $\tau(u) = \tau(v)$ u $\mathcal{F}_S$,*

(2) *ako su $u, v \in (A^*)|_H$ onda je $\tau(uv) \equiv \tau(u)\tau(v)$ u $\mathcal{F}_S$.*

*Dokaz.* (1) Neka su $u, v \in (A^*)|_H$ takve da je $u = v$ u $\mathcal{F}_X$. Neka je $u = pxx^{-1}q$ a $v = pq$. Tada je:

$$\tau(u) = \tau(pxx^{-1}q) = p_1 s_{t,x} s_{\overline{tx},x^{-1}} p_2,$$

gde je $t = \overline{p}$. Na osnovu $(*)$ iz dokaza Teoreme 2.4, imamo da je $s_{\overline{tx},x^{-1}} = (s_{t,x})^{-1}$, pa je:

$$\tau(u) = p_1 p_2 = \tau(pq) = \tau(v).$$

(2) Neka su $u, v \in (A^*)|_H$. Jasno, $\tau(uv) = \tau(u)q$. Kako $u \in (X^*)|_H$ sledi da je $\overline{uw} = \overline{w}$, za proizvoljnu reč $w \in (X^{\pm 1})^*$, pa je zbog toga $q = \tau(v)$, odnosno $\tau(uv) \equiv \tau(u)\tau(v)$ u $\mathcal{F}_S$. □

Sledeća teorema nam daje pojednostavljenu prezentaciju podgrupe $H$ grupe $G$ koja potiče od Reidemeistera. Reidemeister je bio svestran matematičar, ali pre svega topolog i geometar. Kako se generalno kombinatorna teorija grupa i počela razvijati zbog potreba algebarske topologije, tako je i Reidemeister dao svoj doprinos, verovatno ni ne sluteći da će njegova teorema postati jedna od najpoznatijih teorema kombinatorne teorije grupa. Naime, njega je zanimala prezentacija podgrupe jedne specijalne grupe iz algebarske topologije, međutim pripremajući svoje rezultate za objavljivanje, on se pod uticajem tadašnjih trendova u matematici, trudio da svoja dostignuća izloži sto je apstraktnije i formalnije moguće. Taj put mu je otvorio mnogo veća vrata od onih na koje je kucao. Naime, pronašao je metod kojim se nalazi prezentacija proizvoljne normalne podgrupe, ako je data konačno prezentirana grupa $G$. Ispostavlja se da uslovi normalnosti podgrupe i konačne prezentabilnosti nisu neophodni koristeći ideju njegovog metoda, pa ćemo njegovu teoremu izložiti i dokazati bez tih uslova.

**Teorema 2.8** (Reidemeister, 1926)**.** *Neka je $G$ proizvoljna grupa data prezentacijom $\langle X|\,\mathfrak{R}\rangle$, $H$ njena podgupa, a $\tau$ Reidemeisterov proces prepisivanja za $H$. Ako je $T$ desni koset reprezentacijski sistem, a $S = \{s_{t,x}|\, t \in T, x \in X\}$, onda je $H$ definisana prezentacijom $\langle S\ |\,\mathfrak{R}_H\rangle$, gde je*

$$\mathfrak{R}_H = \{\ s_{t,x} = \tau(tx(\overline{tx})^{-1}),\ \ \tau(tRt^{-1}) = \lambda :\ \ t \in T, x \in X, R \in \mathfrak{R}\}.$$

*Dokaz.* Teorema 2.4. nam daje da je skup $S$ generatorni skup grupe $H$, ostaje nam da pokažemo da su relacije skupa $\mathfrak{R}_H$ definišuće relacije. Dovoljno je pokazati da relacije $\phi(u) = \phi(v)$ važe u grupi $G$ gde je $u = v$ relator skupa $\mathfrak{R}_H$ i da se relacije (R1)$-$(R4) mogu izvesti iz relatora skupa $\mathfrak{R}_H$, jer se onda pomoću Tietzeovih transformacija možemo osloboditi skupa relatora $\mathfrak{R}_H$, pa na osnovu Teoreme 2.2. dobijamo dokaz ove teoreme.

Pokažimo prvo da relacije $\phi(u) = \phi(v)$ zaista važe u grupi $G$ gde je $u = v$ relator skupa $\mathfrak{R}_H$. Kako je relator $s_{t,x} = \tau(tx(\overline{tx})^{-1})$ u stvari identičan relatoru (R1) sledi da $\phi(s_{t,x}) = \phi(\tau(tx(\overline{tx})^{-1}))$ važi u $G$. Posmatrajmo sada relator $\tau(tRt^{-1}) = \lambda$, gde $t \in T, R \in \mathfrak{R}$ i pokažimo da $\phi(\tau(tRt^{-1})) = \phi(\lambda) = 1$ važi u $G$. Kako je

$$\phi(\tau(tRt^{-1})) = tRt^{-1} = 1 \quad \text{u } G,$$

tvrđenje važi.

Preostaje nam da pokažemo da se relacije (R1)$-$(R4) mogu izvesti iz relatora skupa $\mathfrak{R}_H$.

(R1): Treba pokazati se relacija $s_{t,x} = \tau(tx(\overline{tx})^{-1}$ može izvesti pomoću relacija iz $\mathfrak{R}_H$, što važi jer je ona sama element skupa $\mathfrak{R}_H$.

(R2), (R3): Ove relacije važe na osnovu osobina Reidemeisterovog procesa prepisivanja, što je i pokazano u Lemi 2.7.

(R4): Neka su $R \in \mathfrak{R}$ i $w \in A^*$ proizvoljni. Pokažimo da se $\tau(wRw^{-1}) = \lambda$ može izvesti pomoću relacija iz $\mathfrak{R}_H$. Primetimo da reč $w$ možemo zapisati kao $w = w\overline{w}^{-1}\overline{w}$, i da pri tome reč $h = w\overline{w}^{-1}$ pripada skupu $(A^*)|_H$. Tada je:

$$\tau(wRw^{-1}) = \tau(h \cdot \overline{w}R\overline{w}^{-1} \cdot h^{-1}),$$

a pošto važe (R2) i (R3) dalje je:

$$\tau(wRw^{-1}) = \tau(h)\tau(\overline{w}R\overline{w}^{-1})\tau(h^{-1}) = \tau(h)\tau(\overline{w}R\overline{w}^{-1})\tau(h)^{-1} = \lambda,$$

što je i trebalo pokazati. □

**Posledica 2.9.** *Ako je $G$ konačno prezentirana grupa i $H$ njena podgrupa konačnog indeksa onda je i $H$ konačno prezentirana.*

*Dokaz.* Direktna posledica Teoreme 2.8. □

Kako bismo još više pojednostavili prezentaciju podrupe $H$ prikazaćemo Schreierovu modifikaciju Teoreme 2.8. (Reidemeisterove teoreme). Otto Schreier (1901–1929), takođe jedan svestran matematičar, posećivao je Reidemeisterova predavanja iz analitičke geometrije i topologije i bio upoznat sa njegovim radom. Schreier, iako je takođe koristio geometrijske ideje i metode težio je algebraizaciji, tj. interesovala ga je teorija grupa sama po sebi, sa i bez primene geometrije i topologije. Upravo Schreier je uopštio Reidemeisterovu teoremu, izbacivši uslove normalnosti i konačne prezentiranosti. Dalje, primetio je da se skup relatora još više može uprostiti ukoliko se posmatra specijalan sistem reprezenata. Dajemo definiciju tog sistema.

**Definicija 2.10.** Neka je $\delta$ desna koset reprezentacijska funkcija, i $T$ desni koset reprezentacijski sistem za $G$ po $H$. Ako za svaku reč $w \in T$ važi da je svaki njen inicijalni segment, tj. prefiks, ponovo u $T$ onda $T$ nazivamo *Schreierov reprezentacijski sistem za $G$ po $H$.*

**Lema 2.11.** *Neka je $G$ proizvoljna grupa data prezentacijom $\langle X|\mathfrak{R}\rangle$ i neka je $H$ njena podgrupa. Tada postoji Schreierov reprezentacijski sistem za $G$ po $H$.*

*Dokaz.* Neka je $Hg = \{hg|\, h \in H\}$ proizvoljan desni koset i neka je $w \in Hg$ najkraća reč tog koseta. Pod dužinom koseta $Hg$ podrazumevamo dužinu reči $w$. Schreierov sistem ćemo definisati induktivno koristeći dužinu koseta.

Za reprezenta koseta $H$ biramo praznu reč $\lambda$. Što se tiče koseta dužine jedan za reprezenta uzimamo bilo koju reč dužine jedan (tj. slovo) koja mu pripada. Neka je $A_2$ proizvoljan koset dužine 2 i neka je $a_1a_2 \in A_2$, gde $a_1, a_2 \in X^{\pm 1}$. Kako je $\overline{a_1a_2} = \overline{\overline{a_1}a_2}$ sledi da je $\overline{a_1}a_2 \in A_2$ i pri tome kako je dužina od $\overline{a_1}$ najviše 1, imamo da je dužina od $\overline{a_1}a_2$ najviše dva. Stoga za reprezenta koseta $A_2$ možemo uzeti $\overline{a_1}a_2$. Pretpostavimo sada da smo odabrali reprezente za sve kosete dužine manje od $n$ i neka je $A_n$ proizvoljan koset dužine $n$. Tada postoji reč dužine $n$ u $A_n$, tj. postoji $a_1 \cdots a_n \in A_n$, gde je $a_i \in X^{\pm 1}$. Za reprezenta koseta $A_n$ uzimamo element $\overline{a_1 \cdots a_{n-1}}a_n$, što je dobar izbor na osnovu istih argumenata koje smo koristili kod biranja predstavnika koseta $A_2$.

Na osnovu same konstrukcije, prilikom brisanja poslednjeg slova proizvoljnog reprezenta dobijamo nekog drugog predstavnika, što nam daje da je ovo zaista Schreierov sistem reprezenata za $G$ po $H$. $\square$

Ukoliko prilikom konstrukcije Reidemeisterovog procesa prepisivanja koristimo Schreierov sistem reprezenata dobijamo Reidemeister-Schreierov proces prepisivanja (skraćeno *R-S proces prepisivanja*) koji će nam kao što je već najavljeno još više uprostiti prezentaciju podgrupe $H$.

**Teorema 2.12** (Schreier)**.** *Neka je $G$ proizvoljna grupa data prezentacijom $\langle X|\mathfrak{R}\rangle$, i neka je $H$ njena podgrupa. Ako je $S = \{s_{t,x} : t \in T, x \in X\}$, $\tau$ R-S proces* *prepisivanja, a $T$ Schreierov sistem reprezenata, onda je $H$ definisana prezentacijom:*

$$\langle S \mid \{s_{m,x}, \tau(tRt^{-1}) : x \in X, t \in T, m \in T, R \in \mathfrak{R}\}\rangle, \qquad (*)$$

*gde su $m \in T$ i $x \in X$ takvi da važi:*

$$mx = \overline{mx} \quad u \quad \mathcal{F}_X.$$

*Dokaz.* Pošto nam Reidemeisterova teorema o prezentaciji, odnosno Teorema 2.8. daje prezentaciju podgrupe $H$ dovoljno je pokazati da relacije $\phi(s_{m,x}) = 1$ i $\phi(\tau(tRt^{-1})) = 1$ (gde su $t \in T$ i $R \in \mathfrak{R}$ proizvoljni, a $m \in T$ i $x \in X$ takvi da važi $mx = \overline{mx}$ u $\mathcal{F}_X$) zaista važe u $G$ i da se iz ovog skupa relatora kao posledice mogu dobiti relatori skupa $\mathfrak{R}_H$ iz prezentacije navedene u Raidemeisterovoj teoremi. Kako je relator $\tau(tRt^{-1})$, $t \in T, R \in \mathfrak{R}$ takođe i element skupa $\mathfrak{R}_H$ sledi da $\phi(\tau(tRt^{-1})) = 1$ važi u $G$ kao i da je $\tau(tRt^{-1}) \in \mathfrak{R}_H$ posledica skupa relatora prezentacije $(*)$. Ostaje nam da pokažemo da $\phi(s_{m,x}) = 1$ važi u $G$, gde je $mx = \overline{mx}$ u $\mathcal{F}_X$.

Neka je $mx = \overline{mx}$ u $\mathcal{F}_X$. Kako je tada $mx(\overline{mx})^{-1} = \lambda$ u $\mathcal{F}_X$, na osnovu Leme 2.7. imamo da je $\tau(mx(\overline{mx})^{-1}) = \tau(\lambda) = \lambda$ u $\mathcal{F}_S$. Dakle, kako relacija $\phi(s_{m,x}) = \phi(\tau(mx(\overline{mx})^{-1}))$ važi u $G$ jer je $s_{m,x} = \tau(mx(\overline{mx})^{-1})$ u stvari relator iz $\mathfrak{R}_H$, imamo da je:

$$\phi(s_{m,x}) = \phi(\tau(mx(\overline{mx})^{-1})) = 1,$$

pa relacija $\phi(s_{m,x}) = 1$ važi u $G$.

Treba još pokazati da je za proizvoljno $t \in T$, $x \in X$ relator $s_{t,x} = \tau(tx(\overline{tx})^{-1})$ posledica od skupa relatora prezentacije $(*)$. Neka je $t \in T$ proizvoljno, $t = a_1 \cdots a_n$, gde je $a_i \in X$, za sve $i \in \{1, \dots, n\}$. Kako je $T$ Schreierov reprezentacijski sistem sledi da je $a_1 \cdots a_k \in T$ za sve $k \in \{1, \dots, n\}$. Označimo sa $t'_k = a_1 \cdots a_k$. Na osnovu definicije preslikavanja $\tau$ imamo:

$$\tau(tx(\overline{tx})^{-1}) = \tau(a_1 \cdots a_n x(\overline{tx})^{-1}) =$$

$$= s_{1,a_1} s_{\overline{a_1},a_2} s_{\overline{a_1 a_2},a_3} \cdots s_{\overline{a_1 \cdots a_n},x} s_{\overline{tx},(\overline{tx})^{-1}} =$$

$$= s_{1,a_1} s_{t'_1,a_2} s_{t'_2,a_3} \cdots s_{t,x} s_{\overline{tx},(\overline{tx})^{-1}}.$$

Dalje, koristimo to da su $s_{m,x} = \lambda$ relatori ako je $mx = \overline{mx}$ u $\mathcal{F}_X$. Kako je

$$t'_k a_{k+1} = a_1 \cdots a_k a_{k+1} = t'_{k+1}$$

imamo da je

$$\overline{t'_k a_{k+1}} = t'_k a_{k+1},$$

pa je

$$s_{t'_k,a_{k+1}} = \lambda \quad \text{za svako} \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Takođe $\lambda a_1 = a_1 \in T$ i $\overline{tx}(\overline{tx})^{-1} = \lambda = t_1 \in T$ pa je onda $s_{1,a_1} = \lambda$, odnosno $s_{\overline{tx},(\overline{tx})^{-1}} = \lambda$.

Dakle, imamo da je:

$$\tau(tx(\overline{tx})^{-1}) = s_{t,x},$$

što je i trebalo pokazati. □

Osim pojednostavljenja prezentacije Schreier je ovaj metod primenio na slobodne grupe i dobio sledeće:

**Posledica 2.13** (Nielsen-Schreier)**.** *Svaka podgrupa slobodne grupe je slobodna.*

*Dokaz.* Neka je $G$ slobodna grupa definisana prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ i neka je $H$ njena podgrupa. Kako je $G$ slobodna njen skup relatora je prazan tj. $\mathfrak{R} = \emptyset$. Na osnovu Teoreme 2.12. sledi da je $H$ definisana prezentacijom:

$$\langle S \mid \{s_{m,x} : x \in X\}\rangle,$$

gde je $m \in T$ takvo da za sve $x \in X$ važi:

$$mx = \overline{mx} \quad \text{u} \quad \mathcal{F}_X.$$

Koristeći Tietzeove transformacije dobijamo da je prezentacija od $H$ u stvari:

$$\langle \{s_{t,x} : x \in X\} \,|\, \emptyset\rangle,$$

gde je $t \in T$ takvo da za sve $x \in X$ važi:

$$tx \neq \overline{tx} \quad \text{u} \quad \mathcal{F}_X.$$

Sledi, $H$ je slobodna. □

Primetimo da u prethodnoj posledici ne samo da smo pokazali da je svaka podgrupa slobodne grupe takođe slobodna, nego smo i dobili skup slobodnih generatora. Naime, kao što se već vidi u samom dokazu skup slobodnih generatora čine oni $s_{t,x}$ koji su takvi da reč $tx$ nije slobodno jednaka svom koset predstavniku. Ono što je interesantno je da je danski matematičar Jakob Nielsen (1890–1959) dokazao isto tvrđenje na kompletno drugačiji način, a dobio iste slobodne generatore koje je i Schreier dobio. Osim toga, Schreier je pokazao i da je broj tih generatora jedinstveno određen na osnovu indeksa podgrupe u slobodnoj grupi.

**Teorema 2.14** (Schreier)**.** *Neka je $\mathcal{F}_X$, gde je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ slobodna grupa i neka je $H$ njena podgrupa takva da je $[G : H] = k$. Ako su $n$ i $k$ konačni onda je $H$ slobodna sa*

$$k(n-1)+1$$

*generatora.*

# Glava 3

# Uopštenje R-S metoda za polugrupe

## 3.1 Prezentacija potpolugrupe proizvoljne polugrupe

U ovom poglavlju razvijamo ideju procesa prepisavanja za polugrupe i dajemo opštu teoremu o prezentaciji potpolugrupe date polugrupe koja je data svojom prezentacijom. Ta teorema biće analogna Teoremi 2.2, i kao što je slučaj sa grupnom verzijom i ova polugrupna će imati iste nedostatke. Naime, prezentacija će biti beskonačna, funkcija prepisivanja neće biti data konstruktivno, međutim, kao i kod grupa, ova teorema će nam dati recept na koji način uopšte možemo doći do prezentacije potpolugrupe date polugrupe.

Neka je $S$ polugrupa definisana prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$, i neka je $T$ njena potpolugrupa generisana skupom $Y = \{y_i |\, i \in I\} \subseteq X^+$. Naš zadatak je da nađemo prezentaciju polugrupe $T$.

Kako su generatori skupa $Y$ reči mi ćemo, analogno kao kod grupa, posmatrati novu azbuku $B = \{b_i |\, i \in I\}$ koja je u bijekciji sa skupom $Y$ i na taj način umesto reči iz generatornog skupa $Y$ posmatrati slova iz skupa $B$. Reč $b_{i_1} \cdots b_{i_n}$ iz $B^+$ reprezentuje element $y_{i_1} \cdots y_{i_n}$ iz $H$ i kao kod grupa postoji homomorfizam $\phi$ : $B^+ \to X^+$, koji je određen na osnovu bijekcija između skupova $B$ i $Y$ takav da je

$$\phi(b_{i_1} \cdots b_{i_n}) = \phi(b_{i_1}) \cdots \phi(b_{i_n}) = y_{i_1} \cdots y_{i_n}.$$

Preslikavanje $\phi$ nazivaćemo reprezentacijska funkcija.

Dalje, cilj nam je da svaku reč iz $X^+$ koja predstavlja element potpolugrupe $T$ (*u oznaci* $(X^+)|_T$) "prepravimo" do odgovarajuće reči iz $B^+$, što ćemo učiniti pomoću *procesa prepisivanja*, odnosno funkcije $\tau : (X^+)|_T \to B^+$ koje zadovoljava

$$\phi(\tau(w)) = w \text{ u } S, \text{ za sve } w \in (X^+)|_T.$$

Ni kod polugrupa, proces prepisivanja nije dat konstruktivno, nije obavezno jedinstven, a ni homomorfizam, ali što nam je najbitnije, funkcija prepisivanja postoji.

Sledi formulacija najavljene teoreme, takozvane opšte teoreme o prezentaciji pomoću procesa prepisivanja, analogne Teoremi 2.2.

**Teorema 3.1.** *Neka je $S$ polugrupa definisana prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$, i neka je $T$ njena potpolugrupa generisana skupom $Y = \{y_i | \, i \in I\} \subseteq X^+$. Neka je $B = \{b_i | \, i \in I\}$ nova azbuka, a $\phi$ i $\tau$ reprezentacijska funkcija, odnosno funkcija prepisivanja. Tada je polugrupa $T$ definisana prezentacijom $\langle B | \mathfrak{R}_T \rangle$, gde su elementi skupa $\mathfrak{R}_T$ sledeće relacije:*

(R1) $b_i = \tau(y_i)$, *za sve* $i \in I$;

(R2) $\tau(uv) = \tau(u)\tau(v)$, *za sve* $u, v \in (X^+)|_T$;

(R3) $\tau(w_1 u w_2) = \tau(w_1 v w_2)$, *za sve* $(u, v) \in \mathfrak{R}$ *i sve* $w_1, w_2 \in X^*$.

*Dokaz.* Ovu teoremu ćemo dokazati koristeći Teoremu 1.10, tj. pokazaćemo da relacije $\phi(u) = \phi(v)$ važe u polugrupi $S$ gde je $u = v$ relator oblika (R1)−(R3) kao i da je bilo koja druga relacija koja važi u $T$ u stvari posledica od (R1)−(R3).

Pokažimo prvo da relacije $\phi(u) = \phi(v)$ važe u polugrupi $S$ gde je $u = v$ relator oblika (R1)−(R3). Koristeći definiciju procesa prepisivanja $\tau$ i osobinu da je $\phi$ homomorfizam dobijamo:
(R1): $\phi(b_i) \equiv y_i = \phi(\tau(y_i))$,
(R2): $\phi(\tau(uv)) = uv = \phi(\tau(u))\phi(\tau(v))$, za sve $u, v \in (X^+)|_T$,
(R3): $\phi(\tau(w_1 u w_2)) = w_1 u w_2 = w_1 v w_2 = \phi(\tau(w_1 v w_2))$ u $S$.

Dokaz da je proizvoljna relacija $\alpha = \beta$, gde $\alpha, \beta \in B^+$ takva da $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ važi u $S$ u stvari posledica od (R1)−(R3) dajemo pomoću dve leme.

**Lema 3.2.** *Neka su $\alpha, \beta \in (X^+)|_T$ bilo koje dve reči takve da je relacija $\alpha = \beta$ zadovoljena u $S$. Tada je relacija $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ posledica relacija (R1)−(R3).*

*Dokaz.* Neka su $\alpha, \beta$ proizvoljne reči iz $(X^+)|_T$ takve da $\alpha = \beta$ važi u $S$. Tada se na osnovu Teoreme 1.10. relator $(\alpha, \beta)$ može izvesti iz $\mathfrak{R}$, odnosno postoji niz

$$\{\gamma_1, \dots \gamma_n\},$$

takav da je $\alpha \equiv \gamma_1$, $\beta \equiv \gamma_n$ i svako $\gamma_{i+1}$ je dobijeno od $\gamma_i$ direktnom primenom relacije iz $R$, za sve $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Tada, dobijamo niz

$$\tau(\alpha) \equiv \tau(\gamma_1), \tau(\gamma_2), \dots, \tau(\gamma_n) \equiv \tau(\beta),$$

pri čemu je sada svako $\tau(\gamma_{i+1})$ je dobijeno od $\tau(\gamma_i)$ direktnom primenom relacije oblika (R3), za sve $i \in \{1, \dots, n-1\}$, odnosno $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ je posledica relacija (R1)−(R3) što je i trebalo pokazati. $\square$

**Lema 3.3.** *Neka je $w \in B^+$ proizvoljna reč. Tada je relacija*

$$w = \tau(\phi(w))$$

*posledica od relatora (R1)−(R3).*

*Dokaz.* Neka je $w = b_{i_1} \cdots b_{i_n}$, gde $b_{i_j} \in B$ za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je:

$$\phi(w) \equiv \phi(b_{i_1} \cdots b_{i_n}) \equiv \phi(b_{i_1}) \cdots \phi(b_{i_n}) \equiv y_{i_1} \cdots y_{i_n}.$$

Kako su $y_{i_j} \in (X^+)|_T$ za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$, primenom relatora (R2) dobijamo da je:

$$\tau(\phi(w)) \equiv \tau(y_{i_1} \cdots y_{i_n}) = \tau(y_{i_1}) \cdots \tau(y_{i_n}).$$

Dalje, kako je na osnovu relatora (R1) $\tau(y_{i_j}) = b_{i_j}$ za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$ dobijamo da je:

$$\tau(\phi(w)) \equiv b_{i_1} \cdots b_{i_n} = w,$$

što je i trebalo pokazati. □

Vratimo se sada dokazu teoreme. Neka su sad $\alpha, \beta \in B^+$ proizvoljne reči takve da $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ važi u $S$. Pokažimo da je relator $(\alpha, \beta)$ posledica relatora (R1)−(R3). Kako je $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ u $S$, na osnovu Leme 3.2. relacija $\tau(\phi(\alpha)) = \tau(\phi(\beta))$ posledica od relatora (R1)−(R3). Na osnovu Leme 3.3. imamo da je $\tau(\phi(\alpha)) = \alpha$, a $\tau(\phi(\beta)) = \beta$, što nam daje da je u stvari relacija $\alpha = \beta$ posledica od relatora (R1)−(R3), čime je dokaz završen. □

Kao što smo već napomenuli, ova teorema nam daje opšti metod za traženje prezentacije potpolugupe $T$, a isto kao što su Reidemeister i Schreier pametnim izborom generatornog skupa i uvođenjem desnih koset reprezentacijskih funkcija kod grupa uprostili prezentaciju podgrupe, mi ćemo izložiti kako se kod polugrupa ova generalna prezentacija može pojednostaviti.

Podsetimo se da je kod uprošćavanja prezentacija grupa glavnu ulogu imao takozvani desni reprezentacijski sistem. Stoga, ćemo uvesti taj pojam i za polugrupe.

**Definicija 3.4.** Funkciju $\delta : (X^*)|_{S \setminus T} \cup \{\lambda\} \to X^*$ sa osobinama:

(1) $\delta(\lambda) = \lambda$,

(2) $u = \delta(u)$ važi u $S$ za sve reči $u$ iz domena $\delta$,

(3) za sve $u, v \in (X^*)|_{S \setminus T} \cup \{\lambda\}$ takve da je $u = v$ u $S$ važi $\delta(u) \equiv \delta(v)$,

nazivamo *reprezentacijska funkcija za $S$ po $T$*. Sliku proizvoljne reči $w \in (X^*)|_{S \setminus T} \cup \{\lambda\}$ označavamo sa $\delta(w) = \overline{w}$. Skup $\Pi = \{\overline{w} \mid w \in (X^*)|_{S \setminus T}\}$ nazivamo *reprezentacijski sistem za $S$ po $T$. Indeksom polugrupe $T$ u polugrupi $S$* nazivamo $|S \setminus T| + 1$.

Primetimo da za sve reči $w$ iz domena reprezentacijske funkcije važi $\overline{\overline{w}} = \overline{w}$, tj. funkcija $\delta$ je idempotentna.

Iako ova definicija ima u mnogome sličnosti sa definicijom desnog koset reprezentacijskog sistema za grupe postoji jedna bitna razlika. Naime postoji takozvana Todd-Coxeter procedura za grupe koja pronalazi desni koset reprezentacijski sistem, ukoliko je zadata konačna prezentacija grupe i konačan skup generatora podgrupe konačnog indeksa. Kod polugrupa takav algoritam do danas nije poznat.

Nakon definicije reprezentacijske funkcije za $S$ po $T$ i reprezentacijskog sistema, vreme je da konstruišemo generatorni skup potpolugrupe $T$.

Neka je $\delta$ reprezentacijska funkcija za $S$ po $T$, i neka je $\Pi$ reprezentacijski sistem za $S$ po $T$. Elemente već pominjanog generatornog skupa $B$ umesto sa $b_i$ označićemo sa $b_{\rho,x,\sigma}$, pri čemu su $\rho, \sigma \in \Pi$ i $x \in X$ takvi da je $\rho x, \rho x\sigma \in (X^+)|_T$. Funkciju $\phi$ koja nam prevodi generatore skupa $B$ na reči polugrupe $T$ definišemo na sledeći način:

$$\phi(b_{\rho,x,\sigma}) = \rho x\sigma, \text{ gde su } \rho, \sigma \in \Pi \text{ i } x \in X \text{ takvi da je } \rho x, \rho x\sigma \in (X^+)|_T.$$

**Teorema 3.5.** *Neka je $S$ proizvoljna polugrupa data prezentacijom $\langle X \,|\, \mathfrak{R}\rangle$, neka je $T$ njena potpolugrupa a $\Pi$ reprezentacijski sistem za $S$ po $T$. Tada je skup:*

$$B = \{b_{\rho,x,\sigma} \,|\, \rho, \sigma \in \Pi,\ x \in X,\ \rho x, \rho x\sigma \in (X^+)|_T\}$$

*generatorni skup polugrupe $T$.*

*Dokaz.* Kako je $\rho x\sigma \in (X^+)|_T$ sledi da je $\phi(b_{\rho,x,\sigma})$ zaista element iz $T$.

Ostaje nam da pokažemo da se proizvoljan element iz $T$ može prikazati kao proizvod elemenat $\phi(b_{\rho,x,\sigma})$ gde $\rho, \sigma \in \Pi$, $x \in X$, i $\rho x, \rho x\sigma \in (X^+)|_T$. Neka je $w$ proizvoljan element iz $T$. Tvrđenje ćemo pokazati indukcijom po dužini reči $w$. Ako je $|w| = 1$, onda je $w \equiv x \in X$ pa je $w \equiv \lambda x\lambda \equiv \phi(b_{\lambda,x,\lambda})$. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve reči dužine manje od $k$. Neka je sada $w$ proizvoljna reč iz $T$ takva da je $|w| = k$. Tada postoje $w_1, w_2 \in X^*$ i $x \in X$ takve da je $w = w_1xw_2$, gde je $w_1x$ najkraći početni segment reči $w$ takav da je $w_1x \in (X^+)|_T$. Tada $w_1 \notin (X^+)|_T$ pa je $w_1 = \overline{w_1}$ u $S$. Dalje, moguća su dva slučaja:

**Slučaj 1:** $w_2 \in (X^+)|_T$.

Tada, kako je $|w_2| < k$ po indukcijskoj pretpostavci $w_2$ se može predstaviti kao proizvod elemenata oblika $\phi(b_{\rho,x,\sigma})$ gde $\rho, \sigma \in \Pi$, $x \in X$, i $\rho x, \rho x\sigma \in (X^+)|_T$, pa pošto je $w_1x \in (X^+)|_T$ i

$$w = w_1xw_2 = (\overline{w_1}x)w_2 = \phi(b_{\overline{w_1},x,\lambda})w_2,$$

dobijamo da je $w$ zaista prikazan kao proizvod elemenata oblika $\phi(b_{\rho,x,\sigma})$.

**Slučaj 2:** $w_2 \notin (X^+)|_T$

Tada, ako je $w_2 \neq \lambda$, onda u polugrupi $S$ važi $w_2 = \overline{w_2}$, pa je

$$w = \overline{w_1}x\overline{w_2} = \phi(b_{\overline{w_1},x,\overline{w_2}}),$$

pošto $\overline{w_1}x\overline{w_2} = w \in (X^+)|_T$.
Ako je $w_2 = \lambda$, onda kako je $\overline{w_1}x \in (X^+)|_T$ imamo da važi:

$$w = \overline{w_1}x = \phi(b_{\overline{w_1},x,\lambda}),$$

čime je dokaz u potpunosti završen. □

**Posledica 3.6.** *Neka je $S$ proizvoljna polugrupa i $T$ njena potpolugrupa. Tada je:*

$$rang(T) \leq (|S \setminus T| + 1)^2 rang(S).$$

*Specijalno, ukoliko je $S$ konačno generisana polugrupa i $T$ njena potpolugrupa konačnog indeksa, onda je $T$ konačno generisana.*

Sledeći primer pokazuje da je skup $B$ najbolji mogući generatorni skup potpolugrupe $T$.

**Primer 3.1.** Neka je $S = X^+$ slobodna polugrupa nad $X$, i neka je $k > 1$. Definišemo:

$$T = \{w \in X^+ |\, |w| \geq k\}.$$

Tada je $T$ u odnosu na operaciju konkatenacije očigledno potpolugrupa polugrupe $S$.

Kako se svaki element od $S$ može na jedinstven način prikazati kao proizvod elemenata iz $X$, sledi da reprezentacijski sistem za $S$ po $T$ mora biti:

$$\Pi = \{w \in X^* |\, |w| < k\}.$$

Tada, generatorni skup $B$ ima sledeći oblik:

$$B = \{b_{\rho,x,\sigma} |\, \rho, \sigma \in X^*, x \in X,\ |\rho|, |\sigma| < k,\ |\rho x|, |\rho x \sigma| \geq k\},$$

odnosno

$$B = \{b_{\rho,x,\sigma} |\, k \leq |\rho x \sigma| \leq 2k - 1,\ \text{gde } \rho x \sigma \in X^+\}.$$

S druge strane, potpolugrupa slobodne polugrupe $T$ ima jedinstven minimalan skup generatora ([6]):

$$T \setminus T^2 = \{w \in X^+ |\, |w| \geq k\} \setminus \{w \in X^+ |\, |w| \geq 2k\} =$$

$$= \{w \in X^+ |\, k \leq |w| \leq 2k - 1\}.$$

Kako je $T \cong B$ sledi da je $B$ minimalni generatorni skup potpolugrupe $T$.

Kao što je i za očekivati, sledeći cilj nam je definisanje funkcije prepisivanja koja će reči koje predstavljaju elemente potpolugrupe $T$, "prepraviti" na elemente generatornog skupa $B$. Neka je $w$ proizvoljna reč iz $(X^+)|_T$, neka je $w'x$ najmanji početni segment reči $w$ takav da $w'x \in (X^+)|_T$ i neka je $w''$ preostao deo reči $w$. Definišemo preslikavanje $\tau : (X^+)|_T \to B^+$ na sledeći način:

$$\tau(w) = \begin{cases} b_{\overline{w'},x,\overline{w''}}, & w'' \notin (X^+)|_T \\ \\ b_{\overline{w'},x,\lambda}\ \tau(w''), & w'' \in (X^+)|_T \end{cases}$$

**Teorema 3.7.** *Preslikavanje $\tau$ je funkcija prepisivanja.*

*Dokaz.* Pokažimo da za proizvoljnu reč $w \in (X^+)|_T$, važi $\phi(\tau(w)) = w$ u polugrupi $S$.

Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $w$. Neka je $|w| = 1$, odnosno $w = x$, gde $x \in X$. Tada je

$$\phi(\tau(w)) = \phi(\tau(x)) = \phi(b_{\lambda,x,\lambda}) = x = w.$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči čija je dužina manja od $k$. Neka je $w$ proizvoljna reč takva da je $|w| = k$, i neka je $w = w'xw''$, gde je $w'x$ najmanji početni segment reči $w$ koji pripada $(X^+)|_T$ a $w''$ preostao deo reči $w$. Moguća su dva slučaja:

**Slučaj 1:** $w'' \notin (X^+)|_T$.
Tada je $\phi(\tau(w)) = \phi(b_{\overline{w'},x,\overline{w''}}) = \overline{w'}x\overline{w''} = w'xw'' = w$ u $S$.

**Slučaj 2:** $w'' \in (X^+)|_T$.
Tada, pošto je $\phi$ homomorfizam imamo da je

$$\phi(\tau(w)) = \phi(b_{\overline{w'},x,\lambda}\tau(w'')) =$$

$$= \phi(b_{\overline{w'},x,\lambda})\phi(\tau(w'')).$$

Dalje, kako je $|w''| < k$ na osnovu indukcijske hipoteze imamo da je $\phi(\tau(w'')) = w''$ u polugrupi $S$. Koristeći definiciju preslikavanja $\phi$ dobijamo da je:

$$\phi(\tau(w)) = \overline{w'}xw'',$$

a pošto $w' \notin (X^+)|_T$ imamo da je $w' = \overline{w'}$ u $S$, odnosno

$$\phi(\tau(w)) = w'xw'' = w \ \text{ u } \ S,$$

što je i trebalo pokazati. □

## 3.2 Uopštenje R-S metoda za podgrupe polugrupa

U ovom poglavlju ćemo se baviti problemom traženja prezentaciije podgrupe date polugrupe koja je definisana svojom prezentacijom. Tačnije, umesto polugrupa posmatraćemo monoide, međutim ako se ima u vidu da prilikom pridruživanja elementa $a \notin X^+$ polugrupi datoj prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$, i dodavanjem relacija $aw = w$, $wa = w$, $a^2 = a$ , $w \in X^+$ skupu relatora $\mathfrak{R}$ u stvari dobijamo monoid, onda primećujemo da time ne gubimo na opštosti, pa će sva tvrđenja važiti i za polugrupe.

Neka je dat monoid $S$ svojom prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$, neka je $Y \subseteq X$ i $G$ podgrupa monoida $S$ generisana skupom $Y$. Podgrupa monoida $S$ je u stvari potpolugrupa od $S$ koja sa svojom operacijom čini grupu. Kako se jedinica podgrupe $G$ ne mora poklapati sa jedinicom monoida $S$, jedinicu grupe $G$ ćemo označavati sa $e$, a jedinicu monoida sa 1. Glavna ideja za traženje prezentacije grupe $G$ kao i ranije leži u koset reprezentacijskom sistemu i funkciji prepisivanja. Kao i u prošlom poglavlju, prvo treba pojasniti šta nam uopšte predstavlja termin "koset", stoga dajemo sledeću definiciju.

**Definicija 3.8.** Neka je $S$ monoid i $X$ proizvoljan neprazan podskup od $S$. Kažemo da je $Xs$ *desni koset* skupa $X$ monoida $S$ ako za neko $t \in S$ važi $Xst = X$. Broj svih koseta nazivamo *indeks od* $X$ *u* $S$ i označavamo ga sa $[S : X]$.

Neka je sada $G = X$, gde je $G$ podgrupa monoida $S$. Označimo sa $\mathcal{C} = \{C_i | \, i \in I\}$ skup svih koseta podgrupe $G$ monoida $S$, pri čemu uzimamo da je $C_1 = G$. Dalje, hoćemo da desnim množenjem koseta elementom monoida $S$ opet dobijamo koset pa iz tog razloga skupu koseta $\mathcal{C}$ dodajemo elemenat $C_0$ definisan na sledeći način:

$$C_i s = C_0 \text{ ako i samo ako } C_i s \notin \mathcal{C},$$

$$C_0 s = C_0.$$

Sledeće dve leme nam daju neke od osobina koseta i pokazuju da ovako definisani koseti imaju sličnosti sa standardnim kosetima u grupama.

**Lema 3.9.** *Za sve $i, j \in I$ takve da je $i \neq j$ važi $C_i \cap C_j = \emptyset$.*

*Dokaz.* Neka je $C_i, C_j \in \mathcal{C}$ proizvoljni različiti koseti. Tada postoje $s, t \in S$ takvi da je $C_i = Gs$, a $C_j = Gt$. Pretpostavimo da postoji $x \in S$ takvo da $x \in C_i \cap C_j$. Tada, kako je $x \in C_i$ sledi da postoji $g_1 \in G$ takvo da je $x = g_1 s$. S druge strane, pošto je $x \in C_j$ imamo da je $x = g_2 t$ za neko $g_2 \in G$, pa je $g_1 s = g_2 t$. Neka je sada $y$ proizvoljan element koseta $C_i$. Za neko $g_3 \in G$ imamo da je $y = g_3 s$, pa je $y = g_3 {g_1}^{-1} g_2 t \in C_j$, dakle $C_i \subseteq C_j$. Analogno dobijamo da je $C_j \subseteq C_i$, pa je $C_i = C_j$ što je kontradikcija. □

**Lema 3.10.** *Za svako $i \in I$, postoje $r_i, r'_i \in S$ takvi da važi:*

$$Gr_i = C_i \quad i \quad gr_ir'_i = g, \text{ za sve } g \in G.$$

*Dokaz.* Iz same definicije koseta sledi da postoje $r_i, q_i \in S$ takvi da je $Gr_i = C_i$ i $C_iq_i = G$. Fiksirajmo sad neko $h \in G$ i neka je $h_1 = hr_iq_i$. Tada je $h_1 \in G$ pa možemo definisati $r'_i = q_i{h_1}^{-1}h$. Sada za proizvoljno $g \in G$ važi

$$gr_ir'_i = gh^{-1}hr_iq_i{h_1}^{-1}h = gh^{-1}h_1{h_1}^{-1}h = g,$$

što je i trebalo pokazati. □

**Definicija 3.11.** Skup svih $r_i, r'_i \in S$, $i \in I$ takvih da je $Gr_i = C_i$, $\quad gr_ir'_i = g$, za sve $i \in I, g \in G$, pri čemu je $r_1 = r'_1 = 1$, nazivamo *desni koset reprezentacijski sistem za $S$ po podgrupi $G$.* Elemente $r_i, r'_i \in S$ nazivamo predstavnici koseta $C_i$.

Ako su $r_i, r'_i \in S$ predstavnici koseta $C_i$, $i \in I$ onda ćemo predstavnike koseta $C_ia$ gde je $a \in S$, $C_ia \neq C_0$ obeležavati sa $r_{ia}, r'_{ia}$. Takođe pod indeksom $ia$ ćemo u stvari podrazumevati indeks $j \in I$ takav da je $C_ia = C_j$. Primetimo da iako je $C_ia = Gr_ia = Gr_{ia}$ u opštem slučaju ne važi $r_{ia} = r_ia$.

**Lema 3.12.** *Neka je $C_i$ proizvoljan koset i neka su $r_i, r'_i$ njegovi predstavnici. Tada za proizvoljno $c \in C$ važi:*

$$cr'_ir_i = c.$$

*Dokaz.* Kako je $r_i$ predstavnik koseta $C_i$ imamo da je $C_i = Gr_i$. Neka je $c \in C_i$ proizvoljno. Tada postoji $g \in G$ takvo da je $c = gr_i$, pa imamo:

$$cr'_ir_i = gr_ir'_ir_i = gr_i = c,$$

čime je tvrđenje dokazano. □

Nakon uvođenja pojma koset reprezentacijskog sistema sledeći zadatak nam je, kao i ranije, konstruisanje generatornog skupa podgrupe $G$ monoida $S$.

Neka je $T$ desni koset reprezentacijski sistem za $S$ po $G$, i $\mathcal{C} = \{C_i | \, i \in I\} \cup \{C_0\}$ skup svih koseta. Definišemo novu azbuku

$$B = \{b_{i,x} | \, i \in I, \ x \in X, \ C_ix \neq C_0\}.$$

Homomorfizam $\phi : B^* \to G$ koji nam prevodi elemente skupa $B$ na elementa podgrupe $G$ definišemo na sledeći način:

$$\phi(b_{i,x}) = er_ixr'_{ix}.$$

Ako je
$$B' = \{b_{i,s} |\, i \in I,\ s \in S,\ C_i s \neq C_0\},$$
definisaćemo homomorfizam $\phi' : (B')^* \to G$ kao:
$$\phi'(b_{i,s}) = er_i s r'_{is}.$$

Primetimo da je $\phi'(b_{i,x}) = \phi(b_{i,x})$ za sve $x \in X$ i sve $i \in I$ takve da je $C_i x \neq C_0$.

**Teorema 3.13.** *Neka je $S$ monoid definisan prezentacijom $\langle X |\, \mathfrak{R}\rangle$ i neka je $G$ proizvoljna podgrupa monoida $S$. Tada skup*
$$B = \{b_{i,x} |\, i \in I,\ x \in X,\ C_i x \neq C_0\},$$
*generiše $G$ kao monoid.*

*Dokaz.* Pokažimo prvo da su elementi $\phi(b_{i,x})$ zaista elementi iz $G$. Kako je:
$$\phi(b_{i,x}) = er_i x r'_{ix} \in Gr_i x r'_{ix} = C_i x r'_{ix} = C_{ix} r'_{ix} = G,$$
sledi da $\phi(b_{i,x}) \in G$.

Pokažimo sada da se proizvoljan element grupe $G$ može dobiti kao proizvod elemenata $\phi(b_{i,x})$, gde $b_{i,x} \in B$. Primetimo da kako je $G = eG = \{er_1 g r'_{1g} |\, g \in G\} \subseteq \{\phi'(b_{i,s}) |\, b_{i,s} \in B'\}$ dobijamo da se proizvoljno $g \in G$ može zapisati kao proizvod elemenata $\phi'(b_{i,s})$, za $b_{i,s} \in B'$. Neka je sada $s \in S$ proizvoljno, odnosno $s = x_1 \ldots x_n$, gde $x_i \in X$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pokažimo da se $\phi'(b_{i,s})$, gde $b_{i,s} \in B'$ može predstaviti kao proizvod elemenata $\phi(b_{i,x})$, gde $b_{i,x} \in B$. Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $s$. Ako je $|s| = 1$, tj. $s = x \in X$ onda kako je $\phi'(b_{i,x}) = \phi(b_{i,x})$ tvrđenje važi. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve reči dužine manje od $n$. Neka je sad $s \in S$ proizvoljna, takva da je $|s| = n > 1$. Ako je $s = xu$, gde $x \in X, u \in X^+$, onda imamo:
$$\phi'(b_{i,s}) = er_i s r'_{is} = er_i x u r'_{ixu}.$$
Pošto je $er_i x \in Gr_i x = C_i x = C_{ix}$ onda na osnovu Leme 3.12. imamo da je:
$$er_i x u r'_{ixu} = er_i x (r'_{ix} r_{ix}) u r'_{ixu} = (er_i x r'_{ix}) r_{ix} u r'_{ixu}.$$
Dalje, kako je $er_i x r'_{ix} \in G$ imamo da je $er_i x r'_{ix} e = er_i x r'_{ix}$, pa je:
$$(er_i x r'_{ix}) r_{ix} u r'_{ixu} = (er_i x r'_{ix}) e r_{ix} u r'_{ixu},$$
odnosno
$$\phi'(b_{i,s}) = \phi(b_{i,x}) \phi'(b_{ix,u}),$$
a pošto je $|u| < n$ zbog indukcijske hipoteze dokaz je završen. □

**Posledica 3.14.** *Ako je monoid $S$ konačno generisan, i $G$ njegova podgrupa konačnog indeksa, onda je i $G$ konačno generisana.*

Sledeći korak bi po analogiji sa grupama trebao biti definisanje funkcije prepisivanja. Ovde ćemo, međutim imati funkciju koja u specijalnom slučaju, što nam je dovoljno u ovoj priči, predstavlja proces prepisivanja.

**Definicija 3.15.** Definišemo funkciju $\tau : A \to B^*$, gde je

$$A = \{(i, w) |\, i \in I,\ w \in X^*, C_i w \neq C_0\},$$

na sledeći način:

$$\tau(i, \lambda) = \lambda,$$

$$\tau(i, xw) = b_{i,x}\tau(ix, w), \quad \text{gde je } i \in I,\ x \in X,\ w \in X^*,\ C_i xw \neq C_0.$$

Ova definicija se lako može proširiti do:

$$\tau(i, w_1 w_2) = \tau(i, w_1)\tau(iw_1, w_2), \quad \text{gde je } i \in I,\ w_1, w_2 \in X^*,\ C_i w_1 w_2 \neq C_0.$$

Posmatrajmo sada funkciju $\tau_* : (X^*)|_G \to B^*$ datu sa:

$$\tau_*(w) = \tau(1, w), \quad \text{za sve } w \in (X^*)|_G.$$

Funkcija $\tau_*$ je već pominjani specijalni slučaj preslikavanja $\tau$, a da je $\tau_*$ zaista funkcija prepisivanja dobićemo kao posledicu sledeće leme.

**Lema 3.16.** *Neka je $w \in X^*$ proizvoljna reč. Tada važi:*

$$\phi(\tau(i, w)) = er_i w r'_{iw}, \quad \textit{gde je } i \in I, \quad C_i w \neq C_0.$$

*Dokaz.* Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $w$. Za $|w| = 0$, tj. $w = \lambda$ imamo da je

$$\phi(\tau(i, \lambda)) = e = er_i \lambda r'_{i\lambda},$$

dok za $|w| = 1$, odnosno $w = x$, $x \in X$,imamo:

$$\phi(\tau(i, x)) = \phi(b_{i,x}\tau(ix, \lambda)) = \phi(b_{i,x}) = er_i x r'_{ix},$$

pa je tvrđenje u oba slučaja zadovoljeno. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči $w \in X^*$ takve da je $|w| < n$. Neka je sada $w$ proizvoljna reč dužine $n$, i neka je $w = xu$, gde je $x \in X$, a $u \in X^+$. Tada važi:

$$\phi(\tau(i, w)) = \phi(\tau(i, xu)) = \phi(b_{i,x}\tau(ix, u)),$$

pa kako je $\phi$ homomorfizam imamo da je

$$\phi(\tau(i, w)) = \phi(b_{i,x})\phi(\tau(ix, u)) = er_i x r'_{ix}\phi(\tau(ix, u)),$$

a na osnovu induktivne hipoteze sledi da je:

$$er_i x r'_{ix} \phi(\tau(ix, u)) = er_i x r'_{ix} er_{ix} u r'_{ixu}.$$

Dalje, na osnovu činjenice da $er_i x r'_{ix} e = er_i x r'_{ix}$ jer $er_i x r'_{ix} \in G$ i na osnovu Leme 3.12. dobijamo:

$$\phi(\tau(i, w)) = er_i x r'_{ix} er_{ix} u r'_{ixu} = er_i x r'_{ix} r_{ix} u r'_{ixu} = er_i x u r'_{ixu} = er_i w r'_{iw},$$

što je i trebalo dokazati. □

**Posledica 3.17.** *Funkcija $\tau_*$ je proces prepisivanja.*

*Dokaz.* Neka je $w$ proizvoljna reč iz $(X^*)|_G$. Tada je:

$$\phi(\tau_*(w)) = \phi(\tau(1, w)) = er_1 w r'_{1w} = ew r'_{1w},$$

a kako je $w \in G$ i $e$ jedinica u grupi $G$ imamo da je

$$\phi(\tau_*(w)) = w r_1 = w \text{ u } S.$$

Dakle, $\tau_*$ je funkcija prepisivanja. □

Sada ćemo izložiti glavnu teoremu ovog poglavlja.

**Teorema 3.18.** *Neka je $S$ proizvoljan monoid definisan prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$, i neka je $G$ njegova proizvoljna podgrupa. Tada je $G$ definisana prezentacijom $\langle B | \mathfrak{R}_G \rangle$ kao monoid, gde se $\mathfrak{R}_G$ sastoji od sledećih relatora:*

(RG1) $\tau(i, u) = \tau(i, v)$, *za sve $i \in I$, $u, v \in X^*$, takve da je $(u, v) \in \mathfrak{R}$ i $C_i u \neq C_0$,*

(RG2) $\tau(1, er_i x r'_{ix}) = b_{i,x}$, *za sve $i \in I$, $x \in X$, takve da je $C_i x \neq C_0$,*

(RG3) $\tau(1, e) = \lambda$.

Za dokaz ove teoreme biće nam potrebna sledeća lema.

**Lema 3.19.** *Neka su $w_1, w_2 \in X^*$ proizvoljne, takve da relacija $w_1 = w_2$ važi u $S$ i neka je $i$ proizvoljan indeks takav da je $C_i w_1 \neq C_0$. Tada je relacija*

$$\tau(i, w_1) = \tau(i, w_2),$$

*posledica relacije* (RG1).

*Dokaz.* Neka je $S$ data prezentacijom $\langle X|\,\mathfrak{R}\rangle$ i neka je $w_1 = w_2$ u $S$. To u stvari znači da je $w_1 = w_2$ posledica od $\mathfrak{R}$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $w_1$ dobijena od $w_2$ direktnom primenom relatora iz $\mathfrak{R}$. Tada postoje $\alpha, \beta \in X^*$ i relator $(u, v) \in \mathfrak{R}$ takvi da je $w_1 \equiv \alpha u \beta$, i $w_2 \equiv \alpha v \beta$. Na osnovu definicije funkcije $\tau$ i na osnovu relatora (RG1) dobijamo sledeće:

$$\tau(i, w_1) = \tau(i, \alpha u \beta) = \tau(i, \alpha)\tau(i\alpha, u)\tau(i\alpha u, \beta) =$$

$$= \tau(i, \alpha)\tau(i\alpha, v)\tau(i\alpha v, \beta) = \tau(i, \alpha u \beta) = \tau(i, w_1),$$

što je i trebalo pokazati. □

*Dokaz.* (*Teoreme 3.18.*) Pokažimo prvo da ako je $u = v$ relator oblika (RG1)− (RG3) onda relacija $\phi(u) = \phi(v)$ važi u polugrupi $S$.
(RG1): Neka su $i \in I$, $(u, v) \in \mathfrak{R}$ proizvoljni, takvi da je $C_i u \neq C_0$. Na osnovu Leme 3.16. i relatora $(u, v)$ imamo:

$$\phi(\tau(i, u)) = er_i u r'_{iu} = er_i v r'_{iv} = \phi(\tau(i, v)), \quad \text{u } S.$$

(RG2): Na osnovu Leme 3.16, zatim koristeći da je $er_i x r'_{ix} \in G$, i da je $e$ idempotent dobijamo:

$$\phi(\tau(1, er_i x r'_{ix})) = er_1(er_i x r'_{ix})r'_{1er_ixr'_{ix}} = e(er_i x r'_{ix})r'_1 =$$

$$= e^2 r_i x r'_{ix} = er_i x r'_{ix} = \phi(b_{i,x}) \quad \text{u } S.$$

(RG3): $\phi(\tau(1, e)) = er_1 er'_{1e} = e = \phi(\lambda) \quad$ u $S$.

Dalje, posmatrajmo preslikavanje $\tau_*$. Pokazali smo da je ta funkcija u stvari proces prepisivanja pa možemo primeniti Teoremu 3.1. kako bismo dobili prezentaciju koja definiše $G$ kao polugrupu a ako dodamo još relator $\tau_*(e) = \lambda$ definisaće $G$ kao monoid. Ta prezentacija je $\langle B|\,\mathfrak{R}^*_G\rangle$, gde $\mathfrak{R}^*_G$ čine relatori:

(R1*) $\tau_*(er_i x r'_{ix}) = b_{i,x}$, za sve $i \in I$, $x \in X$, takve da je $C_i x \neq C_0$

(R2*) $\tau_*(uv) = \tau_*(u)\tau_*(v)$, za sve $u, v \in (X^*)|_G$

(R3*) $\tau_*(w_1 u w_2) = \tau_*(w_1 v w_2)$, gde $(u, v) \in \mathfrak{R}$, a $w_1, w_2 \in X^*$ su takve da je $w_1 u w_2 \in (X^*)|_G$,

(R4*) $\tau_*(e) = \lambda$.

Kako bismo kompletirali dokaz ove teoreme preostaje nam još da pokažemo da se relacije (R1*)−(R4*) izvode iz relacija (RG1)−(RG3). Kako je $\tau_*(w) = \tau(1, w)$ automatski imamo da se (RG2) i (RG3) poklapaju sa (R1*) i (R4*), redom. Na osnovu Leme 3.19. sledi da je relator (R3*) posledica od relatora (RG1). Ostaje nam još da pokažemo da je relacija (R2*) posledica relatora iz $\mathfrak{R}_G$. Na osnovu definicije preslikavanja $\tau$ imamo da je:

$$\tau(1, uv) = \tau(1, u)\tau(1u, v) = \tau(1, u)\tau(1, v),$$

jer je $u \in G$. Time je dokaz završen. □

Kako je grupa konačno prezentirana kao grupa ako i samo ako je konačno prezentirana kao monoid, onda važi sledeće tvrđenje koje dobijamo kao direktnu posledicu prethodne teoreme.

**Posledica 3.20.** *Ako je $S$ konačno prezentiran monoid i $G$ njegova podgrupa konačnog indeksa, onda je $G$ konačno prezentirana.*

Podsetimo se da smo u priči o prezentacijama podgrupa datih grupa, dali pojednostavljenje Reidemeisterove prezentacije pomoću takozvanog Schreierovog koset reprezentacijskog sistema i tako dobili Reidemeister-Schreierov metod. Analogno i ovu opštiju priču uvodimo pojam Schreierovog koset reprezentacijskog sistema.

**Definicija 3.21.** Neka je $S$ monoid definisan prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R}\rangle$, neka je $G$ njegova proizvoljna podgrupa, a $T$ desni koset reprezentacijski sistem za $S$ po $H$. $T$ nazivamo *Schreierov koset reprezentacijski sistem* ako svaki početni segment od $r_i$ pripada skupu $T$, gde su $r_i, r_i' \in T$ predstavnici koseta $C_i$.

Slično kao i kod grupa može se pokazati da i polugrupni Schreierov koset reprezentacijski sistem uvek postoji.

**Teorema 3.22.** *Neka je $S$ proizvoljan monoid definisan prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R}\rangle$ i neka je $G$ njegova proizvoljna podgrupa. Ako je $T = \{r_i, r_i' | i \in I\}$ Schreierov koset reprezentacijski sistem onda je $G$ definisana grupnom prezentacijom:*

$$\langle B | \{b_{m,x} = \lambda,\ \tau(i, u) = \tau(i, v) \mid i, m \in I, x \in X, (u, v) \in \mathfrak{R}, C_i u \neq C_0\}\rangle, \qquad (*)$$

*gde su $m \in I$ i $x \in X$ takvi da je $r_m x \equiv r_{mx}$.*

*Dokaz.* Kako nam prezentacija $\langle B | \mathfrak{R}_G\rangle$ data u Teoremi 3.18. definiše grupu $G$ kao monoid, pokazaćemo da ako je $u = v$ relator prezentacije $(*)$ onda $\phi(u) = \phi(v)$ važi u $S$ kao i da se relatori iz skupa $\mathfrak{R}_G$ mogu izvesti iz relatora prezentacije $(*)$.

Pokažimo prvo da ako je $u = v$ relator prezentacije $(*)$ onda $\phi(u) = \phi(v)$ važi u $S$. Kako je $\tau(i, u) = \tau(i, v) \in \mathfrak{R}_G$ za sve $i \in I$, $x \in X$, takve da je $(u, v) \in \mathfrak{R}$ sledi da relator $\phi(\tau(i,u)) = \phi(\tau(i,v))$ važi u $S$ za sve $i \in I$, $x \in X$, takve da je $(u,v) \in \mathfrak{R}$. Posmatrajmo sada relator $b_{m,x} = \lambda$, gde su $m$ i $x$ takvi da je $r_m x \equiv r_{mx}$. Tada je:

$$\phi(b_{m,x}) = er_m x r'_{mx} = er_{mx} r'_{mx} = e = \phi(\lambda), \quad \text{u } S$$

pa tvrđenje važi.

Sledeći cilj nam je da pokažemo da se relatori iz $\mathfrak{R}_G$ mogu izvesti iz relatora prezentacije $(*)$.

(Rg1): Ovaj relator baš pripada skupu relatora prezentacije $(*)$ pa je samim tim i posledica od skupa relatora prezentacije $(*)$.

(Rg2): Neka je $r_i \in T$ proizvoljan, i neka je $r_i = x_1 \cdots x_n$, gde $x_i \in X$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada, kako je $T$ Schreierov koset reprezentacijski sistem imamo da je i $x_1 \cdots x_k \in T$ za sve $k \in \{1, \ldots, n\}$. Označimo sa sa $i_k = 1x_1 \cdots x_k$, odnosno $i_k$ je onaj indeks takav da je $C_{i_k} = Gx_1 \cdots x_k$. Na osnovu definicije preslikavanja $\tau$ imamo:

$$\tau(1, r_i) = \tau(1, x_1 \cdots x_n) = b_{1,x_1}\tau(1x_1, x_2 \cdots x_n) =$$
$$= b_{1,x_1}\tau(i_1, x_2 \cdots x_n) = b_{1,x_1} b_{i_1,x_2}\tau(i_1 x_2, x_3 \cdots x_n) =$$
$$= b_{1,x_1} b_{i_1,x_2}\tau(i_2, x_3 \cdots x_n) = \cdots = b_{1,x_1} b_{i_1,x_2} \cdots b_{i_{n-1},x_n}.$$

Međutim kako je $i_k x_{k+1} = i_{k+1}$ sledi da je na osnovu relatora iz prezentacije $(*)$

$$\tau(1, r_i) = \lambda.$$

Dalje, kako je $er_i r'_i = e$ u $S$ primenom Leme 3.19. i na osnovu $\tau(1,e) = \lambda$ dobijamo:

$$\tau(i, r'_i) = \lambda\lambda\tau(i, r'_i) = \tau(1,e)\tau(1,r_i)\tau(i,r'_i) = \tau(1, er_i r'_i) = \tau(1,e) = \lambda.$$

Sada pokažimo da je relator (Rg2) posledica relatora iz $(*)$, odnosno pokažimo da je $\tau(1, er_i x r'_{ix}) = b_{i,x}$, za sve $i \in I$, $x \in X$, takve da je $C_i x \neq C_0$. Na osnovu prethodnog razmatranja imamo da je:

$$\tau(1, er_i x r'_{ix}) = \tau(1,e)\tau(1,r_i)\tau(i,x)\tau(ix, r'_{ix}) = \lambda\lambda b_{i,x}\lambda = b_{i,x},$$

što je i trebalo pokazati.

(Rg3): Pokažimo da se relator $\tau(1,e) = \lambda$ može izvesti pomoću relatora prezentacije $(*)$. Kako je $e$ jedinica grupe sledi da je $e^2 = e$ u $S$ pa na osnovu Leme 3.19. imamo:

$$\tau(1,e) = \tau(1,e^2) = \tau(1,ee) = \tau(1,e)\tau(1e,e) = \tau(1,e)\tau(1,e),$$

pa je $\tau(1,e) = \lambda$.

Ovim je dokaz završen. □

# Glava 4

# Uopštenje R-S metoda za Schützenbergerove grupe

U ovoj glavi cilj nam je da pronađemo prezentaciju Schützenbergerove grupe proizvoljne $\mathcal{H}$-klase date polugrupe $S$. Schützenberger je pokazao kako se proizvoljnoj $\mathcal{H}$-klasi $H$ može dodeliti grupa $\Gamma(H)$ takva da ona u stvari opisuje grupna svojstva klase $H$. Specijalno, Schützenbergerova grupa $\Gamma(H)$ izomorfna je klasi $H$ ukoliko $H$ sadrži idempotent, a kako je tad $H$ u stvari maksimalna podgrupa polugrupe imamo da Schützenbergerova grupa u tom slučaju predstavlja maksimalnu podgrupu polugrupe. Kao i ranije umesto polugrupa posmatraćemo monoide što nam kao što smo već videli ne predstavlja ograničenje u opštim rezultatima.

## 4.1 Prezentacija maksimalne podgrupe proizvoljne polugrupe

U ovom poglavlju uvešćemo pojmove koji su nam neophodni za posmatranje Schützenbergerovih grupa, a kako smo u prošloj glavi dali prezentaciju proizvoljne podgrupe, izvešćemo kao posledice prezentaciju maksimalne podgrupe date polugrupe, odnosno Schützenbergerove grupe klase $H$ koja sadrži idempotent.

Prvo su nam potrebne takozvane Greenove relacije, koje su jedan od osnovnih pojmova teorije polugrupa i koje nam daju već pominjane $\mathcal{H}$-klase.

**Definicija 4.1.** Neka je $S$ proizvoljan monoid i neka su $u, v \in S$ proizvoljni. Kažemo da su $u$ i $v$ $\mathcal{R}$-*ekvivalentni*, u oznaci $u\mathcal{R}v$ ako je $uS = vS$. Elementi $u$ i $v$ su $\mathcal{L}$-*ekvivalentni*, u oznaci $u\mathcal{L}v$ ako je $Su = Sv$. Elementi $u$ i $v$ su $\mathcal{J}$ *ekvivalentni*, u oznaci $u\mathcal{J}v$ ako važi $SuS = SvS$. Ukoliko su $u$ i $v$ i $\mathcal{R}$-ekvivalentni i $\mathcal{L}$-ekvivalentni kažemo da su oni $\mathcal{H}$-*ekvivalentni*, u oznaci $u\mathcal{H}v$. Najmanju kongruenciju koja sadrži relacije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{L}$ označavamo sa $\mathcal{D}$. Relacije $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{J}$ se nazivaju *Greenove* *relacije.*

Takođe, možemo reći da su $u$ i $v$ $\mathcal{R}$ ($\mathcal{L}$)-ekvivalentni ako generišu iste desne (leve) ideale. U sledećoj lemi navodimo neke od osnovnih osobina Greenovih relacija. Osobine navodimo za relaciju $\mathcal{R}$, a dualno tvrđenje važi i za relaciju $\mathcal{L}$.

**Lema 4.2.** *Neka je $S$ proizvoljan monoid.*

(1) (Greenova lema) *Neka su $u, v \in S$ takvi da $u\mathcal{R}v$, i neka su $s_1, s_2 \in S$ takvi da je $us_1 = v$ i $vs_2 = u$. Tada je preslikavanje $x \mapsto xs_1$ bijekcija koja slika $\mathcal{H}$-klasu elementa $u$ na $\mathcal{H}$-klasu elementa $v$. Njemu inverzno preslikavanje je $x \mapsto xs_2$. Sve $\mathcal{H}$-klase unutar iste $\mathcal{R}$-klase su iste kardinalnosti.*

(2) *Relacija $\mathcal{R}$ je leva kongruencija, tj. za sve $s, u, v \in S$ važi*

$$\text{ako je } u\mathcal{R}v \text{ onda je } su\mathcal{R}sv.$$

(3) *Ako su $s, u, v \in S$ takvi da je $suv\mathcal{R}s$ onda je $su\mathcal{R}s$.*

(4) *Ako su $s, u, v \in S$ takvi da je $su\mathcal{H}u$ i $u\mathcal{R}t$ onda je $st\mathcal{H}t$.*

(5) *Za svako $u \in S$ skup $uS$ je unija $\mathcal{R}$-klasa.*

Napomenimo da iako je $\mathcal{R}$ leva, a $\mathcal{L}$ desna kongruencija, $\mathcal{H}$ u opštem slučaju ne mora biti ni leva a ni desna kongruencija.

Pošto je skup $\mathcal{R}$-klasa u stvari u bijekciji sa skupom desnih glavnih ideala i kako je svaki desni ideal u stvari unija desnih glavnih ideala, imamo sledeću lemu.

**Lema 4.3.** *Monoid ima konačno mnogo desnih (levih) ideala ako i samo ako ima konačno mnogo $\mathcal{R}$-($\mathcal{L}$-)klasa. Monoid ima konačno mnogo ideala ako i samo ako ima konačan broj $\mathcal{H}$-klasa.*

Kao što već pomenuto $\mathcal{H}$-klase koje sadrže idempotent su u jakoj vezi sa maksimalnim podgrupama, tj. važi sledeća lema.

**Lema 4.4.** *Neka je $H$ proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) *$H$ sadrži idempotent;*

(2) *postoje elementi $u, v \in H$ takvi da je $uv \in H$;*

(3) *$H$ je maksimlna podgrupa monoida $S$.*

Sada uvodimo pojam Schützenbergerove grupe pridružene proizvoljnoj $\mathcal{H}$-klasi. Neka je $H$ proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$. Skup

$$Stab(H) = \{s \in S |\, Hs = H\}$$

nazivamo (desni) *stabilizator od $H$ u $S$.* Na skupu $Stab(H)$ definišemo relaciju

$$\sigma(H) = \{(u, v) \in Stab(H) \times Stab(H) |\, hu = ht, \quad \text{za sve} \quad h \in H\}.$$

Lako se vidi da je $\sigma(H)$ kongruencija na $Stab(H)$. Kongruenciju $\sigma(H)$ nazivamo *Schützenbergerova kongruencija.*

U sledećoj lemi navodimo neke od osobina stabilizatora od $H$ u $S$ i Schützenbergerove kongruencije koje ćemo koristiti u nastavku rada.

**Lema 4.5.** *Neka je $H$ proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$ i neka je $h_0 \in H$ proizvoljan element. Tada važi:*

(1) $Stab(H) = \{s \in S |\, h_0 s \mathcal{H} h_0\}$,

(2) $\sigma(H) = \{(u, v) \in Stab(H) \times Stab(H) | h_0 u = h_0 v\}$,

(3) $H = h_0 Stab(H)$.

Kako je $Stab(H)$ monoid, a faktor monoid $Stab(H)/\sigma(H)$ grupa, uvodimo sledeću definiciju.

**Definicija 4.6.** Neka je $H$ proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$, $Stab(H)$ desni stabilizator od $H$ u $S$ a $\sigma(H)$ Schützenbergerova kongruencija. Faktor monoid

$$\Gamma(H) = Stab(H)/\sigma(H)$$

nazivamo *Schützenbergerova grupa klase $H$.*

Na osnovu levo-desnog dualizma može se definisati i leva Schützenbergerova grupa međutim ispostavlja su da su te dve grupe izomorfne. Osim te, Schützenbergerova grupa ima i druge interesantne osobine koje su date u sledećoj lemi.

**Lema 4.7.** *Neka je $H$ proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$, i $\Gamma(H)$ njena Schützenbergerova grupa. Tada važi:*

(1) $|H| = |\Gamma(H)|$,

(2) *ako je $H_1$ $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$ koja pripada istoj $\mathcal{R}$-klasi ili istoj $\mathcal{L}$-klasi kao i $H$ onda je $\Gamma(H_1) \cong \Gamma(H)$,*

(3) *ako $H$ sadrži idempotent onda je $H \cong \Gamma(H)$.*

Dakle, kako se maksimalna podgrupa monoida $S$ poklapa sa nekom grupnom $\mathcal{H}$-klasom $H$ koja sadrži idempotent, ona je u stvari izomorfna sa Schützenbergerovom grupom $\Gamma(H)$. Iz tog razloga ako nas interesuje prezentacija Schützenbergerove grupe $\Gamma(H)$, gde $H$ predstavlja $\mathcal{H}$ klasu koja sadrži idempotent, možemo iskoristiti Teoremu 3.22. za nalaženje te prezentacije. Naime, kosete nam u ovom slučaju predstavljaju $\mathcal{H}$ klase one $\mathcal{R}$ klase kojoj pripada $H$. Tada je indeks od $S$ po $H$ jednak broju $\mathcal{H}$-klasa u $\mathcal{R}$-klasi od $H$, pa ako prevedemo posledicu Teoreme 3.22. na ovaj jezik dobijamo sledeća tvrđenja.

**Posledica 4.8.** *Ako je $S$ konačno prezentiran monoid, $H$ njegova $\mathcal{H}$ klasa koja sadrži idempotent, i ako je broj $\mathcal{H}$ klasa u $\mathcal{R}$ klasi od $H$ konačan, onda je $\Gamma(H)$ konačno prezentirana.*

**Posledica 4.9.** *Ako je $S$ konačno prezentiran monoid, $H$ njegova $\mathcal{H}$ klasa koja sadrži idempotent i $S$ ima konačno mnogo levih ideala, onda je $\Gamma(H)$ konačno prezentirana.*

Ako je $H$ indeksa 1 u $S$, odnosno ako je $H$ u stvari $\mathcal{H}$-klasa koja je istovremeno i $\mathcal{R}$-klasa naša prezentacija dobija prilično jednostavan oblik, odnosno važi sledeće tvrđenje.

**Teorema 4.10.** *Neka je $S$ monoid dat prezentacijom $\langle X|\,\mathfrak{R}\rangle$, i neka je $H$ njegova podgrupa indeksa 1. Tada je $\Gamma(H)$ definisana prezentacijom*

$$\langle Stab(H)\cap X\,|\,\mathfrak{R}\cap((Stab(H)\cap X)^{*}\times(Stab(H)\cap X)^{*})\rangle.$$

*Dokaz.* Dokaz dobijamo direktnom primenom Teoreme 3.22. □

## 4.2 R-S metod za Schützenbergerove grupe

Cilj u ovom poglavlju nam je da damo prezentaciju Schützenbergerove grupe proizvoljne $\mathcal{H}$-klase monoida datog svojom prezentacijom.

Neka je $S$ monoid definisan prezentacijom $\langle X|\,\mathfrak{R}\rangle$ i $H$ proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$. Fiksirajmo proizvoljno $h\in H$ kao predstavnika klase $H$. Označimo sa $\Gamma$ Schützenbergerovu grupu $\Gamma(H)$, sa $A$ stabilizator $Stab(H)$ i sa $\sigma$ Schützenbergerovu kongruenciju $\sigma(H)$. Dakle, $\Gamma = A/\sigma$.

Označimo $\mathcal{R}$-klasu elementa $h$ sa $R$ i neka je $\Omega=\{H_i|\,i\in I\}$ skup svih $\mathcal{H}$-klasa u klasi $R$. Uzimamo da je $H_1=H$ i dodajemo skupu $\Omega$ element $H_0$ koji je definisan na sledeći način:

$$H_is = H_0 \text{ ako i samo ako } H_is\notin\Omega,$$

$$H_0s = H_0.$$

Analogno kao što smo uveli kod podgrupa monoida i ovde uvodimo pojam reprezenata.

**Definicija 4.11.** Skup svih $p_i, p'_i \in S$, $i \in I$ takvih da je $Hp_i = H_i$, $\;hp_ip'_i = h$, $h^*p'_ip_i = h^*$ za sve $i \in I, h \in H, h^* \in H_i$, pri čemu je $p_1 = p'_1 = 1$, nazivamo *desni reprezentacijski sistem za $S$ po $H$.* Elemente $p_i, p'_i \in S$ nazivamo predstavnici klasa $H_i$.

Ako su $p_i, p'_i \in S$ predstavnici klase $H_i$, $i \in I$ onda ćemo predstavnike klase $H_ia$ gde je $a \in S$, $H_ia \neq H_0$ obeležavati sa $p_{ia}, p'_{ia}$. Takođe, pod indeksom $ia$ ćemo u stvari podrazumevati indeks $j \in I$ takav da je $H_ia = H_j$. Za $1 \in I$ i $a \in S$ indeks $1a$ ćemo, da ne bi došlo do zabune označavati sa $1 \cdot a$.

Nakon što smo uveli pojam reprezentacijskog sistema sledeći zadatak nam je konstrukcija generatornog skupa grupe $\Gamma$.

Neka je $T$ desni reprezentacijski sistem za $S$ po $H$, i $\Omega$ skup svih $\mathcal{H}$-klasa klase $R$ kom je pridružen element $H_0$. Uvodimo novu azbuku

$$B = \{b_{i,x} | \, i \in I, \; x \in X, \; H_ix \neq H_0\}.$$

Homomorfizam $\phi : B^* \to X^*$ definišemo na sledeći način:

$$\phi(b_{i,x}) = p_ixp'_{ix}.$$

Ako je

$$B' = \{b_{i,s} | \, i \in I, \; s \in S, \; H_is \neq H_0\},$$

definisaćemo homomorfizam $\phi' : (B')^* \to X^*$ kao:

$$\phi'(b_{i,s}) = p_isp'_{is}.$$

Primetimo da je $\phi'(b_{i,x}) = \phi(b_{i,x})$ za sve $x \in X$ i sve $i \in I$ takve da je $H_ix \neq H_0$.

**Teorema 4.12.** *Neka je $S$ monoid definisan prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R} \rangle$ i $H$ proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa monoida $S$. Tada skup*

$$B = \{b_{i,x} | \, i \in I, \; x \in X, \; H_ix \neq H_0\},$$

*generiše Schützenbergerovu grupu $\Gamma = \Gamma(H)$.*

*Dokaz.* Posmatraćemo elemente $\phi(b_{i,x})/\sigma$. Pokažimo prvo da su ti elementi zaista elementi iz $\Gamma$. Kako je:

$$Hp_ixp'_{ix} = H_ixp'_{ix} = H_{ix}p'_{ix} = H,$$

sledi da je $p_ixp'_{ix} \in A$ pa je

$$\phi(b_{i,x})/\sigma = p_ixp'_{ix}/\sigma \in A/\sigma = \Gamma$$

Pokažimo sada da se proizvoljan element grupe $\Gamma$ može dobiti kao proizvod elemenata $\phi(b_{i,x})/\sigma$, gde $b_{i,x} \in B$. Primetimo da ako je $g \in \Gamma = A/\sigma$ onda je $g = s/\sigma$, $s \in A$ pa je $Hs = H$ iz čega sledi da je $1 \cdot s = 1$. Tada, kako je $s/\sigma = p_1 s p'_{1\cdot s}/\sigma \in \{\phi'(b_{i,s})/\sigma |\, b_{i,s} \in B'\}$ dobijamo da je $\Gamma \subseteq \{\phi'(b_{i,s})/\sigma |\, b_{i,s} \in B'\}$ pa se proizvoljno $g \in \Gamma$ može zapisati kao proizvod elemenata $\phi'(b_{i,s})/\sigma$, za $b_{i,s} \in B'$. Neka je sada $s \in S$ proizvoljno, odnosno $s = x_1 \dots x_n$, gde $x_i \in X$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$. Pokažimo da se $\phi'(b_{i,s})/\sigma$, gde $b_{i,s} \in B'$ može predstaviti kao proizvod elemenata $\phi(b_{i,x})/\sigma$, gde $b_{i,x} \in B$. Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $s$. Ako je $|s| = 1$, tj. $s = x \in X$ onda kako je $\phi'(b_{i,x}) = \phi(b_{i,x})$ tvrđenje važi. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve reči dužine manje od $n$. Neka je sad $s \in S$ proizvoljna, takva da je $|s| = n > 1$. Ako je $s = xu$, gde $x \in X, u \in X^+$, onda imamo:

$$\phi'(b_{i,s})/\sigma = p_i s p'_{is}/\sigma = p_i x u p'_{ixu}/\sigma.$$

Pošto je $p_i x \in H p_i x = H_i x = H_{ix}$ onda na osnovu definicije predstavnika imamo da je:

$$p_i x u p'_{ixu}/\sigma = p_i x (p'_{ix} p_{ix}) u p'_{ixu}/\sigma = (p_i x p'_{ix}) p_{ix} u p'_{ixu}/\sigma.$$

Dalje, kako je $p_i x p'_{ix}, p_{ix} u p'_{ixu} \in A$ imamo da je:

$$(p_i x p'_{ix}) p_{ix} u p'_{ixu}/\sigma = (p_i x p'_{ix}/\sigma)(p_{ix} u p'_{ixu}/\sigma),$$

odnosno

$$\phi'(b_{i,s})/\sigma = (\phi(b_{i,x})/\sigma)(\phi'(b_{ix,u})/\sigma),$$

a pošto je $|u| < n$ na osnovu induktivne pretpostavke dokaz je završen. $\square$

**Posledica 4.13.** *Neka je monoid $S$ konačno generisan, i $H$ njegova $\mathcal{H}$-klasa. Ako je broj $\mathcal{H}$-klasa u $\mathcal{R}$-klasi od $H$ konačan onda je $\Gamma(H)$ konačno generisana.*

Sada imamo generatorni skup grupe $\Gamma$, pa nam treba neki vid funkcije prepisivanja koja će elemente grupe $\Gamma$ "prepravljati" na elemente skupa $B^*$.

**Definicija 4.14.** Definišemo funkciju $\tau : C \to B^*$, gde je

$$C = \{(i, w) |\, i \in I,\ w \in X^*, H_i w \neq H_0\},$$

na sledeći način:

$$\tau(i, \lambda) = \lambda,$$
$$\tau(i, xw) = b_{i,x} \tau(ix, w), \quad \text{gde je } i \in I,\ x \in X,\ w \in X^*,\ H_i x w \neq H_0.$$

Ova definicija se lako može proširiti do:

$$\tau(i, w_1 w_2) = \tau(i, w_1) \tau(i w_1, w_2), \quad \text{gde je } i \in I,\ w_1, w_2 \in X^*,\ H_i w_1 w_2 \neq H_0.$$

U sledećoj lemi navešćemo jednu od korisnih osobina preslikavanja $\tau$.

**Lema 4.15.** *Neka je $w \in X^*$ proizvoljno. Tada važi:*

$$h\phi(\tau(i, w)) = hp_i w p'_{iw}, \quad \text{gde je } i \in I, \quad H_i w \neq H_0.$$

*Dokaz.* Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $w$. Za $|w| = 0$, tj. $w = \lambda$ imamo da je

$$h\phi(\tau(i, \lambda)) = h = hp_i \lambda p'_{i\lambda},$$

dok za $|w| = 1$, odnosno $w = x$, $x \in X$,imamo:

$$h\phi(\tau(i, x)) = h\phi(b_{i,x}\tau(ix, \lambda)) = h\phi(b_{i,x}) = hp_i x p'_{ix},$$

pa je tvrđenje u oba slučaja zadovoljeno. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči $w \in X^*$ takve da je $|w| < n$. Neka je sada $w$ proizvoljna reč dužine $n > 1$, i neka je $w = xu$, gde je $x \in X$, a $u \in X^+$. Tada važi:

$$h\phi(\tau(i, w)) = h\phi(\tau(i, xu)) = h\phi(b_{i,x}\tau(ix, u)),$$

pa kako je $\phi$ homomorfizam imamo da je

$$h\phi(\tau(i, w)) = h\phi(b_{i,x})\phi(\tau(ix, u)) = hp_i x p'_{ix}\phi(\tau(ix, u)),$$

a na osnovu induktivne hipoteze sledi da je:

$$hp_i x p'_{ix}\phi(\tau(ix, u)) = hp_i x p'_{ix} p_{ix} u p'_{ixu}.$$

Dalje, na osnovu definicije reprezenata kako $hp_i x \in Hp_i x = H_{ix}$ dobijamo:

$$h\phi(\tau(i, w)) = hp_i x p'_{ix} p_{ix} u p'_{ixu} = hp_i x u p'_{ixu} = hp_i w p'_{iw},$$

što je i trebalo dokazati. □

Podsetimo se da smo prilikom traženja prezentacije podgrupe datog monoida na sličan način dobili generatorni skup i da smo koristili funkciju $\tau$ kako bismo dobili prezentaciju same podgrupe. Međutim kako je ovde situacija opštija u smislu da posmatrana $\mathcal{H}$-klasa ne mora biti grupa, da bismo došli do prezentacije moraćemo uvesti još jednu funkciju.

Posmatrajmo sve $\mathcal{R}$-klase monoida $S$ i neka je $R$ $\mathcal{R}$-klasa u kojoj se nalazi $H$. Kako je $\mathcal{R}$ leva kongruencija posmatramo sledeće. Ako je za neke $s \in S$, $R_1, R_2 \in S/\mathcal{R}$ ispunjeno $sR_1 \subseteq R_2$, pišemo $s * R_1 = R_2$. Posmatramo sledeći skup:

$$\{R' \in S/\mathcal{R} |\, (\exists s \in S)(s * R' = R)\}.$$

Taj skup označavamo sa $\Theta = \{R_i | \, i \in J\}$ i dodajemo mu element $R_0$ definisan na sledeći način:

$$s * R_i = R_0 \text{ ako i samo ako } s * R_i \notin \Theta,$$

$$s * R_0 = R_0.$$

Za svako $j \in J$ biramo reč $r_j \in X^*$ koja će reprezentovati klasu $R_j$. Bez umanjenja opštosti uzimamo da $1, \omega \in J$, $1_S \in R_1$, $r_1 = \lambda$, $R = R_\omega$, $r_\omega = h$.

Ako je $r_j \in S$, predstavnik klase $R_j$ onda ćemo predstavnika klase $s * R_j$ gde je $s \in S$ obeležavati sa $r_{s*j}$. Takođe, pod indeksom $s * j$ ćemo u stvari podrazumevati indeks $k \in J$ takav da je $s * R_j = R_k$.

Za svako $x \in X$ i svako $j \in J$, pri čemu je $x * R_j \neq R_0$, biramo reč $s_{x,j} \in X^*$ takvu da važi sledeće:

$$x r_j = r_{x*j} s_{x,j}.$$

Sada, dajemo definiciju već najavljenog preslikavanja.

**Definicija 4.16.** Definišemo funkciju $\pi : D \to X^*$, gde je

$$D = \{(w, j) |\, j \in J,\ w \in X^*, w * R_j \neq R_0\},$$

na sledeći način:

$$\pi(\lambda, j) = \lambda,$$

$$\pi(wx, j) = \pi(w, x * j) s_{x,j}.$$

Ova definicija se može proširiti do:

$$\pi(w_1 w_2, j) = \pi(w_1, w_2 * j)\pi(w_2, j), \quad \text{gde je } j \in J,\ w_1, w_2 \in X^*,\ w_1 w_2 * R_j \neq R_0.$$

**Lema 4.17.** *Neka su $w \in X^*$ i $j \in J$ proizvoljni takvi da je $w * R_j \neq R_0$. Tada relacija:*

$$w r_j = r_{w*j} \pi(w, j),$$

*važi u $S$.*

*Dokaz.* Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $w$. Za $|w| = 0$, tj. $w = \lambda$ imamo $r_j = r_j$, dok za $|w| = 1$, odnosno $w = x$, $x \in X$, imamo:

$$x r_j = r_{x*j} s_{x,j},$$

pa je tvrđenje u oba slučaja zadovoljeno. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči $w \in X^*$ takve da je $|w| < n$. Neka je sada $w$ proizvoljna reč dužine $n > 1$, i neka je $w = xu$, gde je $x \in X$, a $u \in X^+$. Tada koristeći induktivnu hipotezu imamo:

$$w r_j = x u r_j = x r_{u*j} \pi(u, j) = r_{xu*j} \pi(x, u * j) \pi(u, j) = r_{w*j} \pi(w, j),$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Kako za sve $i \in I$ i sve $x \in X$ takve da je $H_i x \neq H_0$ imamo $hp_i x p'_{ix} \in H$ sledi da postoji reč $\beta(b_{i,x}) \in X^*$ takva da

$$hp_i x p'_{ix} = \beta(b_{i,x})h.$$

Proširujemo preslikavanje $b_{i,x} \mapsto \beta(b_{i,x})$ do homomorfizma $\beta : B^* \to X^*$.

Tada između preslikavanja $\phi$ i $\beta$ postoji veza data u sledećoj lemi.

**Lema 4.18.** *Za svaku reč $w \in B^*$ važi:*

$$h\phi(w) = \beta(w)h.$$

*Dokaz.* Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $w$. Za $|w| = 0$ i $|w| = 1$ tvrđenje očigledno važi. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve reči dužine manje od $n$. Neka je $w \in B^*$ proizvoljna, takva da je $|w| = n$ i neka je $w = b_{i,x}u$ za neke $b_{i,x} \in B, u \in B^*$. Tada kako su $\phi$ i $\beta$ homomorfizmi i koristeći induktivnu hipotezu imamo da važi:

$$h\phi(w) = h\phi(b_{i,x}u) = h\phi(b_{i,x})\phi(u) = hp_i x p'_{ix}\beta(u)h =$$

$$= \beta(b_{i,x})\beta(u)h = \beta(b_{i,x}u)h = \beta(w)h,$$

čime je dokaz završen. □

U sledećoj lemi dajemo vezu između preslikavanja $\beta$ i preslikavanja $\pi$

**Lema 4.19.** *Za $1 \in I$, $\omega \in J$ i sve $u \in B^*$, važi sledeće:*

(1) $\beta(u) * \omega = \omega$,

(2) $1 \cdot \pi(\beta(u), \omega) = 1$.

*Dokaz.* (1): Na osnovu prethodne leme imamo:

$$\beta(u)r_\omega = \beta(u)h = h\phi(u) \in H \subseteq R = R_\omega,$$

čime je relacija (1) dokazana.

(2): Na osnovu prethodne leme, tvrđenja pod (1) i Leme 4.17. imamo:

$$h\pi(\beta(u), \omega) = r_\omega \pi(\beta(u), \omega) = r_{\beta(u)*\omega}\pi(\beta(u), \omega) =$$

$$= \beta(u)r_\omega = \beta(u)h = h\phi(u) \in H = H_1,$$

čime je dokaz završen. □

Vratimo se na, već pomalo i zaboravljeno, pronalaženje prezentacije grupe $\Gamma$. Kako smo sada upoznati sa svim funkcijama koje nam trebaju za konstruisanje prezentacije, dajemo i glavnu teoremu ove glave, odnosno prezentaciju grupe $\Gamma$.

**Teorema 4.20.** *Neka je $S$ proizvoljan monoid definisan prezentacijom $\langle X | \mathfrak{R}\rangle$, a $H$ njegova proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa. Tada je Schützenbergerova grupa $\Gamma(H)$ definisana prezentacijom*

$$\langle B | \mathfrak{R}_\Gamma\rangle,$$

*gde je $\mathfrak{R}_\Gamma$ skup sledećih relatora:*

($\mathrm{R}_\Gamma 1$) $\tau(i,u) = \tau(i,v), \quad (i \in I,\ u, v \in X^*,\ (u,v) \in \mathfrak{R},\ H_i u \neq H_0),$

($\mathrm{R}_\Gamma 2$) $\tau(i,\pi(u,j)) = \tau(i,\pi(v,j)), \quad (i \in I,\ j \in J\ u, v \in X^*,\ (u,v) \in \mathfrak{R},\ H_i \subseteq Sr_{u*j}),$

($\mathrm{R}_\Gamma 3$) $\tau(1,\pi(\beta(b_{i,x}),\omega)) = b_{i,x}, \quad (i \in I,\ x \in X,\ H_i x \neq H_0),$

($\mathrm{R}_\Gamma 4$) $\tau(1,\pi(h,1)) = \lambda.$

*Dokaz.* Pokažimo prvo da relatori ($\mathrm{R}_\Gamma 1$)$-$($\mathrm{R}_\Gamma 4$) važe u grupi $\Gamma$. Podsetimo se da generator $b_{i,x}$ reprezentuje element $\phi(b_{i,x})/\sigma$ grupe $\Gamma$. Dakle, da bismo ispitali da li relacija $u = v$ važi u $\Gamma$ u stvari treba proveriti da li važi $\phi(u)/\sigma = \phi(v)/\sigma$, odnosno da li $h\phi(u) = h\phi(v)$ važi u $S$.

($\mathrm{R}_\Gamma 1$): *Za sve $i \in I$, $u, v \in X^*$, takve da $(u,v) \in \mathfrak{R}$, $H_i u \neq H_0$ relacija $\tau(i,u) = \tau(i,v)$ važi u $\Gamma$.*
Koristeći Lemu 4.15. i relator $(u,v) \in \mathfrak{R}$ dobijamo da

$$h\phi(\tau(i,u)) = hp_i u p'_{iu} = hp_i v p'_{iv} = h\phi(\tau(i,v)),$$

važi u $S$ što je i trebalo pokazati.

($\mathrm{R}_\Gamma 2$): *Za sve $i \in I$, $j \in J$ $u, v \in X^*$, takve da je $(u,v) \in \mathfrak{R}$ i $H_i \subseteq Sr_{u*j}$ relacija $\tau(i,\pi(u,j)) = \tau(i,\pi(v,j))$ važi u $\Gamma$.*
Kako $u = v$ važi u $S$ sledi da $ur_j = vr_j$ važi u $S$ pa je i $u * j = v * j$, Dalje, na osnovu Leme 4.17. imamo da relacija

$$r_{u*j}\pi(u,j) = r_{v*j}\pi(v,j) \quad \text{važi u } S.$$

Neka je $q \in X^*$ takvo da je $hp_i = qr_{u*j}$. Tada, kako je:

$$qr_{u*j}\pi(u,j) = qr_{v*j}\pi(v,j),$$

imamo

$$hp_i\pi(u,j) = hp_i\pi(v,j),$$

i da je $i\pi(u,j) = i\pi(v,j)$. Sada, koristeći Lemu 4.15. dobijamo:

$$h\phi(\tau(i,\pi(u,j))) = hp_i\pi(u,j)p'_{i\pi(u,j)} = hp_i\pi(v,j)p'_{i\pi(v,j)} = h\phi(\tau(i,\pi(u,j))),$$

što je i trebalo pokazati.

($R_\Gamma 3$): *Za sve $i \in I$, $x \in X$ takve da $H_i x \neq H_0$, relacija $\tau(1, \pi(\beta(b_{i,x}), \omega)) = b_{i,x}$ važi u $\Gamma$.*

Na osnovu Leme 4.15. imamo:

$$h\phi(\tau(1, \pi(\beta(b_{i,x}), \omega)) = hp_1\pi(\beta(b_{i,x}), \omega)p'_{1\cdot\pi(\beta(b_{i,x}),\omega))},$$

što je na osnovu Leme 4.17. dalje jednako

$$h\pi(\beta(b_{i,x}), \omega)p'_1 = h\pi(\beta(b_{i,x}), \omega),$$

a to je na osnovu Leme 4.17. i Leme 4.18. jednako

$$\beta(b_{i,x})r_\omega = \beta(b_{i,x})h = h\phi(b_{i,x}).$$

Dakle dobili smo:

$$h\phi(\tau(1, \pi(\beta(b_{i,x}), \omega)) = h\phi(b_{i,x}),$$

što je i trebalo.

($R_\Gamma 4$): $\tau(1, \pi(h, 1)) = \lambda$.

Na osnovu Leme 4.17. imamo:

$$h = hr_1 = r_{h*1}\pi(h, 1) = r_\omega\pi(h, 1) = h\pi(h, 1),$$

pa je na osnovu toga $1 \cdot \pi(h, 1) = 1$. Sada, na osnovu Leme 4.15. imamo:

$$h\phi(\tau(1, \pi(h, 1))) = hp_1\pi(h, 1)p'_{1\cdot\pi(h,1)} = h\pi(h, 1) = h = h\phi(\lambda),$$

što je i trebalo pokazati.

Sledeći zadatak nam je da pokažemo da je proizvoljna relacija koja važi u $\Gamma$ u stvari posledica od relatora ($R_\Gamma 1$)−($R_\Gamma 4$). Za to će nam trebati tri pomoćne leme koje ćemo u nastavku izložiti.

**Lema 4.21.** *Za proizvoljnu reč $w \in B^*$ relacija*

$$\tau(1, \pi(\beta(w)h, 1)) = w,$$

*je posledica od relatora ($R_\Gamma 1$)−($R_\Gamma 4$).*

*Dokaz.* Dokaz dajemo indukcijom po dužini reči $w$. Ako je $|w| = 0$ onda je ova relacija u stvari relator ($R_\Gamma 3$), a ako je $|w| = 1$ onda je oblika ($R_\Gamma 4$), pa u oba slučaja tvrđenje važi. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve reči čija je dužina manja od $n$. Neka je $|w| = n$ i neka je $w = uv$ za neke $u, v \in B^*$ takve da je

$|u|, |v| > 0$. Tada na osnovu definicija preslikavanja $\pi$ i $\tau$, homomorfizma $\beta$ i na osnovu Leme 4.19. imamo:

$$\begin{aligned}
\tau(1, \pi(\beta(w)h, 1)) &= \tau(1, \pi(\beta(uv)h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u)\beta(v)h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \beta(v)h * 1)\pi(\beta(v)h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \beta(v) * \omega)\pi(\beta(v)h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \omega)\pi(\beta(v)h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \omega)\pi(\beta(v), \beta(v)h * 1)\pi(h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \omega)\pi(\beta(v), \omega)\pi(h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \omega)\pi(\beta(v), \omega)\pi(h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \omega)\tau(1 \cdot \pi(\beta(u), \omega), \pi(\beta(v), \omega)\pi(h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \omega)\tau(1, \pi(\beta(v), \omega)\pi(h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u), \omega)\tau(1, \pi(\beta(v), \omega))\tau(1, \pi(h, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\beta(u)h, 1)\tau(1, \pi(\beta(v)h, 1))\tau(1, \pi(h, 1)) \\
&= uv = w,
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

**Lema 4.22.** *Neka su $\alpha, \beta \in X^*$, i $(u, v) \in \mathfrak{R}$ takvi da $\alpha u \beta$ predstavlja element klase $R$. Tada je relacija:*

$$\tau(1, \pi(\alpha u \beta, 1)) = \tau(1, \pi(\alpha v \beta, 1)),$$

*posledica relatora* ($\mathrm{R}_\Gamma 1$)*–*($\mathrm{R}_\Gamma 4$)*.*

*Dokaz.* Kako u $S$ važi $u = v$ sledi da je $u\beta * 1 = v\beta * 1$ pa je:

$$\tau(1, \pi(\alpha, u\beta * 1)) = \tau(1, \pi(\alpha, v\beta * 1)).$$

Dalje, tvrdimo da je relacija:

$$\tau(1 \cdot \pi(\alpha, u\beta * 1), \pi(u, \beta * 1)) = \tau(1 \cdot \pi(\alpha, v\beta * 1), \pi(u, \beta * 1)),$$

relacija oblika ($\mathrm{R}_\Gamma 2$). Zaista, kako je $\alpha u \beta \in R$, $u\beta \in R_{u\beta * 1}$ sledi da $\alpha r_{u\beta*1} \in R$ pa na osnovu Leme 4.17. imamo da je:

$$\alpha r_{u\beta*1} = r_{\alpha u\beta*1}\pi(\alpha, u\beta * 1) = r_\omega \pi(\alpha, u\beta * 1) = h\pi(\alpha, u\beta * 1).$$

Dakle, $1 \cdot \pi(\alpha, u\beta * 1) \neq 0$ i $\alpha r_{u\beta*1} \in H_{1 \cdot \pi(\alpha, u\beta*1)} \cap Sr_{u\beta*1}$. Na osnovu $\mathcal{L}$ duala Leme 4.2(5). dobijamo da je $H_{1\cdot\pi(\alpha,u\beta*1)} \subseteq Sr_{u\beta*1}$ pa imamo da je relacija $\tau(1 \cdot \pi(\alpha, u\beta * 1), \pi(u, \beta * 1))$ zaista relator oblika ($\mathrm{R}_\Gamma 2$).

Na osnovu Leme 4.17. imamo da u $S$ važi:

$$h\pi(\alpha u, \beta * 1) = r_{\alpha u\beta*1}\pi(\alpha u, \beta * 1) = \alpha u r_{\beta*1} = \alpha v r_{\beta*1} = h\pi(\alpha v, \beta * 1),$$

pa je

$$1 \cdot \pi(\alpha u, \beta * 1) = 1 \cdot \pi(\alpha v, \beta * 1),$$

odnosno

$$\tau(1 \cdot \pi(\alpha, u\beta * 1), \pi(u, \beta * 1)) = \tau(1 \cdot \pi(\alpha, v\beta * 1), \pi(u, \beta * 1)).$$

Sada, na osnovu definicija preslikavanja $\tau$, $\pi$ i prethodno pokazanog imamo:

$$\begin{aligned}
\tau(1, \pi(\alpha u\beta, 1)) &= \tau(1, \pi(\alpha, u\beta * 1)\pi(u\beta, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\alpha, u\beta * 1)\pi(u, \beta * 1)\pi(\beta, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\alpha, u\beta * 1))\ \tau(1 \cdot \pi(\alpha, u\beta * 1), \pi(u, \beta * 1)\pi(\beta, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\alpha, u\beta * 1))\ \tau(1 \cdot \pi(\alpha, u\beta * 1)), \pi(u, \beta * 1)) \\
&\quad\ \tau(1 \cdot \pi(\alpha, u\beta * 1)\pi(u, \beta * 1), \pi(\beta, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\alpha, v\beta * 1))\ \tau(1 \cdot \pi(\alpha, v\beta * 1)), \pi(u, \beta * 1)) \\
&\quad\ \tau(1 \cdot \pi(\alpha, v\beta * 1)\pi(v, \beta * 1), \pi(\beta, 1)) \\
&= \tau(1, \pi(\alpha v\beta, 1)),
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

Vraćamo se na dokaz teoreme. Podsetimo se da nam je preostalo da pokažemo da ukoliko su $u, v \in B^*$ proizvoljne reči, takve da $u = v$ važi u $\Gamma$ onda se $(u, v)$ može dobiti kao posledica od relatora $(\mathrm{R}_\Gamma 1)$−$(\mathrm{R}_\Gamma 4)$. Neka su $u, v \in B^*$ proizvoljne i neka $u = v$ važi u $\Gamma$, što je ekvivalentno sa $h\phi(u) = h\phi(v)$ važi u $S$. Dalje je na osnovu Leme 4.18. važenje relacije $h\phi(u) = h\phi(v)$ u $S$ ekvivalentnao sa tim da važi $\beta(u)h = \beta(v)$ u $S$. Tada postoji niz reči iz $X^*$

$$\beta(u)h \equiv \alpha_1, \ldots, \alpha_n \equiv \beta(v)h,$$

takav da je $\alpha_{k+1}$ dobijeno od $\alpha_k$ direktnom primenom relacije iz $\mathfrak{R}$. Na osnovu Leme 4.22. sledi da je svaka reč $\tau(1, \pi(\alpha_{k+1}, 1))$ dobijena od $\tau(1, \pi(\alpha_k, 1))$ direktnom primenom neke od relacija $(\mathrm{R}_\Gamma 1)$−$(\mathrm{R}_\Gamma 4)$. Zbog toga, relacija

$$\tau(1, \pi(\beta(u)h, 1)) = \tau(1, \pi(\beta(v)h, 1)),$$

je posledica relacija $(\mathrm{R}_\Gamma 1)$−$(\mathrm{R}_\Gamma 4)$. Na kraju, primenom Leme 3.19. dobijamo da su i relacije

$$u = \tau(1, \pi(\beta(u)h, 1)), \quad \text{odnosno} \quad v = \tau(1, \pi(\beta(v)h, 1))$$

posledice od $(\mathrm{R}_\Gamma 1)$−$(\mathrm{R}_\Gamma 4)$, dakle i relacija $u = v$ je posledica relatora $(\mathrm{R}_\Gamma 1)$−$(\mathrm{R}_\Gamma 4)$, čime je dokaz ove teoreme u potpunosti završen. □

Kao posledicu ove teoreme dobijamo rezultate slične onima koji se dobijaju kao posledica Reidemeister-Screierovog metoda za podgrupe konačnog indeksa u konačno prezentiranim grupama.

**Posledica 4.23.** *Neka je $S$ konačno prezentiran monoid i neka je $H$ njegova proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa takva da su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) *$\mathcal{R}$-klasa $R$ od $H$ ima konačno mnogo $\mathcal{H}$-klasa,*

(1) *skup $\Theta$ je konačan.*

*Tada je Schützenbergerova grupa klase $H$ konačno prezentirana.*

Takođe važi i rezultat dat u sledećoj posledici.

**Posledica 4.24.** *Ako je $S$ konačno prezentiran monoid koji ima konačno mnogo levih i desnih ideala onda su sve Schützenbergerove grupe od $S$ konačno prezentirane.*

# Glava 5

# Primer primene metoda Reidemeister-Schreiera

U ovoj glavi ćemo prikazati kako se Reidemeister-Schreierov metod primenjuje na konkretnom problemu.

## 5.1 Maksimalne podgrupe slobodno idempotentno generisanih polugrupa

Neka je $S$ proizvoljna polugrupa i $E(S) = \{e_i | i \in I\}$ skup svih idempotenata polugrupe $S$. Uvodimo novu azbuku $X = \{x_i | i \in I\}$ takvu da su $X$ i $E(S)$ u bijekciji, odnosno postoji funkcija $\psi : E(S) \to X$ takva da je $\psi(e_i) = x_i$ za sve $i \in I$.

**Definicija 5.1.** *Slobodna idempotentno generisana polugrupa na $E$* je polugrupa $IG(E)$ definisana prezentacijom:

$$\langle X |\, \psi(e_i)\psi(e_j) = \psi(e_ie_j), \quad \text{za sve } i,j \in I \text{ takve da je } \{e_i, e_j\} \cap \{e_ie_j, e_je_i\} \neq \emptyset\rangle.$$

Po dogovoru, umesto $\psi(e_i)$ pišemo samo $e_i$, množenje elemenata $e_i$ i $e_j$ kao simbola pišemo kao $e_i \cdot e_j$, a množenje u polugrupi $S$ pišemo kao $e_ie_j$. Uz te dogovore, a radi pojednostavljenja zapisa umesto prezentacije polugrupe $IG(S)$ navedene u gornjoj definiciji pišemo:

$$\langle E |\, e_i \cdot e_j = e_ie_j, \quad \text{za sve } i,j \in I \text{ takve da je } \{e_i, e_j\} \cap \{e_ie_j, e_je_i\} \neq \emptyset\rangle.$$

Osobine polugrupe $IG(E)$ dajemo u sledećoj lemi.

**Lema 5.2.** *Neka je $S$ proizvoljna polugrupa i $IG(E)$ slobodno idempotentno generisana polugrupa na $E$. Tada $IG(S)$ ima sledeće osobine:*

(IG1) *Postoji prirodan homomorfizam $\phi : IG(E) \to S'$, gde je $S'$ potpolugrupa polugrupe $S$ generisana sa $E$,*

(IG2) *Restrikcija homomorfizma $\phi$ na skup idempotenata polugrupe $IG(E)$ je bijekcija na $E$,*

(IG3) *Homomorfizam $\phi$ preslikava $\mathcal{R}$ klasu ($\mathcal{L}$-klasu) elementa $e \in E$ na odgovarajuću klasu elementa $e \in S'$. Ovo indukuje bijekciju između skupa svih $\mathcal{R}$-klasa ($\mathcal{L}$-klasa) $\mathcal{D}$-klase elementa $e \in E$ i odgovarjućeg skupa u $S'$,*

(IG4) *Restrikcija homomorfizma $\phi$ na maksimalnu podgrupu polugrupe $IG(E)$ koja sadrži idempotent $e$ je homomorfizam na maksimalnu podgrupu polugrupe $S'$ koja sadrži $e$.*

Ako posmatramo slobodne grupe nad skupom $X$, one su maksimalne grupe generisane sa $X$ u smislu da je svaka druga grupa generisana skupom $X$ u stvari homomorfna slika grupe $\mathcal{F}_X$. Primetimo da zbog osobine (IG1) isto važi i za slobodno idempotentno generisane polugrupe nad skupom idempotenata, i to je upravo opravdanje za reč "slobodna" u njihovom nazivu. Teorema Nielsen-Schreiera nam kaže da su sve podgrupe slobodne grupe takođe slobodne, i pitanja takvog tipa su vrlo interesantna za proučavanje. Tačnije, pitanje je: ako je data neka slobodna struktura, da li su sve njene podstrukture ponovo slobodne (u varijetetima odgovarjućeg tipa)? Poznato je da potpolugrupa slobodne polugrupe ne mora biti slobodna, a kakva je situacija sa podgrupama, tj. maksimalnim podgrupama raznih polugrupih slobodnih konstrukcija? Tako su maksimalne podgrupe slobodnih idempotentno generisanih polugrupa predmet istraživanja poslednjih 30-tak godina. U nekoliko radova na tu temu [9, 10, 11, 15, 16] su dati dovoljni uslovi koji garantuju da su maksimalne podgrupe slobodne. Tako je Nambooripad 1979. u radu [10] postavio hipotezu da su sve maksimalne podgrupe slobodnih idempotentno generisanih polugrupa slobodne. Prvi kontraprimer je dat od strane Brittenhama, Margolisa i Meakina ([1]), koji su algebarsko-topološkim metodama, pomoću fundamentalnih grupa površi, pokazali da je $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maksimalna podgrupa slobodno idempotentno generisane polugrupe koja nastaje od određene 72-elementne polugrupe. To nije bio njihov jedini kontraprimer [2]. Međutim, dok je još rad [1] bio u štampi, Gray i Ruškuc u radu [4] dokazuju da ovo nije neki "sporadičan" slučaj, već da je situacija u izvesnom smislu upravo suprotna od onog što sugeriše Nambooripadova hipoteza. Oni su primenili Reidemeister-Schreierov metod za podgrupe polugrupa [13] i dobili, možemo reći, vrlo neočekivane rezultate. Naime, važe sledeće četiri teoreme.

**Teorema 5.3.** *Svaka grupa je maksimalna podgrupa neke slobodno idempotentno generisane polugrupe.*

**Teorema 5.4.** *Svaka konačno prezentirana grupa je maksimalna podgrupa neke slobodno idempotentno generisane polugrupe koja nastaje od konačne polugrupe.*

**Teorema 5.5.** *Svaka grupa je maksimalna podgrupa neke slobodno idempotentno generisane polugrupe koja nastaje od regularne polugrupe.*

**Teorema 5.6.** *Svaka konačna grupa je maksimalna podgrupa neke slobodno idempotentno generisane polugrupe koja nastaje od konačne regularne polugrupe.*

U ovom radu nećemo dati konstrukcije koje nam pružaju rezultate iz gore navedenih teorema. U sledećem odeljku prikazaćemo kako se u jednom specijalnom slučaju [15] mogu dobiti slobodne podgrupe slobodno idempotentno generisanih polugrupa na vrlo elegantan način, primenom Reidemeister-Schreierovog metoda. Napominjemo da se sličnom metodom dobijaju i gore navedeni rezultati.

## 5.2 Primer slobodne idempotentno generisane polugrupe sa slobodnim podgrupama

U ovom odeljku prikazaćemo konstrukciju jedne slobodno idempotentno generisane polugrupe koja je takva da je njena maksimalna podgrupa slobodna grupa.

Za polugrupu $S$ kažemo da je *pravougaona traka* ako je idempotentna i zadovoljava $xyz = xz$ za sve $x, y, z \in S$. Lako se dobija da je svaka pravougaona traka izomorfna polugrupi $B_{I,J}$ za neke skupove $I, J$, tako da su njeni elementi $e_{i,j}$, $i \in I$, $j \in J$, dok je množenje dato sa:

$$e_{i,j}e_{k,l} = e_{i,l}.$$

Ako je $E$ skup svih idempotenata (što je u ovom slučaju cela polugrupa), posmatrajmo $IG(E)$. Tada će $IG(E)$ biti data prezentacijom:

$$\langle E |\, e_{i,j} \cdot e_{i,l} = e_{i,l},\ e_{i,j}e_{k,j} = e_{i,j},\ i,k \in I,\ j,l \in J \rangle = \langle E |\, \mathfrak{R} \rangle.$$

Kako su sve $\mathcal{H}$-klase koje sadrže idempotent i pripadaju istoj $\mathcal{D}$-klasi izomorfne grupe, i kako u našem slučaju imamo samo jednu $\mathcal{D}$-klasu, možemo posmatrati bilo koju $\mathcal{H}$-klasu, pa neka to bude ona koja sadrži idempotent $e_{1,1} = e$. Dakle, tražimo prezentaciju maksimalne podgrupe $H$ polugrupe $IG(E)$ koja je u stvari $\mathcal{H}$-klasa koja sadrži $e_{1,1}$. Nije teško videti da nam je skup koseta tada $\mathcal{C} = \{C_j |\, j \in J\}$, gde je $C_j = He_{i,j}$, gde je $i \in I$ proizvoljno. Dalje, za predstavnike koseta $C_j$ biramo elemente $r_j = e_{1,j}$, $r'_j = e_{1,1}$.

Uvodimo novu azbuku

$$B = \{b_{j,x} |\, j \in J, x \in B_{I,J}\} = \{b(j, e_{k,l}) |\, k \in I, j, l \in J\},$$

i preslikavanje $\phi : B \to B_{I,J}$ dato sa:

$$\phi(b(j, e_{k,l})) = e_{1,1} \cdot e_{1,j} \cdot e_{k,l} \cdot e_{1,1} = e_{1,j} \cdot e_{k,l} \cdot e_{1,1}.$$

Dalje, neka je $\tau : A \to B^*$, gde je

$$A = \{(j, w) |\, j \in J, w \in B^*_{I,J}\}$$

dato sa:

$$\tau(j, \lambda) = \lambda,$$
$$\tau(j, e_{k,l} \cdot w) = b(j, e_{k,l})\tau(l, w).$$

Prezentacija podgrupe $H$ nam je po Reidemeister-Schreierovom metodu u stvari prezentacija $\langle B |\, \mathfrak{R}_H \rangle$, gde se $\mathfrak{R}_H$ sastoji od relatora:

(R1) $\tau(j, u) = \tau(j, v)$, za sve $j \in J$, $u, v \in B^*_{I,J}$, takve da je $(u, v) \in \mathfrak{R}$,

(R2) $\tau(1, e_{1,j} \cdot e_{k,l} \cdot e_{1,1}) = b(j, e_{k,l})$, za sve $k \in I$, $j, l \in J$,

Pokazaćemo da se Tietzeovim transformacijama $\mathfrak{R}_H$ može svesti na prazan skup.

Posmatrajmo, $e_{i,j}e_{i,l}$ u $B_{I,J}$, gde su $i \in I, j, l \in J$ proizvoljni. Tada je $e_{i,j}e_{i,l} = e_{i,l}$ pa kako je onda $e_{i,j} \cdot e_{i,l} = e_{i,l}$ relator iz $\mathfrak{R}$ dobijamo na osnovu (R1) da:

$$\tau(1, e_{i,j} \cdot e_{i,l}) = \tau(1, e_{i,j})\tau(j, e_{i,l}) = \tau(1, e_{i,l}),$$

pa je

$$\tau(j, e_{i,l}) = \tau(1, e_{i,j})^{-1}\tau(1, e_{i,l}) \qquad (*),$$

dakle svako $\tau(j, e_{i,l})$ možemo dobiti pomoću $\tau(1, e_{i,j})$ i $\tau(1, e_{i,l})$, što nam daje da su nam u nastavku interesantni samo generatori oblika $b(1, e_{m,n})$.

Dalje, kako je $e_{i,j}e_{k,j} = e_{i,j}$, $i, k \in I, j \in J$ proizvoljni, $e_{i,j} \cdot e_{k,j} = e_{i,j}$ je relator iz $\mathfrak{R}$, pa na osnovu (R1) imamo:

$$\tau(1, e_{i,j} \cdot e_{k,j}) = \tau(1, e_{i,j})\tau(j, e_{k,j}) = \tau(1, e_{i,j}),$$

pa za $j = 1$ dobijamo da je $\tau(1, e_{k,1}) = 1$.

Ako iskoristimo sada (R2) dobijamo da za proizvoljne $k \in I, j, l \in J$ važi:

$$\tau(1, e_{1,j} \cdot e_{k,l} \cdot e_{1,1}) = b(j, e_{k,l}),$$

odnosno

$$\tau(1, e_{1,j})\tau(j, e_{k,l})\tau(l, e_{1,1}) = b(j, e_{k,l}),$$

pa na osnovu definicije preslikavanja $\tau$ i na osnovu $(*)$ imamo da je:

$$\tau(1, e_{1,j})b(j, e_{k,l})\tau(1, e_{1,l})^{-1}\tau(1, e_{1,1}) = b(j, e_{k,l}),$$

odnosno

$$\tau(1, e_{1,j}) = \tau(1, e_{1,l}), \quad \text{za sve } j, l \in J,$$

pa kako je $\tau(1, e_{1,1}) = 1$, dobijamo da je

$$\tau(1, e_{1,j}) = 1, \quad \text{za sve } j \in J.$$

Dakle, dobili smo da je podgrupa $H$ u stvari definisana prezentacijom:

$$\langle \{b(1, e_{i,j}), i \in I, j \in J\} |\, b(1, e_{1,j}) = 1, b(1, e_{i,1}) = 1, i \in I, j \in J \rangle,$$

tj.

$$\langle \{b(1, e_{i,j}), i \in I \setminus \{1\}, j \in J \setminus \{1\}\} | \emptyset \rangle,$$

odnosno $H$ je slobodna grupa ranga $(|I| - 1)(|J| - 1)$.

# Literatura


[1] M. Brittenham, S.W. Margolis, J. Meakin, Subgroups of free idempotent generated semigroups need not be free, *J. Algebra* **321** (2009), 3026–3042.

[2] M. Brittenham, S.W. Margolis, J. Meakin, Subgroups of free idempotent generated semigroups: full linear monoids (rukopis, 17 str.).

[3] B. Chandler, W. Magnus, *The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in The History of Ideas*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] R. Gray, N. Ruškuc, On maximal subgroups of free idempotent generated semigroups, *Israel J. Math.* (u štampi).

[5] P.M. Higgins, *Techniques of Semigroup Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[6] J.M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, New York, 1995.

[7] R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[8] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Wiley, New York, 1966.

[9] B. McElwee, Subgroups of the free semigroup on a biordered set in which principal ideals are singletons, *Comm. Algebra* **30** (2002), 5513–5519.

[10] K.S.S. Nambooripad, Structure of regular semigroups I, *Mem. Amer. Math. Soc.* **224** (1979).

[11] K.S.S. Nambooripad, F. Pastijn, Subgroups of free idempotent generated regular semigroups, *Semigroup Forum* **21** (1980), 1–7.

[12] N. Ruškuc, *Semigroup Presentations* (doktorska disertacija), University of St Andrews, 1995.

[13] N. Ruškuc, Presentations for subgroups of monoids, *J. Algebra* **220** (1999), 365–380.

[14] N. Ruškuc, On finite presentability of monoids and their Schützenberger groups, *Pacific J. Math.* **195** (2000), 487–509.

[15] F. Pastijn, Idempotent generated completely 0-simple semigroups, *Semigroup Forum* **15** (1977), 41–50.

[16] F. Pastijn, The biorder on the partial groupoid of idempotents of a semigroup, *J. Algebra* **65** (1980), 147–187.

## Biografija

**Ivana Grković** je rođena 8.6.1985. godine u Novom Sadu. Završila je osnovnu školu "Svetozar Marković-Toza" a zatim gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj". Prirodno-matematički fakultet, smer *profesor matematike*, upisuje 2004. godine. Godinu dana kasnije se prebacuje na smer *teorijska matematika.* Ispite na osnovnim studijama položila je sa prosečnom ocenom 9,94 a diplomski rad pod nazivom *Neizbežne reči i Bernsajdov problem za nil-polugrupe* odbranila je 16. oktobra 2009. sa ocenom 10. Iste godine upisala je akademske studije drugog stepena, modul: teorijska matematika. Sve ispite predviđene nastavnim planom položila je sa prosekom 10,00.

**UNIVERZITET U NOVOM SADU**
**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**
**KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj:
RBP
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Ivana Grković
AU
Mentor: dr Igor Dolinka
MN
Naslov rada: Metod Reidemeister-Schreiera i njegovo uopštenje za polugrupe
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikacije: Srbija
ZP
Uže geodrafsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2010.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-Matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada (broj poglavlja, broj strana, broj literalnih citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga): (5,vi+52,16,0,0,0,0)
FO
Naučna oblast: Matematika

NO
Naučna disciplina: Algebra
ND
Ključne reči: Reidemeister-Schreierov metod, prezentacije, kombinatorna teorija grupa, kombinatorna teorija polugrupa, Schützenbergerova grupa
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod:
IZ
Datum prihvatanja teme od NN veća:
DP
Datum odbrane: 6. oktobar 2010.
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Petar Marković, vanredni profesor Prirodno-Matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Igor Dolinka, redovni profesor Prirodno-Matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Nebojša Mudrinski, docent Prirodno-Matematičkog fakulteta u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD**
**FACULTY OF SCIENCE**
**KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Ivana Grković
AU
Mentor: Dr. Igor Dolinka
MN
Title: The Reidemeister-Schreier Method and Its Generalization for Semigroups
XI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstraction: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2010
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, 4 Dositej Obradović Square
PP
Physical description: (chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements): (5,vi+52,16,0,0,0,0)
PD
Scientific field: Mathematics

SF
Scientific discipline: Algebra
SD
Key words: The Reidemeister-Schreier method, presentation, combinatorial group theory, combinatorial semigroup theory, Schützenberger group
UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N
Abstract:
AB
Accepted by the Scientific Board on:
ASB
Defended: October 6, 2010
DE
Thesis defend board:
DB
President: Dr. Petar Marković, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr. Igor Dolinka, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr. Nebojša Mudrinski, Assistant Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad