UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Andrijana Stamenković

REALNE OPERATORSKE ALGEBRE

-master rad-

Mentor

Akademik Prof. dr Stevan Pilipović

Novi Sad, 2011.

Sadržaj

Osnovni pojmovi

- Neka je $X \neq \varnothing$ i $d: X \times X \to [0,\infty)$ tako da važe sledeći uslovi:

   1. $d(x,z)=0 \Leftrightarrow x=y$;
   2. $\forall x,y \in X \quad je \quad d(x,y)=d(y,x)$ (simetričnost) ;
   3. $\forall x,y,z \in X$ važi nejednakost trougla $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$.

   Tada kažemo da je preslikavanje *d* metrika na skupu *X* a *d(x,y)* je rastojanje tačaka *x i y*. Par *(X,d)* je *<u>metrički prostor</u>*.

- Niz $\{x_n\}_{n\in IN}$ iz *X* je Košijev ako važi sledeći uslov:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N})(m,n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n,p \in \mathbb{N})(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n+p},x_n) < \varepsilon)$$

- Ako u metričkom prostoru *(X,d*) za svaki Košijev niz $\{x_n\}_{n\in IN}$ u *X* postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$, kažemo da je *(X,d)* *<u>kompletan metrčki prostor</u>*.

- Neka je $\nu: X \to [0,\infty)$, gde je *X* vektorski prostor, tako da važe sledeći uslovi:

   1. $\nu(x)=o \Leftrightarrow x=0$
   2. $\nu(\lambda x)=|\lambda|\nu(x),\ \forall \lambda \in \mathbb{F},\ \forall x \in X \quad (\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$
   3. $\nu(x+y) \leq \nu(x)+\nu(y)$, $\forall x,y \in X$

   Tada kažemo da je preslikavanje ν norma nad *X* a uređen par *(X,ν)* *<u>normiran prostor</u>* $(X,\|\cdot\|)$.

   $d(x,y)=\|x-y\|, \quad \forall x,y \in X$

- Ako je normiran prostor $(X,\|\cdot\|)$ kompletan metrički prostor kažemo da je Banahov prostor.
- Skup svih neprekidnih linearnih preslikavanja *X* u *Y* označava se sa *L(X,Y)*, gde su $(X,\|\cdot\|_x)$ i $(Y,\|\cdot\|_y)$ normirani prostori nad istim poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.
- *L(X,Y)* je Banahov prostor ako je $(Y,\|\cdot\|)$ Banahov prostor. Ako je specijalno $Y=\mathbb{R}$ *ili* $Y=\mathbb{C}$ tada je prostor *L(X,Y)* Banahov prostor i on se naziva dualni prostor prostora *X* a obeležava se sa *X′*.
- Prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad *X′*, u oznaci $X''=(X')'$ je drugi dual od *X*.

- Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ i definisano je preslikavanje $(\cdot|\cdot):V\times V\to\mathbb{F}$. Preslikavanje $(\cdot|\cdot)$ se naziva skalarni proizvod a uređen par $(V,(\cdot|\cdot))$ pred-Hilbertov prostor (unitaran prostor) ako važe sledeći uslovi:
  1. $(x|x)\geq 0$, za sve $x\in V$;
  2. $(x|x)=0 \Leftrightarrow x=0$;
  3. $(x+y|z)=(x|z)+(y|z)$, za sve $x,y,z\in V$;
  4. $(\lambda x|y)=\lambda(x|y)$, za sve $x,y,\in V$, $\lambda\in F$;
  5. $(x|y)=\overline{(y|x)}$, za sve $x,y\in V$.

- Kompletan pred-Hilbertov prostor $(V,(\cdot|\cdot))$ je Hilbertov prostor.
- Grupa je Abelova[1] (komutativna) ako i samo ako je njena operacija komutativna.
- *(AC)* Aksiona izbora: Neka je $\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ kolekcija nepraznih skupova. Tada postoji funkcija $g:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, takva da za sve $\lambda\in\Lambda$ važi $g(\lambda)\in X_\lambda$. Ovakva funkcija naziva se *funkcija izbora*.
- Hausdorfov[2] princip maksimalnosti: Ukoliko pretpostavimo da važi *AC*, tada je u svakom parcijalnom uređenom skupu svaki lanac sadržan u nekom maksimalnom lancu.
- Zornova[3] lema: Pretpostavimo da važi Hausdorfov princip maksimalnosti i neka je X neprazan parcijalno uređen skup u kom svaki lanac ima gornje ograničenje. Tada u skupu X postoji maksimalan element.

[1] Niels Henrik Abel (1802-1829), norveški matematičar
[2] Felix Hausdorff (1868-1942), nemački matematičar
[3] Max August Zorn (1906-1993), američki matematičar nemačkog porekla

Predgovor

Teorija operatorskih algebri se uglavnom razmatra nad poljem kompleksnih brojeva ili kompleksnim Hilbertovim prostorima. Postavlja se prirodno i interesantno pitanje: Šta je sa poljem realnih brojeva? Koji rezultati i dalje važe u realnom slučaju? Koji rezultati ne važe u realnom slučaju? I koji rezultati su potrebni da bi se promenile određene osobine i norme?
Do sada, teorija operatorskih algebri nad poljem realnih brojeva čini se da nije uvedena sistematski i temeljno.
Slično kao u kompleksnom slučaju, realna operatorska algebra je, precizno govoreći, $*$ algebra koja se sastoji od ograničenih (realnih) linearnih operatora na realnom Hilbertovom prostoru, tj. $*$ podalgebra od $B(H)$, gde je $B(H)$ kolekcija svih ograničenih (realnih) linearnih operatora na Hilbertovom prostoru H, $*$ je kompozicija operatora. Kako je u pitanju objekat beskonačnih dimenzija (u opštem slučaju, H je beskonačno dimenzionalan), da bi ga proučavali moramo zahtevati da bude zatvoren u nekoj topologiji. Slično kompleksnom slučaju, zatvorenje realnih operatorskih algebri u odnosu na uobičajene lokalno konveksne linearne topologije na $B(H)$ može pripadati samo dvema klasama: slabom zatvorenju i uniformnom zatvorenju. Dakle, potrebno je da proučimo slabo zatvorene realne operatorske algebre (realne Džon fon Nojmanove algebre) i uniformno zatvorene realne operatorske algebre.
Cilj ovog rada je da postavi osnove realnih operatorskih algebri i da da sistematsku diskusiju za realne operatorske algebre.
Kako krećemo od početka (realni Banahovi i Hilbertovi prostori, realne Banahove algebre, realne Banahove $*$ algebre, itd.) i neke osnovne činjenice su date, neke rezultate u vezi realnih operatorskih algebri možemo dobiti lako. Međutim, u cilju sistematskog proučavanja, mnogi rezultati u ovom radu deluju trivijalno (tj. kao da su samo prelaz sa kompleksnog slučaja).
Generalno, postoje dve metode za pokazivanje rezultata kod realnih operatorskih algebri: prepraviti dokaze iz kompleksnog slučaja u realni slučaj; i prvo obaviti kompleksifikaciju a onda se vratiti u realan slučaj. Ponekad je samo jedan metod na raspolaganju, a drugi nije. Ponekad moramo koristiti oba metoda istovremeno.
U ovom radu, opisaćemo razlike između kompleksnog i realnog slučaja. Štaviše, kako je $A \cong (B, -)$, naglasićemo operaciju “-” kroz ovaj rad.
Ovaj rad je takođe uvod u realne operatorske algebre. Za praćenje, potrebno je samo znanje o Banahovim i operatorskim algebrama.
Rad se sastoji iz 4 poglavlja.
Poglavlje 1 je uvodno. Odeljak 1.1 se bavi kompleksifikacijom realnih Banahovih prostora i realnih Hilbertovih prostora. Tačnije, stavljamo $\|\xi + i\mu\| = \|\xi - i\mu\|, \forall \xi, \mu$, tj. operacija “-” je izometrija. Onda dobijamo tvrđenja 1.1.4 i 1.1.5, koja su važna za ovaj rad. Odeljak 1.2 se bavi spektralnom dekompozicijom u realnim Hilbertovim prostorima. Za (realne) normalne operatore, koristimo spektralni par, a za (realne) samo-konjugovane operatore, teorema o spektralnoj dekompoziciji je ista kao u kompleksnom slučaju.
Poglavlje 2 sadrži kompleksifikaciju realnih Banahovih algebri, spektar, deljive realne Banahove algebre, radikal, Arensove proizvode, Abelov slučaj, itd. Kompleksifikacija realne Banahove algebre može biti izabrana tako da bude kompleksna Banahova algebra, a operacija“-” i dalje izometrija. Spektar elementa mora biti definisan u kompleksifikaciji, i simetričan je u odnosu na kompleksno konjugovanje. Tvrđenje 2.4.6 daje osnovnu činjenicu $\left(\sigma(x) \cap \mathbb{R} = \{0\}, \forall x \in R(A)\right)$ i koristićemo je kasnije. Što se tiče Arensovih proizvoda, imamo Tvrđenje 2.6.4 itd. Odeljak 2.7 je

Gelfandova teorija za komutativne realne Banahove algebre. Tačnije, bavimo se opštim slučajem (sa i bez identiteta).
Poglavlje 3 je o realnim Banahovim $*$ algebrama. Lema 3.1.3 daje nam osnovnu informaciju $\left(\left[U\left(A\right)\right]\supset A_k\right)$. Što se tiče komutativnog slučaja, Teorema 3.2.3 je slična kompleksnom slučaju, ali moramo dodati hermitski uslov. Odeljci 3.3, 3.4 i 3.5 su GNS konstrukcija, $*$ reprezentacije i $*$ radikal. Odeljak 3.6 bavi se simetričnim realnim Banahovim algebrama. Tačnije, data je odgovarajuća forma Ptakove teorije u realnom slučaju.
Poglavlje 4 su osnove realnih Džon fon Nojmanovih algebri. Naravno, ima mnogo razlika između kompleksnog i realnog slučaja, npr. $\overline{\left[\mathrm{P}\left(M\right)\right]}=M_H\left(\subseteq M \text{ u opštem slučaju}\right)$, $\left[U\left(M\right)\right]\subseteq M$ (u opštem slučaju , ali $\overline{\left[U\left(M\right)\right]}\subseteq M$), itd. Tvrđenje 4.3.3 $\left(M_{c*}=M_*+iM_*\right)$ deluje zanimljivo i korisno. Štaviše, važna teorema o Džon fon Nojmanovom dvostrukom komutiranju, Kaplanskijeva teorema itd. i dalje važe u realnom slučaju.

Ovom prilikom se zahvaljujem svojoj porodici, roditeljima Verici i Zoranu, bratu Aleksandru i baka Živani, koji su mi predstavljali najveću podršku ne samo tokom pisanja ovog rada, nego i u životu. Zahvaljujem se predsedniku komisije Prof. dr Milošu Kuriliću i članu komisije Prof. dr Milanu Gruloviću. Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru akademiku Prof. dr Stevanu Pilipoviću, koji je uvek imao vremena i razumevanja za mene i puno mi pomogao ne samo tokom pisanja ovog rada, već i tokom studiranja i zbog kojeg sam zavolela funkcionalnu analizu, teoriju mera i teoriju operatora. Čast mi je i veliko zadovoljstvo što je ovaj master rad nastao pod njegovim mentorstvom.

Novi Sad, 2011. Andrijana Stamenković

Realni Banahovi i Hilbertovi prostori

1.1 Kompleksifikacija realnih Banahovih i Hilbertovih prostora

Neka je X realan Banahov prostor. Onda $X_c = X + iX$ prirodno postaje kompleksan linearan prostor.
Prvo se pitamo: da li postoji norma na X_c koja čini X_c (kompleksnim) Banahovim prostorom i indukuje postojeću normu na X?
Odgovor je potvrdan i postoji beskonačno mnogo načina da se to uradi.

(1) Neka je

$$\|\xi + i\eta\| = \sup\left\{\left(f(\xi)^2 + f(\eta)^2\right)^{\frac{1}{2}} \middle| f \in X^*, \|f\| = 1\right\}, \quad \forall \xi, \eta \in X$$

gde X^* označava neprekidni dual od X.
Očigledno, $(X_c, \|\cdot\|)$ će zadovoljavati naše uslove i

$$\|\xi + i\eta\| = \|\xi - i\eta\|,$$

$$\max(\|\xi\|, \|\eta\|) \le \|\xi + i\eta\| \le \left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi, \eta \in X.$$

(2) Za $1 \le p \le +\infty$, neka je $|\cdot|_p$ l_p-norma na X_c tako da je $(X_c, |\cdot|_p)$ realan Banahov prostor i X, iX su zatvoreni (realni) linearni potprostori od X_c, tj.

$$|\xi + i\eta|_p = \left(\|\xi\|^p + \|\eta\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < +\infty$$
$$\text{i} \quad |\xi + i\eta|_\infty = \max(\|\xi\|, \|\eta\|), \quad \forall \xi, \eta \in X.$$

Dalje, neka je

$$\|\xi + i\eta\|_p = c_p^{-1} \ \sup\left\{\left|e^{i\theta}(\xi + i\eta)\right|_p \ \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\forall \xi, \eta \in X, \quad \text{gde je } c_p = \sup\left\{\left(|\cos\theta|^p + |\sin\theta|^p\right)^{\frac{1}{p}} \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$(1 \le p < +\infty) \quad i \quad c_\infty = 1.$$

Tada će $(X_c, \|\cdot\|_p)$ zadovoljavati naše uslove i

$$\|\xi + i\eta\|_p = \|\xi - i\eta\|_p, \ \forall \xi, \eta \in X.$$

Zaista dovoljno je pokazati nejednakost trougla norme $\|\cdot\|_p$, što je ekvivalnetno sa

$$\left|e^{i\theta}(\xi_1 + i\eta_1) + e^{i\theta}(\xi_2 + i\eta_2)\right|_p \le \left|e^{i\theta}(\xi_1 + i\eta_1)\right|_p + \left|e^{i\theta}(\xi_2 + i\eta_2)\right|_p,$$
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in X.$$

Neka je

$$\xi_1' = \xi_1 \cos\theta - \eta_1 \sin\theta \ , \ \eta_1' = \xi_1 \sin\theta + \eta_1 \cos\theta,$$
$$\xi_2' = \xi_2 \cos\theta - \eta_2 \sin\theta \ , \ \eta_2' = \xi_2 \sin\theta + \eta_2 \cos\theta,$$

Onda bi trebalo pokazati:

$$\left|\left(\xi_1' + i\eta_1'\right) + \left(\xi_2' + i\eta_2'\right)\right|_p \le \left|\xi_1' + i\eta_1'\right|_p + \left|\xi_2' + i\eta_2'\right|_p.$$

Ali, $\left(X_c, |\cdot|_p\right)$ je realan Banahov prostor, pa je poslednja nejednakost očigledna.

Definicija 1.1.1.

Neka je X realan Banahov prostor i $X_c = X + iX$. Tada se $\left(X_c, \|\cdot\|\right)$ zove ***kompleksifikacija*** od X ako je, $\left(X_c, \|\cdot\|\right)$ kompleksan Banahov prostor, $\|\cdot\| \, |X$ je originalna norma od X (tj. $\|\xi + i0\| = \|\xi\|, \quad \forall \xi \in X$), i $\|\xi + i\eta\| = \|\xi - i\eta\|, \ \forall \xi, \eta \in X.$
U ovom slučaju imamo $\max\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right) \le \|\xi + i\eta\|, \quad \forall \xi, \eta \in X.$

Zapravo, $\|\xi\| \le \frac{1}{2}\left(\|\xi + i\eta\| + \|\xi - i\eta\|\right) = \|\xi + i\eta\|.$
Slično, $\|\eta\| \le \|\xi + i\eta\|$.

Napomena: Ovaj uslov "$\|\xi + i\eta\| = \|\xi - i\eta\|, \ \forall \xi, \eta \in X$" u definiciji 1.1.1 je veoma važan za naš cilj.
(pogledati propoziciju 1.1.4, 1.1.5, itd.)

Na osnovu dosadašnjeg razmatranja, imamo sledeće.

Teorema 1.1.2.

Za svaki realan Banahov prostor, postoji jedinstvena (do na ekvivalenciju) njegova kompleksifikacija.

Definicija 1.1.3.

Neka je X realan Banahov prostor i X_c njegova kompleksifikacija. Definišemo *operaciju* $-: X_c \to X_c$ i $-: X_c^* \to X_c^*$ na sledeći način

$$\overline{\xi + i\eta} = \xi - i\eta \ , \ \overline{f}\left(\xi_c\right) = \overline{f\left(\overline{\xi_c}\right)} \, , \ \forall \xi, \eta \in X \ , \xi_c \in X_c \ , f \in X_c^*$$

Očigledno, operacije "-" su konjugovano linearne, izometrične i $-^2 = id$; $X = \left\{ \xi_c \in X_c \middle| \overline{\xi_c} = \xi_c \right\}$; i ako je $f \in X_c^*$, onda je

$$\overline{f} = f \Leftrightarrow f\left(\xi\right) \in \mathbb{R}, \ \forall \xi \in X.$$

Propozicija 1.1.4.

Neka je X realan Banahov prostor i X_c kompleksifikacija od X.

(i) Ako $f \in X_c^*$ *i* $\overline{f} = f$ onda $f\left|X\right. \in X^*$ i važi $\left\| f\left|X\right.\right\| = \left\| f \right\|$.

(ii) Za svako $g \in X^*$, označimo sa $g_c\left(\xi + i\eta\right) = g\left(\xi\right) + ig\left(\eta\right), \ \forall \xi, \eta \in X$

Tada $g_c \in X_c^*$, $\overline{g}_c = g_c$ *i* $\left\|g\right\| = \left\|g_c\right\|$.

Specijalno, ako $f \in X_c^*$ i ako je $\overline{f} = f$, tada je $\left(f\left|X\right.\right)_c = f$.

(iii) Imajući u vidu (ii), X^* se može izomertično utopiti u X_c^*,

$$X^* = \left\{ f \in X_c^* \middle| \overline{f} = f \right\} \ i \ X_c^* = X^* + iX^*$$

što je kompleksifikacija od X^*. Štaviše, $\overline{f + ig} = f - ig \ , \ \forall f, g \in X^*$.

Dokaz:

(i) Kako je $f\left(\xi\right) \in \mathbb{R}, \forall \xi \in X$, sledi da je $f\left|X\right. \in X^*$. Očigledno da je, $\left\| f\left|X\right.\right\| \le \left\| f \right\|$. Sada $\forall \xi > 0$, možemo pronaći $\xi, \eta \in X$ tako da važi

$$\left\| \xi + i\eta \right\| \le 1 \ i \ \left\| f \right\| \le f\left(\xi + i\eta\right) + \xi.$$

Kako je $f\left(\xi\right), f\left(\eta\right) \in \mathbb{R}$ imamo da je $f\left(\eta\right) = 0$ i $f\left(\xi + i\eta\right) = f\left(\xi.\right)$ S druge strane, $\left\|\xi\right\| \le \left\|\xi + i\eta\right\| \le 1$. Zato imamo da važi $\left\|f\right\| \le f\left(\xi\right) + \xi \le \left\| f\left|X\right.\right\| + \xi$. Sledi, $\left\|f\right\| \le \left\| f\left|X\right.\right\|$ i $\left\|f\right\| = \left\| f\left|X\right.\right\|$.

(ii) očigledno na osnovu (i).

(iii) Za svako $f \in X_c^*$ možemo napisati

$$f = \frac{1}{2}\left(f + \overline{f}\right) + i\left(\frac{1}{2i}\left(f - \overline{f}\right)\right).$$

Željeni zaključak sledi na osnovu (i), (ii) i razmatranja posle definicije 1.1.3.

□

Napomena: Neka je E kompleksan Banahov prostor. Razmatramo sledeće pitanje: Da li postoji zatvoreni realan linearan potprostor X od E, tako da je $E = X + iX$ kompleksifikacija od X ? Očigledno, ovo je ekvivalentno sledećem pitanju: Da li postoji konjugovana linearna izometrija "-" na E tako da je $-^2 = id$?
Čini se da je to pitanje, generalno i dalje otvoreno.

Propozicija 1.1.5.

Neka je X realan Banahov prostor i $X_c = X + iX$ kompleksifikacija od X. Pretpostavimo da postoji (kompleksan) Banahov prostor X_{c^*}, tako da je $X_c = \left(X_{c^*}\right)^*$ i operacija "-" u X_c je $\sigma\left(X_c, X_{c^*}\right)$-neprekidna. Tada je X $\sigma\left(X_c, X_{c^*}\right)$ - zatvoren u X_c i postoji zatvoren realan linearan potprostor X_* od X_{c^*} tako da je $X = \left(X_*\right)^*$ i $X_{c^*} = X_* \dot{+} iX_*$ kompleksifikacija od X_*.

Dokaz: Kako je operacija "-" u X_c $\sigma\left(X_c, X_{c^*}\right)$ - neprekidna i $X = \left\{\xi_c \in X_c \middle| \overline{\xi_c} = \xi_c\right\}$, tada je X $\sigma\left(X_c, X_{c^*}\right)$ - zatvoren u X_c. Za svako $f \in X_{c^*}$, definišemo

$$\overline{f}\left(\xi_c\right) = \overline{f\left(\overline{\xi_c}\right)}, \quad \forall \xi_c \in X_c.$$

Na osnovu $\sigma\left(X_c, X_{c^*}\right)$ - neprekidnosti operacije "-" u X_c i dualne teorije imamo da $\overline{f} \in X_{c^*}$. Očigledno, $\left\|\overline{f}\right\| = \|f\|$. Neka je $X_* = \left\{f \in X_{c^*} \middle| f = \overline{f}\right\}$. Tada je X_* zatvoren realan linearan potprostor od X_{c^*} i $X_{c^*} = X_* + iX_*$ je kompleksifikacija od X_*.
Za svako $\xi \in \left(X_*\right)^*$, ξ se može prirodno produžiti na element iz $\left(X_{c^*}\right)^* = X_c$.
Štaviše,

$$\overline{\xi}\left(f\right) = \overline{\xi\left(\overline{f}\right)} = \overline{\xi\left(f\right)} = \xi\left(f\right), \quad \forall f \in X_*.$$

Sledi, $\overline{\xi} = \xi \in X$. Obratno, za svako $\xi \in X$ važi

$$\overline{\xi\left(f\right)} = \overline{\overline{\xi}\left(f\right)} = \xi\left(\overline{f}\right) = \xi\left(f\right) \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in X_*.$$

Sledi, $\xi \in (X_*)^*$ i $X = (X_*)^*$ je realan linearan prostor. Sada je dovoljno pokazati da važi:

$$\|\xi\| = \sup\{|\xi(f)| \, | f \in X_* \, , \|f\| \le 1\} \, , \; \forall \xi \in X.$$

Očigledno

$$\begin{aligned}\|\xi\| &= \sup\{|\xi(f)| \; | f \in X_{c^*} \, , \|f\| \le 1\}, \\ &\ge \sup\{|\xi(f)| \, | f \in X_* \, , \|f\| \le 1\} \, , \forall \xi \in X.\end{aligned}$$

Za svako $F \in X^* \subset X_c^*$ i $\|F\| \le 1$, možemo pronaći mrežu $\{f_l\} \subset X_{c^*}$ tako da je $\|f_l\| \le 1$, $\forall l$ i $f_l \to F$ u $\sigma(X_c^*, X_c)$.

Kako je $\overline{F} = F$, sledi

$$\frac{1}{2}\left(f_l + \overline{f_l}\right) \to F \text{ u } \sigma\left(X_c^*, X_c\right)$$

Očigledno

$$\frac{1}{2}\left(f_l + \overline{f_l}\right) \in X_* \text{ i } \left\|\frac{1}{2}\left(f_l + \overline{f_l}\right)\right\| \le 1 \; , \; \forall l.$$

Sledi,

$$\begin{aligned}\|\xi\| &= \sup\{|F(\xi)| \; |F \in X^* \; , \; \|F\| \le 1\} \\ &= \sup\{|\xi(f)| \; |f \in X_* \; , \; \|f\| \le 1\} \; , \; \forall \xi \in X.\end{aligned}$$

□

Za kompleksan Banahov prostor E, prirodno možemo E posmatrati kao realan Banahov prostor sa originalnom normom i označiti taj prostor sa E_r. O relaciji između E^* i E_r^* imamo sledeće.

<u>*Propozicija 1.1.6.*</u>

Neka je E kompleksan Banahov prostor. Za svako $f \in E^*$, definišemo

$$(\operatorname{Re} f)(\xi) = \operatorname{Re} f(\xi), \; \forall \xi \in E_r.$$

Tada $f \to \operatorname{Re} f : E^* \to E_r^*$ je (realna linearna) bijekcija i očuvava normu, tj. $\left(E^*\right)_r \cong E_r^*$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\operatorname{Re} f = 0$ za neko $f \in E^*$, tj. $\operatorname{Re} f(\xi) = 0$, $\forall \xi \in E$.
Tada važi $\operatorname{Re} f(\xi) = 0, \operatorname{Re} f(i\xi) = 0 = -\operatorname{Im} f(\xi)$ $f(\xi) = 0$, $\forall \xi \in E$. Sledi, $f = 0$.
Očigledno, $f(\xi) = \operatorname{Re} f(\xi) - i \operatorname{Re} f(i\xi)$, $\forall f \in E^*$, $\xi \in E$.
Za svako $g \in E_r^*$, neka je $f(\xi) = g(\xi) - ig(i\xi)$, $\forall \xi \in E$.

Tada je $f(i\xi)=if(\xi)$, $\operatorname{Re} f(\xi)=g(\xi)$ i $|f(\xi)|^2=g(\xi)^2+g(i\xi)^2\leq 2\|g\|^2\|\xi\|^2$, $\forall\xi\in E$.
Sledi, $f\in E^*$ i $g=\operatorname{Re} f$.
Očigledno je $\|\operatorname{Re} f\|\leq\|f\|$, $\forall f\in E^*$.
Obratno, za $\xi\in E$ neka je $f(\xi)=re^{i\theta}$.
Onda je, $r=|f(\xi)|=f\left(e^{-i\theta}\xi\right)$, $\left\|e^{-i\theta}\xi\right\|=\|\xi\|$ i $\operatorname{Re} f\left(e^{-i\theta}\xi\right)=|f(\xi)|$.
Sledi, $\|\operatorname{Re} f\|\geq\|f\|$ i $\|f\|=\|\operatorname{Re} f\|$, $\forall f\in E^*$.

□

Napomena: Neka je $E=F^*$ gde je *F* kompleksan Banahov prostor. Zbog Propozicije, $\xi\to\operatorname{Re}\xi$ je izometrični izomorfizam iz E_r na F_r^* gde,

$$(\operatorname{Re}\xi)(f)=\operatorname{Re}\xi(f)\,,\ \forall\xi\in E_r\,,\ f\in F_r$$

tj.

$$\begin{pmatrix}E\\F\end{pmatrix}\xrightarrow{\cong}\begin{pmatrix}E_r\\F_r\end{pmatrix}$$

i delovanje E_r na F_r je samo realni deo delovanja *E* na *F*.

Definicija 1.1.7.

Neka su *E* i *F* dva Banahova prostora nad poljem $\mathbb{F}$ (= $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). Označimo skup svih $\mathbb{F}$ − linearnih ograničenih operatora iz *E* u *F* sa *B(E,F)*. Štaviše, ako je *E* = *F* onda samo pišemo *B(E,E)* = *B(E)*.

Propozicija 1.1.8.

Neka su *X* i *Y* dva realna Banahova prostora i X_c, Y_c kompleksifikacija od *X,Y* redom.

(i) Za svako $a\in B(X,Y)$ definišemo

$$a_c(\xi+i\eta)=a\xi+ia\eta\,,\ \forall\xi,\eta\in X.$$

Tada $a_c\in B(X_c,Y_c)$ i postoji pozitivna konstanta *K* tako da je $\|a\|\leq\|a_c\|\leq K\|a\|$, $\forall a\in B(X,Y)$.

(ii) Ako identifikujemo *a* sa a_c $(\forall a\in B(X,Y))$ onda se *B(X,Y)* može utopiti u $B(X_c,Y_c)$ i $B(X_c,Y_c)=B(X,Y)+iB(X,Y)$.

(iii) Neka je $\overline{a+ib}=a-ib$, $\forall a,b\in B(X,Y)$.

Tada je

$$\|\overline{t}\| = \|t\| \, , \; \overline{t}\,\xi_c = t\overline{\xi_c} \; , \; \forall t \in B(X_c, Y_c) \, , \; \xi_c \in X_c \, ,$$

"-" je konjugovano linearno i $-^2 = id$.

(iv) $B(X,Y) = \{ t \in B(X_c, Y_c) \, | \, \overline{t} = t \}$ i ako $t \in B(X_c, Y_c)$ tada je

$$t = \overline{t} \Leftrightarrow \overline{t\xi_c} = t\overline{\xi_c} \; , \; \forall \xi_c \in X_c \Leftrightarrow tX \subset Y \, .$$

(v) Ako je $X = Y$ onda imamo

$$\overline{st} = \overline{s}\,\overline{t} \quad , \quad \forall s,t \in B(X_c) \, .$$

Dokaz: Posmatramo $(X_c, \|\cdot\|)$ kao realan Banahov prostor. Tada je $\|\cdot\| \sim |\cdot|_1$ na X_c, tj. postoji pozitivna konstanta K tako da je $|\xi + i\eta|_1 = \|\xi\| + \|\eta\| \leq K \|\xi + i\eta\|$, $\forall \xi, \eta \in X$.
Dakle,
$\|a_c(\xi + i\eta)\| = \|a\xi + ia\eta\| \leq \|a\|(\|\xi\| + \|\eta\|) \leq K \|a\| \|\xi + i\eta\|$, $\forall \xi, \eta \in X$ i $\|a_c\| \leq K \|a\|$, $\forall a \in B(X,Y)$.
Za svako $t \in B(X_c, Y_c)$ definišemo $t\xi = t_1\xi + it_2\xi$, gde $t_1\xi, t_2\xi \in Y$, $\forall \xi \in X$.
Očigledno je da tada $t_1, t_2 \in B(X,Y)$ i da važi $t = t_1 + it_2$ u $B(X_c, Y_c)$.
Štaviše, $\|\overline{t}\,\xi_c\| = \|\overline{t\overline{\xi_c}}\| = \|t\overline{\xi_c}\|$ i $\|\overline{\xi_c}\| = \|\xi_c\|$, $\forall \xi_c \in X_c$.
Tada je $\|\overline{t}\| = \|t\|$, $\forall t \in B(X_c, Y_c)$.

□

Napomena: Generalno, ne važi $\|a\| = \|a_c\|$, $\forall a \in B(X,Y)$ tako da $B(X_c, Y_c)$ nije kompleksifikacija od *B(X,Y)* u opštem slučaju.

Neka je *X* realan Banahov prostor i X_c kompleksifikacija od *X*, $a \in B(X)$. Ako je spektar od *a* definisan sa $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid a - \lambda$ nije invertibilno u $B(X)\}$ onda spektar od *a* može da bude prazan.
Npr. $X = \mathbb{R}^2$ i $a = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>*Definicija 1.1.9.*</u>

Neka $a \in B(X)$. <u>*Spektar*</u> od *a* definišemo sa $\sigma(a) = \sigma(a_c) = \{ \lambda \in \mathbb{C} | a - \lambda$ nije invertibilno u $B(X_c) \}$.
Očigledno $\sigma(a)$ je neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$.

<u>*Propozicija 1.1.10.*</u>

Neka $a \in B(X)$. Tada je $\overline{\sigma(a)} = \sigma(a)$, gde je operacija "-" kompleksno konjugovana.

Dokaz: Neka $\lambda \in \mathbb{C}$. Očigledno, $a - \lambda$ je invertibilno u $B(X_c)$ ako i samo ako je $\overline{a - \lambda} = a - \overline{\lambda}$ invertibilno u $B(X_c)$, tj. $\lambda \notin \sigma(a)$ ako i samo ako $\overline{\lambda} \notin \sigma(a)$. Sledi, $\overline{\sigma(a)} = \sigma(a)$.

□

Sada razmatramo slučaj Hibertovih prostora. Neka je H realan Hilbertov prostor. Tada će $H_c = H + iH$ biti kompleksan Hilbertov prostor ako definišemo

$$\langle \xi + i\eta, \xi' + i\eta' \rangle = \langle \xi, \xi' \rangle + \langle \eta, \eta' \rangle + i\langle \eta, \xi' \rangle - i\langle \xi, \eta' \rangle, \quad \forall \xi, \xi', \eta, \eta' \in H,$$

gde je operacija $\langle , \rangle$ unutrašnji proizvod u H.

Očigledno, $\|\xi + i\eta\|^2 = \|\xi - i\eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2, \forall \xi, \eta \in H$, i kompleksan Hilbertov prostor H_c je kompleksifikacija od H. Štaviše, jednakost $\|\xi + i\eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \quad (\forall \xi, \eta \in H)$ ne znači da je $H \perp iH$ u H_c.

<u>*Propozicija 1.1.11.*</u>

Neka je H realan Hilbertov prostor i H_c definišemo kao u prethodnom razmatranju.
Tada je $B(H_c) = B(H) + iB(H)$ kompleksifikacija od $B(H)$ i

$$\langle \overline{\xi}_c, \overline{\eta}_c \rangle = \overline{\langle \xi_c, \eta_c \rangle} = \langle \eta_c, \xi_c \rangle, \ \overline{t}^{*} = \overline{t^{*}}, \ a_c^{*} = \left(a^{*}\right)_c, \ (ab)_c = a_c b_c,$$
$$\forall \xi_c, \eta_c \in H_c, \ t \in B(H_c) \text{ i } a, b \in B(H),$$

gde je t^* adjungovano od t, $\forall t \in B(H_c)$.

Dokaz: Za $a \in B(H), \xi, \eta \in H$ važi

$\|a_c(\xi + i\eta)\|^2 = \|a\xi + ia\eta\|^2 = \|a\xi\|^2 + \|a\eta\|^2 \leq \|a\|^2 \left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2\right) = \|a\|^2 \|\xi + i\eta\|^2$.

Dakle, $\|a_c\| \leq \|a\|$ i $\|a_c\| = \|a\|$. Na osnovu direktnog računa, $\|a + ib\| = \|a - ib\|, \forall a, b \in B(H)$.

Na osnovu Propozicije 1.1.7, $B(H_c)$ je kompleksifikacija od $B(H)$.

Očigledno, $\langle \overline{\xi_c}, \overline{\eta_c} \rangle = \langle \eta_c, \xi_c \rangle, \forall \xi_c, \eta_c \in H_c$. Sada, za svako $t \in B(H_c), \xi_c, \eta_c \in H_c$, važi

$\langle \overline{t}^{*} \xi_c, \eta_c \rangle = \langle \xi_c, \overline{t}\, \eta_c \rangle = \langle \xi_c, \overline{t\overline{\eta}_c} \rangle = \langle t\overline{\eta}_c, \overline{\xi}_c \rangle = \langle \overline{\eta}_c, t^{*} \overline{\xi}_c \rangle = \langle \eta_c, \overline{t^{*} \overline{\xi}_c} \rangle = \langle \overline{t^{*}} \xi_c, \eta_c \rangle$.

Dakle, važi $\overline{t^{*}} = \overline{t}^{*}$, $\forall t \in B(H_c)$.

□

Na kraju, neka je $(K,\langle,\rangle)$ kompleksan Hilbertov prostor i neka je $\langle\xi,\eta\rangle_r = \mathrm{Re}\langle\xi,\eta\rangle$, $\forall\xi,\eta\in K$. Tada je $(K_r = K,\langle,\rangle_r)$ realan Hilbertov prostor i norme u K *i* K_r su iste. Očigledno, $B(K)$ se može izometrično utopiti u $B(K_r)$ $\left(\text{tj. } \|a\|_K = \|a\|_{K_r},\ \forall a\in B(K)\right)$, i ako $a\in B(K_r)$ onda $a\in B(K)$ ako i samo ako je $ai\xi = ia\xi$, $\forall\xi\in K$.

Štaviše, poznato je da $B(K) = (T(K))^*$, gde je $T(K)$ prostor operatora sa tragom na K.

Ako $t\in T(K)$, onda postoji normalizovana ortogonalna baza $\{e_l \mid l\in\Lambda\}$ od K i skup $\{\lambda_l \mid l\in\Lambda\}$ ne negativnih brojeva tako da je $(t^*t)^{\frac{1}{2}} e_l = \lambda_l e_l$, $\forall l\in\Lambda$ i $\|t\|_{1,K} = \sum_l \lambda_l$. U ovom slučaju, $\{e_l, ie_{l'} \mid l,l'\in\Lambda\}$ biće normalizovana ortogonalna baza od K_r i $(t^*t)^{\frac{1}{2}} e_l = \lambda_l e_l$, $(t^*t)^{\frac{1}{2}} ie_{l'} = \lambda_l' ie_{l'}$, $\forall l,l'\in\Lambda$. Tada $t\in T(K_r)$ i $\|t\|_{1,K_r} = 2\sum_l \lambda_l = 2\|t\|_{1,K}$.

Na osnovu Napomene posle Propozicije 1.1.6 imaćemo sledeći dijagram:

$$
\begin{array}{ccccc}
B(K) & & B(K)_r & \subset & B(K_r) \\
\downarrow tr_K & \overset{\cong}{\longrightarrow} & \downarrow \mathrm{Re}\, tr_K & & \downarrow tr_{K_r} \\
T(K) & & T(K)_r & \subset & T(K_r)
\end{array}
$$

Za svako $a\in B(K)$ i $t\in T(K)$, važi

$$
\begin{aligned}
tr_{K_r}(at) &= \sum_l \langle ate_l, e_l\rangle_r + \sum_{l'} \langle atie_{l'}, ie_{l'}\rangle_r \\
&= 2\sum_l \langle ate_l, e_l\rangle_r = 2\,\mathrm{Re}\, tr_K(at).
\end{aligned}
$$

1.2 Teorema spektralne dekompozicije u realnim Hilbertovim prostorima

Definicija 1.2.1.

Neka je H realan Hilbertov prostor. $\{e_1(\cdot), e_2(\cdot)\}$ se zove *spektralni par* na $\mathbb{C}$, ako za svaki Borelov podskup Δ od $\mathbb{C}$, $e_1(\Delta), e_2(\Delta)\in B(H)$ i zadovoljava sledeće:

(i) $e_j(\cdot)$ je prebrojivo aditivan u " jakoj " topologiji operatora od *B(H), j = 1,2.*

(ii) $e_1(\Delta)^* = e_1(\Delta)$, $e_2(\Delta)^* = -e_2(\Delta)$ za svaki Borelov podskup $\Delta\subset\mathbb{C}$.

(iii) $e_1(\overline{\Delta}) = e_1(\Delta)$, $e_2(\overline{\Delta}) = -e_2(\Delta)$ za svaki Borelov podskup $\Delta\subset\mathbb{C}$, gde je " $-$ " kompleksno konjugovano.

(iv) $e_1(\Delta_1\cap\Delta_2) = e_1(\Delta_1)e_1(\Delta_2) - e_2(\Delta_1)e_2(\Delta_2)$,

$e_2(\Delta_1 \cap \Delta_2) = e_2(\Delta_1)e_1(\Delta_2) + e_1(\Delta_1)e_2(\Delta_2)$, za svaki Borelov podskup $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{C}$.

(v) $e_1(\mathbb{C}) = 1,\ e_1(\varnothing) = e_2(\varnothing) = e_2(\mathbb{C}) = 0.$

Propozicija 1.2.2.

Neka je H realan Banahov prostor i $e_j(\Delta) \in B(H)$, za svaki Borelov podskup Δ *od* $\mathbb{C}$, $j = 1,2$. Onda je $\{e_1(\cdot), e_2(\cdot)\}$ spektralni par na $\mathbb{C}$ ako i samo ako je u $H_c = H + iH,\ e(\cdot) = (e_1(\cdot) + ie_2(\cdot))$ spektralna mera na $\mathbb{C}$ i $\overline{e(\Delta)} = e(\overline{\Delta})$, za svaki Borelov podskup $\Delta \subset \mathbb{C}$. Štaviše, ako je $\{e_1(\cdot), e_2(\cdot)\}$ spektralni par u $\mathbb{C}$ onda:

(1) $\|e_j(\Delta)\| \le 1$, za svaki Borelov podskup Δ od $\mathbb{C}$, $j = 1,2$.

(2) $e_1(\Delta) = e_1(\Delta)^2 - e_2(\Delta)^2$, $e_2(\Delta) = e_1(\Delta)e_2(\Delta) + e_2(\Delta)e_1(\Delta)$, za svaki Borelov podskup $\Delta \subset \mathbb{C}$.

(3) Za svaku Borelovu particiju $\{\Delta_k \,|\, 1 \le k \le m\}$ u $\mathbb{C}$, $\{\lambda_k \,|\, 1 \le k \le m\} \subset \mathbb{R}$ i $\xi \in H$ tako da je $\|\xi\| \le 1$, imamo

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_j(\Delta_k)\xi \right\| \le \max_{1 \le k \le m} |\lambda_k|,\ j = 1,2.$$

Dokaz: Očigledno,

(i) po definiciji 1.2.1 $\Leftrightarrow e(\cdot)$ je prebrojivo aditivan u jakoj topologiji operatora od *B(H$_c$)*.

(ii) po definiciji 1.2.1 $\Leftrightarrow e(\Delta)^* = e(\Delta)$, za svaki Borelov podskup Δ *od* $\mathbb{C}$.

(iii) po definiciji 1.2.1 $\Leftrightarrow e(\overline{\Delta}) = \overline{e(\Delta)}$, za svaki Borelov podskup Δ *od* $\mathbb{C}$.

(iv) po definiciji 1.2.1 $\Leftrightarrow e(\Delta_1 \cap \Delta_2) = e(\Delta_1)e(\Delta_2)$ za sve Borelove podskupove $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{C}$.

(v) po definiciji 1.2.1 $\Leftrightarrow e(\varnothing) = 0$ i $e(\mathbb{C}) = 1$.

(iv) po definiciji 1.2.1 $\Rightarrow (2) \Leftrightarrow e(\Delta)^2 = e(\Delta)$, za svaki Borelov podskup Δ od $\mathbb{C}$. Dakle, $\{e_1(\cdot), e_2(\cdot)\}$ je spektralni par, ako i samo ako, u H_c $e(\cdot)$ je spektralna mera u $\mathbb{C}$ i $e(\overline{\Delta}) = \overline{e(\Delta)}$, za svaki Borelov skup $\Delta \subset \mathbb{C}$. Neka je sada $\{e_1(\cdot), e_2(\cdot)\}$ spektralni par u $\mathbb{C}$. Tada je $e(\cdot)$ spektralna mera. Specijalno, $\|e(\Delta)\| \le 1$, za svaki Borelov podskup $\Delta \subset \mathbb{C}$. Na osnovu definicije 1.1.1 i Propozicije 1.1.11 imamo $\|e_j(\Delta)\| \le \|e(\Delta)\| \le 1$, Borelov podskup $\Delta \subset \mathbb{C}$, $j = 1,2$.

Neka je $\{\Delta_k \,|\, 1 \le k \le m\}$ Borelova particija u $\mathbb{C}$, $\{\lambda_k \,|\, 1 \le k \le m\} \subset \mathbb{R}$ *i* $\xi \in H$ tako da je $\|\xi\| \le 1$.

Tada važi:

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_1(\Delta_k)\xi\right\|^2+\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_2(\Delta_k)\xi\right\|^2\\
&=\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_1(\Delta_k)\xi+i\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_2(\Delta_k)\xi\right\|^2\\
&=\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e(\Delta_k)\xi\right\|^2=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2\left\|e(\Delta_k)\xi\right\|^2\\
&\le\max_{1\le k\le m}|\lambda_k|^2\sum_{k=1}^{m}\left\|e(\Delta_k)\xi\right\|^2\le\max_{1\le k\le m}|\lambda_k|^2.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_j(\Delta_k)\xi\right\|\le\max_{1\le k\le m}|\lambda_k|,\ j=1,2.$$

□

<u>*Teorema 1.2.3.*</u>

Neka je H realan Hilbertov prostor, $a\in B(H)$ i a je "normalno" $\left(\text{tj. } a^*a=aa^*\right)$. Tada postoji jedinstven spektralni par $\{e_1(\cdot),e_2(\cdot)\}$ u $\mathbb{C}$ (zaista u $\sigma(a)$, ako primetimo da je $\overline{\sigma(a)}=\sigma(a)$ na osnovu Propozicije 1.1.9) tako da je

$$a=\int_{\sigma(a)}\operatorname{Re}z\,de_1(z)-\int_{\sigma(a)}\operatorname{Im}z\,de_2(z)\ \text{i}$$

$$\int_{\sigma(a)}\operatorname{Im}z\,de_1(z)=\int_{\sigma(a)}\operatorname{Re}z\,de_2(z)=0$$

Dokaz: Kako je a "normalno" u $B(H_c)$, sledi da postoji jedinstvena spektralna mera $e(\cdot)$ u $\sigma(a)$ tako je $a=\int_{\sigma(a)}z\,de(z)$ u H_c. Štaviše, $a=\overline{a}=\int_{\sigma(a)}\overline{z}\,\overline{de(z)}=\int_{\sigma(a)}z\,\overline{de(\overline{z})}$ jer je $\overline{\sigma(a)}=\sigma(a)$. Ali, $\overline{e(\bar{\cdot})}$ je spektralna mera u $\sigma(a)$ i zbog jedinstvenosti, imamo $\overline{e(\overline{\Delta})}=e(\Delta)$ ili $e(\overline{\Delta})=\overline{e(\Delta)}$ za svaki Borelov podskup Δ od $\mathbb{C}$.

Neka je sada $e(\cdot)=e_1(\cdot)+ie_2(\cdot)$, gde $e_1(\cdot),e_2(\cdot)\in B(H)$. Na osnovu Propozicije 1.2.2, $\{e_1(\cdot),e_2(\cdot)\}$ je spektralni par u $\sigma(a)$.

Očigledno,

$$a=\int_{\sigma(a)}\operatorname{Re}z\,de_1(z)-\int_{\sigma(a)}\operatorname{Im}z\,de_2(z)\ \text{i}$$

$$\int_{\sigma(a)}\operatorname{Im}z\,de_1(z)+\int_{\sigma(a)}\operatorname{Re}z\,de_2(z)=0.$$

Na osnovu $e_1\left(\overline{\cdot}\right) = e_1(\cdot)$ i $\overline{\sigma(a)} = \sigma(a)$, možemo videti da je

$$\int_{\sigma(a)} \operatorname{Im} z de_1(z) = 0$$

Dalje,

$$\int_{\sigma(a)} \operatorname{Re} z de_2(z) = 0 .$$

□

Teorema 1.2.4.

Neka je H realan Hilbertov prostor i $a^* = a \in B(H)$. Tada postoji jedinstvena spektralna familija $\{e_\lambda | \lambda \in \sigma(a)\} \subset B(H)$ tako da važi

$$a = \int_{\sigma(a)} \lambda de_\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lambda de_\lambda .$$

Dokaz: Kako je $a^* = a \in H_c$ i $\sigma(a) \in \mathbb{R}$ sledi da postoji jedinstvena spektralna familija $\{e_\lambda | \lambda \in \sigma(a)\} \subset B(H_c)$ tako da važi

$$a = \int_{\sigma(a)} \lambda de_\lambda \text{ u } H_c.$$

Štaviše, $a = \overline{a} = \int_{\sigma(a)} \lambda d\,\overline{e_\lambda}$ i $\{\overline{e_\lambda} | \lambda \in \sigma(a)\}$ je spektralna familija, zbog jedinstvenosti imamo

$$\overline{e_\lambda} = e_\lambda \in B(H),\ \forall \lambda \in \sigma(a).$$

□

Dokaz sledeće teoreme je sličan kao u kompleksnom slučaju.

Teorema 1.2.5.

Neka je H realan Hilbertov prostor i $t \in B(H)$. Tada postoji jedinstvena polarna dekompozicija

$$t = \upsilon |t|,$$

gde je $|t| = \left(t^* t\right)^{\frac{1}{2}}$ i υ je parcijalna izometrija u $B(H)$.

Realne Banahove algebre

2.1 Definicija i kompleksifikacija

Definicija 2.1.1.

Realna algebra A se zove *realna Banahova algebra*, ako je realni Banahov prostor i $\|ab\| \le \|a\|\|b\|,\ \forall a,b \in A$.
Svaka realna Banahova algebra A se može izometrično utopiti u realnu Banahovu algebru sa identitetom, na primer $\tilde{A} = A + \mathbb{R}$ sa $\|a+\lambda\| = \|a\| + |\lambda|,\ \forall a \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Neka je A realna Banahova algebra. Postavljamo sledeće pitanje: da li postoji norma na $A_c = A + iA$ (očigledno A_c prirodno postaje kompleksna algebra) tako da je A_c (kompleksna) Banahova algebra i očuvava postojeću normu na A.

Odgovor je potvrdan i postoji beskonačno mnogo načina da se to uradi.
Možemo pretpostaviti da A ima identitet 1 i $\|1\| = 1$. Za $1 \le p \le +\infty$, neka je $\|\cdot\|_p$ norma na A_c kao u poglavlju 1.1. Tada je $\left(A_c, \|\cdot\|_p\right)$ kompleksan Banahov prostor koji očuvava postojeću normu na A i $\|a+ib\|_p = \|a-ib\|_p$, $\forall a,b \in A.$
Dalje neka je $\|a+ib\|'_p = \|L_{a+ib}\|_p = \sup\left\{\|(a+ib)(c+id)\|_p \,\middle|\, c,d \in A, \|c+id\|_p \le 1\right\},\ \forall a,b \in A$.
Onda će $\left(A_c, \|\cdot\|'_p\right)$ zadovoljavati naše uslove. U stvari, kako je $\|1+i0\|_p = \|1\| = 1$, sledi

$$\|a+ib\|'_p \ge \|a+ib\|_p\ ,\ \forall a,b \in A\,.$$

Sa druge strane, $\|\cdot\|_p \sim |\cdot|_1$, na A_c (pogledati poglavlje 1.1 i A_c kao realan Banahov prostor). Onda postoje konstante K_p i $K'_p > 0$ tako da je $K_p\left(\|a\|+\|b\|\right) \le \|a+ib\|_p \le K'_p\left(\|a\|+\|b\|\right)$, $\forall a,b \in A.$
Dalje,

$$\begin{aligned}
\|a+ib\|'_p &= \sup\left\{\|(ac-bd)+i(ad+bc)\|_p \,\middle|\, \|c+id\|_p \le 1\right\} \\
&\le K'_p \sup\left\{\|ac-bd\| + \|ad+bd\| \,\middle|\, \|c+id\|_p \le 1\right\} \\
&\le K'_p\left(\|a\|+\|b\|\right)\sup\left\{\|c\|+\|d\| \,\middle|\, \|c+id\|_p \le 1\right\} \\
&\le K'_p K_p^{-1}\left(\|a\|+\|b\|\right) \le K'_p K_p^{-2}\ \|a+ib\|_p,\ \forall a,b \in A.
\end{aligned}$$

Dakle, $\|\cdot\|'_p \sim \|\cdot\|_p$ na A_c i $\left(A_c, \|\cdot\|'_p\right)$ je (kompleksna) Banahova algebra. Na osnovu $\|c+id\|_p = \|c-id\|_p \ \left(\forall c,d \in A\right)$, imamo $\|a+ib\|'_p = \|a-ib\|'_p$, $\forall a,b \in A.$
Štaviše, za svako $a \in A$

$$\|a\| = \|a\|_p \le \|a\|'_p = \sup\left\{\|a(c+id)\|_p \;\middle|\; \|c+id\|_p \le 1\right\}$$

$$= c_p^{-1} \sup_{\|c+id\|_p \le 1} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\|ac\cos\theta - ad\sin\theta\|^p + \|ac\sin\theta + ad\cos\theta\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \|a\| \sup_{\|c+id\|_p \le 1} c_p^{-1} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\|c\cos\theta - d\sin\theta\|^p + \|c\sin\theta + d\cos\theta\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|a\| \sup\left\{\|c+id\|_p \;\middle|\; \|c+id\|_p \le 1\right\} = \|a\|,$$

tj. $\|a\|'_p = \|a\|$, $\forall a \in A.$

Uzimajući funkcionelu Minkovskog, imamo drugi metod.
Neka je

$$U = \left\{a \in A \,\middle|\, \|a\| < 1\right\} \text{ i}$$

$$V = \left\{\sum_j \alpha_j a_j \;\middle|\; a_j \in U, \alpha_j \in \mathbb{C}, \forall j \text{ i } \sum_j \left|\alpha_j\right| \le 1\right\}.$$

Tada je V apsolutno konveksan i apsorbujući podskup od A_c i V je semi – grupa. Neka je $p(\cdot)$ funkcionela Minkovskog na V, tj.

$$p(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, x \in \lambda V\right\}, \ \forall x \in A_c.$$

Tada je $\left(A_c, p(\cdot)\right)$ (kompleksna) Banahova algebra;

$$V = \left\{x \in A_c \,\middle|\, p(x) < 1\right\};\ p(a) = \|a\|,\ \forall a \in A;$$
$$p(a+ib) = p(a-ib),\ \forall a,b \in A \text{ i}$$
$$\max\left(\|a\|,\|b\|\right) \le p(a+ib) \le 2\max\left(\|a\|,\|b\|\right),\ \forall a,b \in A.$$

U stvari, za svako $x = a+ib \in A_c$ $\left(a,b \in A\right)$ uzimamo $\mu > \max\left(\|a\|,\|b\|\right)$. Tada $\frac{a}{\mu}, \frac{b}{\mu} \in U$ i $\frac{x}{2\mu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\mu} + \frac{i}{2}\cdot\frac{b}{\mu} \in V$.
Dakle, V je apsolutno konveksan i apsorbujući podskup od A_c.
Jasno,

$$\sum_k \alpha_k a_k \cdot \sum_j \beta_j b_j = \sum_{k,j} \alpha_k \beta_j a_k b_j \in V$$

ako $a_k, b_j \in U$, $\alpha_k, \beta_j \in \mathbb{C}$, $\forall k, j$ i $\sum_k |\alpha_k| \le 1$, $\sum_j |\beta_j| \le 1$, tj. V je takođe semi – grupa.

Ako je $p(x) = 0$, za neko $x \in A_c$, možemo pronaći $\varepsilon_n \to 0+$ i $\{x_n\} \subset V$ tako da je $x = \varepsilon_n x_n$, $\forall n$.
Na osnovu definicije za V, možemo napisati $x_n = a_n + ib_n$, gde $a_n, b_n \in U$, $\forall n$.
Dakle, $\varepsilon_n a_n \to 0$, $\varepsilon_n b_n \to 0$, $x = 0$ i možemo videti da je $(A_c, p(\cdot))$ kompleksna normirana algebra. Očigledno, $x \in V$ ako je $p(x) < 1$. Obratno, neka $x \in V$. Tada možemo napisati

$$x = \sum_j \alpha_j a_j$$

gde $a_j \in U$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\forall j$ i $\sum_j |\alpha_j| \le 1$. Uzimamo broj λ tako da je $1 > \lambda > \max_j \|a_j\|$. Tada je $\frac{a_j}{\lambda} \in U$, $\forall j$ i $\frac{x}{\lambda} = \sum_j \alpha_j \frac{a_j}{\lambda} \in V$. Dakle, $p(x) \le \lambda < 1$ i $V = \{x \in A_c \,|\, p(x) < 1\}$.

Neka $a \in A$. Na osnovu $\frac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in U \subset V$, $p\left(\frac{a}{p(a) + \varepsilon}\right) < 1, \forall \varepsilon > 0, V \cap A = U$ i na osnovu prethodnog paragrafa imamo da je $p(a) = \|a\|$.
Očigledno, $\overline{V} = V$, gde je $\overline{V} = \{a - ib \,|\, a, b \in A \text{ i } a + ib \in V\}$.
Dakle, $p(a + ib) = p(a - ib)$, $\forall a, b \in A$.
Konačno, neka $a, b \in A$. Uzimamo $\mu > \max(\|a\|, \|b\|)$.
Tada je $\frac{a + ib}{2\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\mu} + \frac{i}{2} \cdot \frac{b}{\mu} \in V$ i $p\left(\frac{a + ib}{2\mu}\right) < 1$.
Tada je $p(a + ib) \le 2\max(\|a\|, \|b\|)$. Ako je $\lambda > 0$ tako da $a + ib \in \lambda V$, tada je $\frac{a}{\lambda} + i\frac{b}{\lambda} \in V$. Na osnovu $V \subset U + iU$ imamo da $\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda} \in U$ *i* $\|a\| < \lambda, \|b\| < \lambda$.
Dakle,

$$\max(\|a\|, \|b\|) \le p(a + ib) \le 2\max(\|a\|, \|b\|)$$

i $(A_c, p(\cdot))$ je takođe kompletan.

<u>Definicija 2.1.2.</u>

Neka je A realna Banahova algebra. $(A_c, \|\cdot\|)$ se zove ***<u>kompleksifikacija</u>*** od A, ako je $(A_c, \|\cdot\|)$ kompleksna Banahova algebra, $\|\cdot\| \,|A$ je originalna norma na A $\left(\text{tj. } \|a + i0\| = \|a\|, \forall a \in A\right)$ i $\|a + ib\| = \|a - ib\|, \forall a, b \in A$.

Na osnovu prethodnog razmatranja imamo sledeće.

<u>*Teorema 2.1.3.*</u>

Za svaku realnu Banahovu algebru, postoji jedinstvena (u ekvivalentnom smislu) kompleksifikacija za nju.

Napomena. Za svaku realnu algebru *A*, možemo definisati operaciju $-: A_c \to A_c$ kao u definiciji 1.1.3. Očgledno, $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}$, $\forall x, y \in A_c$.

Slično definiciji 1.1.9, imamo sledeće.

<u>*Definicija 2.1.4.*</u>

Neka je *A* realna Banahova algebra i A_c kompleksifikacija od *A*. Za svako $a \in A$, <u>*spektar*</u> od *a* je definisan sa $\sigma(a) = \sigma_{A_c}(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \middle| a - \lambda \text{ nije invertibilno u } \tilde{A}_c\right\}$, gde je $\tilde{A} = A$ ako A ima identitet, $\tilde{A} = A + \mathbb{R}$ ako *A* nema identitet i $\tilde{A}_c = \tilde{A} + i\tilde{A}$.
Označimo spektralni radijus od *a* sa $r(a) = \max\left\{|\lambda| \,\middle|\, \lambda \in \sigma(a)\right\}$.

Slično propoziciji 1.1.10 imamo

$$\overline{\sigma(a)} = \sigma(a),$$
$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|, \ \forall a \in A.$$

Očigledno imamo sledeće.

<u>*Lema 2.1.5.*</u>

Neka je *A* realna Banahova algebra sa identitetom nad $\mathbb{C}$ (ili $\mathbb{R}$), $a, b \in B$ i $ab = ba$. Onda je *ab* invertibilno ako i samo ako su *a i b* invertibilni.

<u>*Propozicija 2.1.6.*</u>

Neka je *A* realna Banahova algebra, $a \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je $\lambda + i\mu \in \sigma(a)$ akko $(a-\lambda)^2 + \mu^2$ nije invertibilno u $\tilde{A}$ i ekvivalentno, $\lambda + i\mu \notin \sigma(a)$ akko je $(a-\lambda)^2 + \mu^2$ invertibilno u $\tilde{A}$.

Dokaz: Na osnovu Leme 2.1.5, Definicije 2.1.4 i $\overline{\sigma(a)} = \sigma(a)$
imamo

$$\begin{aligned}
&(\lambda+i\mu)\notin\sigma(a)\Leftrightarrow(\lambda+i\mu),(\lambda-i\mu)\notin\sigma(a)\\
&\Leftrightarrow a-(\lambda+i\mu)\ i\ a-(\lambda-i\mu)\ \text{su invertibilne u } \tilde{A}_c\\
&\Leftrightarrow(a-\lambda-i\mu)(a-\lambda+i\mu)=(a-\lambda)^2+\mu^2\ \text{je invertibilno u } \tilde{A}_c\\
&\Leftrightarrow(a-\lambda)^2+\mu^2\ \text{je invertibilno u } \tilde{A}.
\end{aligned}$$

□

Sada, neka je B kompleksna Banahova algebra. Tada je $A = B_r$ realna Banahova algebra sa orginalnom normom i proizvodom.

Propozicija 2.1.7.

Neka je B kompleksna Banahova algebra i $A = B_r$. Tada za svako $a \in A$ imamo

$$\sigma_A(a)=\sigma_B(a)\cup\overline{\sigma_B(a)}\,.$$

Dokaz: Prvo pretpostavimo da B ima identitet.
Na osnovu Leme 2.1.5. i $\overline{\sigma_A(a)}=\sigma_A(a)$, $\lambda+i\mu\notin\sigma_A(a)$, gde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \lambda\pm i\mu\notin\sigma_A(a)$
$\Leftrightarrow a-(\lambda+i\mu)$ i $a-(\lambda-i\mu)$ su invertibilne u A_c, gde $a-(\lambda\pm i\mu)\in A_c=A+iA$
$\Leftrightarrow(a-\lambda-i\mu)(a-\lambda+i\mu)=(a-\lambda)^2+\mu^2$ je invertibilno u A_c
$\Leftrightarrow(a-\lambda)^2+\mu^2$ je invertibilno u $A=B_r=B$
$\Leftrightarrow(a-\lambda-i\mu)$ i $(a-\lambda+i\mu)$ su invertibilni u B, gde $(a-\lambda-i\mu),(a-\lambda+i\mu)\in B$
$\Leftrightarrow \lambda\pm i\mu\notin\sigma_B(a)$, *tj.* $\sigma_A(a)=\sigma_B(a)\cup\overline{\sigma_B(a)}$, $\forall a\in A$.

Sada pretpostavimo da B nema identitet.
Na osnovu Propozicije 2.1.6. i $\lambda+i\mu\notin\sigma_A(a)$, gde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow(a-\lambda)^2+\mu^2$ je invertibilno u $\tilde{A}=A+\mathbb{R}$.
S druge strane, na osnovu Leme 2.1.5,
$\lambda\pm i\mu\notin\sigma_B(a)$
$\Leftrightarrow(a-\lambda-i\mu)(a-\lambda+i\mu)=(a-\lambda)^2+\mu^2$ je invertibilno u $B+\mathbb{C}$, gde
$(a-\lambda-i\mu)$, $(a-\lambda+i\mu)\in B+\mathbb{C}$
$\Leftrightarrow(a-\lambda)^2+\mu^2=(a^2-2\lambda a)+(\lambda^2+\mu^2)$ je invertibilno u $B+\mathbb{R}=A+\mathbb{R}$. Dakle, imamo $\sigma_A(a)=\sigma_B(a)\cup\overline{\sigma_B(a)}$, $\forall a\in A$.

□

2.2 Deljive realne Banahove algebre

Definicija 2.2.1.

Neka je A realna Banahova algebra sa identitetom. A nazivamo deljiva ako za svaki element $a \neq 0$, $a \in A$, a je invertibilan u A.

Primer 1: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ sa normom apsolutne vrednosti je deljiva Abelova realna Banahova algebra.

Primer 2: Neka je $\mathbb{H}$ algebra kvaterniona, tj. $\mathbb{H}$ je 4-dimenzionalni realan linearan prostor sa bazom $\{1, i, j, k\}$ i proizvodom, tako da je 1 identitet i

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad , \quad ij = k = -ji$$
$$jk = i = -kj \quad , \quad ki = j = -ik.$$

Neka

$$\|x\| = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$\forall x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Jasno, $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{H}$.

Na osnovu

$$xy = \left(\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta'\right) + \left(\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma'\right)i$$
$$+ \left(\alpha\gamma' + \gamma\alpha' + \delta\beta' - \beta\delta'\right)j + \left(\alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta'\right)k,$$

gde $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, $y = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' k$ i $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{R}$,
imamo

$$\|xy\| = \|x\|\|y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Dakle, $\mathbb{H}$ je realna Banahova algebra. Štaviše, za $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$ neka je

$$x^* = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k.$$

Tada je $x^* x = x x^* = \|x\|^2$.
Dakle, $\mathbb{H}$ je deljiva (ne-komutativna) realna Banahova algebra.

Teorema 2.2.2.

Neka je A deljiva realna Banahova algebra. Tada postoji algebarski izomorfizam T od A na D tako da je $\|T_a\| = r(a), \forall a \in A$, gde je $D = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ili $\mathbb{H}$.

Dokaz: Videti [1].
Štaviše, u slučaju Abelove algebre, imamo jednostavan lak dokaz. Neka je A deljiva Abelova realna Banahova algebra. Ako postoji $a \in A \setminus \mathbb{R}$, tada a ima ne-realan spektar. Neka $\alpha + i\beta \in \sigma(a)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je $\beta \neq 0$. Na osnovu Propozicije 2.1.6, $(a-\alpha)^2 + \beta^2$ nije invertibilno u A. Kako je A deljiva, sledi da je

$$(a-\alpha)^2 + \beta^2 = 0.$$

Neka je $b = (a-\alpha)/\beta$. Tada je $b^2 = -1$ i $a = \alpha + \beta b$.
Ako postoji neko drugo $b' \in A$ tako da je $b'^2 = -1$, tada važi $0 = b^2 - b'^2 = (b-b')(b+b')$. Kako je A deljiva sledi da je $b' = b$ ili $-b$. Štaviše, $b = (a-\alpha)/\beta \in A \setminus \mathbb{R}$. Dalje, $A = \{\lambda + \mu b | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{C}$.

□

2.3 Topološka grupa invertibilnih elemenata i njena glavna komponenta

Neka je A realna Banahova algebra sa identitetom. Označimo podskup svih invertibilnih elemenata od A sa $G = G(A)$. Jasno, G je topološka grupa u normi topologije od A. Označimo komponentu povezanosti koja sadrži identitet od G sa $G_0 = G_0(A)$.
Slično kompleksnom slučaju imamo sledeće.

Teorema 2.3.1.

Neka je A realna Banahova algebra sa identitietom, $G = G(A)$ i $G_0 = G_0(A)$. Tada

(i) G_0 je zatvorena – otvorena normalna podgrupa od G, svaka komponenta povezanosti G ima sledeći oblik: $aG_0 = G_0 a$ (za neko $a \in G$); i G/G_0 je diskretna u faktor topologiji.

(ii) $G_0 = \{e^{a_1} \cdots e^{a_n} | a_i \in A, 1 \le i \le n, \forall n\}$. Specijalno, G_0 je takođe putno povezano. Sada, neka je A realna Banahova algebra sa identitetom i A_c je kompleksifikacija od A. Jasno, $G(A) = G(A_c) \cap A$, $G_0(A) \subset G_0(A_c) \cap A$, $(\overline{x})^{-1} = \overline{(x^{-1})}$, $\forall x \in G(A_c)$. Prirodno, pitamo se da li je

$$G_0(A) = G_0(A_c) \cap A\,?$$

Generalno, odgovor je negativan. Tipičan primer je sledeće: Neka je $A=\mathbb{R}$. Tada $G(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{-1}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ima dve komponente povezanosti: $\{\lambda\in\mathbb{R}|\lambda>0\}$ i $\{\lambda\in\mathbb{R}|\lambda<0\}$; i $G_0(\mathbb{R})=\{\lambda\in\mathbb{R}|\lambda>0\}$. Ali $A_c=\mathbb{R}+i\mathbb{R}=\mathbb{C}$ i $G_0(\mathbb{C})=G(\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ je povezano. Dalje, $G_0(\mathbb{C})\bigcap\mathbb{R}=\mathbb{R}\setminus\{0\}=G(\mathbb{R})\supsetneq G_0(\mathbb{R})$.

2.4 Radikal

Definicija 2.4.1.

Neka je *A* realna Banahova algebra. (Realan) linearan potprostor *J* od *A* se naziva *levi (desni) ideal* od *A*, ako je $J\neq A$ i $AJ\subset J$ $(JA\subset J)$. Levi (desni) ideal od *A* se naziva *regularan*, ako postoji $u\in A$ tako da $a-au\in J$ $(a-ua\in J)$, $\forall a\in A$. Dakle, *u* se naziva *modularna jedinica* za *J*. Jasno, svaki levi (desni) ideal od *A* je regularan ako *A* ima identitet. Slično kompleksnom slučaju, možemo dokazati da je svaki maksimalan regularan levi (desni) ideal od *A* zatvoren.

Definicija 2.4.2.

Neka je *A* realna Banahova algebra. $R(A)=\bigcap\{L|L \text{ je maksimalan regularan levi ideal od } A\}$ se naziva *radikal* od *A*.
Ako je $R(A)=\{0\}$, tada se *A* naziva *semi-jednostavna*.
Slično kompleksnom slučaju, imamo sledeće.

Propozicija 2.4.3.

Neka je *A* realna Banahova algebra. Tada

(i) $R(A)=\bigcap\{R|R \text{ je maksimalan regularan desni ideal od A}\}$ i $R(A)$ je zatvoren dvostrani ideal od *A*.

(ii) $R(A)=R(\tilde{A})$.

(iii) A/R je semi-jednostavna realna Banahova algebra sa faktor-normom, gde je $R=R(A)$.

Teorema 2.4.4.

Neka je A realna Banahova algebra. Tada za svako $a \in A$ sledeći iskazi su ekvivalentni:

(i) $a \in R(A)$;
(ii) $1 + ba$ ima levi inverzni u $\tilde{A}$, $\forall b \in A$;
(iii) $1 + ba$ je invertibilno u $\tilde{A}$, $\forall b \in A$;
(iv) $1 + ab$ ima desni inverzni u $\tilde{A}$, $\forall b \in A$;
(v) $1 + ab$ je invertibilno u $\tilde{A}$, $\forall b \in A$.

Lema 2.4.5.

Neka je A realna Banahova algebra, $0 \neq p^2 = p \in A$, $B = pAp$ i $B \neq A.$ Tada je

$$\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b),\ \forall b \in A.$$

Dokaz: Možemo pretpostaviti da A ima identitet 1. Jasno, $p \neq 1$, $B_c = B + iB = pA_c p$, B ima identitet p, i

$$\sigma_B(b) = \sigma_{B_c}(b),\ \sigma_A(b) = \sigma_{A_c}(b),\ \forall b \in B.$$

Neka, $\lambda \notin \sigma_A(b)$ i $c = (b-\lambda)^{-1}\ (\in A_c).$ Tada

$$\begin{aligned} p &= pc(b-\lambda)p = pcp \cdot (b - \lambda p) \\ &= p(b-\lambda)cp = (b-\lambda p) \cdot pcp, \end{aligned}$$

tj. $\lambda \notin \sigma_B(b)$. Dakle, $\sigma_B(b) \subset \sigma_A(b)$. Neka $0 \neq \lambda \notin \sigma_B(b)$, $(b - \lambda p)^{-1} = c\ (\in B_c)$ i $d = \lambda c + p\ (\in B_c).$ Tada je

$$\begin{aligned} &(d-p)\left(\lambda^{-1}b - p\right) = \left(\lambda^{-1}b - p\right)(d-p) = p, \\ &\lambda^{-1}bd - \lambda^{-1}b - d = \lambda^{-1}db - \lambda^{-1}b - d = 0 \end{aligned}$$

Dakle, $\left(1-\lambda^{-1}b\right)(1-d) = (1-d)\left(1-\lambda^{-1}b\right) = 1$, tj. $\lambda \notin \sigma_A(b)$.
Sada je dovoljno pokazati da $0 \in \sigma_A(b)$.
Suprotno, b ima inverzni $b^{-1} \in A.$ Tada

$$p = p\left(bb^{-1}\right) = pb \cdot b^{-1} = bb^{-1} = 1.$$

To je nemoguće.

□

Primetimo sledeće važne činjenice.

Propozicija 2.4.6.

Neka je A realna Banahova algebra. Tada je

(i) $\sigma(a)\cap\mathbb{R}=\{0\}$, $\forall a\in R(A)$.

(ii) $\sigma(x)\cup\{0\}\supset\sigma(\tilde{x})\cup\{0\}$ i $(\sigma(x)\cap\mathbb{R})\cup\{0\}=(\sigma(\tilde{x})\cap\mathbb{R})\cup\{0\}$, $\forall x\in A$ gde je $\tilde{x}=x+R\in A/R$ i $R=R(A)$.

Dokaz:

(i) Možemo pretpostaviti da A ima identitet. Na osnovu Teoreme 2.4.4, $1+ba$ je invertibilno u A, $\forall b\in A$. Specijalno, $1+\mu a$ je invertibilno u A, $\forall 0\neq\mu\in\mathbb{R}$ i $\sigma(a)\cap(\mathbb{R}\setminus\{0\})=\varnothing$. Štaviše, $0\in\sigma(a)$. Dalje, $\sigma(a)\cap\mathbb{R}=\{0\}$, $\forall a\in R(A)$.

(ii) Prvo pretpostavimo da A ima identitet. Ako $\lambda+i\mu\notin\sigma(x)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, tada je $(x-\lambda)^2+\mu^2$ invertibilno u A, (videti Propoziciju 2.1.6). Sledi da je $(\tilde{x}-\lambda)^2+\mu^2$ takođe invertibilno u A/R. Na osnovu Propozicije 2.1.6, $\lambda+i\mu\notin\sigma(\tilde{x})$. Dakle,

$$\sigma(x)\supset\sigma(\tilde{x}),\ \forall x\in A.$$

Neka $\lambda\in\mathbb{R}$ i $\lambda\notin\sigma(\tilde{x})$. Tada postoji $y\in A$ tako da je $(\tilde{x}-\lambda)\tilde{y}=\tilde{y}(\tilde{x}-\lambda)=\tilde{1}$, tj. $u=1-(x-\lambda)y$ i $\upsilon=1-y(x-\lambda)\in R$. Na osnovu Teoreme 2.4.4 $1-u$ i $1-\upsilon$ su invertibilni u A. Na osnovu

$$(x-\lambda)y(1-u)^{-1}=1=(1-\upsilon)^{-1}y(x-\lambda),$$

$x-\lambda$ je invertibilno u A, tj. $\lambda\notin\sigma(x)$. Dakle, $\sigma(x)\cap\mathbb{R}=\sigma(\tilde{x})\cap\mathbb{R}$, $\forall x\in A$.
Ako A ima identitet, možda A/R ima identitet. Sada, na osnovu Leme 2.4.5, dobijamo zaključke u opštem slučaju.

□

Napomena: Za svaku kompleksnu Banahovu algebru B, imamo $\sigma(b)=\{0\}$, $\forall b\in R(B)$, $\sigma(y)\cup\{0\}=\sigma(\tilde{y})\cup\{0\}$, $\forall y\in B$ i $\tilde{y}=y+R(B)$.

Propozicija 2.4.7.

Neka je A realna Banahova algebra i A_c kompleksifikacija od A.

(i) Označimo $B=R(A_c)\cap A$. Tada $B\subset R(A)$ i $R(A_c)=\overline{R(A_c)}=B+iB$.

(ii) Ako je A semi-jednostavna, tada je Banahova algebarska norma na A jedinstvena u ekvivalentnom smislu.

Dokaz:

(i) Ako $a \in B$, tada je $1+xa$ invertibilno u $\tilde{A}_c$, $\forall x \in A_c$. Specijalno, $1+ba$ je invertibilno u $\tilde{A}$, $\forall b \in A$. Na osnovu Teoreme 2.4.4, $a \in R(A)$. Ako je I_c maksimalan regularan levi ideal od A_c i $u \in A_c$ modularna jedinica tada je $\overline{I_c}$ takođe maksimalan regularan levi ideal od A_c sa modularnom jedinicom $\overline{u}$. Dakle, $\overline{R(A_c)} = R(A_c)$ i $R(A_c) = B + iB.$

(ii) Neka je $\|\cdot\|'$ norma na A tako da je $(A, \|\cdot\|')$ takođe Banahova algebra i $(A_c, \|\cdot\|')$ je kompleksifikacija od $(A, \|\cdot\|')$. Kako je A semi-jednostavna, sledi iz (i) da je A_c takođe semi-jednostavna. Na osnovu Teoreme Džonsona $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$ na A_c. Specijalno $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$ na A.

□

Napomena: Interesantno je pitati se: Da li je $R(A_c) = R(A) + iR(A)$? U Abelovom slčaju, odgovor je potvrdan (videti propoziciju 2.7.6).

2.5 Funkcionalni račun

Neka je A realna Banahova algebra sa identitetom, $a \in A$ i A_c kompleksifikacija od A.
Označimo: $H(a) = \{ f \mid f \text{ je analitička u okolini od } \sigma(a)\}.$
Tada, za svako $f \in H(a)$,

$$f(a) = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(a-z)^{-1}\, dz \in A_c,$$

gde je Γ neka glatka jednostrana zatvorena kriva u otvorenoj okolini U od $\sigma(a)$ (f je analitička u U) i Γ je zatvaranje $\sigma(a)$.
Prirodno želimo da postavimo pitanje: kada $f(a) \in A$?
Na osnovu $\overline{\sigma(a)} = \sigma(a)$, možemo uzeti $\overline{\Gamma} = \Gamma \subset \overline{U} = U$. Ako je $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, $\forall z \in U$, tada je

$$\overline{f(a)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \overline{f(z)}(a-\overline{z})^{-1}\, d\overline{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\overline{z})(a-\overline{z})^{-1}\, d\overline{z} =$$
$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(a-z)^{-1}\, dz = f(a),$$

tj. $f(a) \in A$.

Generalno, za $f \in H(a)$ važi:

$$\begin{aligned}\overline{f(a)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \overline{f(z)}(a-\overline{z})^{-1}\,d\overline{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(\overline{z})(a-\overline{z})^{-1}\,d\overline{z} = \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z)(a-z)^{-1}\,dz = g(a),\end{aligned}$$

gde je $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $\forall z \in U$ i $g \in H(a)$.
Štaviše , $f(a) = b + ic$, gde je

$$b = \frac{1}{2}\big(f(a) + g(a)\big) \in A \ i \ c = \frac{1}{2i}\big(f(a) - g(a)\big) \in A.$$

2.6 Arensovi proizvodi

Neka je A realna (ili kompleksna) Banahova algebra, A^* dual od A i A^{**} drugi dual od A. Za svako $a \in A$, $f \in A^*$, $m \in A^{**}$, definišemo

$$\begin{aligned}&(fa)(b) = f(ab), \quad (af)(b) = f(ba)\\ &(mf)(b) = m(fb), \quad (fm)(b) = m(bf), \forall b \in A\end{aligned}$$

Lako je videti da $fa, af, mf, fm \in A^*$ i

$$\begin{aligned}&\|fa\| \le \|f\|\|a\|, \quad \|af\| \le \|a\|\|f\|,\\ &\|mf\| \le \|m\|\|f\|, \quad \|fm\| \le \|f\|\|m\|.\end{aligned}$$

Štaviše, ako je $m = a \in A$ (kanoničko utapanje A u A^{**}) tada je $mf = af, fm = fa$, $\forall f \in A^*$.

<u>*Definicija 2.6.1.*</u>

Prvi i drugi <u>*Arensovi proizvodi*</u> u A^{**} su definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned}&(mn)(f) = m(nf),\\ &(m \cdot n)(f) = n(fm),\end{aligned}$$

$\forall f \in A^*, m, n \in A^{**}$.

Lako je videti da će A^{**} biti realna (ili kompleksna) Banahova algebra sa prvim ili drugim Arsenovim proizvodom i A je realna (ili kompleksna) podalgebra od A^{**}.

Definicija 2.6.2.

Realna (ili kompleksna) Banahova algebra A se naziva *regularna* ako važi $mn = m \cdot n$, $\forall m, n \in A^{**}$.

Propozicija 2.6.3.

Neka je A realna (ili kompleksna) Banahova algebra. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

1. A je regularna.
2. Za svako fiksirano $m \in A^{**}$, funkcija $x \to mx : A^{**} \to A^{**}$ je $\sigma\left(A^{**}, A^{*}\right)$ - neprekidna (jasno, funkcija $x \to xm : A^{**} \to A^{**}$ je automatski $\sigma\left(A^{**}, A^{*}\right)$ - neprekidna).
3. Za svako fiksirano $n \in A^{**}$, funkcija $x \to x \cdot n : A^{**} \to A^{**}$ je $\sigma\left(A^{**}, A^{*}\right)$ - neprekidna (jasno, funkcija $x \to n \cdot x : A^{**} \to A^{**}$ je automatski $\sigma\left(A^{**}, A^{*}\right)$ -neprekidna).

Dokaz: Na osnovu definicije 2.6.2, $1. \Rightarrow 2.$ je očigledno.
$2. \Rightarrow 1.$ Na osnovu pretpostavke, za svako $f \in A^{*}$ i $m \in A^{**}$, $(m \cdot)(f)$ će biti $\sigma\left(A^{**}, A^{*}\right)$- neprekidna linearna funkcionela na A^{**}. Tada na osnovu [26, Appendix], postoji linearna funkcija $T_m : A^{*} \to A^{*}$ tako da važi $mn(f) = n(T_m f)$, $\forall m, n \in A^{**}$.
Sada

$$\left(T_m f\right)(a) = a\left(T_m f\right) = (ma)(f) = m(af) = (fm)(a),\ \forall a \in A,$$

tj.

$$T_m f = fm.$$

Dakle,

$$(mn)(f) = n(fm) = (m \cdot n)(f),\ \forall f \in A^{*} \text{ ili}$$
$$mn = m \cdot n,\ \forall m, n \in A^{**} \text{ i } A \text{ je regularna.}$$

Dokaz $1. \Leftrightarrow 3.$ je sličan dokazu $1. \Leftrightarrow 2.$

□

Neka je A realna Banahova algebra i $A_c = A + iA$ kompleksifikacija od A isto tako Banahova algebra. Na osnovu Propozicije 1.1.4 $A_c^{*} = A^{*} + iA^{*}$ i $A_c^{**} = A^{**} + iA^{**}$ su kompleksifikacije od A^{*} i A^{**} kao Banahovi prostori respektivno. "-" operacije u $A^{*}{}_c$ i A_c^{**} su indukovane "-" operacijama u A_c i A_c^{*} respektivno (videti definiciju 1.1.3). Štaviše, takođe imamo prvi i drugi Arensov proizvod u A_c^{**}. Jasno, prvi i drugi Arensovi proizvodi u A_c^{**} su prirodna proširenja prvog i drugog Arensovog proizvoda u A^{**} na A_c^{**} respektivno. Dakle, imamo sledeće.

Propozicija 2.6.4.

Neka je A realna Banahova algebra i $A_c = A + iA$ kompleksifikacija od A (videti definiciju 2.1.2). Tada je A regularna ako i samo ako je A_c regularna. Štaviše, u ovom slučaju Arensov proizvod u A_c^{**} je prirodno proširenje Arensovog proizvoda u A^{**}.

2.7 Abelove realne Banahove algebre

Neka je A Abelova (komutativna) realna Banahova algebra, $A_c = A + iA$ kompleksifikacija od A i Ω_c spektralni prostor od A_c.

Definicija 2.7.1.

$\Omega = \Omega(A) = \{\rho|A \ |\rho \in \Omega_c\}$ se zove *spektralni prostor* od A. Drugim rečima, Ω je skup svih ne-nula kompleksnih (realnih) linearnih funkcionela na A. Operacija "-" u A_c se može proširiti na Ω tj. definišemo

$$\overline{\rho}(a) = \overline{\rho(a)}, \ \forall a \in A, \text{ ili}$$
$$\overline{\rho}(x) = \overline{\rho(\overline{x})}, \ \forall x \in A_c, \ \forall \rho \in \Omega.$$

Teorema 2.7.2.

Neka je A Abelova realna Banahova algebra i Ω spektralni prostor. Tada

1. ρ je neprekidno na A i $\|\rho\| \le 1$ (pišemo $\rho \notin A^*$ generalno), $\forall \rho \in \Omega$. Štaviše, $\rho = \overline{\rho} \Leftrightarrow \rho \in A^* \Leftrightarrow \rho(A) \subset \mathbb{R}$.
2. Ω je lokalno kompaktan Hausdorfov prostor u topologiji tačkaste konvergencije na A i Ω je kompaktan kada A ima identitet.
3. $\rho \to \overline{\rho}\,(\forall \rho \in \Omega)$ je homeomorfizam od Ω sa periodom 2.
4. $\sigma(a) = \{\rho(a)|\rho \in \Omega\}$ (kada A ima identitet) ili
   $\sigma(a) = \{0\} \cup \{\rho(a)|\rho \in \Omega\}$ (kada A nema identitet) i
   $r(a) = \sup\{|\rho(a)|\ |\rho \in \Omega\}$, $\forall a \in A$.
5. Gelfand transformacija $a \to \hat{a}(\cdot)$ je homomorfizam iz A u
   $C_0(\Omega, -)$ (kao realne algebre), gde je $\hat{a}(\rho) = \rho(a)$, $\forall a \in A$, $\rho \in \Omega$,
   $C_0(\Omega) = \{f \mid f$ je kompleksna funkcija neprekidna na Ω i nestaje u $\infty\}$,
   $C_0(\Omega, -) = \left\{f \in C_0(\Omega) \middle| f(\overline{\rho}) = \overline{f(\rho)}, \forall \rho \in \Omega\right\}$.

Dokaz: Na osnovu definicije o Ω ovo je očigledno.

□

Posmatramo vezu između Ω i skupa svih maksimalnih regularnih ideala na *A* (videti definiciju 2.4.1.).
Prvo pretpostavimo da *A* ima identitet.
Ako $\rho \in \Omega$ i $\rho = \overline{\rho}$ tada $\rho \in A^*$ i

$$A = J + \mathbb{R},$$

gde je $J = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$ maksimalan ideal od *A*. Jasno, $A_c = J_c + \mathbb{C}$ i $J_c = J + iJ$ je takođe maksimalan ideal od A_c.
Ako $\rho \in \Omega$ i $\rho \neq \overline{\rho}$, tada $\rho(\cdot)$ može uzeti ne-realnu vrednost na *A*. Kako je $\rho(1) = 1$, sledi da postoji $\upsilon \in A$ tako da je $\rho(\upsilon) = i$. Jasno, $\rho(1 + \upsilon^2) = 0$. Tada je

$$A = J + [1, \upsilon],$$

gde je $J = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$, $[1, \upsilon] = \{\alpha + \beta\upsilon | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Dakle. $A / J \cong \mathbb{C}$ i J je maksimalan ideal od *A* (primetimo da $\mathbb{C}$ ne sadrži nijedan netrivijalan ideal).
Obratno, neka je *J* maksimalan ideal od *A*. Slično kompleksnom slučaju, možemo pokazati da *J* mora biti zatvoren i A / J deljiva. Na osnovu Teoreme 2.2.2., imamo

$$A / J \cong \mathbb{R} \text{ ili } \mathbb{C},$$

tj.

$$A = J + \mathbb{R} \text{ ili } A = J + [1, \upsilon]$$

gde $1 + \upsilon^2 \in J$. Ako je $A = J + \mathbb{R}$ onda je $A_c = J_c + \mathbb{C}$ i $J_c = J + iJ$ je takođe maksimalan ideal od A_c. Dalje, postoji jedinstveno $\rho = \overline{\rho} \in \Omega$ tako da je $J = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$.

Ako je $A = J + [1, \upsilon]$, tada je

$$A_c = (J_c + \mathbb{C}(1 + i\upsilon)) + \mathbb{C} = (J_c + \mathbb{C}(1 - i\upsilon)) + \mathbb{C}.$$

Kako je $\upsilon(1 \pm i\upsilon) = (\mp i)(1 \pm i\upsilon) \pm i(1 + \upsilon^2)$ i $(1 + \upsilon^2) \in J$, sledi da su $(J_c + \mathbb{C}(1 + i\upsilon))$ i $(J_c + \mathbb{C}(1 - i\upsilon))$ takođe maksimalni ideali od A_c i njihov presek je $J_c = J + iJ$. Dakle J_c nije maksimalni ideal od A_c i postoji $\rho \in \Omega$ tako da je $\rho \neq \overline{\rho}$ i $J = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$ (zaista, $\rho(a + \alpha + \beta\upsilon) = \alpha + \beta i$, $\forall a \in J$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
Sada neka $\sigma \in \Omega$ tako da je $J = \{a \in A | \sigma(a) = 0\}$.

Kako je $\sigma(1)=1$ i $1+\upsilon^2 \in J$, sledi $\sigma(\upsilon)=i$ ili $(-i)$, tj. $\sigma=\rho$ ili $\sigma=\overline{\rho}$. Na osnovu gornje diskusije imamo sledeće.

Teorema 2.7.3.

Neka je A Abelova realna Banahova algebra sa identitetom i Ω spekralni prostor.

1. Postoji bijekcija između

$$\left\{\rho \in \Omega \middle| \rho=\overline{\rho}\right\}$$

i

$$\left\{J \middle| J \text{ je maksimalan ideal od } A \text{ i } A/J \cong \mathbb{R}\right\}$$

tako da je $J=\left\{a \in A \middle| \rho(a)=0\right\}$, $A=J+\mathbb{R}$ i $J_c=J+iJ$ je takođe maksimalan ideal od $A_c=J_c+\mathbb{C}$.

2. Postoji bijekcija između

$$\left\{\left\{\rho=\overline{\rho}\right\} \middle| \rho \in \Omega \text{ i } \rho \neq \overline{\rho}\right\}$$

i

$$\left\{J \middle| J \text{ je maksimalan ideal od } A \text{ i } A/J \cong \mathbb{C}\right\}$$

tako da je $J=\left\{a \in A \middle| \rho(a)=0\right\}$, $A=J+[1,\upsilon]$, gde je $[1,\upsilon]=\left\{\alpha+\beta\upsilon \middle| \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$, $\rho(\upsilon)=i$, $1+\upsilon^2 \in J$ i $\upsilon+J$ je jedinstven u A/J. Štaviše, u ovom slučaju, $J_c=J+iJ$ nije maksimalan ideal od A_c i $J_c=I_\rho \cap I_{\overline{\rho}}$, $J=I_\rho \cap I_{\overline{\rho}} \cap A$, gde su $I_\rho=J_c+\mathbb{C}(1+i\upsilon)=\left\{x \in A_c \middle| \rho(x)=0\right\}$ i $I_{\overline{\rho}}=\overline{I}_\rho=J_c+\mathbb{C}(1-i\upsilon)=\left\{x \in A_c \middle| \overline{\rho}(x)=0\right\}$ dva maksimalna ideala od A_c.

Pretpostavimo da A nema identitet i $\tilde{A}=A+\mathbb{R}$. Primetimo sledeće.

Lema 2.7.4.

Postoji bijekcija između

$$\left\{J \middle| J \text{ je maksimalan regularan ideal od } A\right\}$$

i

$$\left\{I \middle| I \text{ je maksimalan ideal od } \tilde{A} \text{ i } I \neq A\right\},$$

tako da je $I = J + \mathbb{R}(1-u)$, gde je $u \in A$ modularna jedinica za J (tj. $a - au \in J, \forall a \in A$). Štaviše, za svaki maksimalan regularan ideal J od A modularna jedinica je jedinstvena do na dodavanje elementa od J i $A/J \cong \tilde{A}/I$, $J = I \bigcap A$.

Dokaz: Neka je J maksimalan regularan ideal od A i u,u' dve modularne jedinice za J. Tada

$$u - uu', u' - u'u \in J .$$

Kako je $uu' = u'u$ sledi da $(u - u') \in J$.

Neka je J maksimalan regularan ideal od A, u modularna jedinica za J i $I = J + \mathbb{R}(1-u)$. Jasno, I je ideal od $\tilde{A}$, $I \neq A$ i $I \bigcap A = J$. Ako je I' ideal od $\tilde{A}$ i $I \subset I'$ tada je $I' \bigcap A = I \bigcap A = J$. Zaista, ako $A \bigcap I' \supsetneq J$, tada je $I' \bigcap A = A$ i $u \in I'$. Kako $1 - u \in I \subset I'$ sledi da $1 \in I'$ i $I' = \tilde{A}$. Ovo je kontradikcija sa $I' \neq A$. Dakle, $I' \bigcap A = I \bigcap A = J$. Sada neka je $x = a + \lambda \in I'$, gde $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$a + \lambda u = x - \lambda(1-u) \in I' \bigcap A = J$, $x = (a + \lambda u) + \lambda(1-u) \in I$, $I' = I$ i I je maksimalan.

Neka je I maksimalan ideal od $\tilde{A}$, $I \neq A$ i $J = I \bigcap A$. Jasno, J je ideal od A. Kako je $I \neq A$, sledi da postoji $1 - u \in I \setminus A$, gde $u \in A$. Na osnovu

$$a - au = a(1-u) \in I \bigcap A = J, \forall a \in A,$$

J je regularan ideal od A sa modularnom jedinicom u. Slično prethodnom paragrafu, možemo pokazati da je $I = J + \mathbb{R}(1-u)$. Neka je J' ideal od A i $J' \supset J$. Jasno, u je takođe modularna jedinica za J' i $I' = J' + \mathbb{R}(1-u)$, je ideal od $\tilde{A}$. Dakle, $J + \mathbb{R}(1-u) = I = I' = J' + \mathbb{R}(1-u)$, $J' = J$ i J je maksimalan.

Na kraju, neka je J maksimalan regularan ideal od A, u modularna jedinica za J i $I = J + \mathbb{R}(1-u)$.

Očigledno, $a + J \to a + I$ $(\forall a \in A)$ je homomorfizam iz A/J na $\tilde{A}/I$. Kako je $u + I = 1 + I$ sledi da je homomorfizam sirjektivan ("na"). Štaviše, ako je $a + I = I$ za neko $a \in A$ tada $a \in I \bigcap A = J$ i $a + J = J$. Dakle, $A/J \cong \tilde{A}/I$.

□

Ako $\rho \in \Omega$ i $\rho = \bar{\rho}$, tada $\rho \in A^*$ i postoji $u \in A$ tako da je $\rho(u) = 1$ i $A = J + \mathbb{R}u$, gde je $J = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$. Jasno, J je maksimalan regularan ideal od A i u je modularna jedinica za J. Štaviše, $J_c = J + iJ$ je takođe maksimalan regularan ideal od $A_c = J_c + \mathbb{C}u$.

Neka $\rho \in \Omega$ i neka je $\rho \neq \bar{\rho}$. ρ se može prirodno produžiti na $\tilde{A}$ i $\rho \neq \bar{\rho}$ na $\tilde{A}$ očigledno. Na osnovu Teoreme 2.7.3 i Leme 2.7.4 imamo

$$A/J \cong \tilde{A}/I = \mathbb{C},$$

gde $I=\left\{x\in\tilde{A}\middle|\rho(x)=0\right\}\ (\neq A)$ je maksimalan ideal od $\tilde{A}$, $J=\left\{a\in A\middle|\rho(a)=0\right\}=I\bigcap A$ je maksimalan regularan ideal od A. Kako $A/J\cong\mathbb{C}$, sledi da postoje $u,\upsilon\in A$ tako da je $A/J=\left[\tilde{u},\tilde{\upsilon}\right]$, $\tilde{u}$ je identitet od A/J i $\tilde{u}+\tilde{\upsilon}^2=\tilde{0}$, gde je $\tilde{u}=u+J$, $\tilde{\upsilon}=\upsilon+J$, $\tilde{0}=J$. Jasno, u je modularna jedinica za J. Za $\rho\neq 0$ na A, $\rho(u)=1$. Štaviše, možemo pretpostaviti da je $\rho(\upsilon)=i$. Tada je

$$A=J+[u,\upsilon],$$

gde je $[u,\upsilon]=\left\{\alpha u+\beta\upsilon\middle|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$. Na osnovu Teoreme 2.7.3 i Leme 2.7.4 imamo $I=J+\mathbb{R}(1-u)$, $\tilde{A}=I+[1,\upsilon]$.

Obratno, neka je J maksimalan regularan ideal od A i u modularna jedinica za J. Na osnovu Leme 2.7.4, $I=J+\mathbb{R}(1-u)\ (\neq A)$ je maksimalan ideal od $\tilde{A}$, $\tilde{u}=u+J$ je identitet od A/J i

$$A/J\cong\tilde{A}/I\cong\mathbb{R}\ ili\ \mathbb{C}.$$

Ako je $A/J\cong\tilde{A}/I\cong\mathbb{R}$ tada važi

$$A=J+\mathbb{R}u\ ,\ \tilde{A}=I+\mathbb{R}\,.$$

Dalje, postoji jedinstveno $\rho=\overline{\rho}\in\Omega$ tako da je $J=\left\{a\in A\middle|\rho(a)=0\right\}$ i $\rho(u)=1$. Ako je $A/J\cong\mathbb{C}$ tada postoji $\upsilon\in A$ tako da je $A/J=\left[\tilde{u},\tilde{\upsilon}\right]$, $\tilde{u}+\tilde{\upsilon}^2=0$. Dakle,

$$\begin{aligned}A&=J+[u,\upsilon]\,,\ u+\upsilon^2\in J\ \text{i}\\ A_c&=\left(J_c+\mathbb{C}(u+i\upsilon)\right)+\mathbb{C}u\\ &=\left(J_c+\mathbb{C}(u-i\upsilon)\right)+\mathbb{C}u.\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}u(u\pm i\upsilon)&=(u\pm i\upsilon)+\left(u^2-u\right)\mp i(\upsilon-\upsilon u)\ \text{i}\\ \upsilon(u\pm i\upsilon)&=-(\upsilon-\upsilon u)\pm i\left(u+\upsilon^2\right)+(\mp i)(u\pm i\upsilon),\end{aligned}$$

sledi da su $J_c+\mathbb{C}(u+i\upsilon)$ i $J_c+\mathbb{C}(u-i\upsilon)$ dva maksimalna regularna ideala od A_c i njihov presek je $J_c=J+iJ$. Dakle, J_c nije maksimalan regularan ideal od A_c i postoji $\rho\in\Omega$ tako da je $\rho\neq\overline{\rho}\ i\ J=\left\{a\in A\middle|\rho(a)=0\right\}$ (zaista $\rho(a+\alpha u+\beta\upsilon)=\alpha+\beta i$, $\forall a\in J,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$).

Sada neka $\sigma\in\Omega$ tako da je $J=\left\{a\in A\middle|\sigma(a)=0\right\}$. Kako $(a-au)\in J$, $\forall a\in A\ i\ \sigma\neq 0$ na A sledi da je $\sigma(u)=1$. Na osnovu $u+\upsilon^2\in J$, $\sigma(\upsilon)=i$ ili $-i$, tj. $\sigma=\rho$ ili $\overline{\rho}$. Na osnovu gornjeg razmatranja, imamo sledeće.

Teorema 2.7.5.

Neka je A Abelova realna Banahova algebra i Ω spektralni prostor.

1. Postoji bijekcija između
   $\{\rho \in \Omega | \rho = \overline{\rho}\}$ i
   $\{J | J$ je maksimalan regularan ideal od A i $A/J \cong \mathbb{R}\}$, tako da je $J = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$, $A = J + \mathbb{R}u$, $\rho(u) = 1$ gde je $u \in A$ modularna jedinica za J, $u+J$ je jedinstveno u A/J i $J_c = J + iJ$ je takođe maksimalan regularan ideal od $A_c = J_c + \mathbb{C}u$.

2. Postoji bijekcija između
   $\{\{\rho, \overline{\rho}\} | \rho \in \Omega \ i \ \rho \neq \overline{\rho}\}$ i
   $\{J | J$ je maksimalan regularan ideal od A i $A/J \cong \mathbb{C}\}$, tako da je $J = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$, $A = J + [u, \upsilon]$, $\rho(u) = 1$, $\rho(\upsilon) = i$ gde je $u \in A$ modularna jedinica za J, $[u, \upsilon] = \{\alpha u + \beta \upsilon | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $u + \upsilon^2 \in J$ i $u + J, \upsilon + J$ su jedinstveni u A/J. Štaviše, u ovom slučaju, $J_c = J + iJ$ nije maksimalan regularan ideal od A_c i $J_c = I_\rho \cap I_{\overline{\rho}}$, $J = I_\rho \cap I_{\overline{\rho}} \cap A$ gde su $I_\rho = J_c + \mathbb{C}(u + i\upsilon) = \{x \in A_c | \rho(x) = 0\}$, $I_{\overline{\rho}} = \overline{I_\rho} = J_c + \mathbb{C}(u - i\upsilon) = \{x \in A_c | \overline{\rho}(x) = 0\}$ dva maksimalna regularna ideala od A_c.

Propozicija 2.7.6.

Neka je A Abelova realna Banahova algebra. Tada važi $R(A_c) = R(A) + iR(A)$ i $R(A) = \{a \in A | r(a) = 0\}$.

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.7.5 i Definicije 2.4.2,

$$
\begin{aligned}
R(A_c) \cap A &= \bigcap \{I_\rho \cap A | \rho \in \Omega\} \\
&= \bigcap \{I_\rho \cap I_{\overline{\rho}} \cap A | \rho \in \Omega\} \\
&= \bigcap \{J | J \text{ je maksimalan regularan ideal od A}\} = R(A)
\end{aligned}
$$

Sada na osnovu Propozicije 2.4.7, imamo

$$R(A_c) = R(A) + iR(A).$$

Štaviše, kako je $R(A_c) = \{x \in A_c | r(x) = 0\}$ (rezultat u kompleksnom slučaju) sledi

$$R(A) = R(A_c) \cap A = \{a \in A | r(a) = 0\}.$$

□

Sada neka je *B* Abelova kompleksna Banahova algebra. Onda je $A = B_r$ Abelova realna Banahova algebra sa originalnom normom i proizvodom. Neka su $\Omega(B)\ i\ \Omega(A)$ spektralni prostori od *B, A* respektivno. Na osnovu Definicije 2.7.1, imamo prirodno utapanje $\Omega(B)$ u $\Omega(A)$. Izdvajamo sledeće.

<u>*Teorema 2.7.7.*</u>

Neka je *B* Abelova kompleksna Banahova algebra i $A = B_r$. Onda važi

$$\Omega(A) = \Omega(B) \cup \overline{\Omega(B)},$$

gde je "–" operacija u $\Omega(A)$ (videti Definiciju 2.7.1) i tim utapanjem $\Omega(B)$ u $\Omega(A)$, $\Omega(B)$ i $\overline{\Omega(B)}$ postaju dva disjunktivna , zatvorena – otvorena podskupa od $\Omega(A)$.

Dokaz: Neka $\rho \in \Omega(A)$. Za svako $a, b \in A$, imamo

$$\rho(ia)^2 \rho(b)^2 = \rho(ia \cdot b)^2 = \rho\left(-a^2 b^2\right) = -\rho(a)^2 \rho(b)^2 .$$

Uzimajući $b \in A$ tako da je $\rho(b) \neq 0$, možemo videti

$$\rho(ia)^2 = -\rho(a)^2 \ , \forall a \in A .$$

Dalje, $\rho(ia) = i\rho(a)$ ili $-i\rho(a)$, $\forall a \in A$.
Ako postoji $a_1, a_2 \in A$ tako da je

$$\rho(ia_1) = i\rho(a_1)\ ,\ \rho(ia_2) = -i\rho(a_2)\ i\ \rho(a_1) \neq 0\ ,\ \rho(a_2) \neq 0\ ,$$

onda je

$$\begin{aligned}\rho(a_1)\rho(a_2) &= i\rho(a_1)\cdot(-i\rho(a_2)) \\ &= \rho(ia_1 \cdot ia_2) = -\rho(a_1)\rho(a_2).\end{aligned}$$

Ovo je nemoguće. Dakle, $\rho(ia) = i\rho(a)\ , \forall a \in A\ ili\ \rho(ia) = -i\rho(a), \forall a \in A$, tj. ρ je kompleksno linearan ili konjugovano kompleksno linearan.
Dakle, $\rho \in \Omega(B)$ ili $\rho \in \overline{\Omega(B)}\ i\ \Omega(A) = \Omega(B) \cup \overline{\Omega(B)}$.
Sada je dovoljno pokazati da je $\Omega(B)$ otvoren podskup od $\Omega(A)$.
Neka $\varphi \in \Omega(B)$ i $a \in A$, $\varepsilon > 0$ tako da je $|\varphi(a)| > \varepsilon$. Posmatrajmo otvorenu okolinu $U(\varphi, a, ia, \varepsilon)$ od φ u $\Omega(A)$, gde je

$$U(\varphi, a, ia, \varepsilon) = \left\{\rho \in \Omega(A) \middle| |\rho(b) - \varphi(b)| < \varepsilon\ ,\ b = a \text{ ili } ia\right\}.$$

Tada je $\rho(a)\neq 0$, $\forall\rho\in U(\varphi,a,ia,\varepsilon)$. Ako je $\rho(ia)=-i\rho(a)$ za neko $\rho\in U(\varphi,a,ia,\varepsilon)$ tada je

$$\begin{aligned}\varepsilon > |\rho(ia)-\varphi(ia)| &= |\rho(a)+\varphi(a)| \\ &\geq 2|\varphi(a)|-|\rho(a)-\varphi(a)| > 2|\varphi(a)|-\varepsilon,\end{aligned}$$

ili $|\varphi(a)|<\varepsilon$. Ovo je kontradikcija. Dakle, $\rho(ia)=i\rho(a)$ ili $\rho\in\Omega(B)$, $\forall\rho\in U(\varphi,a,ia,\varepsilon)$, tj. $U(\varphi,a,ia,\varepsilon)\subset\Omega(B)$.

□

Realne Banahove $*$ algebre

A se zove realna Banahova $*$ algebra, ako je A realna Banahova algebra i postoji (realna) linearna operacija $*$ na A tako da važi

$$a^{**} = \left(a^*\right)^* = a \ , \ \left(ab\right)^* = b^* a^* \ , \ \forall a,b \in A \, .$$

Prirodno definišemo proširenje $*: A \to A$ na $*: A_c \to A_c$. Onda je $A_c = A + iA$ kompleksna Banahova $*$ algebra prema Teoremi 2.1.3.

3.1 Neke osnovne leme

Lema 3.1.1.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra i B maksimalna Abelova $*$ podalgebra od A. Onda je $B_c = B + iB$ maksimalna Abelova $*$ podalgebra od A_c, B je zatvoreno u A i

$$\sigma_B\left(b\right) \cup \left\{0\right\} = \sigma_A\left(b\right) \cup \left\{0\right\} \, , \ \forall b \in B.$$

Dokaz: Jasno, $B_c' = B' + iB' = B + iB = B_c$, gde je B_c', B' komutiraju sa B_c ,B u A_c, A respektivno. Zbog toga je B_c takođe maksimalna Abelova podalgebra od A_c. Sada pomoću kompleksnog slučaja direktno dolazimo do ostalih zaključaka.

□

Lema 3.1.2. (Fordova lema u realnom slučaju)

Neka je A realna Banahova $*$ algebra sa identitetom (jedinicom) i $h^* = h \in A$.

1. Ako je $r\left(1-h\right) < 1$, onda postoji jedinstveni elemenat $u^* = u \in A$ tako da je $r\left(1-u\right) < 1$ i $u^2 = h.$ Zaista

$$u = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} \left(h-1\right)^n = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{\frac{1}{2}} \left(h - z\right)^{-1} dz,$$

gde red $\sum\limits_{n\geq 0}$ ... apsolutno konvergira u normi, Γ je glatka jednostavna (koja ne preseca samu sebe) kriva u $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|z-1\right| < 1\right\}$ koja sadrži $\sigma\left(h\right)$ i $\overline{\Gamma} = \Gamma$.

2. Ako je $h > 0$ (tj. $h^* = h$ i $\sigma(h) \subset (0,+\infty)$), onda postoji jedinstveno $u \in A$ tako da je $u > 0$ i $u^2 = h$.
3. Ako je $\operatorname{Re}\sigma(h) > 0$, onda postoji jedinstveno $u^* = u \in A$ tako da je $\operatorname{Re}\sigma(h) > 0$ i $u^2 = h$.

Dokaz : 1. Na osnovu funkcionalnog kalkulusa (vidi odeljak 2.5) ili na osnovu konvergencije redova, imamo $u \in A$ i $u^2 = h$. Prema Fordovoj lemi u A_c, očigledno je $u^* = u$ i $r(1-u) < 1$.

2. i 3. Možemo naći pozitivan ceo broj n takav da važi $r\left(1-\frac{h}{n}\right) < 1$. Tada su naši zaključci očigledni.

□

<u>*Lema 3.1.3.*</u>

Neka je A realna Banahova ∗ algebra sa identitetom, $U(A) = \left\{u \in A \middle| u^*u = uu^* = 1\right\}$ (podskup svih unitarnih elemenata u A) i $A_k = \left\{k \in A \middle| k^* = -k\right\}$ (podskup svih anti-hermitskih elemenata u A). Onda $\left[U(A)\right] \supset A_k$, gde je $\left[U(A)\right]$ (realni) lineal od $U(A)$ [lineal = sve linearne kombinacije datih vektora].

Dokaz: Neka $k \in A_k$ i $r(k) < 1$. Onda je

$$r\left(1-\left(1+k^2\right)\right) = r(k)^2 < 1.$$

Na osnovu leme 3.1.2, postoji $h^* = h \in A$ tako da važi

$$h^2 = 1 + k^2$$

i h je zapravo limes realnih polinoma u $1+k^2$. Stoga $hk = kh$. Sada neka je

$$u_\pm = k \pm h.$$

Jasno, $u_\pm \in U(A)$ i $k = \frac{1}{2}(u_+ + u_-) \in \left[U(A)\right]$.

□

Napomena: Ako je B kompleksna Banahova ∗ algebra sa identitetom, onda je (kompleksni) lineal od $U(B)$, B, tj. $\left[U(B)\right] = B$. Ali ovo ne važi u opštem slučaju za realne Banahove ∗ algebre.

Lema 3.1.4.

Ako je A semi-jednostavna realna Banahova $*$ algebra, onda je operacija $*$ na A automatski neprekidna u normi.

Dokaz: Na osnovu Propozicije 2.4.7, A_c je takođe semi-jednostavna. Na osnovu Džonsonove teoreme operacija $*$ je automatski neprekidna na A_c, pa i na A po normi.

□

Sada, na osnovu Definicije 2.4.2, Propozicije 2.4.3 i Leme 3.1.4, imamo sledeće:

Posledica 3.1.5.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra i $R = R(A)$ njen radikal. Onda je R zatvoreni $*$ dvostrani ideal od A i operacija $*$ je neprekidna na A / R.
Neka je sada A realna Banahova $*$ algebra. Za svako $f \in A^*$, $m \in A^{**}$, možemo definisati

$$f^*(a) = f\left(a^*\right),\ m^*(f) = m(f^*),\ \forall a \in A .$$

Lako je pokazati ono što sledi.

Lema 3.1.6.

Operacija $*$ na A^* *i* A^{**} je (realna) linearna i sa periodom 2. Štaviše, $m^* = a^*$ ako je $m = a \in A$ i $(af)^* = f^*a^*$, $(fa)^* = a^*f^*$, $(mf)^* = f^*m^*$, $(fm)^* = m^*f^*$ (videti odeljak 2.6).

Da bi A^{**} bila realna Banahova $*$ algebra sa Arensovim proizvodima prvog i drugog reda (videti definiciju 2.6.1) i operacijom $*$ kao što smo već definisali, moremo proveriti da li važi

$$(mn)^* = n^*m^* \text{ ili } (m\cdot n)^* = n^*\cdot m^*,\ \forall m,n \in A^{**}.$$

Neka je A regularna (videti definiciju 2.6.2).
Onda

$$(mn)^*(f) = (m\cdot n)(f)^* = n\left(f^*m\right) = n^*\left(m^*f\right) = n^*m^*(f),\ \forall f \in A^*.$$

Zbog toga je, $(mn)^* = n^*m^*$, $\forall m,n \in A^{**}$.

Obratno, neka je $(mn)^* = n^*m^*$ *ili* $(m\cdot n)^* = n^*\cdot m^*$, $\forall m,n \in A^{**}$. Tada je

$$(mn)^*(f) = \left(n^*m^*\right)(f) = n^*\left(m^*f\right) = n\left(f^*m\right) = (m\cdot n)^*(f), \text{ ili}$$

$$(m\cdot n)^*(f) = \left(n^*\cdot m^*\right)(f) = m^*\left(fn^*\right) = m\left(nf^*\right) = (mn)^*(f),\ \forall f \in A^*,$$

tj. $mn = m \cdot n$, $\forall m, n \in A^{**}$ i A je regularno.
Na osnovu date diskusije, imamo sledeće.

Propozicija 3.1.7.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra. A^{**} je realna Banahova $*$ algebra sa Arensovim proizvodom prvog i drugog reda i operacijom $*$ ako i samo ako je A regularna.

Napomena: Ova propozicija takođe važi za proizvoljnu kompleksnu Banahovu $*$ algebru. Naravno, moramo definisati

$$f^*(a) = \overline{f(a^*)} \text{ , } m^*(f) = \overline{m(f^*)} \text{ , } \forall a \in B \text{ , } f \in B^* \text{ , } m \in B^{**}.$$

3.2 Abelove realne Banahove $*$ algebre

Neka je A Abelova realna Banahova $*$ algebra i Ω njen spektralni prostor. Sada, osim operacije “ $-$ “ na Ω (videti definiciju 2.7.1) imamo i operaciju $*$ na Ω, tj.

$$\rho^*(a) = \overline{\rho(a^*)} \text{ , } \forall a \in A \text{ , } \rho \in \Omega .$$

Jasno, operacija $*$ je takođe i homeomorfizam na Ω sa periodom 2. Zapazimo da je “$- = id$” na Ω ekvivalentan sa Gelfandovom transformacijom $\hat{a}(\rho) \in \mathbb{R}$ $(\forall a \in A, \rho \in \Omega)$; šta je sa “$* = id$” na Ω?

Lema 3.2.1.

Neka je A Abelova realna Banahova $*$ algebra i $r(a)^2 = r(a^* a)$, $\forall a \in A$. Onda je A anti – hermitska , tj. $\sigma(k) \subset i\mathbb{R}$, $\forall k \in A_K$.

Dokaz : Neka je $k^* = -k \in A$ i $1 + i\mu \in \sigma(k)$, gde $\mu \in \mathbb{R}$. Tada postoji $\rho \in \Omega$ tako da je $\rho(k) = 1 + i\mu$. Neka je $a = (\lambda + k)^m k$, gde je $\lambda > 0$. Tada važi

$$\rho(a) = (\lambda + 1 + i\mu)^m \rho(k) .$$

Jasno,

$$0 < 1 + \mu^2 = |\rho(k)|^2 \le r(k)^2 = r(k^* k) .$$

Takođe,

$$\left[(\lambda+1)^2+\mu^2\right]^m \left|\rho(k)\right|^2 = \left|\rho(a)\right|^2 \le r(a)^2 = r\left(a^*a\right)$$
$$= r\left(\left(\lambda^2-k^2\right)^m k^*k\right) \le r\left(\lambda^2-k^2\right)^m r\left(k^*k\right)$$

Ako uzmemo *m-ti* koren i pustimo da $m \to \infty$, dobijamo

$$(\lambda+1)^2+\mu^2 \le r\left(\lambda^2-k^2\right) \le \lambda^2 + r(k)^2$$

ili

$$2\lambda+1+\mu^2 \le r(k)^2 \ , \forall\lambda > 0.$$

To je nemoguće. Dakle, *A* je anti-hermitska.

□

Definicija 3.2.2.

Neka je *A* realna Banahova ∗ algebra. Kažemo da je *A* *hermitska*, ako je $\sigma(h) \subset \mathbb{R}, \forall h \in A_H = \left\{a \in A \middle| a^* = a\right\}$, kažemo da je *A* *anti-hermitska*, ako je $\sigma(k) \subset i\mathbb{R}$, $\forall k \in A_K = \left\{a \in A \middle| a^* = -a\right\}$.

Teorema 3.2.3.

Neka je *A* Abelova realna Banahova ∗ algebra. Onda su sledeći iskazi ekvivalnetni:

1. *A* je hermitska i anti-hermitska;
2. $\tilde{A}$ je hermitska i anti-hermitska;
3. A_c je hermitska;
4. $* = id$ na Ω, tj: $\rho^* = \rho, \forall \rho \in \Omega$;
5. svaki maksimalan regularni ideal od *A* je zatvoren u odnosu na operaciju ∗;
6. Gelfandova transformacija $\Gamma : A \to C_0(\Omega,-)$ je ∗ homomorfizam, gde je $f^*(\cdot) = \overline{f(\cdot)}$, $\forall f \in C_0(\Omega,-)$;
7. *A* je hermitska i $r(a)^2 = r\left(a^*a\right), \forall a \in A$.

Dokaz : Ekvivalnecije između 1, 2 i 3. su očigledne.
Da je 3.⇔4. sledi iz kompleksnog slučaja. Na osnovu teoreme 2.7.5, imamo ekvivalenciju između 4. i 5.
4.⇔6. je očigledno.
3. ⇔7. sledi iz kompleksnog slučaja.
7. ⇔1. sledi iz Leme 3.2.1.

□

Posledica 3.2.4.

Neka je A Abelova, hermitska i anti-hermitska realna Banahova $*$ algebra. Onda je

$$R(A)=\{a\in A \mid r(a)=p(a)=0\}=p^{-1}(0)=R(A_c)\cap A \text{ i}$$
$$R(A_c)=R(A)+iR(A),$$

gde je

$$p(a)=r\left(a^*a\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall a\in A.$$

Dokaz : Ne osnovu Teoreme 3.2.3, $r(\cdot)=p(\cdot)$ na A. Dokaz očigledno sledi iz Propozicije 2.7.6.

□

3.3 Pozitivne linearne funkcionele i GNS konstrukcija

Definicija 3.3.1.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra i $f\,(:A\to\mathbb{R})$ (realna) linearna funkcionela na A.
f je *hermitska* , ako je $f^*=f$ tj. $f\left(a^*\right)=f(a), \forall a\in A$ ili $f\,|A_K=0$.
f je *pozitivna* , u oznaci $f\geq 0$, ako je $f\left(a^*a\right)\geq 0,\ \forall a\in A$.
Napomena : U kompleksnom slučaju sa identitetom, $f\geq 0$ implicira da je f hermitska. Ovo ne važi u realnom slučaju.

Propozicija 3.3.2.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra, $f\geq 0$ i hermitska funkcionela na A. Onda je $f_c\geq 0$ i hermitska funkcionela na A_c, $f_b(\cdot)\geq 0$ i hermitska funkcionela na A, $f_b(\cdot)\in A^*$ i

$$f\left(b^*a\right)^2\leq f\left(a^*a\right)f\left(b^*b\right)\ (\text{Švarcova nejednakost})$$
$$\left|f_b(a)\right|\leq f\left(b^*b\right)p(a),$$

gde je $f_b(\cdot)=f\left(b^*\cdot b\right)$, $p(a)=r\left(a^*a\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall a,b\in A$.

Dokaz : Jasno, $f_c \geq 0$ i to je hermitska funkcionela na A_c. Ostalo zaključujemo iz kompleksnog slučaja.

□

Definicija 3.3.3.

Neka je A realna Banahova ∗ algebra. $\{\pi, H\}$ se naziva ∗ - *reprezentacija* od *A*, ako je *H* realan Hilbertov prostor i π je ∗ homomorfizam iz *A* na *B(H)*. Kako $\{\pi, H\}$ može biti prirodno prošireno na ∗ reprezentaciju $\{\pi_c, H_c\}$ od A_c, sledi da je $\pi : A \to B(H)$ neprekidno i

$$\|\pi(a)\| \leq p(a), \ \forall a \in A.$$

Neka je sada *A* realna Banahova ∗ algebra, $f \geq 0$ i hermitska funkcionela na *A*, i neka je

$$L_f = \left\{ a \in A \middle| f\left(a^* a\right) = 0 \right\}$$

levo jezgro od *f*. Prema Švarcovoj nejednakosti, L_f je levi ideal od *A*.
Definišemo unutrašnji proizvod $\langle , \rangle$ na A / L_f na sledeći način:

$$\left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle = f\left(b^* a\right),$$

$\forall a \in \tilde{a} = a + L_f$, $b \in \tilde{b} = b + L_f \in A / L_f$. Onda je njegovo kompletiranje $H_f = \left(A / L_f, \langle , \rangle\right)^-$ realan Hilbertov prostor. Za svako $a \in A$, neka važi $\pi_f\left(a\right)\tilde{b} = \tilde{ab}, \forall \tilde{b} \in A / L_f$.
Na osnovu Propozicije 3.3.2, imamo

$$\begin{aligned} \left\|\pi_f\left(a\right)\tilde{b}\right\|^2 &= f\left(b^* a^* ab\right) = f_b\left(a^* a\right) \\ &\leq f\left(b^* b\right) p\left(a\right)^2 = p\left(a\right)^2 \left\|\tilde{b}\right\|, \forall \tilde{b} \in A / L_f. \end{aligned}$$

Zbog toga $\pi_f\left(a\right)$ može biti na jedinstven način prošireno do ograničenog linearnog operatora na H_f, što i dalje označavamo sa $\pi_f\left(a\right)$. Dobijamo sledeće.

Teorema 3.3.4. (GNS konstrukcija)

Neka je *A* realna Banahova ∗ algebra, $f \geq 0$ i hermitska funkcionela na *A*. Onda postoji ∗ reprezentacija $\{\pi_f, H_f\}$ od *A* takva da je

$$f_b(a) = \left\langle \pi_f(a)\tilde{b}, \tilde{b} \right\rangle, \ \forall a, b \in A.$$

Štaviše, ako A ima jedinični element (identitet) 1, onda je $\xi_f = \tilde{1}$ cikličan vektor za $\{\pi_f, H_f\}$ $\left(\text{tj. } \overline{\pi_f(A)\xi_f} = H_f\right)$ i

$$f(a) = \langle \pi_f(a)\xi_f, \xi_f \rangle, \ \forall a \in A.$$

Ako A nema identitet, sledeća klasa pozitivnih funkcionela je važna.

<u>*Definicija 3.3.5.*</u>

Neka je A realna Banahova $*$ algebra bez identiteta, $\tilde{A} = A + \mathbb{R}$, $f \geq 0$ i hermitska funkcionela na A. Kažemo da je f <u>*pozitivno proširenje*</u>, ako postoji $\tilde{f} \geq 0$ na $\tilde{A}$ tako da je $\tilde{f}|A = f$. Jasno, $\tilde{f}$ mora biti hermitska funkcionela na $\tilde{A}$. Označimo $\varepsilon(A) = \{f \mid f \geq 0, \text{ hermitska funkcionela na } A \text{ sa pozitivnim proširenjem}\}$.

<u>*Propozicija 3.3.6.*</u>

Neka je A realna Banahova $*$ algebra, $f \geq 0$ i hermitska funkcionela na A. Tada $f \in \varepsilon(A)$, ako i samo ako postoji pozitivna konstanta K tako da je

$$f(a)^2 \leq K f(a^* a), \ \forall a \in A.$$

Dokaz :

$f \in \varepsilon(A) \Leftrightarrow$ možemo definisati $f(1)$ tako da važi $f\left((a+\lambda)^*(a+\lambda)\right) \geq 0$, $\forall a \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ možemo definisati $f(1)$ tako da važi

$$f(a^* a) + 2\lambda f(a) + \lambda^2 f(1) \geq 0, \forall a \in A, \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$ možemo definisati $f(1)$ tako da važi

$$f(a)^2 \leq f(1) f(a^* a), \forall a \in A$$

$\Leftrightarrow$ postoji konstanta K $\left(= f(1)\right) > 0$ tako da važi

$$f(a)^2 \leq K f(a^* a), \forall a \in A.$$

□

Definicija 3.3.7.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra sa identitetom. Označimo $S(A)=\{\rho|\rho\geq 0, \text{hermitska funkcionela na } A \text{ i } \rho(1)=1\}$. $S(A)$ se naziva *prostor realnih stanja* od A.
$\rho\in S(A)$ se naziva *realno stanje* na A.

Propozicija 3.3.8.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra sa identitetom. Onda je $S(A)$ $\sigma(A^*,A)$ - kompaktan konveksan podskup od A^*.

Dokaz: Na osnovu Propozicije 3.3.2, $S(A)\subset A^*$. Jasno, $S(A)$ je konveksan i zatvoren u odnosu na $\sigma(A^*,A)$. Sada je dovoljno da pokažemo da je $S(A)$ ograničen. Kako je operacija $*$ neprekidna na $A_c/R(A_c)$, gde je $R(A_c)$ radikal od A_c, sledi da postoji konstanta $K>0$ tako da važi

$$\left\|\tilde{a}^*\right\|\leq K^2\|\tilde{a}\|,\ \forall\tilde{a}\in A_c/R(A_c).$$

Za proizvoljno $\rho\in S(A)$, $\rho_c\in S(A_c)$ i $\rho_c|R(A_c)=0$ je očigledno.
Zato, možemo definisati $\tilde{\rho}_c\in S(A_c/R(A_c))$, tj. $\tilde{\rho}_c(\tilde{a})=\rho_c(a)$, $\forall a\in\tilde{a}\in A_c/R(A_c)$.
Tada je

$$|\rho(a)|^2=|\tilde{\rho}_c(\tilde{a})|^2\leq r_B\left(\widetilde{a^*\tilde{a}}\right)\leq\left\|\widetilde{a^*\tilde{a}}\right\|\leq K^2\|\tilde{a}\|^2\leq K^2\|a\|^2$$

$\forall a\in A$, gde je $B=A_c/R(A_c)$, tj. $\|\rho\|\leq K$.

□

Definicija 3.3.9.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra sa identitetom. $*$ reprezentacija

$$\left\{\pi_u=\oplus_{\rho\in S(A)\pi_\rho}, H_u=\oplus_{\rho\in S(A)}H_\rho\right\}$$

naziva se *univerzalna $*$ reprezentacija* od A.

3.4 $*$ Reprezentacije i topološki nesvodljive $*$ reprezentacije

Definicija 3.4.1.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra. Za $*$ reprezentaciju $\{\pi, H\}$ od A kaže se da je *topološki nesvodljiva* ako je $E=\{0\}$ ili je H jedini zatvoren (realno) linearan potprostor od H koji zadovoljava $\pi(a)E \subset E, \forall a \in A$.

Definicija 3.4.2.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra sa identitetom. $\mathcal{P}(A)=exS(A)$ (skup svih ekstremnih tačaka od $S(A)$) naziva se prostor *čistih stvarnih stanja* od A. Svako $\rho \in \mathcal{P}(A)$ se naziva *čisto stvarno stanje* na A.

Propozicija 3.4.3.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra sa identitetom, ρ stvarno stanje na A i $\{\pi_\rho, H_\rho\}$ $*$ reprezentacija od A indukovana pomoću ρ. Onda je $\{\pi_\rho, H_\rho\}$ *topološki nesvodljiva* ako i samo ako je $\rho \in \mathcal{P}(A)$.

Još važi, ako je $\{\pi, H\}$ topološki nesvodljiva $*$ reprezentacija od A, onda postoji $\rho \in \mathcal{P}(A)$ takvo da je $\{\pi, H\} \cong \{\pi_\rho, H_\rho\}$ (unitarno ekvivalentno).

Dokaz: Prvi deo tvrđenja dokazuje se slično kompleksnom slučaju. Neka je sada $\{\pi, H\}$ topološki nesvodljivo. Jasno, $\pi(1)=1$ (jedinični operator na H). Uzmimo $\xi \in H$ i $\|\xi\|=1$. Tada je

$$\rho(\cdot)=\langle \pi\langle\cdot\rangle\xi, \xi\rangle \in S(A).$$

Definišimo $U: H \to H_\rho$ tako da $U\pi(a)\xi=\tilde{a}=a+L_\rho$, $\forall a \in A$. Zaključak sledi direktno.

□

Sada razmatramo postojanje ne-nula $*$ reprezentacija i ne-nula topološki nesvodljivih $*$ reprezentacija.

<u>*Propozicija 3.4.4.*</u>

Neka je A realna Banahova $*$ algebra sa identitetom. Tada

$$\left\{\{\pi, H\} \middle| \{\pi, H\} \text{ je ne-nula } * \text{ reprezentacija od } A\right\} \neq \varnothing$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\{\pi, H\} \middle| \{\pi, H\} \text{ je ne-nula topološki nesvodljiva } * \text{ reprezentacija od } A\right\} \neq \varnothing$$

$\Leftrightarrow$

$$S(A) \neq \varnothing .$$

Dokaz: Ako je $S(A) \neq \varnothing$, onda je $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$ prema Propoziciji 3.3.8. i Krein-Milmanovoj teoremi. Prema tome, postoje ne-nula $*$ reprezentacije od A i ne-nula topološki nesvodljive $*$ reprezentacije od A.

Obratno, neka je $\{\pi, H\}$ ne-nula $*$ reprezentacija od A. Uzimanje restrikcije od π na neki potprostor od H, možemo pretpostaviti da postoji $\xi \in H$ tako da $\overline{\pi(A)\xi} = H$ i $\|\xi\| = 1$. Onda je

$$\rho(\cdot) = \langle \pi(\cdot)\xi, \xi \rangle \in S(A)$$

i $S(A) \neq \varnothing$.

$\square$

Neka je sada A realna Banahova $*$ algebra bez identiteta i $\tilde{A} = A + \mathbb{R}$.

(1) Neka je $\rho_0(a+\lambda) = \lambda, \forall a \in A, \lambda \in \mathbb{R}$. Onda je ρ_0 čisto stvarno stanje na $\tilde{A}$ i $*$ reprezentacija $\{\tilde{\pi}_0, \tilde{H}_0, \tilde{\varepsilon}_0\}$ indukovana sa ρ_0 je jednodimenzionalna topološki nesvodljiva $*$ reprezentacija od $\tilde{A}$.
Zapravo, levo jezgro $\tilde{I}_0$ od ρ_0 je

$$\tilde{L}_0 = \left\{(a+\lambda) \middle| a \in A,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \rho_0\left((a+\lambda)^*(a+\lambda)\right) = 0\right\} = A$$

i

$$\tilde{H}_0 = \tilde{A} / \tilde{L}_0 = \mathbb{R},\ \tilde{\pi}_0(a+\lambda) = \lambda 1,\ \forall a \in A,\ \lambda \in \mathbb{R} .$$

(2) Jasno

$$\begin{aligned}
&\# S(\tilde{A}) > 1 \\
&\left(\Leftrightarrow \{\rho_0\} \subsetneq S(\tilde{A}) \Leftrightarrow \{\rho_0\} \subsetneq \mathcal{P}(\tilde{A})\right) \\
&\Leftrightarrow \left\{f \middle| f \geq 0,\ f \text{ je hermitska funkcionela na } \tilde{A} \text{ i } f|A \neq 0\right\} \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow \varepsilon(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing .
\end{aligned}$$

(3) $\#S(\tilde{A})>1$

$\Leftrightarrow$ postoji ne-nula $*$ reprezentacija od A

$\Leftrightarrow$ postoji $*$ reprezentacija π od $\tilde{A}$ tako da $\pi|A\neq 0$, gde $\#E$ označava koordinantni broj proizvoljnog skupa E.

U stvari, ako je $\{\pi,H\}$ ne-nula $*$ reprezentacija od A, onda ona može biti proširena na $*$ reprezentaciju od $\tilde{A}$ (definišući $\pi(1)=1$). Dalje, neka $a\in A$ i $\xi\in H$ tako da je $\pi(a)\xi\neq 0$ i $\|\xi\|=1$. Onda je $\rho(\cdot)=\langle\pi(\cdot)\xi,\xi\rangle\in S(\tilde{A})\setminus\{\rho_0\}$.

Obratno, neka je $\rho\in S(\tilde{A})\setminus\{\rho_0\}$ i $\{\pi,H,\xi\}$ ciklična $*$ reprezentacija od $\tilde{A}$ indukovana sa ρ. Tvrdimo da je $\pi|A\neq 0$. U suprotnom,

$$\rho(a)=\langle\pi(a)\xi,\xi\rangle=0,\ \forall a\in A,$$

i $\rho=\rho_0$. Ovo je kontradikcija.

(4) $\#S(\tilde{A})>1$

$\Leftrightarrow$ postoji ne-nula topološki nesvodljiva $*$ reprezentacija od A

$\Leftrightarrow$ postoji topološki nesvodljiva $*$ reprezentacija π od $\tilde{A}$ tako da je $\pi|A\neq 0$.

U suprotnom bi bilo, ako je $\#S(\tilde{A})>1$ tada je $\#\mathcal{P}(\tilde{A})>1$ i postoji $\rho\in\mathcal{P}(\tilde{A})\setminus\{\rho_0\}$.

Neka je $\{\pi,H,\xi\}$ ciklična $*$ reprezentacija od $\tilde{A}$ indukovana sa ρ. Tvrdimo da je $\pi|A\neq 0$. Obratno

$$\rho(a)=\langle\pi(a)\xi,\xi\rangle=0,\ \forall a\in A$$

i $\rho=\rho_0$, a to je kontradikcija. Jasno, π je topološki nesvodljivo na $\tilde{A}$. Obratno, ako A ima ne-nula topološki nesvodljivu $*$ reprezentaciju, onda je $\#S(\tilde{A})>1$ na osnovu (3).

Na osnovu ove diskusije, imamo sledeće.

<u>*Propozicija 3.4.5.*</u>

Neka je A realna Banahova $*$ algebra bez identiteta i $\tilde{A}=A+\mathbb{R}$. Onda su sledeći iskazi ekvivalentni:

(i) Postoji ne-nula $*$ reprezentacija od A.
(ii) Postoji ne-nula topološki nesvodljiva $*$ reprezentacija od A.
(iii) $\#S(\tilde{A})>1$.
(iv) $\varepsilon(A)\setminus\{0\}\neq\varnothing$.

3.5 $*$ Radikal

Definicija 3.5.1.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra. Onda je

$$R^* = R^*(A) = \bigcap \{\ker \pi \,|\, \pi \text{ je } * \text{ reprezentacija od } A\}$$

$*$ - radikal od A.

A nema ne-nula $*$ reprezentaciju, ako je $R^* = A$; ako je $R^* = \{0\}$, onda kažemo da je A $*$ semi-jednostavna [semi-simple]. Kako je svaka $*$ reprezentacija od A neprekidna, R^* je u odnosu na $*$ zatvoren, dvostrani ideal od A. Jasno A / R^* biće $*$ semi-jednostavna i

$$R^*(A) = R^*(\tilde{A}) = \bigcap \{\ker \pi \,|\, \pi \text{ je } * \text{ reprezentacija od } \tilde{A}\}.$$

Štaviše, ako je $R = R(A)$ radikal od A, onda je R takođe zatvoren u odnosu na $*$ dvostrani ideal od A, prema Teoremi 2.4.4.

Napomena: Mi ne znamo da li je zadovoljeno $R(A_c) = R(A) + iR(A)$ (videti kraj odeljka 2.4.). Ali imamo

$$R^*(A_c) = R^*(A) + iR^*(A).$$

Zapravo, neka je $a + ib \in R^*(A_c)$, gde $a, b \in A$ i $\{\pi, H\}$ je proizvoljna $*$ reprezentacija od A. Otuda je $\{\pi_c, H_c\}$ $*$ reprezentacija od A_c, gde je $\pi_c = \pi + i\pi,\ H_c = H + iH$ i $\pi_c(a + ib) = \pi(a) + i\pi(b) = 0$. Prema tome, $\pi(a) = \pi(b) = 0,\ a, b \in R^*(A)$, tj. $R^*(A_c) \subset R^*(A) + iR^*(A)$. Obratno, neka je $a \in R^*(A)$ i $\{\sigma, K\}$ proizvoljna $*$ reprezentacija od A_c. Neka je $H = K_r$ (odeljak 1.1.) i $\pi = \sigma | A$. Onda je $\{\pi, H\}$ $*$ reprezentacija od A. Zato je $\sigma(a) = \pi(a) = 0$ i $a \in R^*(A_c)$ tj. $R^*(A) \subset R^*(A_c)$ i $R^*(A) + iR^*(A_c) \subset R^*(A_c)$.

Propozicija 3.5.2.

Neka je A hermitska realna Banahova $*$ algebra. Onda $R(A) \subset p^{-1}(0) \subset R^*(A)$.
Kao posledica toga, ako je A i $*$ semi-jednostavna, onda je A semi-jednostavna.

Dokaz: Ako je π proizvoljna $*$ reprezentacija od A, onda $\|\pi(a)\| \le p(a),\ \forall a \in A$. Zato, $p^{-1}(0) \subset \ker \pi$ i $p^{-1}(0) \subset R^*$.
Neka je $a \in R$. Onda $a^* a \in R$. Kako je A hermitska, iz Propozicije 2.4.6 sledi

$$\sigma\left(a^*a\right)=\sigma\left(a^*a\right)\cap\mathbb{R}=\{0\}.$$

Dakle, $p\left(a\right)=r\left(a^*a\right)^{\frac{1}{2}}=0$, tj. $R\subset p^{-1}(0)$.

□

Propozicija 3.5.3.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra.

(i)

$$R^*\subsetneq A\Leftrightarrow\begin{cases}S\left(A\right)\neq\varnothing, & \text{ako } A \text{ ima identitet,}\\ \#S\left(\tilde{A}\right)>1, & \text{ako } A \text{ ima identitet.}\end{cases}$$

(ii) Ako je $R^*\subsetneq A$, onda je

$$\begin{aligned}R^*&=\bigcap\left\{\ker\pi\,\middle|\,\pi \text{ je topološki nesvodljiva} * \text{reprezentacija od } A\right\}\\ &=\bigcap\left\{\ker\pi\,\middle|\,\pi \text{ je topološki nesvodljiva} * \text{reprezentacija od } \tilde{A}\right\}.\end{aligned}$$

Dokaz:

(i) Sledi iz Propozicije 3.4.4 i 3.4.5.

(ii) Zbog $R^*\left(A\right)=R^*\left(\tilde{A}\right)$ možemo pretpostaviti da A ima identitet. Ako $a\notin R^*$, onda postoji $*$ reprezentacija $\{\pi,H\}$ od A takva da $\pi\left(a\right)\neq0$. Dalje, možemo pretpostaviti da je $\pi\left(1\right)=1$. Uzmimo $\xi\in H$ tako da je $\pi\left(a^*\right)\xi\neq0$ i $\|\xi\|=1$. Onda

$$\rho\left(\cdot\right)=\left\langle\pi\left(\cdot\right)\xi,\xi\right\rangle\in S\left(A\right)$$

$\rho\left(aa^*\right)>0$. Prema Krein-Milmanovoj teoremi i Propoziciji 3.3.8, $S(A)$ je $\sigma\left(A^*,A\right)$ - zatvaranje od $C_0\,\mathcal{P}(A)$ [=zatvaranje od $C_0\,\mathcal{P}(A)$ u odnosu na $\sigma\left(A^*,A\right)$], gde je C_0E skup svih konveksnih kombinacija skupa E u linearnom prostoru. Zato postoji $\rho\in\mathcal{P}(A)$ tako da je $\rho\left(aa^*\right)>0$. Neka je $\left\{\pi_\rho,H_\rho\right\}$ topološki nesvodljiva $*$ reprezentacija od A indukovana pomoću ρ. Jasno, $a^*\notin L_\rho$ (levo jezgro od ρ). Dalje, tvrdimo da $aa^*\notin L_\rho$. U suprotnom, bilo bi, na osnovu Švarcove nejednakosti

$$0<\rho\left(aa^*\right)^2\leq\rho\left(aa^*\cdot aa^*\right)=0$$

To je nemoguće. Sada je $\pi_\rho\left(a\right)\widetilde{a^*}=\widetilde{aa^*}\neq0$ u H_ρ i $a\notin\ker\pi_\rho$. Zbog toga je $\left(R^*\subset\right)\bigcap\left\{\ker\pi\,|\,\pi\ \text{je topološki nesvodljiva} * \text{reprezentacija od } A\right\}\subset R^*$.

□

Teorema 3.5.4.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra.

(i) Ako A ima identitet (jedinicu) i $R^* \subsetneq A$, onda je

$$R^* = \bigcap\left\{\ker \pi_\rho \middle| \rho \in S(A)\right\} = \bigcap\left\{\ker \pi_\rho \middle| \rho \in \mathcal{P}(A)\right\} = \bigcap\left\{L_\rho \middle| \rho \in S(A)\right\} = \bigcap\left\{L_\rho \middle| \rho \in \mathcal{P}(A)\right\}$$

(ii) Ako A nema identitet (jedinicu) i $R^* \subsetneq A$, onda je

$$\begin{aligned} R^* &= \bigcap\left\{\ker \pi_f \middle| f \in \varepsilon(A)\right\} = \bigcap\left\{L_f \middle| f \in \varepsilon(A)\right\} = \bigcap\left\{\ker \pi_f \middle| f \in \varepsilon(A) \text{ i } \ker \pi_f \subset L_f\right\} \\ &= \bigcap\left\{\ker \pi_f \middle| f \geq 0 \text{ i hermitska funkcionela na } A\right\}. \end{aligned}$$

Dokaz:

(i) Jasno, $R^* \subset \ker \pi_\rho \subset L_\rho, \forall \rho \in S(A)$. Obratno, ako $a \notin R^*$, onda postoji $*$ reprezentacija $\{\pi, H\}$ od A tako da je $\pi(a) \neq 0$. To ukazuje da postoji $\xi \in H$ tako da je $\pi(a)\xi \neq 0$. Bez gubitka opštosti, možemo da pretpostavimo $\|\xi\| = 1$ i $\overline{\pi(A)\xi} = H$. Onda je $\rho(\cdot) = \langle \pi(\cdot)\xi, \xi\rangle \in S(A)$ i $\rho(a^* a) = \|\pi(a)\xi\|^2 > 0$, tj. $a \notin L_\rho$. Kako je $\overline{C_0\mathcal{P}(A)}^\sigma = S(A)$ sledi da je

$$\bigcap\left\{L_\rho \middle| \rho \in \mathcal{P}(A)\right\} = \bigcap\left\{L_\rho \middle| \rho \in S(A)\right\}.$$

Štaviše, $L_\rho \supset \ker \pi_\rho \supset \bigcap\left\{\ker \pi_\sigma \middle| \sigma \in \mathcal{P}(A)\right\} \supset R^*$, $\forall \rho \in \mathcal{P}(A)$. Odatle dobijamo (i).

(ii) Na osnovu (i), imamo

$$R^* = R^*(\tilde{A}) = \bigcap\left\{\ker \pi_\rho \middle| \rho \in S(\tilde{A})\right\} = \bigcap\left\{L_\rho \middle| \rho \in S(\tilde{A})\right\}.$$

Neka je $\rho_0(a + \lambda) = \lambda, \forall a \in A, \lambda \in \mathbb{R}$. Onda $\rho_0 \in S(\tilde{A})$, $\ker \widetilde{\pi_0} = A, \widetilde{L_0} = A$, gde je $\widetilde{L_0}$ levo jezgro od ρ_0 i $\left\{\widetilde{\pi_0}, \widetilde{H_0}\right\}$ je $*$ reprezentacija od $\tilde{A}$ indukovana sa ρ_0. Odatle

$$R^* = \bigcap\left\{L_\rho \middle| \rho \in S(\tilde{A})\right\} = \bigcap\left\{(L_\rho \cap A) \middle| \rho \in S(\tilde{A}) \setminus \{\rho_0\}\right\} = \bigcap\left\{L_f \middle| f \in \varepsilon(A) \setminus \{0\}\right\} = \bigcap\left\{L_f \middle| f \in \varepsilon(A)\right\}$$

Ako primetimo da je svaka $*$ reprezentacija od A direktna suma nekih cikličnih $*$ reprezentacija od A i nula $*$ reprezentacija od A, imamo $R^* = \bigcap\left\{\ker \pi \middle| \{\pi, H, \xi\} \text{ je ciklična } * \text{ reprezentacija od } A\right\}$

Za cikličnu $*$ reprezentaciju $\{\pi, H, \xi\}$ od A, neka je $f(\cdot) = \langle \pi(\cdot)\xi, \xi \rangle$. Onda $f \in \varepsilon(A)$ i

$$\begin{aligned} a \in \ker \pi &\Leftrightarrow \pi(a)\pi(b)\xi = 0,\ \forall b \in A \\ &\Leftrightarrow f\left(b^* a^* ab\right) = 0,\ \forall b \in A \\ &\Leftrightarrow ab \in L_f,\ \forall b \in A \Leftrightarrow a \in \ker \pi_f, \end{aligned}$$

tj. $\ker \pi = \ker \pi_f$. Štaviše, u ovom slučaju $f\left(a^* a\right) = \left\|\pi(a)\xi\right\|^2 = 0$ ako $a \in \ker \pi$, tj. $\ker \pi = \ker \pi_f \subset L_f$. Zato imamo

$$\begin{aligned} R^* &= \bigcap \left\{ \ker \pi_f \,\middle|\, f \in \varepsilon(A) \text{ i } \ker \pi_f \subset L_f \right\} = \bigcap \left\{ \ker \pi_f \,\middle|\, f \in \varepsilon(A) \right\} \\ &= \bigcap \left\{ \ker \pi_f \,\middle|\, f \geq 0 \text{ i hermitska funkcionela na } A \right\}. \end{aligned}$$

□

Napomena: Ako A ima identitet, u opštem slučaju $R^* \subsetneq \bigcap \left\{ \rho^{-1}(0) \,\middle|\, \rho \in S(A) \right\}$ jer $\rho \big| A_K = 0,\ \forall \rho \in S(A)$. Ovo se razlikuje od kompleksnog slučaja.

3.6 Simetrične realne Banahove $*$ algebre

Definicija 3.6.1.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra. Kažemo da je $a \in A$ *pozitivno*, u oznaci $a \geq 0$, ako je $a^* = a$ i $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$. Označimo podskup svih pozitivnih elemenata u A sa A_+ i $a \geq b$ ako $a^* = a,\ b^* = b \in A$ i $(a - b) \in A_+$.

Označimo $p(a) = r\left(a^* a\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall a \in A$.

Teorema 3.6.2.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra, koja je hermitska i anti-hermitska.

(1) Ako $a \in A$ i $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$, onda je $r(a)^2 \leq r\left(a^* a\right)$.

(2) Ako je $h_1 = a^* a, h_2^* = h_2 \in A$, onda je $r(h_1 h_2) \leq r(h_1) r(h_2)$.

(3) A_+ je konus tj. ako je $a, b \geq 0$ onda je $a + b \geq 0$.

(4) Ako je $h_i^* = h_i \in A,\ i = 1, 2$, onda je $r(h_1 + h_2) \leq r(h_1) + r(h_2)$.

(5) $r\left(\frac{a\pm a^*}{2}\right)\le p(a),\ \forall a\in A$.

(6) $r(a)=p(a)$ za svako normalno $a\in A$, tj $a^*a=aa^*$.

(7) $p(\cdot)$ je algebarska kvazi-norma na A.

Dokaz:

(1) Bez gubitka opštosti, možemo pretpostaviti da A ima identitet. Za proizvoljno $\lambda\in\mathbb{R}$, za koje je $|\lambda|>1$ i $\varepsilon>0$, samo treba da pokažemo da je 1-b invertibilno, gde je

$$b=\frac{a}{\lambda\left(r\left(a^*a\right)+\varepsilon\right)^{1/2}}.$$

U stvari, ovo implicira $\lambda\left(r\left(a^*a\right)+\varepsilon\right)^{1/2}\notin\sigma(a),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$ sa $|\lambda|>1$. Kako je $\sigma(a)\subset\mathbb{R}$, sledi da je

$$r(a)\le\left(r\left(a^*a\right)+\varepsilon\right)^{1/2},\ \forall\varepsilon>0.$$

Zbog toga imamo $r(a)^2\le r\left(a^*a\right)$.

Sada dokazujemo da je 1-b invertibilno. Jasno $r\left(b^*b\right)=r\left(bb^*\right)<1$. Kako je A hermitska, sledi da je $1-b^*b>0$ *i* $1-bb^*>0$. Prema Lemi 3.1.2, postoje $u>0,\upsilon>0$, tako da je $1-b^*b=u^2$ i $1-bb^*=\upsilon^2$.

Ako primetimo da je $\left(1+b^*\right)(1-b)=u\left(1+u^{-1}\left(b^*-b\right)u^{-1}\right)u$ i A anti-hermitska, sledi da 1-b ima levi inverzni element. Slično, iz

$$(1-b)\left(1+b^*\right)=\upsilon\left(1+\upsilon^{-1}\left(b^*-b\right)\upsilon^{-1}\right)\upsilon$$

sledi da 1-b ima desni inverzni element. Dakle, 1-b je invertibilno.

(2) Kako je A hermitska, imamo

$$\sigma\left(h_1h_2\right)\cup\{0\}=\sigma\left(ah_2a^*\right)\cup\{0\}\subset\mathbb{R}.$$

Prema (1),

$$r(h_1 h_2) \le r(h_2 h_1^2 h_2)^{\frac{1}{2}} = r(h_1^2 h_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \ldots \le r\left(h_1^{2^n} h_2^{2^n}\right)^{1/2^n} \le \left\|h_1^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left\|h_2^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}}, \ \forall n.$$

Neka $n \to +\infty$. Odatle dobijamo $r(h_1 h_2) \le r(h_1) r(h_2)$.

(3) Bez gubitka opštosti, možemo pretpostaviti da A ima identitet. Pokazaćemo najpre da je $1+a+b$ invertibilno. Zbog

$$1 + a + b = (1-\varepsilon)\left(1 + \frac{a+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{b}{1-\varepsilon}\right), \ \forall \varepsilon \in (0,1),$$

možemo pretpostaviti da je $a > 0$. Onda

$$1 + a + b = (1+a)(1-u\upsilon)(1+b),$$

gde $u = (1+a)^{-1} a > 0$, $\upsilon = (1+b)^{-1} b \ge 0$. Jasno, $r(1-u) < 1$, $r(u) < 1$, $r(\upsilon) < 1$. Na osnovu Leme 3.1.2, možemo zapisati $u = \omega^2, \omega > 0$. Iz (2) imamo $r(u\upsilon) \le r(u) r(\upsilon) < 1$. Zbog toga je $1 - u\upsilon$ invertibilno, pa je i $1 + a + b$ invertibilno. Kako je $\lambda + a + b = \lambda\left(1 + \lambda^{-1} a + \lambda^{-1} b\right)$ za svako $\lambda > 0$, iz prethodnog pasusa sledi da je $\lambda + a + b$ invertibilno, $\forall \lambda > 0$. Dakle, $a + b \ge 0$.

(4) - (7) Dokazuje se slično kompleksnom slučaju.

□

Napomena: Nejednakost "$r(a)^2 \le r(a^* a)$" ili "$r(a) \le p(a)$" naziva se Ptakova nejednakost. Ako je B hermitska kompleksna Banahova ∗ algebra, onda ova nejednakost važi za svaki element iz B. Ali, u realnom slučaju, moramo pretpostaviti da $\lambda \in \mathbb{R}$. Zbog toga ne znamo da li Ptakova nejednakost važi za proizvoljan element u realnom slučaju.

<u>Teorema 3.6.3.</u>

Neka je A realna Banahova ∗ algebra. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(1) A je hermitska i anti-hermitska.

(2) A je hermitska i $r\left(\frac{a \pm a^*}{2}\right) \le p(a), \ \forall a \in A$.

(3) A je hermitska i $r(a) = p(a)$, za svako normalno $a \in A$.

(4) A je hermitska i $p(\cdot)$ je sub-aditivna na A.

Dokaz: (1)⇒(2)⇒(3) i (1)⇒(4) sledi lako na osnovu Teoreme 3.6.2.
(4)⇒(2) očigledno.

(3)⇒(1) Posmatrajmo maksimalnu Abelovu $*$ podalgebru koja sadrži a. Sada je to kao u slučaju Abelove algebre, a to je Teorema 3.2.3.

□

Definicija 3.6.4.

Za realnu Banahovu $*$ algebru A, kažemo da je *simetrična* ako važi $a^*a \geq 0,\ \forall a \in A$.

Teorema 3.6.5.

Neka je A realna Banahova $*$ algebra. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(1) A je simetrična.
(2) A je hermitska i anti-hermitska.
(3) $1 + a^*a$ je invertibilno u $\widetilde{A}$, $\forall a \in \widetilde{A}$.
(4) $\operatorname{Re}\sigma\left(a^*a\right) \geq 0,\ \forall a \in \widetilde{A}$.
(5) $-\lambda \notin \sigma\left(a^*a\right),\ \forall \lambda > 0, a \in \widetilde{A}$.

Dokaz: (1)⇒(2) Jasno.
(2)⇒(1) Možemo pretpostaviti da A ima identitet. Neka postoji $a \in A$ tako da je

$$\delta = \inf\left\{\lambda \,\middle|\, \lambda \in \sigma\left(a^*a\right)\right\} < 0 .$$

Ako zamenimo a sa μa (za neko $\mu > 0$), možemo pretpostaviti da tada $\delta \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$. Stavimo

$$b = 2a\left(1 + a^*a\right)^{-1}.$$

Tada je $1 - b^*b = \left(1 - a^*a\right)^2\left(1 + a^*a\right)^{-2} \geq 0$ i $\sigma\left(b^*b\right) \subset (-\infty, 1]$. Pišemo $b = h + k$, gde je $h^* = h$, $k^* = -k$. Na osnovu Teoreme 3.6.2,

$$1 + bb^* = 2\left(h^2 - k^2\right) + \left(1 - b^*b\right) \geq 0 ,$$

i $\sigma\left(bb^*\right) \subset [-1, \infty)$. Kako je $\sigma\left(b^*b\right) \cup \{0\} = \sigma\left(bb^*\right) \cup \{0\}$, sledi da $\sigma\left(b^*b\right) \subset [-1, 1]$.
Iz $\delta \in \sigma\left(a^*a\right)$ i $b^*b = 4a^*a\left(1 + a^*a\right)^{-2}$, imamo

$$4\delta / \left(1 + \delta\right)^2 \in \sigma\left(b^*b\right).$$

Zato je $\left|4\delta/(1+\delta)^2\right| \leq 1$, tj. $6|\delta| \leq 1+\delta^2$. Dakle, $|\delta| < \frac{1}{3}$ jer $1+\delta^2 < 2$. To je kontradikcija sa $\delta \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$. Dakle, $a^* a \geq 0$, $\forall a \in A$. Štaviše, $\widetilde{A}$ je simetrična $\Leftrightarrow$ $\widetilde{A}$ je hermitska i anti-hermitska $\Leftrightarrow$ A je hermitska i anti-hermitska $\Leftrightarrow$ A je simetrična. Dakle, (1)$\Leftrightarrow$(3) je očigledno.
Na kraju, (1)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5)$\Rightarrow$(3) je očigledno.

□

Napomena: Prirodno je pitanje: da li iz A je simetrična $\Rightarrow$ A_c je simetrična? U Abelovom (komutativnom) slučaju, odgovor je potvrdan (videti Teoremu 3.2.3 i zapaziti činjenicu A_c je hetmitska $\Leftrightarrow$ A_c je simetrična).

Teorema 3.6.6.

Neka je A je realna Banahova $*$ algebra sa identitetom. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(1) A je simetrična.
(2) A je hermitska i $r(u) = 1, \forall u \in U(A)$.
(3) A je hermitska i $r(u) \leq 1, \forall u \in U(A)$.
(4) A je hermitska i postoji konstanta $\alpha > 0$ tako da je $r(u) \leq \alpha, \forall u \in U(A)$.

Dokaz: (2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4) je očigledno.

(4)$\Rightarrow$(3) Za $u \in U(A)$, u^n je takođe u $U(A)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$r(u)^n = r(u^n) \leq \alpha \text{ i } r(u) \leq \alpha^{\frac{1}{n}},\ \forall n .$$

Dakle, $r(u) \leq 1$, $\forall u \in U(A)$.
(3)$\Rightarrow$(2) To je posledica toga da $u \in U(A)$ implicira $u^{-1} \in U(A)$.
(1)$\Rightarrow$(2) To je očigledno na osnovu Teoreme 3.6.5 i 3.6.3.
(2)$\Rightarrow$(1) Na osnovu Teoreme 3.6.5 dovoljno je da dokažemo da je A anti-hermitska. Neka je $k^* = -k \in A$ sa $r(k) < 1$, neka je B maksimalna Abelova $*$ podalgebra od A koja sadrži k, i neka je Ω spektralni prostor od B. Kao u dokazu Leme 3.1.3, imamo

$$u = h + k \in U(A),$$

gde je $h^* = h$ i $h \in B$. Neka $\rho \in \Omega$. Kako je $r(u) = 1 = r(u^*)$, imamo

$$\rho(h) + \rho(k) = \rho(u) = e^{i\alpha}$$
$$\rho(h) - \rho(k) = \rho(u^*) = e^{i\beta},$$

gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kako je A hermitska, $\rho(h)$ je realno. Onda je

$$0 \le \rho(h)^2 \le \frac{1}{4}\left(\left|\rho(h)+\rho(k)\right|+\left|\rho(h)-\rho(k)\right|\right)^2 \le 1 .$$

U nekom trenutku $\rho(h)^2 - \rho(k)^2 = \rho\left(h^2 - k^2\right) = \rho\left(u^* u\right) = 1$.

Dakle, $\rho(k)^2 = \rho(h)^2 - 1 \le 0$ i $\rho(k) \in i\mathbb{R}, \forall \rho \in \Omega$. Dalje, na osnovu Leme 3.1.1 i Teoreme 2.7.2, $\sigma(k) \subset i\mathbb{R}$.

□

<u>*Propozicija 3.6.7.*</u>

Neka je *A* simetrična realna Banahova $*$ algebra sa identitetom, f hermitska linearna funkcionela na *A* i $f(1)=1$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(1) $f(a) \ge 0, \forall a \in A_+$.
(2) $f \ge 0$ na *A*, tj. $f \in S(A)$.
(3) $f\left(h^2\right) \ge 0, \forall h^* = h \in A$.
(4) $\left|f(h)\right| \le r(h), \forall h^* = h \in A$.
(5) $\left|f(a)\right| \le p(a), \forall a \in A$.
(6) $\left|f(a)\right| \le p(a), \forall a \in A$ i *a* je normalno, tj. $a^* a = a a^*$.

Dokaz: Jasno, imamo (1)⇒(2)⇒(3) i (5)⇒(6)⇒(4),
(2)⇒(1) Ako je $a \ge 0$, onda je $a + \varepsilon > 0$ za svako $\varepsilon > 0$. Na osnovu Leme 3.1.2, postoji $u > 0$ tako da je $a + \varepsilon = u^2 = u^* u$. Onda je $f(a) + \varepsilon = f(a+\varepsilon) = f\left(u^* u\right) \ge 0, \forall \varepsilon > 0$. Zato je $f(a) \ge 0$
(3)⇒(4) Neka je $h^* = h \in A$ i $r(h) < 1$. Onda je $r\left(1-(1 \pm h)\right) < 1$. Na osnovu Leme 3.1.2, postoje $u^* = u$ i $\upsilon^* = \upsilon$ tako da je $1 + h = u^2$ i $1 - h = \upsilon^2$. Tada je $f(1 \pm h) \ge 0$, na osnovu (3), tj. $\left|f(h)\right| \le 1$.
(2)⇒(5) To je očigledno na osnovu Propozicije 3.3.2.
Sada je dovoljno dokazati (4)⇒(2).
Za svako $h^* = h \in A$, imamo

$$\sigma(h) \subset [\alpha, \beta]$$

jer je A hermitska, gde je $\alpha = \min \sigma(h)$, $\beta = \max \sigma(h)$. Neka je $\rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\delta = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Onda je $|\lambda - \rho| \le \delta, \forall \lambda \in \sigma(h)$, tj. $r(h - \rho) \le \delta$. Na osnovu (4),

$$\left|f(h) - \rho\right| = \left|f(h - \rho)\right| \le r(h - \rho) \le \delta .$$

Zato je, $f(h) \ge \rho - \delta = \alpha = \min \sigma(h)$.

Kako je A simetrična, sledi da je $\min\sigma\left(a^*a\right)\geq 0, \forall a\in A$. Dakle,

$$f\left(a^*a\right)\geq \min\sigma\left(a^*a\right)\geq 0,\ \forall a\in A.$$

□

<u>*Lema 3.6.8.*</u>

Neka je A simetrična realna Banahova $*$ algebra sa identitetom i $h^*=h\in A$. Tada za svako $\lambda\in\sigma(h)$ postoji $\rho\in S(A)$ tako da je

$$\rho(h)=\lambda .$$

Specijalno, postoji $\rho\in S(A)$ tako da je

$$|\rho(h)|=r(h).$$

Dokaz: Očigledno, $A=A_H+A_K$. Za $h^*=h\in A$ i $\lambda\in\sigma(h)$, definišemo (realnu) linearnu funkcionelu ρ na $[1,h]=\{\alpha+\beta h|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ na sledeći način $\rho(\alpha+\beta h)=\alpha+\beta\lambda,\forall a,b\in\mathbb{R}$. Onda je $\rho(a)\geq 0$, $\forall a\in[1,h]\bigcap A_+$, $\rho(1)=1$ i $\rho(h)=\lambda$.

Neka je

$$£=\left\{(E,\rho_E)\left|\begin{array}{c} E \text{ je linearan potprostor od } A_H \text{ i } 1,h\in E;\\ \rho_E \text{ je linearna funkcionela na } E, \rho_E(1)=1\\ \rho_E(a)\geq 0,\forall a\in E\bigcap A_+\ i\ \rho_E\big|[1,h]=\rho\end{array}\right.\right\},$$

i $(E,\rho_E)\leq(F,\rho_F)$ ako je $E\subset F\ i\ \left(\rho_F|E\right)=\rho_E$. Na osnovu Zornove Leme, £ sadrži maksimalan element (E,ρ_E).
Tvrdimo da je $E=A_H$.
U stvari, pretpostavimo da postoji $a\in A_H\setminus E$. Neka je $F=E+\mathbb{R}a$. Kako je $1\in E, -r(a)1\leq a\leq r(a)1$ i A_+ je konus (videti Teoremu 3.6.2), možemo da definišemo ρ_F na F tako da je $\left(\rho_F|E\right)=\rho_E\ i\ \sup\{\rho_E(b)\,|b\in E,b\leq a\}\leq\rho_F(a)\leq\inf\{\rho_E(c)|c\in E,\ a\leq c\}$.
Za svako $d+\lambda a\in A_+$, gde $d\in E,\lambda\in\mathbb{R}$, moramo da dokažemo $\rho_F(d+\lambda a)=\rho_E(d)+\lambda\rho_F(a)\geq 0$. Kada je $\lambda=0$, to je očigledno. Ako je $\lambda>0$, onda je $a\geq -d/\lambda$, $\rho_F(a)\geq\rho_E(-d/\lambda)$, tj. $0\leq\rho_F(d+\lambda a)=\rho_E(d)+\lambda\rho_F(a)$. Ako je $\lambda<0$, onda je $a\leq -d/\lambda$, $\rho_F(a)\leq\rho_E(-d/\lambda)$, tj. $0\leq\rho_F(d+\lambda a)=\rho_E(d)+\lambda\rho_F(a)$.

Dakle, $(F,\rho_F)\in £$ i $(E,\rho_E)\lneq(F,\rho_F)$. Ovo je kontradkcija. Dalje, neka je $\rho|A_H=\rho_E$ i $\rho|A_K=0$. Onda je $\rho|A_H=\rho_E$ i $\rho|A_K=0$. Onda je $\rho\in S(A)$ i $\rho(h)=\lambda$.

□

Osnovi realne Džon fon Nojmanove algebre

4.1 Banahovi prostori operatora na realnom Hilbertovom prostoru

Definicija 4.1.1.

Neka je H realan Hilbertov prostor. Treba da označimo sa *F(H), C(H) i B(H)* skup svih linearnih operatora *konačnog ranga*, svih *kompaktnih linearnih operatora* i svih *ograničenih linearnih operatora* na H respektivno.
$\|\cdot\|$ biće norma operatora na H. *Jedinični* operator na H je označen sa 1_H ili 1 ako to ne stvara zabunu i $H_c = H + iH$ je Hilbertova kompleksifikacija od H (videti odeljak 1.1). Štaviše, $F(H_c)$, $C(H_c)$ i $B(H_c)$ su odgovarajući prostori operatora na H_c. Tada je

$$B(H_c) = B(H) + iB(H)$$

kompleksifikacija od *B(H)* u operatorskoj normi $\|\cdot\|$ (videti Propoziciju 1.1.11). Jasno, $F(H_c) = F(H) + iF(H)$.

Propozicija 4.1.2.

Neka je H realan Hilbertov prostor. Onda je

$$C(H) = \left(F(H), \|\cdot\|\right)^{-};$$

C(H) je zatvoren $*$ dvostrano od *B(H)*; *C(H)* nije dualni prostor za svaki Banahov prostor ako je $\dim H = +\infty$; i

$$C(H_c) = C(H) + iC(H)$$

je kompleksifikacija od *C(H)* u $\|\cdot\|$.

Dokaz : Na osnovu dokaza u kompleksnom slučaju, i Propozicije 1.1.11, dovoljno je pokazati da ako je $(a+ib) \in C(H_c)$ onda $a,b \in C(H)$, gde $a,b \in B(H)$.
Za svaki ograničen niz $\{\xi_n\} \subset H$, očigledno postoji podniz $\{\xi_{n_k}\}$ tako da je $\{(a+ib)\xi_{n_k}\}$ konvergentan. Onda $\{a\xi_{n_k}\}$ *i* $\{b\xi_{n_k}\}$ moraju biti konvergentni. Dakle, $a,b \in C(H)$.

□

Definicija 4.1.3.

Neka je *H* realan Hilbertov prostor. Skup svih *klasa operatora tipa traga* na *H*, označimo sa *T(H)*, tj. $a \in T(H)$ ako $a \in C(H)\ i \sum_n \lambda_n < +\infty$, gde je $\{\lambda_n\}$ skup svih pozitivnih karakterističnih vektora $\left(a^* a\right)^{\frac{1}{2}}$.

Za $a \in T(H)$, $\|a\|_1 = \sum_n \lambda_n$ se zove norma traga od *a* i $tr(a) = \sum_l \langle a\xi_l, \xi_l \rangle$ se zove trag od *a*, gde je $\{\xi_l\}$ bilo koja normalizovana ortogonalna baza od *H*. Slično kompleksnom slučaju, $tr(\cdot)$ je dobro definisan na *T(H)*.

Slično kompleksnom slučaju, imamo sledeće.

Teorema 4.1.4.

Neka je *H* realan Hilbertov prostor.

(1) $T(H) = \left(F(H), \|\cdot\|_1\right)^-$ i $T(H)$ je $*$ dvostrani ideal od *B(H)*;

(2) $C(H)^* = T(H)$, tj. za svako $f \in C(H)^*$ postoji jedinstveno $a \in T(H)$ tako da važi $\|f\| = \|a\|_1\ i\ f(c) = tr(ac)$, $\forall c \in C(H)$; obratno, za svako $a \in T(H)$, $tr(a\cdot)$ je neprekidna linearna funkcionela na *C(H)* sa normom $\|a\|_1$;

(3) $T(H)^* = B(H)$, tj. za svako $F \in T(H)^*$ pstoji jedinstveno $b \in B(H)$ tako da važi $\|F\| = \|b\|\ i\ F(a) = tr(ab)$, $\forall a \in T(H)$; obratno, za svako $b \in B(H)$, $tr(\cdot b)$ je neprekidna linearna funkcionela na T(H) sa normom $\|b\|$.

Napomena : *T(H)* se zove *predual* od *B(H)*, i označen je sa $B(H)_* = T(H)$.

Propozicija 4.1.5.

Neka je *H* realan Hilbertov prostor. Onda je $T(H_c) = T(H) + iT(H)$ kompleksifikacija od $T(H)$ u $\|\cdot\|_1$.

Dokaz: Na osnovu $C(H)^* = T(H)$, $C(H_c)^* = T(H_c)$, Propozicije 4.1.2 i 1.1.4 zaključak je očigledan.

□

4.2 Lokalno konveksne topologije u B(H)

Neka je H realan Hibertov prostor. Slično kompleksnom slučaju, predstavićemo sledeće lokalne topologije u *B(H)*:

(1) slaba topologija (operatora);
(2) jaka topologija (operatora);
(3) jaka $*$ topologija (operatora)
(4) σ - slaba topologija (operatora) i ekvivalentna sa $\sigma\left(B(H),T(H)\right)$;
(5) σ - jaka topologija (operatora) i ekvivalentna sa $s\left(B(H),T(H)\right)$;
(6) σ - jaka $*$ topologija (operatora) i ekvivalentna sa $s^*\left(B(H),T(H)\right)$;
(7) Mekejeva[1] topologija $\tau\left(B(H),T(H)\right)$;
(8) uniformna topologija (operatora).

Slično dokazima u kompleksnom slučaju i na osnovu dualne teorije, imamo sledeće.

<u>*Propozicija 4.2.1.*</u>

Neka je H realan Hilbertov prostor i f linearna funkcionela na *B(H)*.

(1) Ako je f $\sigma\left(B(H),T(H)\right)$ - neprekidna, onda postoji jedinstveno $a \in T(H)$ tako da važi

$$f(b) = tr(ab),\ \forall b \in B(H)$$

i postoje $\{\xi_n\},\{\eta_n\} \subset H$ *sa* $\sum_n \left(\|\xi_n\|^2 + \|\eta_n\|^2\right) < +\infty$ tako da važi

$$f(b) = \sum_n \langle b\xi_n, \eta_n\rangle,\ \forall b \in B(H).$$

Štaviše, ako je $f \geq 0$ $\left(tj.\ f\left(b^*b\right) \geq 0,\ \forall b \in B(H)\right)$, onda možemo uzeti da je $\xi_n = \eta_n, \forall n.$

(2) Ako je f slabo neprekidno ili jako neprekidno onda postoji jedinstveno $\upsilon \in F(H)$ tako da važi

$$f(b) = tr(b\upsilon),\ \forall b \in B(H)$$

i postoje $\xi_1,...,\xi_n\ i\ \eta_1,...,\eta_n \in B(H)$ tako da važi

$$f(b) = \sum_{i=1}^{n} \langle b\xi_i, \eta_i\rangle,\ \forall b \in B(H).$$

[1] George Mackey (1916-2006) američki matematičar

Štaviše, ako je $f \geq 0$, onda je $\upsilon \geq 0$ ili možemo uzeti da je $\xi_i = \eta_i$, $1 \leq i \leq n$.

Teorema 4.2.2.

Odnosi između topologije (1) - (8) su sledeći:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & top.3) & \supset & top.2) & \supset & top.1) \\ & & & & \cap & & \cap & & \cap \\ top.8) & \supset & top.7) & \supset & top.6) & \supset & top.5) & \supset & top.4) \end{array}$$

gde je „$\supset$“ finija.
Štaviše, u svakoj ograničenoj lopti od *B(H)*, imamo top.1) ~ top.4) ~ top.2) ~ top.5.) ~ top.3) ~ top.6).

Napomena : Videćemo top.6) ~top.7) u svakoj ograničenoj lopti od *B(H)* (videti kraj Odeljka 4.3) .

Posledica 4.2.3.

Neka je f linearna funkcionela na *B(H)*.
Tada su sledeći iskazi ekvivalnetni:

(1) f je $\sigma\left(B(H),T(H)\right)$ - neprekidna ;
(2) f je $s\left(B(H),T(H)\right)$ - neprekidna;
(3) f je $s^*\left(B(H),T(H)\right)$ - neprekidna;
(4) f je $\tau\left(B(H),T(H)\right)$ - neprekidna;
(5) f je slabo neprekidna na svakoj ograničenoj lopti od *B(H)*;
(6) f je jako neprekidna na svakoj ograničenoj lopti od *B(H)*;
(7) f je jako $*$ neprekidna na svakoj ograničenoj lopti od *B(H)*.

Propozicija 4.2.4.

Neka je *K* konveksan podskup od *B(H)*.

(1) Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(i) K je $\sigma\left(B(H),T(H)\right)$ - zatvoren;
(ii) K je $s\left(B(H),T(H)\right)$ - zatvoren;
(iii) K je $s^*\left(B(H),T(H)\right)$ - zatvoren;
(iv) K je $\tau\left(B(H),T(H)\right)$ - zatvoren;
(v) K $\cap$ λS je slabo zatvoren, $\forall \lambda > 0$;
(vi) K $\cap$ λS je jako zatvoren, $\forall \lambda > 0$;

(vii) K $\cap$ λS je jako zatvoren, gde je S zatvorena jedinična lopta od $B(H)$.

(2) K je slabo zatvoren ako i samo ako je K jako zatvoren.

Posmatrajmo topološku restrikciju sa $B(H_c)$ na $B(H)$.

Propozicija 4.2.5.

Neka je H realan Hilbertov prostor. Onda je

$$(top.j) \text{ u } B(H_c) | B(H) \sim top.j) \text{ u } B(H),$$

tj.

$$a_l \to 0 \text{ u odnosu na top.j) u B(H),}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_l \to 0 \text{ u odnosu na top.j) u B}(H_c),$$

gde mreža $\{a_l\} \subset B(H)$ i $j = 1,2,...,8$.

Dokaz : Dovoljno je pokazati da zaključak važi za Mekejevu topologiju (top.7)). Primetimo sledeću činjenicu.
Ako je E $\sigma(T(H_c), B(H_c))$ - kompaktan podskup od $T(H_c)$, onda su

$$\operatorname{Re} E = \{a \in T(H) | \text{ postoji } b \in T(H) \text{ tako da } (a+ib) \in E\},$$
$$\operatorname{Im} E = \{b \in T(H) | \text{ postoji } a \in T(H) \text{ tako da } (a+ib) \in E\}$$

$\sigma(T(H), B(H))$ - kompaktni podskupovi od $T(H)$ i

$\operatorname{Re} E + i \operatorname{Im} E = \{(a+ib) | a \in \operatorname{Re} E,\, b \in \operatorname{Im} E\}$ je $\sigma(T(H_c), B(H_c))$ - kompaktan podskup od $T(H_c)$ koji sadrži E.

□

4.3 Džon fon Nojmanova dvostruka komutatorska teorema

<u>*Definicija 4.3.1.*</u>

Neka je H realan Hilbertov prostor. $*$ podalgebra M od $B(H)$ se zove <u>*realna*</u> VN (<u>Von Neumann</u>) algebra (na H) ako je

$$M = M'',$$

gde je $M' = \{b \in B(H) | ba = ab, \forall a \in M\}$ (<u>*komutant*</u> od M) i M''=(M')' (<u>*dvostruki komutant*</u> od M). Ako je E podskup od $B(H)$ i M najmanja realna VN algebra koja sadrži E, onda se M zove realna VN algebra generisana sa E. Jasno, $M = \bigcap \{N | N \text{ realna VN algebra na } H \text{ i } E \subset N\}$.

Napomena: Neka je M $*$ podalgebra od $B(H)$ i $M_c = M + iM$. Jasno, $M'_c = M' + iM'$ *i* $M''_c = M'' + iM''$. Dakle, M je realna VN algebra na H, ako i samo ako, je M_c VN algebra na $H_c = H + iH$.

Slično kompleksnom slučaju i na osnovu dualne teorije, imamo sledeće.

<u>*Propozicija 4.3.2.*</u>

Neka je H realan Hilbertov prostor.

(1) Ako je E podskup od $B(H)$, onda je $(E \cup E^*)'$ realna VN algebra i realna VN algebra generisana sa E je $(E \cup E^*)''$.
Specijalno, komutant svake realne VN algebre je realna VN algebra.

(2) Ako je M realna VN algebra na H, tada je M slabo zatvoren i M je dualni prostor realnog faktor Banahovog prostora $M_* = T(H)/M_\perp$, gde je

$$M_\perp = \{a \in T(H) | tr(ab) = 0 \text{ , } \forall b \in M\}.$$

(3) Ako je $\{M_l\}$ familija realnih VN algebra na H, onda je $M = \bigcap_l M_l$ takođe realna VN algebra i M' je realna VN algebra generisana sa $\bigcup_l M'_l$.

Propozicija 4.3.3.

Neka je M realna VN algebra na realnom Hilbertovom prostoru H i $M_c = M + iM$. Onda je operacija "-" slabo neprekidna ili $\sigma\left(M_c, M_{c^*}\right)$ - neprekidna u M_c, M je $\sigma\left(M_c, M_{c^*}\right)$ - zatvorena u M_c, i

$$M_{c^*} = M_* + iM_*$$

je kompleksifikacija od M_*.

Dokaz : Na osnovu Propozicije 1.1.11, imamo

$$\left\langle \bar{x}\xi_c, \eta_c \right\rangle = \left\langle \overline{\eta}_c, x\overline{\xi}_c \right\rangle,\ \forall x \in M_c,\ \xi_c, \eta_c \in H_c.$$

Zato je operacija "-" u M_c slabo neprekidna i $M = \left\{ x \in M_c \middle| \bar{x} = x \right\}$ je slabo zatvorena u M_c. Kako je $tr\left(\bar{x}t\right) = \overline{tr\left(x\bar{t}\right)}$, $\forall x \in M_c$, $t \in T\left(H_c\right)$ sledi da je operacija "-" u M_c takođe $\sigma\left(M_c, M_{c^*}\right)$ - neprekidna. Prema Propoziciji 1.1.5

$$M_{c^*} = N + iN$$

je kompleksifikacija od *N*, gde je $M_{c^*} = T\left(H_c\right) / M_{c\perp}$ i $N = \left\{ f \in M_{c^*} \middle| \bar{f} = f \right\}$ *je* $\sigma\left(M_c, M_{c^*}\right)$ - zatvoreno u M_c. Jasno, $M_{c\perp} = M_\perp + iM_\perp$. Zato je $\bar{f} = \bar{t} + M_{c\perp}$ ako je $f = t + M_{c\perp}$, gde je $t \in T\left(H_c\right)$. Kako je $T\left(H_c\right) = T(H) + iT(H)$, imamo

$$N = \left\{ t + M_{c\perp} \middle| t \in T(H) \right\}.$$

Na osnovu $M_* = T(H) / M_\perp$, dovoljno je da dokažemo

$$\left\| t + M_{c\perp} \right\| = \left\| t + M_\perp \right\|,\ \forall t \in T(H)$$

tj.

$$\inf\left\{ \left\| t + b + ic \right\|_1 \middle| b, c \in M_\perp \right\} = \inf\left\{ \left\| t + b \right\|_1 \middle| b \in M_\perp \right\},\ \forall t \in T(H).$$

Na osnovu Propozicije 4.1.5, $T\left(H_c\right) = T(H) + iT(H)$ je kompleksifikacija od $T(H)$ u $\left\| \cdot \right\|_1$. Zato je,

$$\left\| t + b + ic \right\|_1 \geq \left\| t + b \right\|_1,\ \forall t \in T(H),\ b, c \in M_\perp\ \left(\subset T\left(H\right)\right)\ i$$
$$\left\| t + M_{c\perp} \right\| = \left\| t + M_\perp \right\|,\ \forall t \in T(H).$$

$\square$

Propozicija 4.3.4.

Neka je M realna VN algebra na realnom Hilbertovom prostoru H i
$P(M)=\left\{p\in M \middle| p^*=p=p^2\right\}$ (podskup svih projekcija u M).

(1) $P(M)$ je kompletna mreža u odnosu na relaciju inkluzije, tj. ako je $\left\{p_l \middle| l\in\Lambda\right\}\subset P(M)$, tada je $\sup_l p_l$ i $\inf_l p_l \in P(M)$. Štaviše,

$$\begin{aligned}\sup_{l\in\Lambda} p_l &= (\text{“jako”})-\lim_F \sup_{l\in F} p_l \\ &= \text{projekcija sa H na } \overline{\left[\bigcup_{l\in\Lambda} p_l H\right]}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\inf_{l\in\Lambda} p_l &= (\text{“jako”})\text{-}\lim_F \inf_{l\in F} p_l \\ &= \text{projekcija sa H na } \bigcap_{l\in\Lambda} p_l H,\end{aligned}$$

gde je F proizvoljan konačan podskup od Λ.

(2) Neka $a\in M$ i neka je $a=\upsilon h$ polarna dekompozicija od a. Onda $\upsilon, h\in M$. Specijalno, projekcija $\upsilon\upsilon^*$ sa H na $\overline{aH}$ je u M.

(3) Neka je $a^*=a\in M$ i $a=\int\lambda de_\lambda$ spektralna dekompozicija od a. Onda $e_\lambda\in M, \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Specijalno,

$$\overline{\left[P(M)\right]}=M_H ,$$

gde je $\overline{\left[P(M)\right]}$ zatvorenje norme (realnog) lineala od $P(M)$.

(4) $M=M_H+M_K, M_H=M_+-M_+=\left[M_+\right]$ (realni lineal od M_+), gde je $M_+=\left\{a\in M \middle| a\geq 0\right\}$ (podskup svih pozitivnih operatora u M).

Dokaz:

(1) Očigledno je ako posmatramo zaključak u M_c.

(2) Na osnovu Teoreme 1.2.5, $\upsilon, h\in B(H)\bigcap M_c=M$.

(3) Na osnovu Teoreme 1.2.4, $e_\lambda\in B(H)\bigcap M_c=M, \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

(4) Zbog spektralne dekompozicije, možemo videti da je $M_H=M_+-M_+$.

□

Propozicija 4.3.5.

Neka je M realna VN algebra na realnom Hilbertovom prostoru H i
$U(M)=\left\{u\in M \middle| u^*u=uu^*=1\right\}$ (podskup svih unitarnih operatora u M).

(1) Neka je $a \in M$ normalno, tj. $a^*a = aa^*$. Tada postoji spektralni par $\{e_1(\cdot), e_2(\cdot)\}$ (videti Definiciju 1.2.1.) u *M* tako da važi

$$a = \int_{\sigma(a)} \operatorname{Re} z de_1(z) - \int_{\sigma(a)} \operatorname{Im} z de_2(z)$$

i

$$\int_{\sigma(a)} \operatorname{Im} z de_1(z) = \int_{\sigma(a)} \operatorname{Re} z de_2(z) = 0$$

(2) (Realni) lineal $[U(M)]$ od $U(M)$ ($*$ podalgebra od *M*) je gust u odnosu na normu, u *M*

$$\overline{[U(M)]} = M \ .$$

Dokaz: (1) Neka je

$$a = \int_{\sigma(a)} zde(z)$$

spektralna dekompozicija od *a*. Tada $e(\cdot) \in M_c = M + iM$. Sada zaključak sledi na osnovu Teoreme 1.2.3.

(2) Na osnovu Leme 3.1.3, imamo

$$U(M) \supset M_K \ .$$

S druge strane, ako $p \in P(M)$ onda je

$$p = \frac{1}{2}(2p-1) + \frac{1}{2} \in [U(M)] .$$

Dakle, $P(M) \subset [U(M)]$. Sada na osnovu Propozicije 4.3.4 (3) imamo

$$\overline{[U(M)]} = M \ .$$

□

Napomena. Rezultat "$\overline{[U(M)]} = M$" je važan. Za svaku kompleksnu VN algebru *N,* imamo $N = [U(N)]$ (kompleksni lineal od $U(N)$). Ali, za realnu VN algebru *M*, $[U(M)] \subsetneq M$ u opštem slučaju. Na primer, $M = L_r^\infty([0,1])$ na $H = L_r^2([0,1])$.

Definicija 4.3.6.

Neka je M realna VN algebra. $Z = Z(M) = M \cap M'$ se zove *centar* od M. Ako je $Z = \mathbb{R}$, onda se M zove *realni faktor*. Jasno, $Z_c = Z + iZ$ je centar VN algebre $M_c = M + iM$ i M je realan faktor ako i samo ako je M_c faktor.

Propozicija 4.3.7.

Neka je M realna VN algebra na realnom Hilbertovom prostoru H, $p \in P(M)$ i Z je centar od M.
(1) $M_p = pMp$ i $M'_p = M'p$ su dve realne VN algebre na realnom Hilbertovom prostoru pH i $(M_p)' = M'_p$.
(2) $M_p \cap M'_p = Z_p$. Specijalno, ako je M realan faktor onda su M_p i M'_p takođe realni faktori.

Dokaz: (1) Na osnovu rezultata u kompleksnom slučaju,

$$pM_c p = pMp + ipMp \text{ i } M'_c\, p = M'p + iM'p$$

su dve VN algebre na $pH_c = pH + ipH$ i $(pM_c p)' = M'_c\, p$. Sada, prema Napomeni posle Definicije 4.3.1, M_p i M'_p su dve realne VN algebre na pH i $(M_p)' = M'p$.

(2) Slično kompleksnom slučaju.

□

Napomena. Kako je $[U(M)] \subsetneq M$ generalno, ne možemo direktno „kopirati“ dokaz u kompleksnom slučaju.

Slično kompleksnom slučaju, imamo sledeće.

Teorema 4.3.8. (Džon fon Nojmanova[1] dvostruka komutatorska teorema)

Neka je H realan Hilbertov prostor i M $*$ podalgebra od $B(H)$. Onda je M realna VN algebra na H ako i samo ako $1 \in M$ i M je slabo zatvorena.

Sada ćemo posmatrati topologije u realnoj VN algebri. Neka je M realna VN algebra na realnom Hilbertovom prostoru H. Kako je $M = (M_*)^*$, gde je $M_* = T(H)/M_\perp$, možemo uvesti sledeće topologije u M: $\sigma(M, M_*)$, $s(M, M_*)$, $s^*(M, M_*)$ i Mekejevu topologiju $\tau(M, M_*)$. Jasno, imamo sledeće relacije:

[1] John von Neumann (1903-1957) mađarsko-američki matematičar

$$\sigma(M,M_*)\sim\sigma\big(B(H),T(H)\big)\big|M\ ,$$
$$s(M,M_*)\sim s\big(B(H),T(H)\big)\big|M\ ,$$
$$s^*(M,M_*)\sim s^*\big(B(H),T(H)\big)\big|M\ ,$$
$$\tau(M,M_*)\subset\tau\big(B(H),T(H)\big)\big|M\ .$$

Slično kompleksnom slučaju, još uvek ne znamo da li je $\tau(M,M_*)\sim\tau\big(B(H),T(H)\big)\big|M$? Štaviše, na osnovu Propozicije 4.3.3 i slično dokazu Propozicije 4.2.5, imamo

$$\sigma(M,M_*)\sim\sigma(M_c,M_{c*})\big|M\ ,$$
$$s(M,M_*)\sim s(M_c,M_{c*})\big|M\ ,$$
$$s^*(M,M_*)\sim s^*(M_c,M_{c*})\big|M\ ,$$
$$\tau(M,M_*)\sim\tau(M_c,M_{c*})\big|M\ .$$

Kako je $\tau(M_c,M_{c*})\sim s^*(M_c,M_{c*})$ u svakoj ograničenoj lopti od M_c takođe imamo $\tau(M,M_*)\sim s^*(M,M_*)$ u svakoj ograničenoj lopti od M.

4.4 Kaplanskijeva teorema o gustini, tenzorska proizvod komutatorska teorema i poređenje projekcije

Teorema 4.4.1. (Kaplanskijeva[1] teorema o gustini)

Neka je H realan Hilbertov prostor, N,M dve $*$ podalgebre od $B(H)$ i $N\subset M$. Ako je N slabo gust u M, onda $(N)_1$ je $\tau\big(B(H),T(H)\big)$ - gust u $(M)_1$, gde su $(N)_1$ i $(M)_1$ zatvorene jedinične lopte od N, M, respektivno.

Dokaz: Jasno $N_c=N+iN$ je slabo gust u $M_c=M+iM$. Onda na osnovu Kaplanskijeve teoreme o gustini u kompleksnom slučaju, $(N_c)_1$ je $\tau\big(B(H_c),T(H_c)\big)$ - gust u $(M_c)_1$. Specijalno, za svako $a\in M$ sa $\|a\|\le 1$ postoji mreža $\{a_l+ib_l\}\subset(N_c)_1$ tako da $(a_l+ib_l)\to a$ u $\tau\big(B(H_c),T(H_c)\big)$, gde $a_l,b_l\in N,\forall l$. Lako je videti da $a_l\to a$ u $\tau\big(B(H),T(H)\big)$. Štaviše, $\|a_l\|\le\|a_l+ib_l\|\le 1,\forall l$.

□

[1] Irving Kaplansky (1917-2006) kanadski matematičar

<u>*Posledica 4.4.2.*</u>

Neka je *H* realan Hilbertov prostor i $M*$ podalgebra od $B(H)$.

1) Zatvorenja od *M* za top.1),...,top.7) su jednaka.
2) Ako $1 \in M$, onda je M realna *VN* algebra $\Leftrightarrow$ M je $\sigma\big(B(H),T(H)\big)$ - zatvorena $\Leftrightarrow$ $(M)_1$ je slabo zatvorena.

Neka su H_1 i H_2 dva realna Hilbertova prostora. Slično kompleksnom slučaju, možemo konstruisati realan Hilbertov prostor $H_1 \otimes H_2$, tenzorski proizvod od H_1 i H_2. Lako je videti da važi

$$(H_1 \otimes H_2)_c = (H_1)_c \otimes (H_2)_c$$

tj.

$$H_1 \otimes H_2 + iH_1 \otimes iH_2 = (H_1 + iH_1) \otimes (H_2 + iH_2).$$

Sada, neka je M_j realna *VN* algebra na H_j, *j=1,2*.

Realna *VN* algebra na $H_1 \otimes H_2$ generisana sa

$$\left\{ a_1 \otimes a_2 \middle| a_j \in M_j, j = 1,2 \right\}$$

se zove <u>*tenzorski proizvod*</u> od M_1 i M_2, označeno sa $M_1 \overline{\otimes} M_2$, tj.

$$M_1 \overline{\otimes} M_2 = \left\{ a_1 \otimes a_2 \middle| a_j \in M_j, j = 1,2 \right\}''.$$

Kako je

$$\left(M_j + iM_j\right)' = M_j' + iM_j' \ , j = 1,2.$$

i

$$(M_1 + iM_1)\overline{\otimes}(M_2 + iM_2) = \left(M_1 \overline{\otimes} M_2\right) + i\left(M_1 \overline{\otimes} M_2\right),$$

na osnovu teoreme o tenzorskom proizvodu u kompleksnom slučaju, sledi

$$\begin{aligned}\left(M_1 \overline{\otimes} M_2\right)' + i\left(M_1 \overline{\otimes} M_2\right)' &= (M_1 + iM_1)' \overline{\otimes} (M_2 + iM_2)' \\ &= (M_1' + iM_1')\overline{\otimes}(M_2' + iM_2') = \left(M_1' \overline{\otimes} M_2'\right) + i\left(M_1' \overline{\otimes} M_2'\right)\end{aligned}$$

Dakle, imamo sledeće.

Teorema 4.4.3.

Neka je M_j realna *VN* algebra na realnom Hilbertovom prostoru $H_j, j=1,2$. Onda je

$$\left(M_1 \overline{\otimes} M_2\right)' = M_1' \overline{\otimes} M_2'$$

na $H_1 \otimes H_2$.

Slično kompleksnom slučaju, takođe imamo sledeće.

Propozicija 4.4.4.

Neka su H_1 *i* H_2 dva realna Hilbertova prostora.

(1) Ako je M_j realna VN algebra na H_j *i* Z_j centar od M_j, *j=1,2* onda je $Z = Z_1 \overline{\otimes} Z_2$ centar od $M_1 \overline{\otimes} M_2$. Specijalno, tenzorski proizvod dva realna faktora je opet realan faktor.
(2) Neka su M_j, N_j dve realne VN algebre na H_j, *j=1,2*. Onda je

$$\left(\left(M_1 \overline{\otimes} M_2\right) \cup \left(N_1 \overline{\otimes} N_2\right)\right)'' = \left(M_1 \cup N_1\right)'' \overline{\otimes} \left(M_2 \cup N_2\right)''$$
$$\left(M_1 \overline{\otimes} M_2\right) \cap \left(N_1 \overline{\otimes} N_2\right) = \left(M_1 \cap N_1\right) \overline{\otimes} \left(M_2 \cap N_2\right).$$

Definicija 4.4.5.

Neka je *M* realnaVN algebra na realnom Hilbertovom prostoru *H* i $p, q \in P(M)$. Za *p i q* kažemo da su ekvivalentni (u odnosu na M) u oznaci $p \sim q$, ako postoji $\upsilon \in M$ tako da je $\upsilon^* \upsilon = p$ i $\upsilon \upsilon^* = q$; *p* slabije od *q*, u oznaci $q \succcurlyeq p$ ako postoji $r \in P(M)$ tako da je $p \sim r$ i $r \leq q$.
Štaviše, za svako $p \in P(M)$, postoji minimalna centralna projekcija *c(p)* u *M* tako da je $p \leq c(p)$. U stvari, *c(p)* je projekcija iz *H* na $\overline{[MpH]}$. *c(p)* se zove centralni pokrivač od *p*.

Slično kompleksnom slučaju, imamo sledeće.

Propozicija 4.4.6.

Neka je *M* realna VN algebra.

(1) Neka su $\{p_l\}_{l \in \Lambda}$ i $\{q_l\}_{l \in \Lambda}$ dve ortogonalne familije projekcije u *M* i $p_l \sim q_l$, $\forall l \in \Lambda$. Onda je $p = \sum_{l \in \Lambda} p_l \sim q = \sum_{l \in \Lambda} q_l$.
(2) Neka $p, q \in P(M)$ i $p \succcurlyeq q, q \succcurlyeq p$. Onda je $p \sim q$.

(3) Neka $p,q \in P(M)$ i $q \succcurlyeq p$, onda je $c(p) \leq c(q)$. Specijalno, ako je $p \sim q$ onda je $c(p) = c(q)$.

(4) Neka $p,q \in P(M)$ i $q \leq p$. Onda je centralni pokrivač od q u M_p, $c(q)p$.

Na osnovu dokaza u kompleksnom slučaju, uzimajući da je $\left[\overline{U(M)}\right] = M$ (videti Propoziciju 4.3.5(2)) i Teoreme 4.4.1, imamo sledeću sličnu teoremu.

Teorema 4.4.7.

Neka je *M* realna *VN* algebra $p,q \in P(M)$. Onda postoji centralna projekcija $z \in M$ tako da važi

$$pz \succcurlyeq qz \text{ i } q(1-z) \succcurlyeq p(1-z).$$

Na osnovu dokaza u kompleksnom slučaju i Teoreme 4.4.3, imamo sledeće.

Teorema 4.4.8.

Neka je $\left\{ p_l \middle| l \in \Lambda \right\}$ ortogonalna familija projekcija u *M* tako da važi

$$p_l \sim p_{l'}, \forall l, l' \in \Lambda \text{ i } \sum_l p_l = 1.$$

Onda je

$$M \cong M_p \overline{\otimes} B(K),$$

gde je $p \sim p_l, \forall l$, *K* je realan Hilbertov prostor sa *dimK=#Λ* "$\cong$" znači prostorno $*$ izomorfno, tj. postoji unitarni operator u iz *H* na $pH \otimes K$ tako da važi

$$uMu^* = M_p \overline{\otimes} B(K).$$

4.5 Pozitivne linearne funkcionele

Definicija 4.5.1.

Neka je M realna VN algebra. Za linearnu funkcionelu ρ na M kažemo da je pozitivna i označavamo sa $\rho \geq 0$, ako je $\rho(a) \geq 0$, $\forall a \in M_+$ i $\rho(b) = 0$, $\forall b^* = -b \in M_K$. Jasno, ako je $\rho \geq 0$ na M, onda imamo $\rho(a^*) = \rho(a)$, $\forall a \in M$ i važi Švarcova nejednakost:

$$\left|\rho\left(b^* a\right)\right|^2 \leq \rho\left(a^* a\right)\rho\left(b^* b\right), \forall a, b \in M$$

i $\rho_c \geq 0$ na M_c, gde je ρ_c prirodno proširenje od ρ na $M_c = M + iM$. Kako je $\rho_c \in M_c^*$ i $\|\rho_c\| = \rho_c(1) = \rho(1)$, sledi na osnovu Propozicije 1.1.4, da $\rho \in M^*$ i $\|\rho\| = \rho(1)$.
Štaviše, ako je $\varphi \geq 0$ na M_c onda je $\rho \geq 0$ na M, gde je

$$\rho(a) = \operatorname{Re}\varphi(a), \forall a \in M \text{ , tj. } \rho = \operatorname{Re}\left(\varphi | M\right).$$

Definicija 4.5.2.

Neka je M realna VN algebra i $\rho \geq 0$ na M. Za ρ kažemo da je normalno ako je

$$\sup_l \rho(a_l) = \rho\left(\sup_l a_l\right)$$

za svaku rastuću mrežu $\{a_l\} \subset M_+$;
za ρ kažemo da je realno normalno stanje ako je ρ normalno i $\|\rho\| = \rho(1) = 1$;
za ρ kažemo da je kompletno aditivno, ako je

$$\rho\left(\sum_l p_l\right) = \sum_l \rho\left(p_l\right)$$

za svaku ortogonalnu familiju $\{p_l\}$ projekcije u M.

Teorema 4.5.3.

Neka je M realna VN algebra i $\rho \geq 0$ na M. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

1. $\rho \in M_*$, tj. ρ je $\sigma\left(M, M_*\right)$ - neprekidno.
2. ρ je normalno.
3. ρ je kompletno aditivno.
   Specijalno, ako je ρ normalno ili kompletno aditivno na M, onda je ρ_c normalno ili kompletno aditivno na M_c.

Sada, neka je M realna VN algebra na realnom Hilbertovom prostoru H i ρ realno normalno stanje na M. Onda je ρ_c normalno stanje na M_c. Ako je $L=\left\{a\in M\middle|\rho\left(a^*a\right)=0\right\}$ levo jezgro od ρ, onda je $L_c=L+iL$ levo jezgro od ρ_c. Lako je videti da važi

$$\left(M_c/L_c,\langle,\rangle_c\right)\cong\left(M/L,\langle,\rangle\right)+i\left(M/L,\langle,\rangle\right)$$

gde su $\langle,\rangle$ i $\langle,\rangle_c$ unutrašnji proizvodi u M/L i M_c/L_c indukovani sa ρ i ρ_c respektivno. Onda možemo videti da je

$$\left\{\pi_{\rho_c}=\pi_\rho+i\pi_\rho,H_{\rho_c}=H_\rho+iH_\rho\right\},$$

gde je $\left\{\pi_\rho,H_\rho\right\}$ $*$ reprezentacija od M indukovana sa ρ i $\left\{\pi_{\rho_c},H_{\rho_c}\right\}$ $*$ reprezentacija od M_c indukovana sa ρ_c.
Neka je S_n prostor realnih normalnih stanja na M i

$$\left\{\pi=\oplus_{\rho\in S_n\pi_\rho},H=\oplus_{\rho\in S_n}H_\rho\right\}$$

Tvrdimo da je $\left\{\pi,H\right\}$ zadovoljeno.
U stvari, ako je $\pi\left(a\right)=0$ za neko $a\in M$, onda je

$$\left\langle\pi\left(a^*a\right)1_\rho,1_\rho\right\rangle=\rho\left(a^*a\right)=0,\forall\rho\in S_n.$$

Dakle, imamo $tr\left(a^*at\right)=0,\forall t\in T(H)_+$ i $tr\left(a^*ah\right)=0,\forall h^*=h\in T(H)$. Na osnovu definicije o tragu, lako je videti da važi

$$tr\left(a^*ak\right)=tr\left(aka^*\right)=0,\forall k^*=-k\in T(H).$$

Dakle, moramo imati $a^*a=0$ i $a=0$.
Naravno, $\left\{\pi,H\right\}$ se može prirodno proširiti na zadovoljenu $*$ reprezentaciju od M_c. Dakle, imamo sledeće.

Propozicija 4.5.4.

Neka je M realna VN algebra i S_n prostor realnih normalnih stanja na M. Otuda je, za svako $\rho\in S_n$, $*$ reprezentacija $\left\{\pi_\rho,H_\rho\right\}$ od M indukovana sa ρ (GNS konstrukcija), σ - σ neprekidna, $\pi_\rho(M)$ je realna VN algebra na H_ρ i $\left\|\pi_\rho\right\|\le1$. Štaviše, $\left\{\pi=\oplus_{\rho\in S_n\pi_\rho},H=\oplus_{\rho\in S_n}H_\rho\right\}$ je σ - σ neprekidna, izometrična, zadovoljena $*$ reprezentacija od M.

Lema 4.5.5.

Neka $f \in M^*$. Pretpostavimo da postoji $a \in M_+$, sa $\|a\| \leq 1$ i $\|f\| = f(a)$. Onda je $f \geq 0$.

Dokaz: Na osnovu Propozicije 1.1.4, $\|f_c\| = \|f\| = f(a)$. Sada, na osnovu rezultata iz kompleksnog slučaja, $f_c \geq 0$ na M_c. Dakle, $f \geq 0$ na M.
Drugi dokaz je direktan. To je sledeće. Na osnovu $0 \leq a \leq 1$, imamo $-1 \leq 2a - 1 \leq 1$. Kako je $f(1) \leq \|f\| = f(a)$ sledi da je

$$\|f\| \leq f(a) - f(1-a) = f(2a-1) \leq \|f\|$$

Dakle, $f(1-a) = 0$ i $f(1) = f(a) = \|f\|$.
Za svako $b \in M_+$, tvrdimo da je $f(b) = \lambda \geq 0$. U stvari, možemo pretpostaviti da je $\|f\| = 1$ i $0 \leq b \leq 1$. Onda je

$$1 \geq \|1-b\| \geq |f(1-b)| = |1-\lambda| \text{ i } \lambda \geq 0.$$

Sada, za $c^* = -c \in M$ moramo dokazati da je $f(c) = 0$. Neka je $f(c) = \mu(\in \mathbb{R})$ i $\|f\| = 1$. Onda je

$$|\lambda + \mu| = |f(c+\lambda)| \leq \|c+\lambda\| = \left(\|c\|^2 + \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

i

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 \leq \lambda^2 + \|c\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dakle, $f(c) = \mu = 0$.

□

Na osnovu Leme 4.5.5 i slično kompleksnom slučaju, imamo sledeće.

Teorema 4.5.6.

Neka je M realna VN algebra i $\varphi \in M_*$. Onda postoji jedinstveno $\omega \in M_*$ sa $\omega \geq 0$ i jedinstveno $\upsilon \in M$ tako da je

$$\varphi = R_\upsilon \omega \text{ i } \upsilon^* \upsilon = s(\omega),$$

gde je $R_\upsilon \omega(a) = \omega(a\upsilon), \forall a \in M$ i $s(\omega)$ je nosač od ω, tj.

$$1 - s(\omega) = \sup\{p \mid p \in P(M), \omega(p) = 0\}.$$

Napomena: Jedinstveni prikaz $\varphi = R_{\upsilon}\omega$ se naziva <u>*polarna dekompozicija*</u> od φ, ω se naziva <u>*apsolutna*</u> vrednost od φ i označava sa $|\varphi|$.

Za linearnu funkcionelu φ na M kažemo da je hermitska, ako je $\varphi = \varphi^*$, tj. $\varphi(a^*) = \varphi(a), \forall a \in M$ ili $\varphi|M_K = 0$. Označimo $M_{*H} = \{\varphi \in M_* | \varphi^* = \varphi\}$ i $M_{*+} = \{\rho \in M_* | \rho \geq 0\}$.

<u>*Teorema 4.5.7.*</u>

Neka je *M* realna VN algebra i $\varphi \in M_{*H}$. Onda postoji jedinstveno $\varphi_{\pm} \in M_{*+}$ tako da je

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_- \text{ i } \|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|.$$

Specijalno, $M_{*H} = M_{*+} - M_{*+} = [M_{*+}]$ (realni lineal).

Dokaz: Ako φ_+ i φ_- zadovoljava naše uslove, onda važi

$$\varphi_c = \varphi_{+c} - \varphi_{-c}.$$

Prema Propoziciji 1.1.4, jedinstvenost sledi na osnovu kompleksnog slučaja.
Jasno, φ_c je hermitska na M_c. Dakle, na osnovu kompleksnog slučaja imamo jedinstveno $\rho_+, \rho_- \in M_{c*}$ i $\rho_{\pm} \geq 0$ tako da važi

$$\varphi_c = \rho_+ - \rho_- \text{ i } \|\varphi_c\| = \|\varphi\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\|.$$

Neka je $\varphi_{\pm} = \mathrm{Re}(\rho_{\pm}|M)$. Onda važi $\varphi_{\pm} \in M_{*+}$, $\|\varphi_{\pm}\| = \mathrm{Re}\,\rho_{\pm}(1) = \rho_{\pm}(1) = \|\rho_{\pm}\|$ i $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$.

□

Napomena : Jedinstveni prikaz $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ se naziva *ortogonalna* (ili Žordanova) *dekompozicija* od φ. Štaviše, za svaku kompleksnu VN algebru *N*, imamo $N_* = [N_{*+}]$ (kompleksni lineal).

Teorema 4.5.8. (Radon[1]-Nikodimova[2] teorema)

Neka je *M* realna VN algebra, $\varphi, \psi \in M_*$ i $\varphi \geq \psi \geq 0$. Tada:

(1) Postoji $t_0 \in M$ sa $0 \leq t_0 \leq 1$ tako da je $\psi(a) = \varphi(t_0 a t_0), \forall a \in M$.

(2) Za svako $\lambda \geq \frac{1}{2}$, postoji $h \in M$ sa $\lambda \geq h \geq 0$ tako da je $\psi(a) = \varphi(ha + ah), \forall a \in M$.

Dokaz:

(1) Slično kompleksnom slučaju.

(2) Na osnovu kompleksnog slučaja, postoji $h^* = h, k^* = -k \in M$ tako da važi $\lambda \geq h + ik \geq 0$ i $\psi(a) = \varphi\big(a(h+ik) + (h+ik)a\big), \quad \forall a \in M$. Dakle $\psi(a) = \varphi(ha + ah), \forall a \in M$ i $\lambda \geq h \geq 0$.

□

4.6 σ - Konačne realne VN algebre

Definicija 4.6.1.

Za realnu VN algebru kažemo da je σ-konačna ako je svaka ortogonalna familija ne-nula projekcija u *M* prebrojiva.

Slično kompleksnom slučaju, imamo sledeće.

Propozicija 4.6.2.

Neka je *M* realna VN algebra na realnom Hilbertovom prostoru. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(1) *M* je σ-konačna.

(2) *M* sadrži odgovarajući niz separacije $\{\xi_n\}$ vektora u *H*, tj. ako $a \in M$ i ako je $a\xi_n = 0, \forall n$, tada je a=0.

(3) *M'* sadrži cikličan niz $\{\eta_n\}$ u *H*, tj. $\left[a'\eta_n \middle| a' \in M', n\right]$ je gust u *H*.

(4) Postoji prostor zadovoljenih realnih stanja na *M*.

[1] Johann Radon (1887-1956) austrijski matematičar
[2] Otto Nikodym (1887-1974) poljski matematičar

Propozicija 4.6.3.

Neka je M realna VN alebra na realnom Hilbertovom prostoru H.

(1) M je σ-konačna ako i samo ako je $M_c = M + iM$ σ-konačna.
(2) Ako je M_* separabilna onda je M σ-konačna. Specijalno, ako je H separabilan onda je M σ-konačna.
(3) Ako je M Abelova i σ-konačna onda M sadrži vektor separacije.

Dokaz:

(1) Neka je M σ-konačna. Tada M sadrži odgovarajući niz separacije $\{\xi_n\} \subset H$. Jasno, $\{\xi_n\}$ je takođe razdvajajući za M_c. Dakle, M_c je σ-konačna. Dokaz u suprotnom smeru je očigledan.
(2) Kako je $M_{c*} = M_* + iM_*$, sledi da je M_{c*} separabilna. Dakle, M_c i M su σ-konačne.
(3) Slično kompleksnom slučaju.

□

Propozicija 4.6.4.

Neka su M, N σ-konačne realne VN algebre na realnim Hilbertovim prostorima H, K respektivno. Onda je $M \overline{\otimes} N$ σ-konačno na $H \otimes K$.

Dokaz: Jasno, $\left(M \overline{\otimes} N\right)_c = M_c \overline{\otimes} N_c$ je σ-konačna. Dakle, $M \overline{\otimes} N$ je σ-konačno.

□

ZAKLJUČAK

U ovom radu postavili smo osnove realnih operatorskih algebri i dali sistematsku diskusiju za realne operatorske algebre.
Opisali smo razlike između kompleksnog i realnog slučaja, naglasili operaciju “-”.
Takođe, dali smo uvod u realne operatorske algebre.
U odeljku 1.1 bavili smo se kompleksifikacijom realnih Banahovih prostora i realnih Hilbertovih prostora. Stavili smo $\|\xi + i\mu\| = \|\xi - i\mu\|, \forall \xi, \mu$, tj. operacija “-” je izometrija, dok smo se u odeljku 1.2 bavili spektralnom dekompozicijom u realnim Hilbertovim prostorima.
Poglavlje 2 sadrži kompleksifikaciju realnih Banahovih algebri, spektar, deljive realne Banahove algebre, radikal, Arensove proizvode, Abelov slučaj, itd. Kompleksifikaciju realne Banahove algebre izabrali smo tako da bude kompleksna Banahova algebra, a operacija“-” i dalje izometrija. Spektar elementa definisali smo u kompleksifikaciji i uzeli da je simetričan u odnosu na kompleksno konjugovanje. U tvrđenju 2.4.6 dali smo osnovnu činjenicu $\left(\sigma(x) \cap \mathbb{R} = \{0\}, \forall x \in R(A)\right)$ i koristili je kasnije. U odeljku 2.7 dali smo Gelfandovu teoriju za komutativne realne Banahove algebre. Tačnije, bavili smo se opštim slučajem (sa i bez identiteta).
Poglavlje 3 je o realnim Banahovim $*$ algebrama. U Lemi 3.1.3 dali smo osnovnu informaciju $\left(\left[U(A)\right] \supset A_k\right)$. Što se tiče komutativnog slučaja, Teorema 3.2.3 je slična kompleksnom slučaju, ali morali smo dodati hermitski uslov. U odeljcima 3.3, 3.4 i 3.5 radili smo GNS konstrukciju, $*$ reprezentacije i $*$ radikal. U odeljku 3.6 bavili smo se simetričnim realnim Banahovim algebrama. Tačnije, dali smo odgovarajuću formu Ptakove teorije u realnom slučaju.
Poglavlje 4 su osnove realnih Džon fon Nojmanovih algebri. Dali smo važnu teoremu o Džon fon Nojmanovom dvostrukom komutiranju, Kaplanskijevu teoremu itd.

LITERATURA

[1] Li Bingren, Real Operator Algebras, New Jersey·London·Singapore·Hong Kong, World Scientific, 2003

[2] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, Uvod u funkcionanu analizu, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1995

[3] Milan Grulović, Osnovi teorije grupa, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997

[4] Miloš Korilić, Osnovi opšte topologije, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1995

[5] Stevan Pilipović, Dora Seleši, Teorija mera, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2007

[6] Svetozar Kurepa, Funkcionalna analiza – Elementi teorije operatora, Školska knjiga – Zagreb, 1981

[7] Bruce Blackadar, Operator Algebras, Encyclopaedia of mathematical sciences, Germany 2006

[8] Walter Rudin, Real and Complex Analysis, London-New York-Sydney-Toronto-Dusseldorf-Mexico-Johannesburg-Panama-Singapore, International Student Edition, 1970

[9] http://www.wikipedia.org/

BIOGRAFIJA

Andrijana Stamenković je rođena 8.1.1988. godine u Leskovcu.
Osnovnu školu " Vuk Karadžić " završila je u Velikoj Grabovnici sa prosekom ocena 5,00 u svim razredima.
Godine 2002, upisala je Specijalizovano odeljenje za obdarene učenike matematičke gimnazije "Stanimir Veljković Zele" i maturirala 2006. godine u Leskovcu.
Nosilac je Vukove diplome.
Prirodno – matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer profesor matematike, upisala je 2006. godine i diplomirala 30. juna 2010. godine.
Iste godine, upisala je master studije na Prirodno - matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer matematika.
Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija i tako stekla pravo za odbranu master rada.

Novi Sad, 2011.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumenatcija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Andrijana Stamenković

AU

Mentor: Akademik Prof. dr Stevan Pilipović

MN

Naslov rada: Realne operatorske algebre

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2011.

GO

Izdavač:

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza

ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: Kompleksifikacija realnih Banahovih i Hilbertovih prostora, Teorema spektralne dekompozicije u realnim Hilbertovim prostorima, Realne Banahove algebre, Topološka grupa invertibilnih elemenata i njena glavna komponenta, Radikal, Funkcionalni račun, Arensovi proizvodi, Realne Banahove $*$ algebre, Pozitivne linearne funkcionele i GNS konstrukcija, $*$ Reprezentacije i topološki nesvodljive $*$ reprezentacije, $*$ Radikal, Osnovi realne Džon fon Nojmanove algebre, Džon fon Nojmanova dvostruka komutatorska teorema, Kaplanskijeva teorema o gustini, tenzorska proizvod komutatorska teorema i poređenje projekcije, σ -konačne realne VN algebre.

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VU

Izvod:

IZ

U tezi se proučavaju Realni Banahovi i Hilbertovi prostori, Realne Banahove algebre, Realne Banahove $*$ algebra i Realne Džon fon Nojmanove algebre.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 29. mart 2011.

DP

Datum odbrane: 29. jul 2011.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: Akademik Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Milan Grulović, redovni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Andrijana Stamenković

AU

Mentor: Academician Prof. Dr. Stevan Pilipović

MN

Title: Real operator algebras

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2011.

PY

Publisher:

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description:

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Functional analysis

SD

Subject / Key words: Complexification of real Banach and Hilbert spaces, Spectral decomposition theorem in real Hilbert spaces, Real Banach Algebras, The topological group of invertible elements and its principal component, Radical, Functional calculus, Arens products, Real Banach $*$ Algebras, Positive linear functional and GNS construction, $*$ Representations and topologically irreducible $*$ representations, $*$ Radical, Fundamentals of Real Von Neumann Algebras, Von Neumann's double commutation theorem, Kaplansky's density theorem, tensor product commutation theorem and comparison of projections, σ - Finite real VN algebras

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

The thesis is based on a study of Real Banach and Hilbert spaces, Real Banach Algebras, Real Banach $*$ Algebras and Fundamentals of Real Von Neumann Algebras.

Accepted by Scientific Board on: 29^{th} March 2011.

ASB

Defended: 29^{th} July 2011.

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Mentor: Academician Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr. Milan Grulović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad