UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Zvezdana Stanković

Osnovne teoreme teorije okvira

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2022

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu bavimo se nekim pitanjima vezanim za uopštenje pojma baze. Baza vektorskog prostora je jedan od najvažnijih pojmova koji omogućava proučavanje raznih osobina tog prostora. Naime, svaki vektor se može prikazati kao linearna kombinacija baznih elemenata. Međutim, u nekim slučajevima, zahtev da bazni vektori budu linearno nezavisni je ograničavajući, jer postoje i linearno zavisni vektori koji zadovoljavaju neke uslove baze, ali su pogodniji od baze u praktičnim primenama. U tu svrhu uvodi se pojam okvira kao fleksibilniji skup generatora, to jest kao jedno uopštenje pojma ortonormiranih baza. Pored široke i raznovrsne primene, teorija okvira je podjednako razvijena sa tačke gledišta matematičke analize.

Sadržaj ovog rada je podeljen u četiri celine:

U prvom delu navode se osnovni pojmovi koji će se proučavati u daljem radu i biće navedeni uvodni primeri koji ilustruju sličnosti i razlike pojmova ortonormirane baze i okvira. Između ostalog, definisaće se operator okvira i ispitaće se njegova osnovna svojstva.

Drugi deo rada bavi se Gaborovim okvirima, kao najistaknutijim primerom okvira koji se koristi u teoriji i primenama. Pored toga, detaljno će se ispitati svojstvo dualnosti okvira.

Treći i centrani deo je posvećen nekim važnim teoremama teorije okvira. Posebno, dokazaće se teorema o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji (Painless Nonorthogonal Expansions Theorem) i Balian-Lou teorema (Balian-Low Theorem). Prva teorema govori da je moguće da se izabere pogodna generatorna funkcija sa kompaktnim nosačem tako da se lako može konstruisati Gaborov okvir odgovarajućeg Banahovog prostora. Balian-Lou teorema govori da je za formiranje Risove baze odgovarajućeg prostora, potrebno da Gaborovim sistemima dozvolimo određenu fleksibinost koju ne poseduju ortonormirane baze ali je imaju okviri.

Za sam kraj biće navedeni jednostavni primeri primene teorije okvira pri analizi jednostavnih muzičkih, to jest zvučnih signala.

1
Uvod

Baza vektorskog prostora je skup elementarnih vektora čijom linearnom kombinacijom možemo predstaviti svaki vektor tog prostora. Definišimo ove pojmove preciznije. Detalji su navedeni u referencama [5] i [6].

Neka je $\{v_1, \cdots, v_n\}$ podskup vektorskog prostora $\mathcal{V}$ nad poljem $\mathcal{F}$. Sa $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ označavamo skup svih vektora $v \in \mathcal{V}$ koji se mogu predstaviti kao linearna kombinacija vektora $v_1, \cdots, v_n$. Ovaj skup čini potprostor od $\mathcal{V}$.

Skup vektora $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset \mathcal{V}$ je *linearno nezavisan* skup ako je za sve skalare $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ zadovoljeno

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Proizvoljan skup vektora je linearno nezavisan ukoliko je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan.

Neka je sada $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pred-Hilbertov prostor, gde je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznaka za skalarni proizvod u $\mathcal{V}$. Za vektore $x, y \in \mathcal{V}$ kažemo da *ortogonalni*, u oznaci $x \perp y$ ako važi $\langle x, y\rangle = 0$. Skup u kom su svaka dva vektora ortogonalna zovemo *ortogonalan skup*. U prostoru $\mathcal{V}$ *norma* je data sa $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, a vektor čija norma je jednaka jedinici zovemo *normiran*. *Ortonormiran skup* je ortogonalan skup u kom je svaki vektor normiran.

Skup vektora $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset \mathcal{V}$ je *baza* vektorskog prostora $\mathcal{V}$ ako je linearno nezavisan i ako je $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = \mathcal{V}$. Broj n naziva je *dimenzija prostora* $\mathcal{V}$, a ukoliko n nije konačan broj ni za jednu bazu, kazemo da je prostor *beskonačno-dimenzioni.*

Svaki skup linearno nezavisnih vektora može se na jednostavan način prevesti u ortonormiran skup Gram-Šmitovim postupkom, te na taj način vektorni prostor dobija ortonormiranu bazu. Važi i da je svaki ortogonalan skup linearno nezavisan, dok obratno ne mora biti ispunjeno.

Skupovi kao što su baze i njima slični imaju ključnu primenu u klasičnoj i primenjenoj analizi gde se koriste pri dekompoziciji i manipulaciji funkcija, operatora, signala, slika i sličnih pojmova.

Okviri su skupovi slični bazama, u smislu da preko njihovih elemenata možemo predstaviti svaki drugi vektor prostora, ali ne zahtevaju ortonormiranost, ta prezentacija ne mora biti jedinstvena.

1.1 Vektorski prostori i linearni operatori

U ovom delu predstavljeni su osnovni pojmovi i rezultati koji su neophodni u daljem radu.

Teorija operatora bazira se na kombinaciji funkcionalne analize i linearne algebre. U pisanju ovog poglavlja korištena je referenca [6] kao osnovna literatura.

Definicija 1.1.1 Neka je $\mathcal{V}$ konačno-dimenzioni vektorski prostor. *Linearna funkcionela* je linearna transformacija $f : \mathcal{V} \to \mathbb{F}$, pri čemu je $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, to jest f je linearna skalarna transformacija.

Skup linearnih funkcionela na $\mathcal{V}$ zovemo *dualni prostor* i označavamo ga sa $\mathcal{V}^*$. Može se pokazati da u $\mathcal{V}^*$ postoji dovoljno linearnih transformacija da razdvoje svaka dva vektora, odnosno, ako je slika dva vektora nekim operatorom jedno te ista, onda da dva vektora moraju biti jednaka. Preciznije, ako znamo vrednosti $f(v)$ za sve $f \in \mathcal{V}^*$, onda znamo i vektor v. Ako definišemo operacije sabiranja i množenja skalarom na skupu $\mathcal{V}^*$ sa:

$$[f_1 + f_2](v) = f_1(v) + f_2(v) \qquad [\alpha f](v) = \alpha f(v)$$

može se pokazati da je $\mathcal{V}^*$ vektorski prostor. Takođe, ako je $\mathcal{V}$ konačno-dimenzioni prostor, onda je $\mathcal{V}^*$ iste dimenzije. Ako $f_1, f_2, \cdots, f_n$ generišu $\mathcal{V}^*$ onda važi: ako znamo slike vektora v svakim generatornim operatorom, onda znamo i v. Za operatore, kao linearna preslikavanja definišemo *jezgro* $\ker(f)$ i *skup slika* $\mathrm{range}(f)$:

$$\ker(f) = \{x \in \mathcal{V} : f(x) = 0\} \ , \ \mathrm{range}(f) = \{y \in \mathbb{F} : y = f(x)\}$$

Svaki linearni operator $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ možemo asocirati sa matricama, ali može se pokazati da važi i obratno, te na taj način povezujemo linearnu algebru sa funkcionalnom analizom.

Propozicija 1.1.2 Neka je $A \in \mathbb{F}^{m,n}$ matrica. Definišemo preslikavanje $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ sa

$$Tx = Ax \ \ x \in \mathbb{F}^n$$

Tada je T linearni operator.

Dokaz. Jasno sledi iz linearnosti matrice A. $\square$

Propozicija 1.1.3 Neka je $\{v_1, \cdots, v_n\}$ baza n-dimenzionog vektorskog prostora $\mathcal{V}$. Definišimo preslikavanje $T : \mathcal{V} \to \mathbb{F}^m$ na sledeći način: Za svako $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i \in \mathcal{V}$ neka je $Tx = (c_1, \cdots, c_n)^\top \in \mathbb{F}^n$. Tada je T linearni operator.

Upravo iz ovog razloga se mnoge osobine matrica prenose na operatore, neke od njih biće navedene kasnije.

Za svaku matricu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ definišemo *adjungovanu matricu* $A^* = [b_{ij}]_{n\times m}$ takva da je $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ za sve i, j. Primetimo da ako govorimo o realnoj matrici A, tada je njena adjungovana matrica u stvari njena transponovana $A^\top$. Sada ćemo definisati slično svojstvo operatora i identitet koji ga povezuje sa njemu odgovarajućom matricom. Da bismo dokazali dobru definisanost tog operatora, neophodno je da dokažemo Risovu[1] teoremu o reprezentaciji.

Teorema 1.1.4 (Risova teorema o reprezentaciji) Neka je $\mathcal{H}$ konačnodimenzioni Hilbertov prostor i $T : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ linearni operator. Tada postoji jedinstven vektor $z \in \mathcal{H}$ takav da važi $Tx = \langle x, z\rangle$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Dokaz. Neka je $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ONB za $\mathcal{H}$. S obzirom na bazu, odgovarajuća matrica za T je $1 \times n$ matrica $[Te_1 \dots Te_n]$. Definišimo vektor $z \in \mathcal{H}$ sa

$$z = \sum_{i=1}^{n} (\overline{Te_i}) e_i.$$

Svaki vektor $x \in \mathcal{H}$ može se na jedinstven način zapisati kao $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, gde su koeficijenti dati sa $\alpha_i = \langle x, e_i\rangle$. Krenimo od skalarnog proizvoda x i z

[1]Riesz Frigyes - mađarski matematičar(1880–1956)

$$
\begin{aligned}
\langle x, z\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} (\overline{Te_j}) e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \alpha_i e_i, \overline{T(e_j)} e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\
&= T(x).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.1.5 Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ konačno-dimenzioni Hilbertovi prostori. Za svaki linearni operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ postoji jedinstven linearni operator $S : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ takav da je za svako $x \in \mathcal{H}$ i svako $y \in \mathcal{K}$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle.$$

Operator S nazivamo *adjungovani operator* za T i označavamo ga sa T^*.

Dokaz. Neka je $y \in \mathcal{K}$ Proizvoljan vektor. Tada je preslikavanje $f : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ dato sa $fx = \langle Tx, y\rangle$ za svako $x \in \mathcal{H}$ linearno. Sada po Risovoj teoremi postoji jedinstven vektor $z_y \in \mathcal{H}$ takav da je $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z_y\rangle$ za svako $x \in \mathcal{H}$. Preslikavanje koje $y \in \mathcal{K}$ dodeljuje $z_y \in \mathcal{H}$ je dobro definisano zbog jedinstvenosti elementa z_y. Nazovimo ovo preslikavanje S. Lako se može pokazati da je S linearno (operator) i jedinstveno određeno preslikavanje. Tako dobijamo traženo svojstvo

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle.$$

□

Teorema 1.1.6 Neka su T, S operatori i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ skalari. Tada:

1. $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$
2. $(T^*)^* = T$
3. $(ST)^* = T^* S^*$
4. Ako je T invertibilan, onda je to i T^* i važi $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

5. $I^* = I$ gde je I identički operator.

Dokaz. Dokažimo prvu i treću tvrdnju; ostale se slično dokazuju prateći definicije. Pretpostavimo da su $T, S : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearni operatori i da su dati skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha S + \beta T)\, x, y \rangle &= \langle \alpha S x, y \rangle + \langle \beta T x, y \rangle \\
&= \alpha \langle S x, y \rangle + \beta \langle T x, y \rangle \\
&= \alpha \langle x, S^* y \rangle + \beta \langle x, T^* y \rangle \\
&= \langle x, \overline{\alpha} S^* y \rangle + \left\langle x, \overline{\beta} T^* y \right\rangle \\
&= \left\langle x, \left(\overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^* \right) y \right\rangle
\end{aligned}$$

Sada je iz definicije adjungovanih operatora jasno da je $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$ Takođe je

$$\begin{aligned}
\langle STx, y \rangle &= \langle S(Tx), y \rangle \\
&= \langle Tx, S^* y \rangle \\
&= \langle x, T^*(S^* y) \rangle \\
&= \langle x, T^* S^* y \rangle
\end{aligned}$$

Te ponovo iz definicije zaključujemo $(ST)^* = T^* S^*$. □

Sledeći pojam koji će nam biti važan jesu samoadjungovani operatori.

Definicija 1.1.7 Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operator.

(1) Ako je $T^* = T$ kažemo da je T *samoadjungovan operator*.

(2) Ukoliko je $T^* T = T T^*$ tada kažemo da je operator T *normalan*.

Jasno, ako je operator T samoadjungovan onda je i normalan, međutim obratno ne važi. Sada navodimo neke osobine koje će biti korisne kasnije.

Lema 1.1.8 Za svaki normalan operator T na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i svaki vektor $x \in \mathcal{H}$ važi $\|Tx\| = \|T^* x\|$.

Dokaz. Sledeći niz jednakosti jasno sledi po definicijama skalarnog proizvoda i adjungovanog opetatora

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^* T x, x \rangle = \langle T T^* x, x \rangle = \langle T^* x, T^* x \rangle = \|T^* x\|^2.$$

□

Lema 1.1.9 Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ samoadjungovan operator. Tada je $\langle Tx, x\rangle$ realno za svako $x \in \mathcal{H}$.

Dokaz. Kako je T samoadjungovan, važi $T^* = T$ pa je jasno

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

□

Navedimo sada još jednu osobinu koja će biti važnija kasnije.

Propozicija 1.1.10 Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearni operator. Tada je $\ker(T) = [\operatorname{range}(T^*)\,]^{\perp}$ pa važi

$$\mathcal{H} = \ker(T) \oplus \operatorname{range}(T^*).^{2}$$

Dokaz. Ortogonalnost skupova $\ker(T)$ i $\operatorname{range}(T^*)$ sledi iz jendakosti

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$$

koja važi za svako $x \in \ker(T)$ i svako $y \in \mathcal{K}$. Pa jedna inkluzija $\ker(T) \subseteq [\operatorname{range}(T^*)\,]^{\perp}$ važi. Obratno, neka je $x \in \mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. Tada možemo prikazati x kao $x = x_1 + x_2$, gde $x_1 \in M^{\perp}$ i $x_2 \in M = \operatorname{range}(T^*)$. Za proizvoljno $y \in \mathcal{K}$ je

$$\langle Tx_1, y\rangle = \langle x_1, T^*y\rangle = 0.$$

Dakle, zadovoljeno je $Tx_1 = 0$, te $x_1 \in \ker(T)$ i jasno $\operatorname{range}(T^*)^{\perp} \subseteq \ker(T)$.□

Za posledicu imamo da se dimenzija prostora $\mathcal{H}$ nalazi kao

$$\dim\mathcal{H} = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{range}(T^*).$$

Definicija 1.1.11 *Nosač* operatora $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ definišemo kao ortogonalni komplement njegovog jezgra $\operatorname{supp}(T) = [\ker(T)]^{\perp}$.

Posebno će nam biti interesantni samoadjungovani operatori kod kojih je skalarni proizvod $\langle Tx, x\rangle$ nenegativan za sve $x \in \mathcal{H}$.

Definicija 1.1.12 Linearni operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nazivamo *pozitivan* ako je samoadjungovan i važi $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ za svaki vektor $x \in \mathcal{H}$. Skraćeno, pišemo $T \geq 0$.

---

[2] Suma vektorskih prostora $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$ se naziva direktna, i označava se $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, ako je $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{0\}$. Kažemo da potprostori $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$ čine dekompoziciju ili razlaganje prostora $\mathcal{V}$ ako je $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$.

Definicija 1.1.13 Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ operator. Ako za svako $x \in \mathcal{H}$ važi $\|Tx\| = \|x\|$ operator T nazivamo *izometrija.* Ukoliko je T sirjektivna izometrija, tada ga zovemo *unitaran operator.*

U opštem slučaju, operatori nisu invertibilni. Sada definišemo poseban operator koji dozvoljava linearnim transformacijama da budu invertibilne koliko je to moguće. Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearan i "1-1". Ako sa M označimo kodomen operatora T kao potprostor od $\mathcal{K}$, tada $T : \mathcal{H} \to M$ jeste invertibilan. Posmatrajmo preslikavanje $T^\dagger : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ takvo da je za svaki vektor $x \in \mathcal{H}$ zadovoljeno $T^\dagger T(x) = x$. Dakle $T^\dagger$ posmatramo kao jednostrani inverz za T.

Definicija 1.1.14 Pretpostavimo da je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ injektivna linearna transformacija. Definišimo *Mur-Penroz inverz*, $T^\dagger$, sa:

$$T^\dagger = (T^*T)^{-1}T^*.$$

Bez dokaza navodimo sledeća tvrđenja.

Lema 1.1.15 Ako je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ injektivan operator, tada je $T^*T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ invertibilan.

Teorema 1.1.16 Ako je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ injektivan operator, tada je $T^\dagger T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ identičko preslikavanje, odnosno:

$$T^\dagger T(x) = x \ , \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Da bismo definisali sledeću važnu vrstu operatora, osvrnimo se prvo da matrice. Matrica $A \in \mathbb{F}^{n,n}$ je pozitivna ako je $A = A^*$ i $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{F}^n$. Znamo da je svaka pozitivna matrica slična nekoj dijagonalnoj matrici $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, to jest zadovoljeno je $A = P^{-1}DP$ za neku invertibilnu matricu P. Tada za svaki pozitivan realni broj α definišemo

$$A^\alpha = P^{-1}D_\alpha P \ \ , \ \ D_\alpha = (\lambda_1^\alpha, \cdots, \lambda_n^\alpha).$$

Sada je kvadratni koren matrice A jedinstvena matrica B sa osobinom $B^2 = A$; pišemo $B = A^{\frac{1}{2}}$.

Definicija 1.1.17 Neka je T pozitivan operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa ONB $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Neka je $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrica pridružena operatoru T:

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ \ , \ \ j = 1, \cdots, n.$$

Tada je A pozitivna matrica, pa ima kvadratni koren $A^{\frac{1}{2}} = [b_{ij}]_{n\times n}$. *Kvadratni koren* S operatora T na $\mathcal{H}$ definišemo sa

$$Se_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i \ \ , \ \ j = 1, \cdots, n.$$

Sledeća propozicija, koju navodimo bez dokaza, tvrdi da ovako definisan operator S zaista jeste jedinstven kvadratni koren za operator T.

Propozicija 1.1.18 Neka su dati operatori T i S kao u prethodnoj definiciji.

1. S je pozitivan operator i $S^2 = T$
2. Operator S ne zavisi od izbora ONB $\{e_1, \cdots, e_n\}$
3. S je jedinstven operator sa osobinom $S^2 = T$.

Propozicija 1.1.19 Neka je T operator na Hilbertovom prostru $\mathcal{H}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. $T \geq 0$
2. Postoji operator S takav da je $S^2 = T$
3. Postoji linearan operator V takav da je $V^*V = T$.

Dokaz. $1 \Rightarrow 2$ Jasno, ako uzmemo da je operator S kvadratni koren operatora T tj. $S = T^{\frac{1}{2}}$.

$2 \Rightarrow 3$ Pošto za pzitivan operator važi $S^* = S$, tvrđenje je jasno.

$3 \Rightarrow 1$ Označimo $T = V^*V$ za neki linearan operator V na $\mathcal{H}$. Neka je $x \in \mathcal{H}$. Pronađimo T^*

$$T^* = (V^*V)^* = V^*(V^*)^* = V^*V = T.$$

Takođe je

$$\langle Tx, x\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle Vx, Vx\rangle = \|Vx\|^2 \geq 0.$$

Dakle, T ispunjava uslove pozitivnih operatora. □

Još jedan važan pojam jeste norma operatora.

Definicija 1.1.20 Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearni operator. *Norma operatora* T definiše se sa

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}\, , \, \|x\| = 1\},$$

ukoliko ovaj supremum postoji. Ako supremum postoji onda kažemo da je T *ograničen* operator.

Propozicija 1.1.21 Neka su dati ograničeni linearni operatori T i S. Tada je zadovoljeno:

1. $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ za svako $x \in \mathcal{H}$.

2. $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

3. $\|T\| = \|T^*\|$.

4. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

pri čemu je svaka norma operatora data u odgovarajućem prostoru.

2 Osnovni pojmovi teorije okvira

U ovom delu se prvo definišu okviri i navode se osnovne razlike između okvira i ortonormirane baze nekog vektorskog prostora. Zatim uvodi se operator okvira koji je dobijen od svakog okvira kompozicijom dva posebna operatora, a to su operatori analize i sinteze. Za pisanje ovog dela rada korištena je referenca [6] kao osnovna literatura.

2.1 Okvir i ortonormirana baza

Da bismo bolje razumeli motivaciju za uvođenje pojma okvira predstavićemo nekoliko primera i objasniti razlike između baze i okvira.

Primer 2.1.1 Posmatrajmo dva konačna skupa vektora u ravni $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(1,0)\,,\,(0,1)\}$$

i

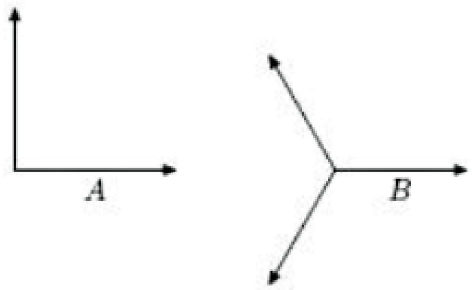
$$B = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}(1,0)\,,\,\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,,\,\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

Jasno se vidi da je A ortonormirana baza (u daljem tekstu koristiće se skraćenica ONB) za prostor $\mathbb{R}^2$, dok je skup B malo drugačiji. Sumirajmo sličnosti i razlike:

1° Oba skupa su generatorna za $\mathbb{R}^2$. Dakle, postoje skalari $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ takvi da za svako $x \in \mathbb{R}^2$ važi

$$x = a_1(1,0) + a_2(0,1)$$

$$x = b_1\sqrt{\frac{2}{3}}(1,0) + b_2\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b_3\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Slika 1: *Ilustracija skupova A i B*

2° Vektori skupa A su linearno nezavisni, dok su vektori u B linearno zavisni. To nam daje da su skalari a_i u gornjoj dekompoziciji jedinstveni, dok b_j nisu.

3° Oba vektora skupa A su dužine 1, dok su vektori skupa B dužine $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4° Vektori u A su ortogonalni, dok oni u B nisu.

5° Koeficijente u gornjoj prezentaciji vektora $x \in \mathbb{R}^2$ možemo izračunati množeći sam vektor x odgovarajućim baznim vektorom. Ako označimo $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, važiće $a_i = \langle x, e_i \rangle$ za $i = 1, 2$. Ovo svojstvo imaju sve ortonormirane baze. Lako možemo proveriti da i skup B zadovoljava istu osobinu.

6° Oba skupa zadovoljavaju Parsevalovu jednakost za ONB [3]. Pa ako je $\|x\|$ dužina, to jest norma vektora $x \in \mathbb{R}^2$ onda

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{2} a_i^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i^2.$$

Dakle, možemo zaključiti da je skup A ONB Hilbertovog prostora $\mathbb{R}^2$, ali i da iako B nije baza, s tim ni ONB za $\mathbb{R}^2$, on zadovoljava važne karakteristike jedne ortonormirane baze.

Navedimo još jednu zanimljivost; okvir B, ako je normiran, naziva jedinični Mercedes-Benz bazni okvir, a razlog tome lako se primeti sa slike koja ga ilustruje.

[3] Mark Antoan Parseval - francuski matematičar(1755–1836).
Parsevalova jednakost: $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$

Upravo ovakvo svojstvo skupova kakvo ima posmatrani skup B, predstavlja motivaciju za uvođenje pojma okvira. U nastavku ćemo sa $\mathcal{H}$ označavati separabilan Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i normom $\| \cdot \|$.

Definicija 2.1.2. *Okvir* u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je niz vektora $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ takav da postoje konstante $0 < A \leq B < \infty$ takve da je za svaki vektor $x \in \mathcal{H}$,

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq B\|x\|^2$$

Konstante A i B zovemo, redom, *donja i gornja granica okvira*. Primetimo da je i svako $0 < A' < A$ donja granica, kao i da je svako $B' > B$ gornja granica. U nastavku ćemo bez umanjena opštosti, pretpostavljati da su za obe granice date optimalne vrednosti.

Za okvir kažemo da je *čvrst*, to jest A-*čvrst*, ako su optimalne granice jednake, odnosno ako je $A = B$, a kažemo da je *Parsevalov* ako su pritom jednake jedinici, odnosno $A = B = 1$, dok je okvir *unitaran* ako svi njegovi vektori imaju jednake norme. Definišemo i *egzaktan okvir* kao onaj koji prestaje da bude okvir kada iz njega izbacimo jednog člana.

Primetimo da je okvir $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ Parsevalov ako za svako $x \in \mathcal{H}$ važi

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2.$$

Ova jednakost liči na Parsevalovu jednakost, pa je po njoj ovaj tip okvira i dobio ime.

U prethodnom primeru videli smo da okviri mogu biti generatorni skupovi odgovarajućeg prostora. Sada dokazujemo teoremu koja daje karakterizaciju okvira u konačno-dimenzionim Hilbertovim prostorima.

Propozicija 2.1.3 Neka je $\mathcal{H}$ konačno-dimenzioni Hilbertov prostor i skup $\{x_i\}_{i \leq k} \subset \mathcal{H}$ konačna kolekcija vektora. Tada je ekvivalentno:

1. $\{x_i\}_{i \leq k}$ je okvir u prostoru $\mathcal{H}$
2. $\text{span}\{x_i\}_{i \leq k} = \mathcal{H}$

Dokaz. $1 \Rightarrow 2$: Kontrapozicijom, pretpostavimo suprotno odnosno da $\{x_i\}_{i \leq k}$ ne generiše prostor $\mathcal{H}$. Tada postoji nenula vektor x u ortogonalnom komplementu $M^\perp$ [4] potprostora $M = \{x_i\}_{i \leq k}$. Po definiciji, x je ortogonalan na svaki vektor iz M, pa i na svaki x_i te je suma $\sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i \rangle|^2 = 0$, jer je

[4] Ortogonalni komplement prostora definišemo sa $M^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0$ za sve $y \in M\}$ gde je M proizvoljan potprostor Hilbertovog prostora H.

svaki član pojedinačno jednak 0. Dakle, posmatrana kolekcija ne može imati pozitivnu donju granicu, pa s tim ne može biti okvir.

$2 \Rightarrow 1$: Ponovo koristimo kontrapoziciju, pretpostavimo da $\{x_i\}_{i\leq k}$ nije okvir u $\mathcal{H}$. Po definiciji to znači da je narušen uslov za granice, pa za svaki pozitivan broj $m \in \mathbb{Z}$ postoji normiran element $y_m \in \mathcal{H}$ takav da

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle y_m, x_i\rangle|^2 < \frac{1}{m}.$$

Na taj način dobili smo ograničen niz $\{y_m\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$, pa po Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi[5] znamo da on ima bar jedan konvergentan podniz, označimo ga sa $\{y_{m_j}\}_{j\in\mathbb{Z}^+}$ i granicu sa y.

Sada jasno, iz neprekindosti funkcije norme, $\|y_{m_j}\| \to \|y\|$ kada $j \to \infty$ pa je

$$0 = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \left|\langle y_{m_j}, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle y, x_i\rangle|^2.$$

Kako je svaki element sume veći ili jednak nuli, ova jednakost implicira da je y ortogonalan na svaki element $x_i \in M$, što daje da je $y = 0$ ili $\operatorname{span}\{x_i\}_{i\leq k} \neq \mathcal{H}$. Ali kako je svaki element niza $\{y_m\}$, pa i svaki element podniza $\{y_{m_j}\}$ normiran i važi $\|y_{m_j} - y\| \to 0$, mora biti i $\|y\| = 1$. Dakle, skup $\{x_i\}_{i\leq k}$ ne može generisati prostor $\mathcal{H}$. □

Uvodimo sada još jedan pojam vezan za okvire, tzv. dualni okvir.

Propozicija 2.1.4 Neka je skup $\{x_i\}_{i\leq k}$ okvir u $\mathcal{H}$. Tada postoji okvir $\{y_i\}_{i\leq k}$ takav da za svaki vektor $x \in \mathcal{H}$ važi:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle y_i.$$

Ovakav okvir $\{y_i\}_{i\leq k}$ zovemo *dualni okvir* za $\{x_i\}_{i\leq k}$.

Kasnije ćemo uopštiti pojam dualnog okvira na beskonačno-dimenzione prostore.

[5]Bolcano-Vajerštrasova teorema: Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja, to jest svaki ograničen niz ima bar jedan konvergentan podniz.
Bernardus Placidus Johann Nepomuk Gonzal Bolzano - češki matematičar (1781-1848)
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass - nemački matematičar (1815-1897)

2.2 Operatori analize i sinteze

U ovom poglavlju ćemo definisati operator okvira kao kompoziciju dva specifična operatora, a to su operator analize i operator sinteze.

Definicija 2.2.1 Niz $\{x_n\}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je *Beselov niz* ako zadovoljava nejednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty \ , \ \ \forall x \in \mathcal{H} \tag{2.1}$$

Definicija 2.2.2 Za dati niz $\{x_n\}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, definišemo *operator analize* C

$$Cx = (\langle x, x_n\rangle) \ , \ \ x \in \mathcal{H}$$

Propozicija 2.2.3 Ako je dat Beselov niz $\{x_n\}$, tada operator analize $C : \mathcal{H}$ u l^2 [6] linearan, ali i neprekidan, odnosno

$$(\exists B > 0) \quad (\forall x \in \mathcal{H}) \quad \|Cx\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|_{\mathcal{H}}^2$$

Dokaz. Posmatrajmo niz operatora $\{C_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ dat sa

$$C_N : x \mapsto (\langle x, x_1\rangle, \cdots, \langle x, x_N\rangle, 0, 0, \cdots)$$

Iz definicije Beselovog niza (2.1) sledi da je

$$\sum_{n\in F} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty$$

za svaki konačan podskup $F \subset \mathbb{N}$, dok je linearnost operatora C_N trivijalno zadovoljena. Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost[7] dobijamo

$$\|C_N x\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_{\mathcal{H}}^2 = B_N \|x\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Nadalje, niz $\{\|C_N x\|_{l^2}\}$ je jasno rastući, pa je za svako $x \in \mathcal{H}$

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|C_N x\|_{l^2} = \lim_{N\to\infty} \|C_N x\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2} = \|Cx\|_{l^2} < \infty.$$

[6] $l^2 = \{x = \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$

[7] Koši - Švarcova nejednakost: Neka su $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$). Tada važi $\sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i) \leq \|x\|\|y\|$.

Generalizovana Koši-Švarcova nejednakost: Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearni ograničen samoadjungovan i pozitivan operator, tada $|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle$.

Koristeći princip uniformne ograničenosti[8] zaključujemo

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|C_N\|_{B(\mathcal{H},l^2)} =: \sqrt{B} < \infty$$

za pogodno odabrano $B > 0$, pri čemu je sa $\|\cdot\|_{B(\mathcal{H},l^2)}$ označena norma operatora koji su ograničeni i slikaju prostor $\mathcal{H}$ u l^2 (vidi definiciju 1.1.20). Konačno, sledeće nejednakosti

$$\|C_N x\|_{l^2} \leq \|C_N\|_{B(\mathcal{H},l^2)}\|x\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{B}\|x\|_{\mathcal{H}} \ , \ \ \forall x \in \mathcal{H}$$

za $N \to \infty$ daju

$$\|Cx\|_{l^2} \leq \sqrt{B}\|x\|_{\mathcal{H}} \ , \ \ \forall x \in \mathcal{H}$$

a to smo i hteli pokazati. □

Izraz $(\exists B > 0)$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ $\|Cx\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|_{\mathcal{H}}^2$ možemo smatrati ekvivalentom definicijom Beselovih nizova.

U sledećoj propoziciji posmatraćemo adjungovani operator C^* operatora analize C i analizirati kako se on odnosi na Beselove nizove.

Propozicija 2.2.4 Neka je dat Beselov niz $\{x_n\}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa Beselovom konstantom B.

1. Ako je $c = \{c_n\} \in l^2$, tada red $\sum_n c_n x_n$ konvergira u $\mathcal{H}$ i preslikavanje definisano sa

   $$D(c) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

   definiše linearni ograničen operator koji slika l^2 u $\mathcal{H}$.

2. Važi $D^* = C$ i $\|D\| = \|C\| \leq \sqrt{B}$. Za posledicu imamo

   $$\forall \{c_n\} \in l^2 \qquad \left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

3. Ako je $\{x_n\}$ okvir, tada je operator C injekcija, dok je D sirjekcija.

Dokaz. 1. Koristićemo sledeće tvrđenje

Teorema. Neka je dat niz $\{x_n\}$ u Banahovom prostoru X. Tada je ekvivalentno

[8] Princip uniformne ograničenosti: "Neka je X Banahov, a Y normiran prostor. Ako je $\{A_i\}$ kolekcija ograničenih linearnih operatora iz X u Y takva da je $\forall f \in X \quad \sup_i \|A_i f\| < \infty$ onda važi $\sup_i \|A_i\| < \infty$."

i. $\sum_n x_n < \infty$

ii. Za konačan $F \subset \mathbb{N}$, $\lim_F \sum_{n \in F} x_n$ postoji

iii. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall F \subset \mathbb{N})\,(\min F > N \;\Rightarrow\; \| \sum_{n \in F} x_n \| < \varepsilon)$[9]

Neka je $F \subset \mathbb{N}$ konačan skup. Na osnovu pretpostavke i Koši-Švarcove nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n \in F} c_n x_n \right\|_{\mathcal{H}} &= \sup_{y \in \mathcal{H},\, \|y\|=1} \left| \left\langle \sum_{n \in F} c_n x_n, y \right\rangle \right| \\
&= \sup_{y \in \mathcal{H},\, \|y\|=1} \left| \sum_{n \in F} c_n \langle x_n, y \rangle \right| \\
&\leq \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n \in F} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in F} |\langle x_n, y \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n \in F} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x_n, y \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n \in F} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(B \|y\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{B} \left(\sum_{n \in F} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

pri čemu je $\|y\| = \|y\|_{\mathcal{H}}$. Kako je niz $c = \{c_n\} \in \ell^2$, to red $\sum_n |c_n|^2$ konvergentan svugde. Pa za svaki izbor $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je za svaki izbor konačnog podskupa $F \subset \mathbb{N}$ takav da je $\min F > n_0$, $\sum_{n \in F} |c_n|^2 < \varepsilon^2 / B$. Prema tome je

$$\left\| \sum_{n \in F} c_n x_n \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \sum_{n \in F} |c_n|^2 < B \frac{\varepsilon^2}{B} = \varepsilon^2$$

što dokazuje tvrdnju. Specijalno, birajući $F = \{1, \cdots, N\}$ i puštajući $N \to \infty$ zaključujemo

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

[9] Dokaz se može pronaći u [2].

Dokazali smo da operator $Dc = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ slika l^2 u $\mathcal{H}$ i da je $\|D\| \leq \sqrt{B}$. Jasno D je linearan, štaviše, za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i za svaka dva niza $a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in l^2$ je

$$D(\alpha a + \beta b) = \sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) x_n = \alpha \sum_n a_n x_n + \beta \sum_n b_n x_n$$

pošto su oba niza konvergentna.

2. Kao posledicu propozicije 2.2.3 imamo da je $C : \mathcal{H} \to l^2$ linearan i ograničen operator za koji važi $\|C\| \leq B$. Ostaje da se pokaže $C^* = D$. Operator $C^* : l^2 \to \mathcal{H}$ je linearan i ograničen. Neka su još $x \in \mathcal{H}$ i $c = \{c_n\} \in l^2$ proizvoljni.

$$\begin{aligned}
\langle x, C^*(c) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle Cx, c \rangle_{l^2} \\
&= \langle (\langle x, x_n \rangle), (c_n) \rangle_{l^2} \\
&= \sum_n \langle x, x_n \rangle \overline{c_n} \\
&= \sum_n \langle x, c_n x_n \rangle \\
&= \left\langle x, \sum_n c_n x_n \right\rangle
\end{aligned}$$

pa je jasno $C^*(c) = \sum_n c_n x_n = D(c)$, to jest $C^* = D$.

3. Ako je $\{x_n\}$ okvir, tada je za svako $x \in \mathcal{H}$ zadovoljena nejednakost $A\|x\|^2 \leq \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2$. Primenom sledeće teoreme na operator C sledi tvrđenje.

Teorema*. Neka su $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ ograničena funkcija. Tada je ekvivalentno

i. $(\exists C > 0)\,(\forall x \in \mathcal{H})\,(\|x\|_{\mathcal{H}} \leq C\|Ax\|_{\mathcal{K}})$

ii. $\ker(A) = \{0\}$ i range(A) je zatvoren

iii. $A^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ je sirjekcija.[10] □

Definicija 2.2.5 Posmatrajmo Beselov niz $\{x_n\}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

(1) Adjungovani operator $C^* = D : l^2 \to \mathcal{H}$ nazivamo *operator sinteze.*

(2) *Operator okvira* definišemo kao $S = DC : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

[10] Dokaz se može pronaći u [2].

(3) *Gramov operator* dat je sa $G = CD : l^2 \to l^2$.

Kako su oba operatora C i D ograničena, to su i S i G ograničeni. Važi i

$$S = DC = C^*C = DD^* \ , \ G = CD = CC^* = D^*D \tag{2.2}$$

pa su operator okvira i Gramov operator samoadjungovani (sledi iz Teoreme 1.2.6). Još je po definiciji

$$Sx = \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n$$

pa zaključujemo

$$\langle Sx, x\rangle = \sum_n |\langle x, x_n\rangle|^2 \geq 0 \ , \ x \in \mathcal{H} \tag{2.3}$$

to jest operator okvira je pozitivan. Slično se može pokazati i da je Gramov operator pozitivan.

2.3 Osobine operatora okvira

Svaki okvir jeste Beselov niz, pa s tim povezujemo osobine okvira i Beselovih nizova. Za dva ograničena i pozitivna operatora U, V na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ uvodimo oznaku:

$$U \leq V \quad \Leftrightarrow \quad \langle Ux, x\rangle \leq \langle Vx, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Teorema 2.3.1 Neka je $\{x_n\}$ okvir u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa granicama A, B. Tada

1. Operator okvira S je topološki izomorfizam[11] $\mathcal{H}$ u samog sebe; takođe je samoadjungovan, pozitivan i važi

$$AI \leq S \leq BI$$

2. Inverzni operator S^{-1} je topološki izomorfizam na $\mathcal{H}$, samoadjungovan je i pozitivan i važi

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$$

[11]Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$. Za f kažemo da je *homeomorfizam* ili *topološki izomorfizam* ako i samo ako je f neprekidno i bijekcija i inverzno preslikavanje f^{-1} neprekidno.

3. $\{S^{-1}x_n\}$ čini okvir u $\mathcal{H}$ sa granicama $0 < B^{-1} \leq A^{-1}$

4. Za svako $x \in \mathcal{H}$ važi formula razlaganja

$$x = \sum_n \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n \ , \ \ x = \sum_n \langle x, x_n \rangle S^{-1}x_n$$

Dokaz. 1. Kako je $\{x_n\}$ Beselov niz, sledi da je S neprekidan i pozitivan operator na $\mathcal{H}$ i važi

$$\langle Sx, x \rangle = \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2 \ , \ \ x \in \mathcal{H}.$$

Po definiciji je $\langle AIx, x \rangle = A\|x\|^2$, pa možemo napisati

$$\langle AIx, x \rangle \leq \langle Sx, x \rangle \leq \langle BIx, x \rangle$$

što važi za sve $x \in \mathcal{H}$, tj. $AI \leq S \leq BI$. Ostaje još da pokažemo da je S topološki izomorfizam. Primenom nejednakosti Koši-Švarca sledi

$$A\|x\|^2 \leq \langle Sx, x \rangle \leq \|Sx\|\|x\|$$

odnosno $A\|x\| \leq \|Sx\|$. Primenom **Teoreme*** definisane u prethodnom dokazu dobijamo $\ker S = \{0\}$ i da je S^* sirjekcija. Ali kako važi $S^* = S$, odnosno S je bijekcija, zaključujemo da je S topološki izomorfizam po Banahovoj teoremi o izomorfizmima.[12]

2. Kako je S samoadjungovan, pozitivan topološki izomorfizam, isto važi i za S^{-1}. Pokazali smo da važi $\langle AIy, y \rangle \leq \langle Sy, y \rangle$ za svako $y \in \mathcal{H}$, pa izaberimo specijalno $y = S^{-1}x$. Sledi

$$\begin{aligned} 0 \leq A\|S^{-1}x\|^2 &\leq \langle S(S^{-1}x), S^{-1}x \rangle \\ &= \langle x, S^{-1}x \rangle \\ &\leq \|x\|\|S^{-1}x\|. \end{aligned}$$

Zaključujemo $\|S^{-1}x\| \leq A^{-1}\|x\|$ i

$$\langle S^{-1}x, x \rangle \leq \|S^{-1}x\|\|x\| \leq A^{-1}\|x\|^2 = \langle A^{-1}Ix, x \rangle.$$

odnosno $S^{-1} \leq A^{-1}I$. Da bismo dokazali drugu nejednakost, $B^{-1}I \leq S^{-1}$, primenićemo generalizovanu nejednakost Koši-Švarca

$$|\langle S^{-1}u, v \rangle|^2 \leq \langle S^{-1}u, u \rangle \langle S^{-1}v, v \rangle \quad u, v \in \mathcal{H}.$$

[12]Banahova teorema o izomorfizmima: Neka su X, Y dva Banahova prostora i $T : X \to Y$ linearni operator koji je ograničen. Tada je T izomorfizam akko je T bijekcija.

Izaberimo $u = Sx$ i $v = x$ te sledi

$$\|x\|^4 \leq \langle x, Sx\rangle\langle S^{-1}x, x\rangle \leq B\|x\|^2\langle S^{-1}x, x\rangle$$

to jest $B^{-1}I \leq S^{-1}$.

3. Lako zaključujemo da ako je S samoadjungovan i invertibilan, onda je i S^{-1} samoadjungovan, a na osnovu Teoreme 1.1.6

$$(S^{-1})^* = (S^*)^{-1} = (S)^{-1} = S^{-1}$$

Stoga

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle x, S^{-1}x_n\rangle S^{-1}x_n &= S^{-1}\left(\sum_n \langle x, S^{-1}x_n\rangle x_n\right) \\
&= S^{-1}\left(\sum_n \langle S^{-1}x, x_n\rangle x_n\right) \\
&= S^{-1}S(S^{-1}x) \\
&= S^{-1}x.
\end{aligned}$$

Kao posledicu imamo

$$\begin{aligned}
\sum_n |\langle x, S^{-1}x_n\rangle|^2 =& \sum_n \langle x, S^{-1}x_n\rangle\langle x, S^{-1}x_n\rangle \\
=& \left\langle \sum_n \langle x, S^{-1}x_n\rangle S^{-1}x_n, x\right\rangle \\
=& \langle S^{-1}x, x\rangle.
\end{aligned}$$

Koristeći 2. $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$ zaključujemo

$$B^{-1}\|x\|^2 \leq \sum_n |\langle x, S^{-1}x_n\rangle|^2 \leq A^{-1}\|x\|^2$$

što upravo dokazuje da je $\{S^{-1}x_n\}$ okvir sa donjom i gornjom granicom B^{-1} i A^{-1}, redom.

4. Kako su $\{x_n\}$ i $\{S^{-1}x_n\}$ okviri, to su i Beselovi nizovi pa za svaki niz $c = \{c_n\} \in l^2$ redovi $\sum_n c_n x_n$ i $\sum_n c_n S^{-1}x_n$ konvergiraju. Operatori S, S^{-1} su neprekidni na $\mathcal{H}$ i $\{\langle x, x_n\rangle\}, \{\langle x, S^{-1}x_n\rangle\} \in l^2$ pa možemo napisati

$$x = S(S^{-1}x) = \sum_n \langle S^{-1}x, x_n\rangle x_n = \sum_n \langle x, S^{-1}x_n\rangle x_n$$

i analogno

$$x = S^{-1}(Sx) = \sum_n \langle Sx, S^{-1}x_n\rangle S^{-1}x_n = \sum_n \langle x, x_n\rangle S^{-1}x_n,$$

koji bezuslovno konvergiraju u $\mathcal{H}$. □

Posledica 2.3.2 Ako je okvir $\{x_n\}$ A-čvrst tada za okvir operator S važi $S = AI$ i $S^{-1} = A^{-1}I$ i zadovoljeno je

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad x = \frac{1}{A}\sum_n \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Definicija 2.3.3 Neka je $\{x_n\}$ okvir u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

(1) Ako je S operator okvira za $\{x_n\}$, tada okvir $\{S^{-1}x_n\}$ zovemo *kanonički dualni okvir* za $\{x_n\}$.

(2) Niz $\{y_n\} \subset \mathcal{H}$ takav da je $x = \sum_n \langle x, y_n\rangle x_n$, $\forall x \in \mathcal{H}$ koji bezuslovno konvergira nazivamo *alternativni dual* okvira $\{x_n\}$. Ako je pak $\{y_n\}$ okvir, tada ga nazivamo *alternativni dualni okvir*.

Definicija 2.3.4 Dva niza $\{x_n\}, \{y_n\}$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ su *biortogonalna* ako

$$\langle x_m, y_n\rangle = \delta_{m,n} \ , \ \forall m, n.$$

Posledica 2.3.5 Neka je $\{x_n\}$ niz u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je ekvivalentno:

1. Niz $\{x_n\}$ je egzaktan okvir.
2. $\{x_n\}$ i $\{S^{-1}x_n\}$ su biortogonalni.
3. $\langle x_n, S^{-1}x_n\rangle = 1$, $\forall n$.

Definicija 2.3.6 Niz $\{x_n\}$ je *Risova baza* Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ ako je ekvivalentan nekoj ONB prostora $\mathcal{H}$. Dakle, ako postoje topološki izomorfizam $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ i ONB $\{e_n\}$ takvi da je

$$Te_n = x_n \ \ \forall n.$$

Teorema 2.3.7 (Karakterizacija Risovih baza) Neka je $\{x_n\}$ niz u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je ekvivalentno:

1. $\{x_n\}$ je Risova baza za $\mathcal{H}$

2. $\{x_n\}$ je ograničena baza za $\mathcal{H}$

3. $\{x_n\}$ je baza prostora $\mathcal{H}$ i

$$\sum_n c_n x_n \text{ konvergira } \Leftrightarrow \sum_n |c_n|^2 < \infty$$

4. $\{x_n\}$ je kompletan niz u $\mathcal{H}$ i

$$(\exists A, B > 0)\ (\forall c_1, \cdots, c_N)\ A \sum_{i=1}^{N} |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \right\|^2 \leq B \sum_{i=1}^{N} |c_i|^2$$

5. $\{x_n\}$ je kompletan Beselov niz i postoji njemu biortogonalan sistem $\{y_n\}$ koji je takođe kompletan Beselov niz.

Propozicija 2.3.8 Topološki izomorfizmi čuvaju okvire. Odnosno, ako je $\{x_n\}$ okvir u $\mathcal{H}$ i $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ topološki izomorfizam između Hilbertovih prostora $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$, tada je $\{Tx_n\}$ okvir u $\mathcal{K}$. Štaviše,

1. Ako $\{x_n\}$ za granice ima A, B tada su $A\|T^{-1}\|^{-2}$ i $B\|T\|^2$ granice okvira $\{Tx_n\}$.

2. Ako je S operator okvira $\{x_n\}$, onda je TST^* operator okvira $\{Tx_n\}$.

3. $\{x_n\}$ je egzaktan ako i samo ako je $\{Tx_n\}$ egzaktan.

Dokaz. Prvo, T^* je topološki izomorfizam, jer je $\ker(T^*) = \text{range}(T)^\perp = \{0\}$ i $\text{range}(T)$ je zatvoren i ograničenost T povlači ograničenost T^*.

Dalje, jasno je da $TST^* : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, te kako je kompozicija topoloških izomorfizama ponovo topološki izomorfizam, sledi da je sledeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "S"] & H \arrow[d, "T"] \\ K \arrow[u, "T^*"] \arrow[r, "TST^*"] & K \end{tikzcd}$$

Neka je $y \in \mathcal{K}$ prozvoljno.

$$TST^*y = T\left(\sum_n \langle T^*y, x_n\rangle_{\mathcal{H}} x_n\right) = \sum_n \langle y, Tx_n\rangle_{\mathcal{K}} Tx_n$$

s tim da dobijeni red uvek konvergira jer je T ograničen. Dokažimo još $A\|T^{-1}\|^{-2}I \leq TST^* \leq B\|T\|^2 I$ pa će 1. i 2. biti zadovoljeni. Za svako $y \in \mathcal{K}$ važi $\langle TST^*y, y\rangle = \langle ST^*y, T^*y\rangle$ te je

$$A\|T^*y\|^2 \leq \langle ST^*y, T^*y\rangle \leq B\|T^*y\|^2$$

Stavimo $y = (T^*)^{-1}T^*y$ pa je $\|y\|_{\mathcal{K}} \leq \|(T^*)^{-1}\|\|T^*y\|_{\mathcal{H}} = \|T^{-1}\|\|T^*y\|_{\mathcal{H}}$ i dobijamo

$$\frac{\|y\|_{\mathcal{K}}}{\|(T^*)^{-1}\|} \leq \|T^*y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T^*\|\|y\|_{\mathcal{K}} = \|T\|\|y\|_{\mathcal{K}}$$

Kombinujući prethodna dva zaključka, dobijamo

$$A\frac{\|y\|_{\mathcal{K}}^2}{\|T^{-1}\|^2} \leq \langle TST^*y, y\rangle \leq B\|T\|^2\|y\|_{\mathcal{K}}^2$$

što dokazuje tvrdnju.

Dokaz 3. jasno sledi iz činjenice da topološki izomorfizmi čuvaju kompletnost nizova. $\square$

Posledica 2.3.9 Niz $\{x_n\}$ je egzaktan okvir u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ ako i samo ako je Risova baza.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ je egzaktan okvir, sa tim je i Beselov niz koji je kompletan. Tada je $\{S^{-1}x_n\}$ okvir pa i kompletan Beselov niz. Dalje, tada su $\{x_n\}$ i $\{S^{-1}x_n\}$ biortogonalni sistemi, te tvrdnja da je $\{x_n\}$ Risova baza sledi iz Karakterizacije Risovih baza.

Obratno, ako je $\{x_n\}$ Risova baza, tada po definiciji postoji topološki izomorfizam $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ i ONB $\{e_n\}$ takvi da je $Te_n = x_n \ \forall n$. Kako je svaka ONB okvir a topološki izomorfizmi čuvaju tu osobinu, zaključujemo da je $\{x_n\}$ okvir. $\square$

Kako je operator okvira S pozitivan topološki izomorfizam $\mathcal{H}$ u samog sebe, postoji njegov kvadratni koren $S^{\frac{1}{2}}$. Slično, i S^{-1} je pozitivan topološki izomorfizam $\mathcal{H}$ u samog sebe i postoji njegov kvadratni koren $S^{-\frac{1}{2}} = (S^{\frac{1}{2}})^{-1}$. Pošto je $\{x_n\}$ egzaktan, tada su $\{x_n\}$ i $\{S^{-1}x_n\}$ biortogonalni i imamo

$$\langle S^{-\frac{1}{2}}x_m, S^{-\frac{1}{2}}x_n\rangle = \langle x_m, S^{-\frac{1}{2}}S^{-\frac{1}{2}}x_n\rangle = \langle x_m, S^{-1}x_n\rangle = \delta_{m,n}.$$

Pa je niz $\{S^{-\frac{1}{2}}x_n\}$ ortonormiran i takođe kompletan što znači da je $\{S^{-\frac{1}{2}}x_n\}$ ONB prostora $\mathcal{H}$ i topološki izomorfizam $S^{\frac{1}{2}}$ slika ovu ONB u okvir $\{x_n\}$. Niz $\{S^{-\frac{1}{2}}x_n\}$ možemo posmatrati za svaki okvir, ne samo za egzaktne, ali tada $\{S^{-\frac{1}{2}}x_n\}$ više nije ONB za $\mathcal{H}$ već Parsevalov okvir.

Posledica 2.3.10 Neka je $\{x_n\}$ okvir u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i S njegov operator. Tada

1. $\{S^{-\frac{1}{2}}x_n\}$ je Parsevalov okvir za $\mathcal{H}$
2. $\langle x_n, S^{-1}x_n\rangle = \|S^{-\frac{1}{2}}x_n\|^2$ i $0 \leq \langle x_n, S^{-1}x_n\rangle \leq 1$ za svako n
3. $\{x_n\}$ je egzaktan ako i samo ako je $\{S^{-\frac{1}{2}}x_n\}$ ONB za $\mathcal{H}$.

2.4 Primeri okvira

U primeru 2.1.1 ilustrovali smo osnovne razlike između ONB i okvira i naveli prednosti i nedostatke i jednog i drugog. Sada ćemo navesti još nekoliko primera različitih okvira Hilbertovog prostora. Svaki od ovih slučajeva je važan za bolje razumevanje teorije okvira.

Primer 2.4.1 Neka je $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$. Ukoliko posmatramo skup u kom je svaki element ONB dupliran, odnosno uzimamo niz

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \cdots\},$$

tada možemo primetiti da je u pitanju čvrst okvir sa granicom $A = 2$.

Primer 2.4.2 Posmatrajmo sada skup u kom je samo prvi element ONB dupliran, odnosno uzimamo niz

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots\},$$

pri čemu je $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ONB prostora $\mathcal{H}$. tako dobijamo okvir sa granicama $A = 1$ i $B = 2$.

Primer 2.4.3 Neka je dat niz vektora

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \cdots\right\},$$

gde je $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ONB prostora $\mathcal{H}$. To jest, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je skup vektora oblika $\frac{1}{\sqrt{k}}e_k$ u kom se vektor $\frac{1}{\sqrt{k}}e_k$ ponavlja k puta. Tada je za svako $f \in \mathcal{H}$ zadovoljeno

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}} e_k \right\rangle \right|^2 = \|f\|^2.$$

Dakle, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je čvrst okvir sa granicom $A = 1$, odnosno Parsevalov okvir.

Primer 2.4.4 Neka je $I \subsetneq \mathbb{N}$, to jest I je pravi podskup skupa prirodnih brojeva i $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ONB prostora $\mathcal{H}$. Tada $\{e_k\}_{k \in I}$ nije kompletan u prostoru $\mathcal{H}$ te ne može biti okvir za $\mathcal{H}$. Ali, $\{e_k\}_{k \in I}$ jeste okvir u prostoru $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k \in I}$.

3
Gaborovi sistemi

1944. godine, Deneš Gabor[13] je u radu [4] predstavio novi sistem funkcija, potpuno drugačiji on onih koji su se do tada primenjivali u vremensko-frekvencijskoj analizi signala. Gabor je pretpostavljao da je sistem $\mathcal{G}(\phi, 1, 1)$, gde je $\phi(t) = e^{-\pi t^2}$, ONB prostora $L^2(\mathbb{R})$. Preciznije, njegova pretpostavka bila je da se svaka funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ može napisati u obliku

$$f = \sum_{k,n} c_{n,k}(f) M_n T_k \phi,$$

za neke skalare $c_{n,k}(f)$. Videćemo da je njegova tvrdnja netačna, ali da ovakva ekspanzija funkcije ima smisla u teoriji okvira.

U ovom poglavlju dajemo preciznu definiciju takvih sistema, koji po Gaboru nose ime Gaborovi sistemi, i dokazujemo dva osnovna rezultata teorije okvira. Za osnovnu literaturu uzeta je referenca [7].

3.1 Osnovne osobine Gaborovih sistema

Osnovni operatori vremensko-frekvencijske analize su operatori translacije i modulacije i označavano ih, redom, sa

$$T_a f(x) = f(x-a) \quad \text{i} \quad M_b f(x) = e^{2\pi i b x} f(x).$$

Definicija 3.1.1 (Gaborov sistem) Neka su nenula funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ i konstante $a, b > 0$ fiksirane. *Gaborov sistem* je dat sa

$$\mathcal{G}(g, a, b) = \{e^{2\pi i b n x} g(x - ak)\}_{k,n\in\mathbb{Z}} = \{M_{bn} T_{ak} g(x)\}_{k,n\in\mathbb{Z}}. \tag{3.1}$$

[13]Gábor Dénes - mađarski fizičar (1900-1979), dobitnik Nobelove nagrade za fiziku „za fundamentalni rad i otkrića koja se tiču antiferomagnetizma i feormagnetizma, što je dovelo do važnih primena u fizici čvrstog stanja."

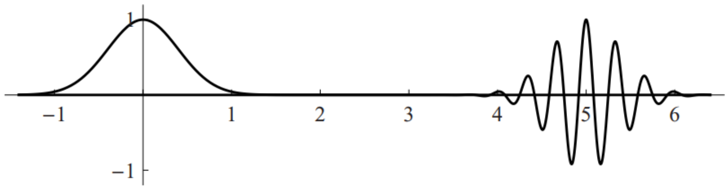
Funkciju g zovemo *generatorna funkcija* ili *atom sistema*, a konstante a, b *parametri sistema*.

Gaborov sistem nazivamo *Gaborov okvir* ako je niz (3.1) okvir u $L^2(\mathbb{R})$.

Osnovni predlog Gaborovog rada je da se kao bazni sistem posmatra

$$\mathcal{G}(g, a, b) = \mathcal{G}\left(e^{-\pi \frac{x^2}{a^2}}, a, \frac{1}{a}\right).$$

Izbor Gausijana $2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x^2}$ je logičan jer njegova Furijeova transformacija[14] ima isti oblik. Iz tog razloga Gausijan u vremensko-frekvencijskoj ravni vrši dobru lokalizaciju signala.



Slika 2: *Gausijan* $f(x) = e^{-\pi x^2}$ *i vremensko-frekvencijski pomeraj* $M_3 T_5 f$

Često promenljivu x posmatramo kao vreme, pa translacija predstavlja pomeranje vremena, a modulacija pomeranje frekvencije. Vremensko-frekvencijska pomeranja su upravo kompozicije operatora translacije i modulacije, $T_a M_b$ i $M_b T_a$.

U opštem slučaju translacija i modulacija ne komutiraju, ali važi

$$\begin{aligned} T_a M_b f(x) &= (T_a(M_b f))(x) \\ &= (M_b f)(x-a) \\ &= e^{2\pi i b(x-a)} f(x-a) \\ &= e^{-2\pi i a b} \cdot e^{2\pi i b x} f(x-a) \\ &= e^{-2\pi i a b} M_b T_a f(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Kako je $|e^{-2\pi i a b}| = 1$, dobijamo da T_a i M_b komutiraju u slučaju kada je proizvod $a \cdot b$ ceo broj.

U ovom, ali videćemo i u mnogim drugim, situacijama konstante a i b pojedinačno nisu toliko važne koliko je bitan njihov proizvod.

Još jedna važna transformacija je dilatacija, koju definišemo sa

$$(D_r f)(x) = r^{\frac{1}{2}} f(rx)$$

[14]Za po delovima neprekidnu i apsolutno integrabilnu funkciju f, definišemo Furijeovu transformaciju sa $\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$.

za $r > 0$ i funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dilatacijom funkcije g možemo menjati vrednost a sve dok srazmerno menjamo vrednost b, odnosno, vrednost parametra a, to jest b, možemo povećavati i smanjivati, ali tako da njihov proizvod ab ostane nepromenjen.

Lema 3.1.2 Neka je data funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ i konstante $a, b \in \mathbb{R}$. Za dato $r > 0$, $\mathcal{G}(g, a, b)$ je okvir u $L^2(\mathbb{R})$ ako i samo ako je $\mathcal{G}(g, \frac{a}{r}, br)$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz. Koristeći definicije operatora dilatacjije D_r, modulacije M_{bn} i translacije T_{ak} dobijamo

$$\begin{aligned} D_r(M_{bn}T_{ak}g)(x) &= r^{\frac{1}{2}}(M_{bn}T_{ak}g)(rx) \\ &= r^{\frac{1}{2}}e^{2\pi ibn\cdot rx}g(rx - ak) \\ &= r^{\frac{1}{2}}e^{2\pi ibn\cdot rx}g\left(r\left(x - \frac{ak}{r}\right)\right) \\ &= M_{bnr}T_{\frac{ak}{r}}(D_r g)(x). \end{aligned}$$

Dakle, $\mathcal{G}(g, \frac{a}{r}, br)$ je slika Gaborovog okvira $\mathcal{G}(g, a, b)$ dilatacijom D_r. Kako je D_r unitarno preslikavanje prostora $L^2(\mathbb{R})$ na samog sebe, sledi tvrđenje. $\square$

O karakterizaciji okvira s obzirom na proizvod ab govori upravo Teorema o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji, o kojoj će biti reči kasnije.

Već je rečeno da je Gaborov sistem okvir, ukoliko posmatrani niz čini okvir u prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Odgovarajući operator okvira dat je sa

$$Sf = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, M_{bn}T_{ak}g\rangle M_{bn}T_{ak}g. \tag{3.3}$$

Operator S je pozitivan po (2.3) i samoajdungovan po (2.2), pa postoji njegov inverz S^{-1}. Oba operatora S i S^{-1} komutiraju sa T_{ak} i M_{bn}.

Sledeća lema govori o tome da je kanonički dual Gaborovog okvira (vidi definiciju 2.3.3), ponovo Gaborov okvir.

Posledica 3.1.3 Ako je $\mathcal{G}(g, a, b)$ Gaborov okvir u $L^2(\mathbf{R})$, tada je njegov kanonički dualni okvir dat sa $\mathcal{G}(S^{-1}g, a, b)$.

Ovo tvrđenje je jasna posledica pomenute komutativnosti:

$$S^{-1}(M_{bn}T_{ak}g) = M_{bn}T_{ak}(S^{-1}g).$$

Svakom Gaborovom okviru $\mathcal{G}(g,a,b)$ pridružujemo a-periodični funkciju G_0 datu sa

$$G_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(x-ak)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |T_{ak}g(x)|^2 \ , \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Jasno, G_0 zavisi samo od g i a. Ovu funkciju koristićemo u sledećem poglavlju.

Gaborovi sistemi se definišu i sa

$$\mathcal{G}(g,\Lambda) = \{e^{2\pi ibx}g(x-a)\}_{(a,b)\in\Lambda}$$

gde je Λ proizvoljan prebrojiv skup tačaka iz $\mathbb{R}^2$. Ovakav tip Gaborovog sistema nazivamo *nepravilan Gaborov sistem* i pošto su oni mnogo kompleksniji za analizu, u ovom radu ćemo ih zanemariti.

Iako još uvek mlada disciplina, teorija okvira ima mnogo važnih i primenljivih rezultata. U ovom radu fokusiraćemo se samo na dva, a to su: Teorema o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji (Painless nonorthogonal expansion theorem) i Balian-Lou teorema (Balian-Low theorem).

3.2 Teorema o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji

Teorema o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji je dokazana je u radu [3] Ingrid Dobeši[15], Aleksandra Grosmana[16] i Ivesa Mejera[17], a ona kaže da za pogodno odabrane parametre, za svaku funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$ sa odgovarajućim kompaktim nosačem možemo formirati Gaborov okvir.

Posmatrajmo Gaborov okvir karakteristične funkcije

$$\mathcal{G}(\chi_{[0,1]},1,1) = \{e^{2\pi int}\chi_{[k,k+1]}(t)\}_{k,n\in\mathbb{Z}}.$$

Znamo da je za fiksirano k niz $\{e^{2\pi int}\chi_{[k,k+1]}(t)\}_{n\in Z}$ ONB za $L^2\,[k,k+1]$ (Furijeova baza), te je Gaborov sistem $\mathcal{G}(\chi_{[0,1]},1,1)$ unija ONB za $L^2\,[k,k+1]$ za svako $k\in\mathbb{Z}$, odnosno, $\mathcal{G}(\chi_{[0,1]},1,1)$ je ONB za $L^2(\mathbb{R})$. Ovo pak nije primenljivo u praksi, jer je karakteristična funkcija $\chi_{[0,1]}$ prekidna pa ekspanzija glatke funkcije u $\mathcal{G}(\chi_{[0,1]},1,1)$ ne može konvergirati brže od ekspanzije funkcije koja ima prekide. Furijeova transformacija funkcije $g=\chi_{[0,1]}$ je data sa

$$\hat{g}(t) = e^{-\pi it}\frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

[15]baronica Ingrid Daubechies - belgijska matematičarka i fizičarka (rođena 1954)

[16]Alexander Grossmann - francusko-američki fizičar (1930–2019)

[17]Yves F. Meyer - francuski matematičar (rođen 1939)

pa $\hat{g}$ nije integrabilna, odnosno sporo opada u beskonačnosti, te ovo nije dobar primer ONB.

Cilj je pronaći glatku i lokalizovanu funkciju koja će generisati Gaborov okvir.

Teorema 3.2.1 (Painless Nonorthogonal Expansions) Neka su date konstante $a, b > 0$ i funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$.

1. Ako je $0 < ab \leq 1$ i $\mathrm{supp}(g) \subseteq [0, b^{-1}]$, tada je $\mathcal{G}(g, a, b)$ konačan okvir u $L^2(\mathbb{R})$ ako i samo ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da važi

$$Ab \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(x - ak)|^2 \leq Bb \tag{3.4}$$

   skoro svuda. Konstante A i B su granice okvira $\mathcal{G}(g, a, b)$.

2. Ako je $0 < ab < 1$ tada postoji funkcija g sa nosačem u $[0, b^{-1}]$ koja zadovoljava (3.4) i glatka je koliko to zahtevamo, čak i beskonačno diferencijabilna.

3. Ako je $ab = 1$ tada svaka funkcija g sa nosačem u $[0, b^{-1}]$ koja zadovoljava (3.4) mora biti neprekidna.

4. Ako je $ab > 1$ i funkcija g ima nosač u $[0, b^{-1}]$ tada nejednakost (3.4) nikada nije zadovoljena i $\mathcal{G}(g, a, b)$ nije kompletan sistem u $L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $\mathrm{supp}(g) \subseteq [0, b^{-1}]$ i da je zadovoljeno (3.4).

Da bismo pokazali da je $\mathcal{G}(g, a, b)$ okvir, dovoljno je pokazati da se granice okvira ne menjaju ukoliko posmatramo gust podskup od $L^2(\mathbb{R})$. U tu svrhu možemo posmatrati gust potprostor $C_c(\mathbb{R})$. Pa, posmatrajmo ograničenu funkciju f sa kompaktim nosačem.

Kako je posmatrana funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ sa nosačem u $[0, b^{-1}]$, translirana funkcija $T_{ak}g$ pripada prostoru $L^2(I_k) = L^2([ak, ak + b^{-1}])$. Zbog ograničenosti funkcije f, sledi da je $f \cdot T_{ak}\overline{g} \in L^2(I_k)$. Sada, $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ONB za $L^2[0, 1]$, pa smenom promenljivih dobijamo da je

$$\{b^{\frac{1}{2}} e_{bn}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{b^{\frac{1}{2}} e^{2\pi ibnx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

ONB za $L^2(I_k)$. Upotrebom Planšerelove jednakosti[18] dobijamo

[18]Planšerelova jednakost: Neka su f, g po delovima glatke i apsolutno integrabilne funkcije. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 < \infty$ i $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 < \infty$ onda važi $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\overline{\hat{g}(w)}$.

Michel Plancherel - švajcarski matematičar (1885-1967)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x-ak)|^2\,dx &= \int_{ak}^{ak+b^{-1}} \left|f(x)T_{ak}\overline{g(x)}\right|^2\,dx \\
&= \|f\cdot T_{ak}\overline{g}\|_{L^2(I_k)}^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f\cdot T_{ak}\overline{g}, b^{\frac{1}{2}}e_{bn}\rangle_{L^2(I_k)}\right|^2 \\
&= b\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\int_{ak}^{ak+b^{-1}} f(x)\overline{g(x-ak)}e^{-2\pi ibnx}dx\right|^2 \\
&= b\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{e^{2\pi ibnx}g(x-ak)}dx\right|^2 \\
&= b\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{bn}T_{ak}g\rangle|^2. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Sada primenom Fubinijeve teoreme[19] o zameni sume i integrala

$$\begin{aligned}
\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, M_{bn}T_{ak}g\rangle|^2 &= b^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x-ak)|^2dx \\
&= b^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g(x-ak)|^2dx \qquad (3.6) \\
&\geq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 A dx \\
&= A\|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Sličnim računom može se pokazati da ista ocena važi za gornju granicu funkcije f. Kako je $C_c(\mathbb{R})$ gust skup u $L^2(\mathbb{R})$, zaključujemo da je $\mathcal{G}(g,a,b)$ okvir sa granicama A i B. U narednoj teoremi biće navedena bolja ocena druge nejednakosti, pa dokaz završavamo ovde.

2. Neka je $0 < ab < 1$ i neka je g neprekidna funkcija takva da je $g(x) = 0$ van $[0, b^{-1}]$ i bez umanjenja opštosti, $g(x) > 0$ na $(0, b^{-1})$. Pošto je $a < b^{-1}$ sledi da je a-periodična funkcija $G_0(x) = \sum |g(x-ak)|^2$ neprekidna i strogo pozitivna. Stoga je $0 < \inf G_0 \leq \sup G_0 < \infty$ pa $\mathcal{G}(g,a,b)$ čini okvir po 1.

3. Ako je $ab = 1$ to je $a = b^{-1}$. Sada ako je $\mathrm{supp}(g) \subseteq [0, b^{-1}] = [0, a]$ onda $T_{ak}g$ ima nosač u $[ka, (k+1)a]$. Ako je g neprekidna onda je $g(0) = g(a) = 0$.

[19]Fubinijeva teorema: "Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na pravougaoniku $I = [a,b]\times[c,d]$. Tada važi $\iint_I f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$."
Guido Fubini - italijanski matematičar (1879-1943)

Intervali oblika $[ka, (k+1)a]$ se seku u najvise jednoj tački, te je funkcija G_0 neprekidna i $G_0(ak) = 0$ za svako $k \in \mathbb{Z}$. Slučaj 1. garantuje da sada $\mathcal{G}(g, a, b)$ ne može biti okvir, jer je tada donja granica $A = 0$, za nju treba da važi da je strogo veća od nule.

4. Ako je $ab > 1$ onda je jasno $a > b^{-1}$. $\mathcal{G}(g, a, b)$ ne može biti okvir jer je $G_0(x) = \sum |g(x - ak)|^2$ jednaka nuli na intervalu $[b^1, a]$. Preciznije, karakteristična funkcija $\chi_{[b^{-1},a]}$ je ortogonalna na svaki element niza $\mathcal{G}(g, a, b)$, te je ovaj Gaborov sistem nekompletan. $\square$

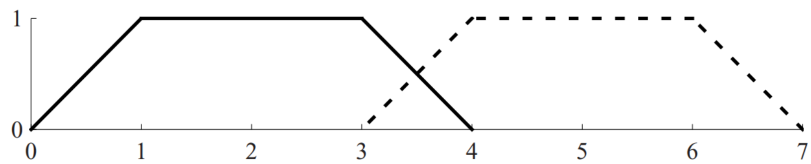
Primetimo da je u Teoremi 3.1.2 važan baš proizvod parametara a i b jer prema Lemi 3.1.3 možemo menjati vrednost a sve dok usaglašeno menjamo i b. Takođe, transliranjem funkcije g možemo zameniti interval $[0, b^{-1}]$ bilo kojim intervalom dužine b^{-1}.

Primer 3.2.2 Radi jednostavnosti, pretpostavimo da su dati parametri a i b takvi da je $\frac{1}{2} < ab < 1$. Tada funkcija $G_0(x) = \sum |g(x - ak)|^2$ za svako x ima najviše dva nenula sabirka.

Generatornu funkciju g, koja će biti neprekidna i imati noač u $[0, b^{-1}]$ definišemo na sledeći način:

$$g(x)^2 = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ linearna, & x \in [0, b^{-1} - a], \\ 1, & x \in x \in [b^{-1} - a, a], \\ linearna, & x \in [a, b^{-1}], \\ 0, & x > b^{-1}. \end{cases}$$

Za ovakvo g je $G_0(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, što se jasno vidi sa slike:



Slika 3: *Grafici funkcija* $g(x)^2$ *i* $g(x-3)^2$ *na* $[0, 4]$.

Otuda je $\mathcal{G}(g, a, b)$ b^{-1}-čvrst okvir, a skaliranjem možemo učiniti da bude Parsevalov. Konstrukcija postaje komplikovanija ukoliko je proizvod $ab < \frac{1}{2}$, jer tada ima više preklapanja, ali ista ideja se može proširiti za sve vrednosti a i b takve da je $0 < ab < 1$.

Najvažnije što treba da zapamtimo iz Teoreme 3.2.1 jeste:

- Ukoliko je $0 < ab < 1$ tada možemo pronaći "lepu" generatornu funkciju g, to jest glatku i sa kompaktnim nosačem, za koju će $\mathcal{G}(g, a, b)$ biti okvir za $L^2(\mathbb{R})$, u nekim slučajevima čak i Parsevalov okvir.

- Ako je $ab = 1$ tada postoji Gaborov okvir $\mathcal{G}(g, a, b)$ za $L^2(\mathbb{R})$, ali svaki tako formiran okvir ima prekidnu generatornu funkciju g.

- Ako je $ab > 1$ tada nijedan Gaborov sistem sa generatorom koji ima nosač u $[0, b^{-1}]$ nije okvir u $L^2(\mathbb{R})$, a nijedan Gaborov sistem $\mathcal{G}(g, a, b)$ ne može biti kompletan.

Teorema 3.2.3 Ako su $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $a, b > 0$ takvi da je $\mathcal{G}(g, a, b)$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$ sa granicama $A, B > 0$ tada skoro svuda važi $Ab \leq G_0 \leq Bb$, odnosno

$$Ab \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g(x - ak)|^2 \leq Bb. \tag{3.7}$$

Posebno, funkcija g mora biti ograničena.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu slučaja 1. Teoreme 3.2.1, razlika je u tome što sada nemamo informaciju o nosaču funkcije g. Zato pažnju usmeravamo na funkcije f koje su ograničene i imaju nosač sadržan na nekom intervalu I dužine $\frac{1}{b}$. Tada će se proizvod $f \cdot T_{ak}\overline{g}$ nalaziti u $L^2(I)$.

Pošto je $b^{\frac{1}{2}} e_{bn}$ ONB za $L^2(I)$ slično kao u jednakostima (3.5) sledi

$$b \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{bn} T_{ak} g \rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) g(x - ak)|^2 \, dx.$$

Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 G_0(x) dx =& \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) g(x - ak)|^2 \, dx \\
=& b \sum_{k, n \in \mathbb{Z}} |\langle f, M_{bn} T_{ak} g \rangle|^2 \\
\geq& bA \|f\|_{L^2}^2 \\
=& bA \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

Dakle, za sve ograničene funkcije $f \in L^2(I)$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \left(G_0(x) - bA\right) dx \geq 0 \qquad (3.8).$$

Sada, ako je $G_0(x) < bA$ na nekom podskupu $E \subset I$ koji je pozitivne mere, onda možemo uzeti $f = \chi_E$ i dobiti kontradikciju sa (3.8). Zato mora biti $G_0(x) \geq bA$ na I, i slično je $G_0 \leq bB$ ukoliko računamo posmatrajuči gornju granicu okvira. Kako je I proizvoljan interval dužine $\frac{1}{b}$ i kako realna prava može biti prekrivena sa prebrojivo mnogo translacija I, zaključujemo da je $bA \leq G_0 \leq bB$ skoro svuda na $\mathbb{R}$. $\square$

Posledica 3.2.4 Neka je data funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ i konstante $a, b > 0$. Ako je $\mathcal{G}(g, a, b)$ okvir prostora $L^2(\mathbb{R})$ sa donjom granicom A i gornjom granicom B tada važi:

1. $Aab \leq \|g\|_{L^2}^2 \leq Bab$.
2. Ako je $\mathcal{G}(g, a, b)$ Parsevalov okvir, tada je $\|g\|_{L^2}^2 = ab$.
3. $0 < ab \leq 1$.
4. $\langle g, S^{-1}g \rangle = ab$.
5. $\mathcal{G}(g, a, b)$ je Risova baza ako i samo ako je $ab = \langle g, S^{-1}g \rangle = 1$.

Rezimirajmo Posledicu 3.2.4:

- Ako je $ab > 1$ onda $\mathcal{G}(g, a, b)$ nije okvir.
- Ako je $\mathcal{G}(g, a, b)$ okvir i $ab = 1$ onda je u pitanju Risova baza.
- Ukoliko je $\mathcal{G}(g, a, b)$ okvir i $0 < ab < 1$ onda govorimo o okviru koji nije egzaktan.

3.3 Balian-Lou teorema

Još jedan važan rezultat jeste teorema do koje su došli Rodžer Balian[20] i Frensis Lou[21] nezavisno jedan od drugog. U suštini, oni su zaključili da od Risovih baza ne možemo uvek konstruisati korisne Gaborove sisteme, već da moramo dopustiti određenu fleksibilnost, koju imaju okviri. Nadalje, za Balian-Lou teoremu koristi se skraćenica BLT.

[20]Roger Balian - američko-jermenski fizičar (rođen 1933)
Bavi se izučavanjem kvantne teorije polja, kvantne termodinamike i teorije mere. Član je francuske akademije nauka, a trenutno predaje na École Polytechnique u Parizu

[21]Francis Eugene Low - američki fizičar(1921-2007)
Radio je u više gradova, ali najduže se zadržao u Bostonu na MIT-u, na departmanu za fiziku. Za sebe je šaljivo govorio da je "statistički nepouzdan".

Teorema se primenjuje u više verzija, a u ovom radu navodimo samo dve.

Teorema 3.3.1 (Amalgam BLT) Ako je $\mathcal{G}(g, 1, 1)$ Risova baza prostora $L^2(\mathbb{R})$ tada $g \notin W(C, l^2)$.[22] Specijalno, tačna je tačno jedna od tvrdnji

1. g nije neprekidna
2. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|g \cdot \chi_{[k,k+1]}\|_{L^\infty} = \infty$

Takođe važi $\hat{g} \notin W(C, l^2)$.

Dokaz Teoreme 3.3.1 može se pronaći u [2]. Za popunjavanje rupa u dokazima koje su dali Balian i Lou zaslužni su Koifman[23], Dobeši i Sems[24]. Ipak, ovde je prestavljen dokaz za slučaj kada je u pitanju ortonormirana baza, i on je rezultat Batla[25].

Teorema 3.3.2 (Klasična verzija BLT) Ako je $\mathcal{G}(g, 1, 1)$ Risova baza prostora $L^2(\mathbb{R})$ tada

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 dx\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 d\xi\right) = \infty. \tag{3.9}$$

Pre samog dokaza, razmotrimo šta teorema u stvari tvrdi i kako se odnosi na Teoremu 3.3.1. Furijeova transformacija je preslikavanje prostora $L^2(\mathbb{R})$ u samog sebe, pa ako $g \in L^2(R)$ tada isto važi za njenu Furijeovu transformaciju $\hat{g}$. Slavni klasični *Princip neodređenosti* kvantne mehanike u matematičkom zapisu ima sledeći oblik:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 dx\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx. \tag{3.10}$$

Leva strana nejednakosti (3.10) može biti konačna ili pak beskonačna, ali nikada nije manja od desne strane. Jednakost se dostiže za Gausijana $f(x) = e^{-\pi x^2}$, kao i za modulacije i translacije te funkcije. Klasična BLT tvrdi da ako je $\mathcal{G}(g, 1, 1)$ Risova baza za $L^2(\mathbb{R})$, onda ne samo da važi nejednakost (3.10), nego leva strana u toj nejednakosti baš mora biti beskonačna.

[22] Vinerov amalgam prostor definišemo sa $W(C, \ell^1) = \{f \in W(L^\infty, \ell^1) : f\, je\, neprekidna\}$ sa normom $\|\cdot\|_{W(L^\infty, l^1)} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|f \cdot \chi_{[k,k+1]}\|_{L^\infty}$.

[23] Ronald Raphael Coifman - profesor na univerzitetu Yale (rođen 1941)

[24] Stephen William Semmes - profesor na univerzitetu William Marsh Rice (rođen 1962)

[25] Joseph Battle - američki matematičar (rođen 1930)

Kvalitativno, Teoreme 3.3.1 i 3.3.2 imaju slične zaključke: generator Gabor-Risove baze određene gustine ili nije glatka funkcija ili se ne može razložiti na pogodan način. Obe teoreme ovo tvrde na različite načine, iako postoji određeno preklapanje, ne možemo iz jedne od njih izvesti drugu, te ih moramo posmatrati kao dve različite teoreme.

Dokaz Teoreme 3.3.2 (Za ortonormirane baze). U matematičkoj notaciji, operatori pozicije i momenta iz kvantne mehanike dati su redom sa:

$$Pf(x) = xf(x) \ \ , \ \ Mf(x) = \frac{1}{2\pi i} f'(x).$$

Jasno, ovi operatori ne slikaju $L^2(\mathbb{R})$ u sebe. Restrikcijom na odgovarajuće guste podskupove ovog prostora možemo ih učiniti dobro definisanim, ali čak ni tada oni neće biti ograničeni u L^2-normi. Ipak, oni igraju glavnu ulogu u harmonijskoj analizi i kvantnoj mehanici.

Neka je data funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ takva da je $\mathcal{G}(g, 1, 1)$ ONB prostora $L^2(\mathbb{R})$. To, između ostalog znači da je

$$\langle g, M_n T_k g\rangle = \delta_{0k}\delta_{0n} \ \ , \ \ k, n \in \mathbb{Z}$$

gde su δ_{0k} i δ_{0n} *Kronekerove delta funkcije* date sa $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$

Ukoliko je $\int |xg(x)|^2 dx = \infty$ ili $\int |\xi \hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \infty$ tada je nejednakost (3.9) trivijalno zadovoljena, pa pretpostavimo da su obe ove vrednosti konačne. To za operator pozicije znači da $Pg \in L^2(\mathbb{R})$ i $P\hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$.

Kako su ove funkcije g i Pg elementi prostora $L^2(\mathbb{R})$, tada za $k, n \in \mathbb{Z}$ imamo:

$$\begin{aligned} \langle Pg, &M_n T_k g\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) e^{-2\pi i n x} \overline{g(x-k)}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{e^{2\pi i n x}(x-k) g(x-k)}\, dx + k \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{e^{2\pi i n x} g(x-k)}\, dx \\ &= \langle g, M_n T_k P g\rangle + k \langle g, M_n T_k g\rangle \\ &= \langle g, M_n T_k P g\rangle + k \cdot \delta_{0k}\delta_{0n} \\ &= \langle g, M_n T_k P g\rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Adjungovani operator za modulaciju M_n je M_{-n} i slično za operator translacije T_k je T_{-k}, a kako su $k, n \in \mathbb{Z}$ to važi (3.2) i ovi operatori komutiraju, te je

$$\langle g, M_n T_k P g\rangle = \langle T_{-k} M_{-n} g, Pg\rangle = \langle M_{-n} T_{-k} g, Pg\rangle. \tag{3.12}$$

Kombinujući rezultate (3.11) i (3.12) vidimo da je

$$\langle Pg, M_n T_k g\rangle = \langle M_{-n} T_{-k} g, Pg\rangle. \tag{3.13}$$

Sledeći cilj nam je da za operator momenta Mg izvršimo isti račun kao za Pg.

S obzirom da Furijeova transformacija menja glatkost i opadaje funkcije, pretpostavka da se g i $P\widehat{g}$ nalaze u $L^2(\mathbb{R})$ implicira da g ima određenu "dozu glatkoće". Preciznije, g je apsolutno neprekidna na svakom konačnom intervalu, $g'(x)$ postoji skoro svuda i $g'(x) \in \mathbb{R}$ i skoro svuda važi

$$\hat{g'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{g}(\xi) = 2\pi i P\hat{g}(\xi).$$

Posebno, $Mg \in L^2(\mathbb{R})$ i

$$(Mg)^\wedge = \left(\frac{1}{2\pi i} g'\right)^\wedge = P\hat{g}.$$

Kako je Furijeova transformacija unitarna na $L^2(\mathbb{R})$, primenom (3.13) dobijamo

$$\begin{aligned}\langle Mg, M_n T_k g\rangle &= \langle (Mg)^\wedge, (M_n T_k g)^\wedge\rangle \\ &= \langle P\hat{g}, T_n M_{-k}\hat{g}\rangle \\ &= \langle P\hat{g}, M_{-k} T_n \hat{g}\rangle \\ &= \langle M_k T_{-n}\hat{g}, P\hat{g}\rangle \\ &= \langle (T_{-k} M_{-n} g)^\wedge, (Mg)^\wedge\rangle \\ &= \langle T_{-k} M_{-n} g, Mg\rangle \\ &= \langle M_{-n} T_{-k} g, Mg\rangle. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Razvijanjem Pg i Mg u ONB $\{M_n T_k g\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ i primenjujući rezultate (3.13) i (3.14) zaključujemo

$$\begin{aligned}\langle Mg, Pg\rangle &= \left\langle \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle Mg, M_n T_k g\rangle M_n T_k g, Pg \right\rangle \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle Mg, M_n T_k g\rangle \langle M_n T_k g, Pg\rangle \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle M_{-n} T_{-k} g, Mg\rangle \langle Pg, M_{-n} T_{-k} g\rangle \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle Pg, M_n T_k g\rangle \langle M_n T_k g, Mg\rangle \\ &= \langle Pg, Mg\rangle. \end{aligned}$$

Ali, pokazaćemo da važi i

$$\langle Mg, Pg\rangle = \langle Pg, Mg\rangle - \frac{1}{2\pi i}$$

što će dati očiglednu kontradikciju. U tu svrhu prvo imamo

$$\langle Mg, Pg\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\overline{xg(x)}\,dx.$$

Za apsolutno neprekidne funkcije možemo primeniti parcijalnu integraciju, pa birajući $u(x) = \overline{g(x)}$ i $v(x) = xg(x)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
&\int_a^b g'(x)\overline{xg(x)}\,dx \\
&\quad= \int_a^b (xg'(x) + g(x))\overline{g(x)}\,dx - \int_a^b g(x)\overline{g(x)}\,dx \\
&\quad= \left(b|g(b)|^2 - a|g(a)|^2 - \int_a^b xg'(x)\overline{g'(x)}\,dx\right) - \int_a^b |g(x)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Za fiksirano a svaki od integrala koji se gore pojavljuju konvergira kad $b \to \infty$. To znači da $b|g(b)|^2$ mora konvergirati kad $b \to \infty$. Ali ova granična vrednost mora biti jednaka 0 pošto je g kvadrat integrabilna funkcija. Slično važi i kada $a \to -\infty$, pa konačno imamo

$$\begin{aligned}
\langle Mg, Pg\rangle &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b g'(x)\overline{xg(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(-\int_a^b xg'(x)\overline{g'(x)}\,dx - \int_a^b |g(x)|^2\,dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Pg(x)\overline{Mg(x)}\,dx - \frac{1}{2\pi i}\|g\|_{L^2}^2 \\
&= \langle Pg, Mg\rangle - \frac{1}{2\pi i}.
\end{aligned}$$

Dobijeni rezultat nam daje kontradikciju. □

Ipak, ovde nije kraj priči o bazama koje povezujemo sa vremensko- frekvencijskim pomerajima. Izuzetna konstrukcija poznata kao *Vilsonova baza* daje ortonormiranu bazu za $L^2(\mathbb{R})$ koja je generisana odgovarajućim linearnim kombinacijama vremensko-frekvencijsih pomeraja "lepih" funkcija.

3.4 Primeri Gaborovih okvira

U praksi je često komplikovano odrediti kako izgleda Gaborov sistem date funkcije $g \in L^2(\mathbb{R})$. Zbog teoreme 3.2.1 znamo da je potreban uslov da $\{M_{bn}T_{ak}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ bude okvir jeste da važi $ab \leq 1$. No to i dalje nije dovoljno olakšanje problema pronalaženja Gaborovg okvira. U ovom delu fokusiraćemo se na klase funkcija za koje su Gaborovi sistemi već određeni.

Primer 3.4.1 Gausijan $g(x) = e^{-x^2}$.

Iz posledice 3.2.4 jasno je da ukoliko imamo Gaborov okvir $\mathcal{G}(g, a, b)$ prostora $L^2(\mathbb{R})$ tada proizvod ab mora biti manji ili jednak jednici. Za funkciju Gausijana važi i više

Teorema 3.4.2 Neka su date konstante $a, b > 0$ i funkcija $g(x) = e^{-x^2}$. Tada je Gaborov sistem $\mathcal{G}(g, a, b) = \{M_{bn}T_{ak}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ okvir ako i samo ako je $ab < 1$.

Više o tome može se pronaći u [1].

Primer 3.4.3 Karakteristična funkcija $g(x) = \chi_{[0,c]}$, $c > 0$.

Pronalaženje parametara $a, b, c, > 0$ za koje će $\{M_{bn}T_{ak}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ biti okvir naziva se *abc problem*. Teorema 3.2.1 tvrdi da same konstante a i b nisu važne pojedinačno, već je mnogo bitniji njihov proizvod ab, te pretpostavimo da je $b = 1$, pa ćemo srazmerno tome birati vrednost a.

Jansen[26] je u svom radu [10] detaljno pokazao da važi:

1° $\left\{M_n T_{ak}\chi_{[0,c]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ nije okvir ukoliko je $c < a$ ili $a > 1$,

2° $\left\{M_n T_{ak}\chi_{[0,c]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ je okvir ako je $1 \geq c \geq a$,

3° $\left\{M_n T_{ak}\chi_{[0,c]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ nije okvir ukoliko je $a = 1$ ili $c > 1$.

Sada možemo pretpostaviti da je $a < 1 < c$, te imamo

4° $\left\{M_n T_{ak}\chi_{[0,c]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ je okvir ako $a \notin \mathbb{Q}$ i $c \in]1, 2[$,

5° $\left\{M_n T_{ak}\chi_{[0,c]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ nije okvir ukoliko je $a = \frac{p}{q}$, gde je $NZD(p, q) = 1$ i $2 - \frac{1}{q} < c < 2$,

6° $\left\{M_n T_{ak}\chi_{[0,c]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ nije okvir ako je $a > \frac{3}{4}$ i $c = L - 1 + L(1 + a)$, pri čemu je L prirodan broj veći od 2,

7° $\left\{M_n T_{ak}\chi_{[0,c]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ je okvir ukoliko je $\left|c - \lfloor c \rfloor - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} - a$.

[26] Augustus J.E.M. Janssen - holandski matematičar (rođen 1953)

Grafička ilustracija ovog rezultata poznata je kao Jansenova kravata. Iznenađujuće kompikovana struktura okvira karakteristične funkcije ukazuje koliko je teško pronaći tačan domen parametara a i b koji generišu okvir za proizvoljnu funkciju g.

Primer 3.4.4 Eksponencijalna funkcija $g(x) = e^{-|x|}$.

Jansen je u radu [8] pokazao da funkcija $g(x) = e^{-|x|}$ ima okvir $\{M_{bn}T_{ak}g\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ za svako $a, b > 0$ za koje je $ab < 1$.

Primer 3.4.5 Proizvod karakteristične i eksponencijalne funkcije $g(x) = e^{-x}\chi_{[0,\infty]}(x)$.

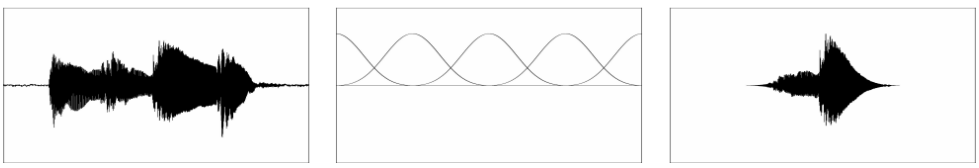
Ovakvu jednostranu eksponencijalnu funkciju $g(x) = e^{-x}\chi_{[0,\infty]}(x)$, Jansen je razmotrio u radu [9]. Došao je do zaključka da je potreban i dovoljan uslov da $\{M_{bn}T_{ak}g\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ bude okvir dat sa $ab \leq 1$.

4 Vremensko-frekvencijska analiza muzičkog signala

U ovom delu navešćemo kako se Gaborovi sistemi primenjuju u analizi muzičkih signala. U tu svrhu definisaćemo Gaborovu transformaciju. Svi navedeni primeri preuzeti su iz reference [12]. Tehnika opisana u ovom radu je eksperimentalne i interdisciplinarne prirode. Gaborova transformacija takođe je poznata kao brza Furijeova transformacija.

Svi zvučni signali koje analiziramo su digitalni, pa pretpostavimo da signal ima oblik $\{f(t_k)\}$, gde je t_k dato sa $t_k = k\Delta t$ na nekom konačnom intervalu $[0, T]$. Gaborova transformacija funkcije f sa prozorskom funkcijom g definiše se u dva koraka.

Prvo, množimo $\{f(t_k)\}$ sa nizom pomerenih funkcija $\{g(t_k - \tau_l)\}_{l=0}^{M}$ i dobijamo vremenski lokalizovane podsignale $\{f(t_k)g(t_k - \tau_l)\}_{l=0}^{M}$. Ravnomerno raspoređeni vremenski trenuci $\{\tau_l = t_{jl}\}_{l=0}^{M}$ su korišteni za ove pomeraje, gde je j pozitivan ceo broj i $j > 1$. Svi prozori $\{g(t_k - \tau_l)\}_{l=0}^{M}$ imaju kompaktan nosač i preklapaju se. Vidi sliku 4. Vrednost M predstavlja minimalan broj prozora koji su potrebni da bi se prekrio interval $[0, T]$, slika 4(b).



Slika 4: (a) (b) (c)
(a) Zvučni signal. (b) Sukcesija pomerenih prozorskih funkcija. (c) Signal pomnožen srednjom prozorom iz (b); na njega možemo primeniti kratkotrajnu Furijeovu transformaciju.

Zatim, kako g ima kompaktan nosač, posmatramo podsignal

$$\{f(t_k)g(t_k - \tau_l)\}$$

kao konačan niz i na njega primenjujemo Furijeovu transformaciju. Ovo daje Gaborovu transformaciju za $\{f(t_k)\}$:

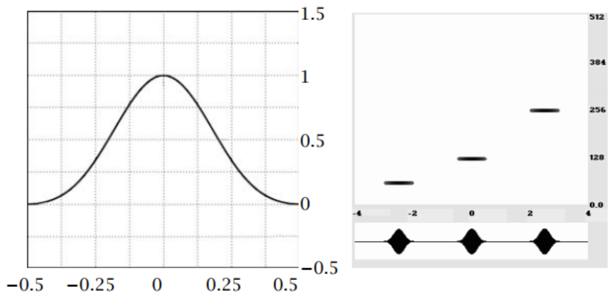
$$\{\mathcal{F}\{f(t_k)g(t_k - \tau_l)\}\}_{l=0}^{M} \tag{4.1}$$

U nomenklaturi koju smo naveli u prošlom poglavlju, Gaborova transformacija bila bi data sa $\sum_{n,k}\langle f, M_{bn}T_{ak}g\rangle$, odnosno, ona je data sumom koeficijenata koje dobijamo sa operatorom okvira, definisanim u (3.3).

Gaborova tranfsormacija koja se posmatra u [12] koristi Blekmenovu prozorsku funkciju:

$$g(t) = \begin{cases} 0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi t}{\lambda}\right), & |t| \leq \frac{\lambda}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

za pozitivan parametar λ jednak širini prozora gde se primenjuje Furijeova transformacija. Furijeova transformacija Blekmenove funkcije je skoro uvek pozitivna, pa je ona pogodna zamena za Gausijan. Na slici 5(b) ilustrovano je kako se za svaki prozor $g(t_k - \tau_m)$ pravi particija frekvencija u tanke pravougaone oblike koji leže tačno iznad nosača prozora.



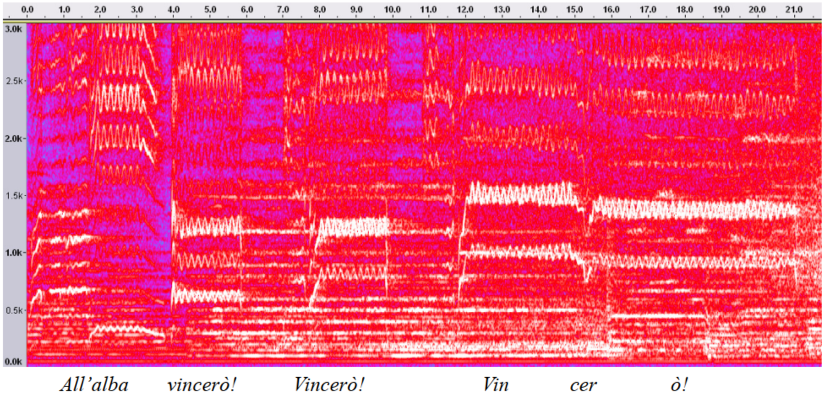
Slika 5: (a) (b)
(a) Blekmenov prozor za $\lambda = 1$. (b) Vremensko-frekvencijska reprezentacija (x-osa predstvalja vreme u sekundama, a y-osa frekvenciju u Hz) tri Blekmenova prozora pomnožena realnim delom jezgra $e^{2\pi i n k/N}$ Furijeove transformacije koja se koristi u Gaborovoj transformaciji.

Primetimo da Blekmenova funkcija "liči" na klasičnu Gaborovu prozorsku funkciju, odnosno ima oblik zvona kao i Gausijan, ali njena prednost je što ima kompaktan nosač. Spektogram se sastoji od kvadtara modula koeficijenata Gaborove transformacije, slika 5(b).

Sada ćemo pomoću spektograma analizirati par snimaka. Cilj je da pokažemo da pomoću spektograma dobijamo novu, kvantitativnu, dimenziju u razumevanju nastupa neverovatnih izvođača.

Primer 4.1 Spektogram izvođenja dela Pučinijeve arije "Nessum Doma" iz opere "Turandot", solo Lučano Pavarotija iz 1990. godine.

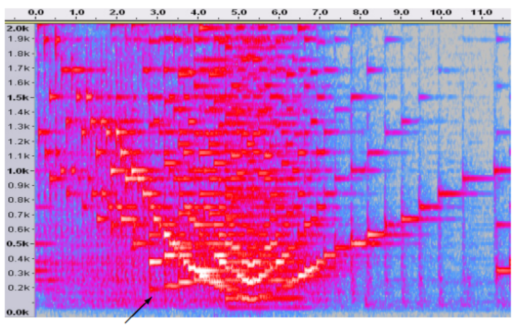
Ovaj spektogram prikazuje visoke amplitude vibrata koje Pavaroti dostiže. Pomoću njega možemo ih kvantitativno izmeriti.



Slika 6: *Pavaorijev vibrato je jasno vidljiv i merljiv.*

Ovo ilustruje kreativnu primenu spektograma. Kako je prikaz nastupa u realnom vremenu, spektogrami su korisni izvođačima jer mogu da vide gde i kako da poboljšaju svoj vibrato, u aplitudama i postojanosti.

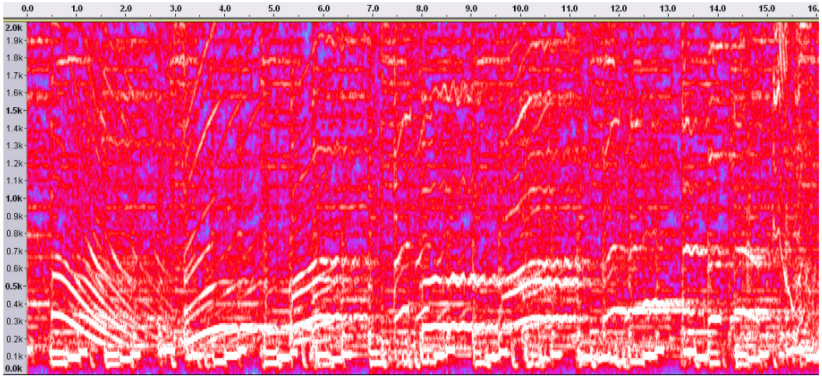
Primer 4.2 Šta to Ludvig van Betoven i Džimi Hendriks imaju zajedničko? Slike 7 i 8 prikazuju spektograme isečaka dela koje su komponovali.



Slika 7: *Betovenova "Sonata u e-duru" za klavir. Strelica upućuje na mesto gde se opadajuće note menjaju iz dubokih tonova u visoke tonove.*

Kratak odgovor bio bi su stvorili neverovatna muzička dela. Zanimljivo je uporediti ova dva spektograma i žanrove muzike koje oni simbolizuju.

Slika 7 prikazuje odlomak Betovenove "Sonate u e-duru" koju je izveo David Anez Garsija. Vidimo opadajući, a odmah za njim i rastući niz tonova, koji se na oko čine simetrični. Simetrija je ipak narušena pojavom dubokih tonova, što je na slici označeno strelicom. Takođe, primetimo da i lagano povišavanje tona na desno ruši ovu simetriju.



Slika 8: *Izvođenje "All About the Watchtower" Džimija Hendriksa.*

Zatim je na slici 8 prikazan spektogram snimka pesme "All Along the Watchtower" iz 1968. godine Džima Hendriksa. Sličnost prethodnom je u skoro simetričnom kretanju niza tonova naviše i naniže tonova, koje prati melodija. Hendriks ipak umesto da se koristi diskretnim notama, on svojom gitarom pravi neprekidan tok akorda.

Iz ovih nekoliko primera možemo zaključiti da je primena spektograma u praksi velika. Postoje mnogi programi koji trenutno ilustruju spektograme raznih zvukova. U ovom radu navodimo samo jedan takav:
`https://musiclab.chromeexperiments.com/spectrogram/`.

Zaključak

Jasno je da su baze vektorskog prostora zaista važne za proučavanje svih elemenata tog prostora. Ali, kada oslabimo uslove da neki skup bude ortonormirana baza Hilbertovog prostora u smislu da on ne mora biti linearno nezavisan, dolazimo do osnovnog alata vremensko-frekvencijske analize, odnosno okvira. To su nizovi vektora $\{x_i\}_{i\in I}$ za koje postoje pozitivne granice A i B takve da je zadovoljena nejednakost

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \ , \ \forall x$$

Sa svakim okvirom u nekm prostoru dobijamo i poseban operator, njegov operator okvira S. On je definisan kao kompozicija operatora analize i sinteze koji su redom dati sa

$$Cx = (\langle x, x_n\rangle) \ , \ \forall x \ \text{ i } \ Dc = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \ , \ \forall c = (c_n).$$

Za operator okvira važi da je ograničen, samoadjungovan, pa s tim i pozitivan. Ako je definisan na Hilbertovom prostoru H, onda S, ali i njegov inverz S^{-1}, topološki izomorfno preslikavaju H na samog sebe. Inverzni operator okvira $\{x_n\}$ definiše na njemu novi okvir, takozvani kanonički dulani okvir $\{S^{-1}x_n\}$ koji ima mnoge zanimljive osobine.

Gaborov okvir dat je kao niz funkcija

$$\mathcal{G}(g, a, b) = \{e^{2\pi ibnx} g(x - ak)\}_{k,n\in\mathbb{Z}} = \{M_{bn}T_{ak}g\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$$

ukoliko on čini okvir u prostoru $L^2(\mathbb{R})$, pri čemu je nenula generatorna funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$, konstante $a, b > 0$ i T_{ak} operator translacije, a M_{bn} operator modulacije. Operator ovakvog okvira dat je sa

$$Sf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, M_{bn}T_{ak}g\rangle M_{bn}T_{ak}g.$$

Dokazali smo dve važne teoreme teorije okvira: Teoremu o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji i Balian-Lou teoremu. Prva kaže da ako za bilo koju fukncjiju koja ima kompaktan nosač, na pogodan način izaberemo parametre a i b, tada ta funkcija postaje generatorna za neki Gaborov okvir. Ona nam takođe daje klasifikaciju Gaborovih sistema s obzirom na proizvod konstanti a i b. Druga, Balian-Lou teorema govori o tome da ako želimo da konstruišemo Gaborov okvir, moramo Risovim bazama olakšati određene zahteve, a takve osobine imaju okviri.

U poslednjem poglavlju smo ukratko opisali primenu teorije okvira na analizu zvučnih, odnosno muzičkih, signala.

Bibliografija

[1] Christensen Ole, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Second edition, Springer International Publishing, Switzerland, 2016.

[2] Cordero Elena, Rodrino Luigi, *Time-Frequency Analysis of Operators*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2020.

[3] Daubechies Ingrid, Grossmann Alexander, Meyer Yves, *Painless nonorthogonal expansions*, American Institute of Physics, Maryland, 1986.

[4] Gabor Denes, *Theory of Communication*, J. IEE, Novembar, 1944.

[5] Hadžić Olga, Pilipović Stevan, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu i MP STYLOS, Novi Sad, 1996.

[6] Han Deguang, Kornelson Keri, Larson David, Weber Eric , *Frames for Undergraduates*, American Mathematical Society, Providence, 2007.

[7] Heil Christopher , *A Basis Theory Primer*, Springer Science+Business Media, New York, 2011.

[8] Janssen Augustus, *On generating tight Gabor frames at critical density*, The Journal of Fourier Analysis and Applications, Volume 9, Boston, 2003.

[9] Janssen Augustus, *Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations*, Indag. Math 7, Eindhoven, 1996.

[10] Janssen Augustus, *Zak transforms with few zeros and the tie*, Birkhauser, Boston, 2002.

[11] Teofanov Nenad, *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

[12] Walker James, Don Gary, Muir Karyn, Volk Gordon *Music: Broken Symmetry, Geometry and Complexity*, Notices of the AMS, Volume 57, Number 1, Januar, 2010

[13] https://www.wikipedia.org/

Biografija

Autor ovog rada, Zvezdana Stanković, rođena je 31. oktobra 1998. godine u Somboru. Osnovnu školu i gimnaziju je završila u Apatinu, kao nosilac Vukove diplome. 2017. godine upisala je osnovne akademske studije na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Nakon završenih osnovnih studija, upisala je integrisane studije na istom fakultetu, smer Master profesor matematike i "nastavila" studije na petoj godini. Poslednji predmet predviđen planom i programom položila je školske 2021/22. godine u junskom roku sa prosečnom ocenom 9,06.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Zvezdana Stanković
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Osnovne teoreme teorije okvira
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2022
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/62/13/0/9/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza
ND

Ključne reči: Ortonormirana baza, okvir, operator okvira, Gaborov sistem, teorema o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji, Balian-Lou teorema
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi proučavanjem okvira u Hilbertovom prostoru. Na početku su predstavljeni osnovni pojmovi Hilbertovih prostra i teorije operatora. Zatim se uvodi pojam okvira i preko primera se slikovito prikazuju sličnosti i razlike sa ortonormiranim bazama nekog prostora. Sa tim, uvodi se operator okvira kao rezultat uvodnog dela i osipuju se njegove osobine. Dalje, definišemo Gaborove sisteme i dokazujemo osnovne teoreme teorije okvira: teorema o bezbolnoj neortogonalnoj ekspanziji i Balian-Lou teorema. Na kraju, navode se neki osnovni primeri Gaborovih okvira, i opisuje se primena u analizi zvučnog signala.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 06.04.2022.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Milica Žigić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Ivana Vojnović, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Zvezdana Stanković
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: Main theorems in frame theory
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian / English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2022
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/62/13/0/9/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis
SD

Subject/Key words: Orthonormal basis, frame, frame operator, Gabor's system, Painless nonorthogonal expansions theorem, Balian-Low theorem
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This Master thesis is about frames in Hilbert spaces. We start by presenting basic terms of Hilbert spaces and operator theory. Then we define frames and represent the similarities and differences between orthogonal bases and frames of some space. Further, as a result we define the frame operator and describe its main properties. Then we define Gabor's systems and prove main theorems in frame theory: The Painless Nonorthogonal Expansions Theorem and The Balian-Low Theorem. In the end, we state basic examples of Gabor frames and we describe its application on analysing sound signal.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 06.04.2022.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Milica Žigić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Ivana Vojnović, assistant professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad