UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Vladimir Šaraba

UOPŠTENJA MARKOVICOVOG MODELA

Master rad

Novi Sad, 2013

Sadržaj

UVOD

Dva osnovna problema u svetu investicija su optimalan izbor investicija za datu količinu kapitala i određivanje korektne cene dobra koje se kupuje. Pri tome pod investicijom podrazumevamo svako ulaganje u cilju ostvarivanja profita-kupovina akcija, nekretnina, ulaganje u profitabilni projekat i slično. Kako se u momentu odlučivanja ne zna sa sigurnošću šta će se dešavati sa novčanim tokom koji opisuje investiciju već postoji samo očekivano ponašanje budućeg novčanog toka onda je stopa prinosa investicije slučajna promenjiva koja ima očekivanu vrednost i u sebi nosi određeni rizik koji merimo varijansom odnosno standardnim odstupanjem. Kriterijum optimalnosti može biti ili maksimizacija očekivanog prinosa ili minimizacija rizika koji nosi portfolio ili kombinacija ova dva kriterijuma. Naravno, postoje investicije kod kojih je novčani tok unapred poznat, pa je u ovom slučaju prinos deterministička vrednost i standardno odstupanje je nula. Ovakve investicije nazivamo investicije bez rizika, a tipičan primer je depozit (ili kredit) koji nosi fiksnu, unapred poznatu kamatu ili portfolio sastavljen od državnih obveznica. Jedan od najpoznatijih matematičkih modela optimizacije portfolija je Markovicov model optimizacije. Tema ovog rada međutim jesu proširenja i uopštenja Markovicovog modela optimizacije kako bismo razmotrili dodatne načine optimizacije portfolija koji su primenjiviji potrebama banke, berze ili neke druge ustanove gde to može biti od koristi. U radu dajemo matematički pregled modela za optimizaciju portfolija.

Rad se sastoji iz šest poglavlja. U prvom poglavlju predstavljamo Markovicov model. Takođe predstavljamo CAP model kao model za određivanje korektne cene dobra U drugom poglavlju predstavljamo tzv. *safety first* modele (princip sigurnost kao prioritet) odnosno modele koji se baziraju na *shortfall* verovatnoćama. *Shortfall* verovatnoća je verovatnoća da će prinos portfolija biti manji od neke unapred zadate vrednosti. Posebno radimo optimizaciju portfolija baziranu na Telserovom modelu kao najprimenjivijem *safety first* modelu. U trećoj glavi diskutujemo o eliptičnim raspodelama i njihovim osobinama kao i o tome šta se dešava ako u Telserovom modelu umesto normalne raspodele koju smo pretpostavljali imamo neku od eliptičnih raspodela. VaR kao meru rizika razmatramo u četvrtoj glavi kao i optimizaciju portfolija baziranu na njemu. Zatim, u petoj glavi razmatramo Dodatnu ekonomsku vrednost (*EVA*) i Prihod kapitala prilagođenog riziku (*RAROC*) i implementiramo ih u prethodne modele. U šestoj glavi na teorijskom nivou modeliramo nesigurnost (promenjivost) početnih parametara kao što su očekivani prinos i kovarijansna matrica.

***

Ovom prilikom želim da se zahvalim svom mentoru, dr Dori Seleši kao i svim profesorima i asistentima sa kojima sam sarađivao tokom osnovnih i master studija. Veliku zahvalnost dugujem i svojoj porodici.

OZNAKE

- C_0 - početni kapital
- C_{end} - kapital na kraju perioda
- σ_p^2 - varijansa prinosa portfolija
- $\sigma_{i,j}$ - kovarijansa izmedju i-te i j-te investicije
- G=$\begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix}$ - kovarijansna matrica
- $\omega_i,\ i = 1, \dots, n$ - udeli (ponderi)
- r_p - prinos (prihod) portfolija
- $\bar{r}_p$ - očekivani prinos (prihod) portfolija
- r_f - bezrizična kamatna stopa
- ρ - koeficijent averzije prema riziku
- VaR_α -Value at Risk na nivou poverenja (1- α)
- r_{cap} - dnevna stopa utroška kapitala

OSNOVNE DEFINICIJE

Definicija 1: Očekivanje diskretne slučajne promenjive X, E(X) je E(X)= $\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$, gde je skup vrednosti koje X uzima $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Definicija 2: Funkcija $f: X \to Y$ je konveksna ako za svako $x, y \in X$ i proizvoljno $t \in (0,1)$ zadovoljava uslov:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad .$$

Definicija 3: Varijansa (disperzija) slučajne promenjive $X, var(X)$ ili $\sigma^2(X)$ je

$$var(X) = E((X - E(X))^2) \quad .$$

Za varijansu važe sledeće osobine:

- $var(X) \geq 0$
- $var(X) = 0 \iff X = c = const, skoro\ sigurno$
- $var(X + c) = var(X),\ c = const$.

Definicija 4: Kovarijansa slučajne promenjive (X, Y), $cov(X, Y)$ ili $\sigma_{X,Y}$ je

$$cov(X,Y) = E\Big(X - E(X)\big(Y - E(Y)\big)\Big) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad .$$

Definicija 5: Gama funkcija (z) , gde je z kompleksan broj takav da je $Re(z) > 0$ definisana je na sledeći način

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Prema definiciji je $\Gamma(1) = 1$ i za svaki prirodan broj n važi:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ .$$

Definicija 6: Za matricu kažemo da je pozitivno definitna ako su joj svi minori veći od nule.

Definicija 7: Koši-Švarcova nejednakost: U unitarnom vektorskom prostoru V za svako x,y ∈ V važi

$$|(x, y)| \leq \|x\|\ \|y\|$$

gde $(\cdot,\cdot)$ predstavlja unutrašnji proizvod. Pri tome, nejednakost važi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

1. MARKOVICOVA TEORIJA PORTFOLIJA

1.1 EFIKASNA GRANICA

Efikasna granica je kriva koja predstavlja sve efikasne portfolije odnosno portfolije koji imaju najveće očekivane prinose za dati nivo rizika. Investitor uvek investira u efikasni portfolio što je i logično obzirom da za odredjeni nivo rizika on želi najveći očekivani prinos, a ako želi određeni očekivani prinos želeće da investira sa minimalnim mogućim rizikom. Da bi smo izračunali efikasnu granicu treba da minimizujemo rizik (standardnu devijaciju) za dati očekivani prinos. MInimizujemo po . Kapital na kraju perioda C_{end} jednak je zbiru početnog kapitala C_0 i prinosa portfolija r_p. Prinos portfolija r_p izračunavamo kao $r_p = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \omega_{\mathrm{i}}\, r_{\mathrm{i}} = r^T\omega$. Mi ćemo minimizovati varijansu što ne predstavlja smetnju budući da standardna devijacija samo može biti pozitivna.

$$var(C_{end}) = var\ (C_0 + r_p) = var\ (r_p) = var\ (r^T\omega) = \omega^T \mathrm{G}\ \omega$$

Pri minimizaciji postoje dva ograničenja. Prvo, očekivani prinos mora biti fiksan iz razloga što minimizujemo rizik za dati prinos. Očekivani prinos portfolija definisan je sa $\bar{r}_p$. Drugo ograničenje se odnosi na to da mi možemo samo investirati kapital koji imamo u ovom momentu, pa iznosi koje investiramo moraju biti manji ili jednaki od početnog kapitala C_0.

Dakle, uslovi su $r^T\omega = \bar{r}_p$ i $\bar{1}^T\omega = C_0$

Rešavamo problem $min\ \omega^T \mathrm{G}\ \omega$
uz uslov $A^T\ \omega = \mathrm{B}$
gde je A = $[r\ \bar{1}]$ i B = $\begin{bmatrix} \bar{r}_p \\ C_0 \end{bmatrix}$

Da bismo rešili ovaj problem koristimo Lagranžovu metodu.

Dobijamo sledeće: 2G ω + Aλ_0 = 0
$A^T\omega$ = B
gde je $\lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ Lagranžov koeficijent.
Rešavajući prvu jednakost po ω i definišući vektor λ = -1/2 λ_0 dobijamo $\omega = G^{-1}$Aλ.
Ovim druga jednakost postaje $A^T G^{-1} A\lambda = B$ pa je λ=$(A^T G^{-1} A)^{-1} B = H^{-1} B$
gde je H = $(A^T G^{-1} A)$ i $H^T = (A^T G^{-1} A)^T = A^T (G^{-1})^T A = A^T G^{-1} A = H$, gde je H simetrična 2x2- matrica.
Kada zamenimo ove izraze u formulu za varijansu dobijamo

$$var\ (r_p) = \omega^T G\omega = \omega^T G G^{-1} A\lambda = \omega^T A\lambda = (A^T\omega)^T H^{-1} B = B^T H^{-1} B\ .$$

Budući da je H simetrična 2x2-matrica, možemo je zapisati kao H≡$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ pa imamo $H^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Neka je d≡det(H)=ac-b^2.

H=($A^T G^{-1} A$) pa je: a=$r^T G^{-1} r$, b=$r^T G^{-1} \bar{1}$, c=$\bar{1} G^{-1} \bar{1}$, d=ac-b^2.

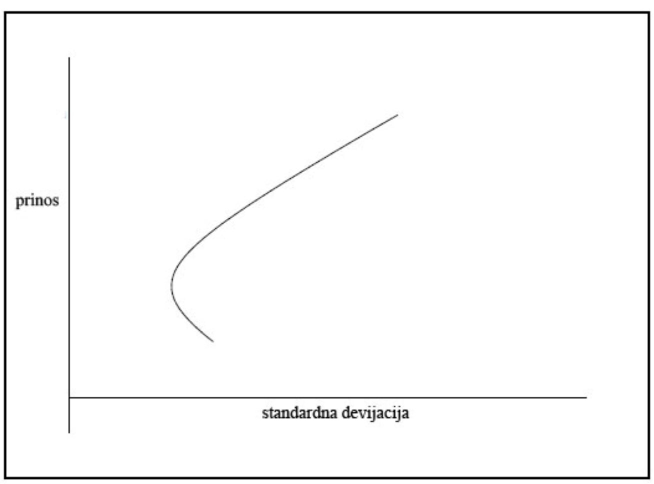
Pokazujemo da su parametri a, c i d pozitivni. Pretpostavili smo da je matrica G pozitivno definitna, pa je i G^{-1} pozitivno definitna. To znači da za svaki nenula vektor x važi da je $x^T G^{-1} x > 0$ pa samim tim važi da su a>0 i c>0. Takođe $(br - a\bar{1})^T G^{-1}(br - a\bar{1}) = bba - abb - abb + aac = a(ac - b^2) = ad > 0$ pa pošto je a>0 sledi i da je d>0.

Izraz za varijansu sada postaje

$$var\ (r_p)=\frac{1}{d}(\bar{r}_p C_0)\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{r}_p \\ C_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0{}^2)\ .$$

Ovo nam daje izraz za efikasnu granicu. Samo gornji deo grafika predstavlja efikasnu granicu jer portfoliji koji pripadaju donjem delu daju manji prinos. Formula za efikasnu granicu je data sa $\sigma_p^2 = \frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)$.

Korenovanjem ovog izraza dobijamo formulu za standardnu devijaciju. Efikasna granica prikazana je na slici 1.



Slika 1 Efikasna granica

1.2 PORTFOLIO MINIMALNE VARIJANSE

Neka je dato n investicija $D_i(\bar{r}_i\,,\sigma_i)$, i=1,…,n sa kovarijansama σ_{ij},i,j=1,…,n. Da bismo odredili skup minimalne varijanse fiksiramo očekivanje za stopu prinosa $\bar{r}$ i tražimo dopustivi portfolio sa minimalnom varijansom za ovo $\bar{r}$. Računamo varijansu portfolija:

$$\text{var}(C_{end})=\text{var}(C_0+r_p)=\text{var}(r_p)=\text{var}(r^T\omega)=\omega^T \text{G}\,\omega\ .$$

Mi iz tehničkih razloga posmatramo polovinu varijanse i tražimo njen minimum.Pri minimizaciji postoje dva ograničenja. Prvo, očekivani prinos mora biti fiksan iz razloga što minimizujemo rizik za dati prinos. Drugo ograničenje se odnosi na to da mi možemo samo investirati kapital koji imamo u ovom momentu, pa iznosi koje investiramo moraju biti manji ili jednaki od C_0. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je $C_0=1$.
Dakle, uslovi su $r^T\omega = r_p$ i $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$

Posmatramo problem

$$min\ \omega^T \text{G}\,\omega$$

$$\bar{r}^T\omega = \bar{r}_p\ ,\sum_{i=1}^{n}\ \omega_i=1$$

Funkcija cilja je kvadratna funkcija, a ograničenja su linearna, pa ovaj problem rešavamo Lagranžovom metodom. Lagranžova funkcija ima oblik:

$$\text{L}(\omega,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{2}\omega^T \text{G}\,\omega\ -\lambda_1(\bar{r}^T\omega-\bar{r}_p)-\lambda_2(\sum_{i=1}^{n}\omega_i-1)$$

Uslovi optimalnosti prvog reda su dati sa:

$$\begin{aligned} \text{G}\omega-\lambda_1\bar{r}-\lambda_2 e^T&=0\\ \omega^T\,\bar{r}-\bar{r}_p&=0\\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i-1&=0 \end{aligned}$$

Ovo je sistem linearnih jednačina dimenzije n+2, pa ako pretpostavimo da je G regularna matrica imamo optimalno rešenje određeno sa sledeće dve jednačine

$$\begin{aligned} \lambda_1\bar{r}^T G^{-1}\bar{r}+\lambda_2 e^T G^{-1}\bar{r}&=\bar{r}_p\\ \lambda_1\bar{r}^T G^{-1}e+\lambda_2 e^T G^{-1}e&=1 \end{aligned}$$

Skup efikasnih portfolija je ponovo konveksna u $\bar{r}$-σ ravni i predstavlja levu granicu dopustivog skupa.Označimo sa $\Phi(\omega)$ standardno odstupanje portfolija, $\Phi(\omega)=\sigma$,

$$\Phi(\omega)=(\omega^T G\omega)^{1/2}$$

Lema:Funkcija $\Phi(\omega)$ je konveksna.

Dokaz: Diferencirajući

$$\Phi^2(\omega) = \omega^T G\omega$$

dobijamo

$$2\Phi\Phi_\omega = 2G\omega$$

i

$$\Phi\Phi_{\omega\omega} + \Phi_\omega\Phi_\omega{}^T = G.$$

Dalje je

$$\Phi\Phi_{\omega\omega} = G - \frac{G\omega\omega^T G}{\Phi^2}.$$

Na osnovu poslednje jednakosti pokazujemo da je matrica $\Phi_{\omega\omega}$ pozitivno semidefinitna. Za proizvoljan vektor z imamo

$$\Phi z^T \Phi_{\omega\omega} z = z^T G z - \frac{(z^T G\omega)^2}{\omega^T G\omega},$$

Pa na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti sledi da je $\Phi z^T \Phi_{\omega\omega} z \geq 0$.

Lema: Ako je $\Phi(\omega)$ konveksna funkcija i $\sigma = \min_{\omega}\{\Phi(\omega) : \omega^T \bar{r} = \bar{r}_p, e^T\omega = 1\}$ onda je $\sigma(\bar{r})$ konveksna funkcija.

Dokaz: Neka su r^1 i r^2 dve realne vrednosti i ω^1 i ω^2 odgovarajući argumenti za koje funkcija $\Phi(\omega)$ dostiže minimum uz uslove $\omega^T \bar{r}_p = r^2$ odnosno $\omega^T \bar{r}_p = r^1$. Neka je $\psi \in [0,1]$.Tada za portfolio $\psi\omega^1 + (1-\psi)\omega^2$ važi:

$$\bar{r}^T(\psi\omega^1 + (1-\psi)\omega^2) = \psi r^1 + (1-\psi)r^2$$

i

$$e^T(\psi\omega^1 + (1-\psi)\omega^2) = 1 .$$

Dakle, portfolio formiran sa prethodnim jednačinama je dopustiv. Na osnovu osobina minimuma i konveksnosti funkcije Φ sledi nejednakost

$$\sigma(\psi\omega^1 + (1-\psi)\omega^2) \leq \Phi(\psi\omega^1 + (1-\psi)\omega^2)$$

$$\leq \psi\Phi(\omega^1)+(1-\psi)\,\Phi(\omega^2)$$

$$=\psi\sigma(r^1)+(1-\psi)\sigma(r^2)\ .$$

Za skup formiran od n investicija važi da je skup efikasnih portfolija konveksna kriva u $\bar{r}$-σ ravni.

Ukoliko dodamo uslov zabrane kratke prodaje onda model dopunjavamo uslovom $\omega_i \geq 0$ pa dobijamo problem optimizacije

$$min\ \frac{1}{2}\omega^T\,\mathrm{G}\omega$$

$$r^T\omega = \bar{r}_p \quad , e^T\omega=1,$$

$$\omega_i \geq 0\ ,\ i=1,...,n$$

Lagranžova funkcija za ovaj problem je

$$\mathrm{L}(\omega, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+2})=\frac{1}{2}\omega^T\,\mathrm{G}\omega-\lambda_1(r^T\omega - r_p)-\lambda_2(\sum_{i=1}^{n}\omega_i - 1)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i+1}\omega_i\ ,$$

a uslovi optimalnosti su sada određeni sistemom jednačina

$$\mathrm{G}\omega-\lambda_1 r^T-\lambda_2 e-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i+2}=0$$

$$r^T\omega = \bar{r}_p$$
$$e^T\omega=1$$
$$\omega_i \geq 0\ ,\ i=1,...,n$$

Ovaj problem se rešava nekom od metoda nelinearne optimizacije. Pri tome je $\sigma_p^2=\omega^T\,\mathrm{G}\omega$.

Markovicov model se može formulisati i kao problem maksimizacije očekivane stope dobiti kada se uzme u obzir investitorova averzija prema riziku. Ako sa ρ označimo koeficijent odbojnosti prema riziku,onda rešavamo problem koji možemo formulisati kao

$$max\ r^T\omega - \frac{1}{2}\rho\omega^T\,\mathrm{G}\omega$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1,\ \omega_i \geq 0,\ i=1,...,n$$

Teorema o jednom fondu: Svaki efikasan portfolio se može predstaviti kao linearna kombinacija dva fiksna efikasna portfolija u smislu očekivanog prinosa i standardnog odstupanja.

$Primer$ 1: Pretpostavimo da imamo tri nekorelisane investicije i da nam je početni kapital 1 evro. Neka su očekivani prinosi investicija redom 1%, 2% i 3%. Investicije su nekorelisane, pa je kovarijansna matrica G jedinična, G=E. Portfolio minimalne varijanse računamo prema Markovicovom modelu. Imamo da je $\bar{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, G =$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, G =G^{-1}. Dalje je

a=$r^T G^{-1} r$ =$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$=14%, b= b=$r^T G^{-1} \bar{1}$ =$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$=6%

c=$\bar{1} G^{-1} \bar{1}$ =$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$=3%, d=ac-$b^2 = 42 - 36 = 6\%$

Efikasnu granicu računamo po formuli

$\sigma_p^2 = \frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)$=$\frac{1}{6}(3\bar{r}_p{}^2 - 12\bar{r}_p + 14)$=0.5$\bar{r}_p{}^2 - 2\bar{r}_p + \frac{7}{3}$

Ako potražimo prvi izvod po $\bar{r}_p$ i izjednačimo ga sa nula, dobijamo $\bar{r}_p - 2 = 0$ odnosno $\bar{r}_p = 2$. Efikasna granica je

σ_p^2=2-4+$\frac{7}{3} = \frac{1}{3}$ odakle je σ_p=$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ovaj problem možemo rešavati i koristeći Lagranžovu metodu. Formiramo Lagranžovu jednačinu

L($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1, \lambda_2$)=$\frac{1}{2}\omega^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ω-$\lambda_1(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \omega - r_p)$- $\lambda_2(e^T \omega - 1)$

Ako potražimo izvode po $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1$ i λ_2 i izjednačimo ih sa nulom, dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\begin{gathered} \omega_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \omega_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \omega_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 = \bar{r}_p \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \end{gathered}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$\lambda_2 = \frac{7}{3} - \bar{r}_p$$

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r}_p}{2} - 1$$
$$\omega_1 = \frac{4}{3} - \frac{\bar{r}_p}{2}$$
$$\omega_2 = \frac{1}{3},\ \omega_3 = \frac{\bar{r}_p}{2} - \frac{2}{3}$$

Vraćanjem vrednosti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ u formulu dobijamo $\sigma_p = \sqrt{\omega^T \mathrm{G}\omega} = \sqrt{\omega^T \omega} = \sqrt{\frac{7}{3} - 2\bar{r}_p + \frac{\bar{r}_p{}^2}{2}}$.

Ako potražimo prvi izvod po $\bar{r}_p$ dobijamo $\sigma_p' = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} - 2\bar{r}_p + \frac{\bar{r}_p{}^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}(-2 + \bar{r}_p) = 0$ odakle sledi $\bar{r}_p = 2,$ a uvrštavajući u formulu za efikasnu granicu dobijamo $\sigma_p(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Vraćajući vrednost $\bar{r}_p = 2$ u formulu za udele dobijamo da je $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$ odnosno $\omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

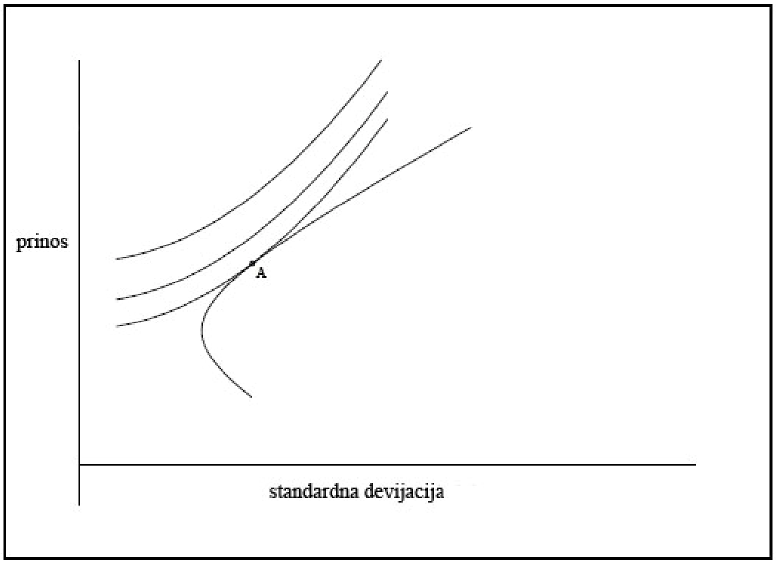
1.3 CAP MODEL

U teoriji investicija se suočavamo sa dva problema: kako odrediti optimalni portfolio i kako odrediti korektnu cenu dobra.Pod korektnom cenom dobra podrazumevamo cenu dobra koja ne daje mogućnost arbitražne zarade. Nju opisuje CAP model.
James Tobin je proširio Markovicov rad dodajući razmatranje nerizičnog udela što je dovelo do pojave CAP modela.

CAP model se zasniva na nekoliko pretpostavki, a to su:

-Svi investitori su odbojni prema riziku i mere rizik kao standardno odstupanje stope prinosa
-Svi investitori posmatraju isti vremenski interval pri donošenju odluka
-Svi investitori imaju iste subjektivne procene budućih stopa prinosa i standardnih odstupanja tih stopa.
-Postoji investicija bez rizika (sa stopom prinosa r_f) i svi investitori imaju neograničen pristup toj investiciji.
-Sve investicije se mogu kupovati u proizvoljno malim delovima, nema troškova transakcije i moguća je kratka prodaja.
-Informacije su dostupne svim investitorima.

Svaki investitor ima svoju krivu indiferentnosti. Za investitora koji je odbojan prema riziku ove krive su konkavne i rastuće u $\bar{r} - \sigma$ ravni. Što je kriva strmija to je investitor odbojniji prema riziku. Investitor bira onaj portfolio iz skupa efikasnih portfolija za koji je kriva indiferentnosti tangenta na krivu efikasnosti, kao što se vidi na slici 2.

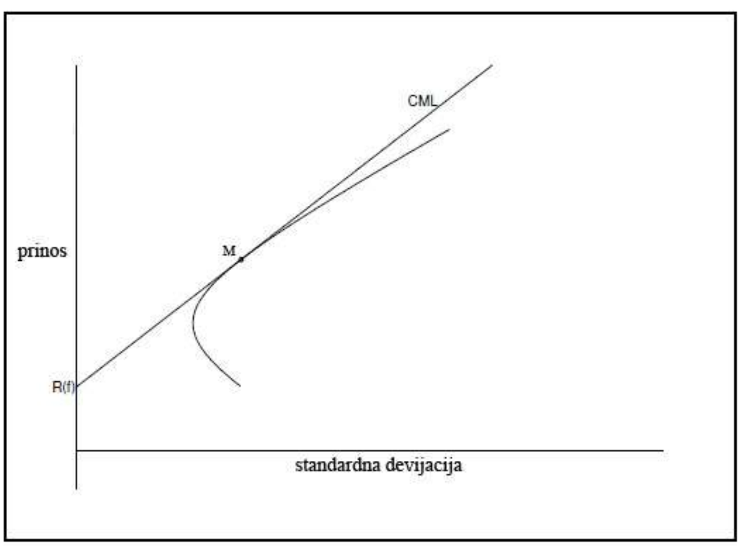


Slika 2 Optimalni portfolio

Skup efikasnih portfolija se nalazi na pravoj određenoj tačkama (r_f,0) i M. Ova prava pokazuje odnos očekivane stope prinosa i rizika za efikasne portfolije i naziva se linija tržišta kapitala (capital market line), slika 3. Analitički izraz za pravu je

$$\bar{r}=r_f+\frac{\bar{r}_M-r_f}{\sigma_M}\sigma,$$

Gde je σ standardno odstupanje portfolija sa očekivanom stopom prinosa $\bar{r}$. Nagib ove prave K=$\frac{\bar{r}_M-r_f}{\sigma_M}$ se naziva cena rizika iz razloga što pokazuje koliko se povećava očekivani prinos ako se σ poveća za jednu jedinicu.



Slika 3 Tržišni portfolio i CML

Teorema: Ako je tržišni portfolio M efikasan onda očekivani prinos $\bar{r}_i$ svake investicije D_i zadovoljava:

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_{M} - r_f) \ ,$$

gde je

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \ .$$

Dokaz: Za proizvoljno α posmatramo portfolio sa prinosom

$$r_p = \alpha r_i + (1-\alpha) r_M$$

Očekivani prinos ovog portfolija je

$$\bar{r}(\alpha) = \alpha \bar{r}_i + (1-\alpha)\bar{r}_M$$

i standardno odstupanje

$$\sigma(\alpha) = [\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iM} + (1-\alpha)^2\sigma_M^2]^{1/2}$$

Variranjem α dobijamo krivu u $\bar{r} - \sigma$ ravni, pa za α=0 imamo da je ceo portfolio jednak tržišnom portfoliju. To implicira da kriva portfolija dodiruje skup efikasnih portfolija u M.

Kako je

$$\frac{d\bar{r}(\alpha)}{d\alpha} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

i

$$\frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 + (1-2\alpha)\sigma_{iM} - (1-\alpha)\sigma_M^2}{\sigma(\alpha)}$$

Imamo

$$\frac{d\sigma(\alpha)}{d\sigma}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \ .$$

Koristeći

$$\frac{d\bar{r}(\alpha)}{d\sigma(\alpha)} = \frac{d\bar{r}(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\sigma(\alpha)}$$

imamo

$$\frac{d\bar{r}(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\frac{(\bar{r}_i-\bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM}-\sigma_M^2}.$$

Ovaj nagib mora biti jednak nagibu prave na kojoj se nalaze efikasni portfoliji,pa je

$$\frac{(\bar{r}_i-\bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM}-\sigma_M^2}=\frac{\bar{r}_{M-}r_f}{\sigma_M}$$

odakle je

$$\bar{r}_i=r_f+\frac{\bar{r}_{M-}r_f}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}=r_f+\beta_i\big(\bar{r}_{M-}r_f\big)\ .$$

Vrednost β_i se naziva beta investicije D_i dok se $\bar{r}_i-r_f$ naziva očekivani višak prinosa investicije D_i.

Ako je $\beta_i=0$ onda investicija nije korelisana sa tržištem i onda je očekivani prinos portfolija jednak bezrizičnoj stopi odnosno $\bar{r}$=r_f.

Koeficijent β celog portfolia se izračunava koristeći osobinu

$$cov\ (r_p\ ,r_M)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i cov(r_i\ ,r_M)$$

pa je

$$\beta_p=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\beta_i\ .$$

Ako sa *P* označimo cenu po kojoj se investicija kupuje,a sa Q cenu koju će investicija imati po isteku nekog vremenskog perioda,onda je Q slučajna promenjiva sa očekivnjem $\bar{Q}$. Stopu prinosa ovakve investicije dobijamo kao

$$r=\frac{Q-P}{P}$$

a njenu očekivanu vrednost kao

$$\bar{r}=\frac{\bar{Q}-P}{P}$$

Cena dobra može se iskazati na sledeći način:

Teorema: Cena dobra *P* sa budućom vrednosti *Q* je

$$P=\frac{\bar{Q}}{1+r_f+\beta(\bar{r}_{M-}r_f)}$$

gde je β parametar dobra.

$Primer\ 2$: Cena akcije naftne kompanije iznosi P=875 dolara. Očekivana cena za godinu dana je 1000 dolara, ali zbog velikih nesigurnosti na izvorištu nafte standardno odstupanje prinosa je σ_i =40%. Trenutna nerizična stopa je r_f =10%. Očekivana stopa prinosa tržišnog portfolija je $\bar{r}_M$ =17%, a njegovo standardno odstupanje je σ_M =12%. Izračunati očekivanu vrednost prinosa koju predvidja tržišna linija cena kao i stvarnu vrednost prinosa. Ako je poznato da je kovarijansa prinosa akcija naftne kompanije i tržišnog portfolija σ_{iM} =0.864% izračunati betu ove akcije i odrediti korektnu cenu akcije prema CAP modelu.

Očekivanu vrednost prinosa po tržišnoj liniji cena računamo po formuli

$\bar{r}_i = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}$ odnosno $\bar{r}_i = 0.1 + \frac{0.17-0.1}{0.12}0.4 = 0.33$, dakle očekivana vrednost prinosa je 33%. Stvarna vrednost prinosa je $\bar{r}$=$\frac{1000-875}{875} = 0.14$, odnosno 14%. Betu investicije računamo kao β= $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$=$\frac{0.00864}{0.12^2} = 0.6$. Korektnu cenu dobra računamo po formuli *P*=$\frac{\bar{Q}}{1+r_f+\beta(\bar{r}_M - r_f)}$=$\frac{1000}{1+0.1+0.6(0.17-0.1)} = 875.65647$ dolara.

2. MERENJE RIZIKA POMOĆU “SAFETY FIRST“ MODELA

Do sada smo rekli da rizik može biti meren standardnom devijacijom. Glavni argument protiv takvog pristupa je da je standardna devijacija mera volatilnosti. Neki ljudi su zainteresovani jedino za smanjivanje rizika, pa moramo primeniti drugačiji model. Jedan od takvih modela je tzv. “safety first” princip (princip sigurnost kao prioritet, model sigurnosti). Kao što im samo ime kaže, modeli sigurnosti teže da smanje rizik od nepoželjnih ishoda. Portfolio optimizacija po kriterijumu modela sigurnosti je usmerena na maksimizaciju očekivanog prinosa portfolija dok istovremeno verovatnoća da ne uspe da dostigne fiksni nivo mora biti manja od kritičnog nivoa.

Postoje tri osnovna modela sigurnosti. Ovi modeli su konstruisani i razvijeni od strane Roja, Kataoke i Telsera. U sva tri modela sa C_L označavamo granični kapital. To je kapital koji predstavlja donju granicu za kapital na kraju perioda C_{end}.

Roj u svom modelu unapred odredjuje granični kapital i minimizujemo verovatnoću da na kraju perioda krajnji kapital bude manji ili jednak od graničnog kapitala odnosno

$$min\{\mathrm{P}(C_{end} \leq C_L)\}$$

Kataoka bira vrednost α (α predstavlja malu verovatnoću) i maksimizuje granični kapital C_L tako da je verovatnoća da krajnji capital C_{end} bude manji od graničnog bude manja ili jednaka od α.

$$max\ \{C_L|\mathrm{P}(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha\}$$

Telser u svom modelu unapred određuje vrednost α kao i granični kapital C_L .On maksimizira očekivani kapital na kraju perioda za datu verovatnoću α i granični kapital C_L.

$$max\ \{\mathrm{E}(C_{end})|\ \mathrm{P}(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha\ \}$$

Telserov portfolio je intuitivno najlogičnije rešenje za nalaženje optimalnog portfolija iz razloga što većina investitora želi da maksimizuje očekivane prinose na čemu se ovaj model i zasniva.

2.1. TELSEROV KRITERIJUM

Telserov kriterijum možemo napisati i kao

$$max\{\mathrm{E}\left(C_0 + r_p\right)\middle|\mathrm{P}(C_0 + r_p)\ \leq 0) \leq \alpha\}$$

Koristimo da je E($C_0 + r_p$)= E(C_0) + $E(r_p) = C_0 + \overline{r_p}$.

Dati izraz uz ograničenja da suma ω_i mora biti jednaka početnom kapitalu i da važi $\bar{r}_p$ =r^Tω postaje ekvivalentan sa izrazom:

$$\begin{gathered} max\ \bar{r}_p \\ \mathrm{P}(r_p \leq -C_0) \leq \alpha \\ \bar{1}^T \omega = C_0 \\ \bar{r}_p = r^T \omega \end{gathered}$$

Pretpostavimo da su prinosi normalno raspodeljeni. To znači da važi:

$$\mathrm{P}(r_p \leq X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \equiv \Phi(k) \text{ gde je } k = \frac{X - \bar{r}_p}{\sigma_p}$$

Pod ovom pretpostavkom mi možemo pojednostaviti uslov,P($r_p \leq -C_0) \ \leq \alpha$ postaje

$$\Phi\left(\frac{-C_0 - \bar{r}_p}{\sigma_p}\right) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{-C_0 - \bar{r}_p}{\sigma_p} \leq k_\alpha$$

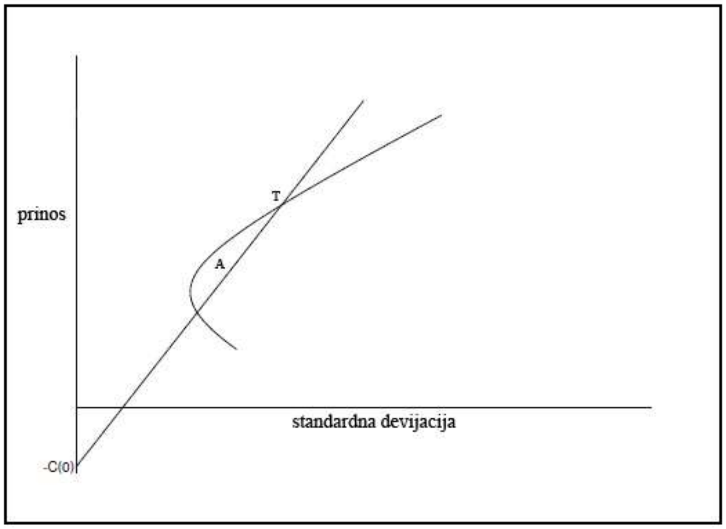
$$\bar{r}_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p \ .$$

Poslednja nejednakost nam daje oblast iznad linije koja počinje u tački sa koordinatama (0, $-C_0$) i nagibom $-k_\alpha$ (Slika 4).Ova linija se nazova *shortfall line*. k_α predstavlja kvantil normalne raspodele sa nivoom poverenja α.

Prethodni sistem uz dodatak još jednog uslova možemo napisati kao:

$$\begin{gathered} max\ \bar{r}_p \\ \bar{r}_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p \\ \bar{1}^T \omega = C_0 \\ \bar{r}_p = r^T \omega \\ \sigma_p^2 = \omega^T \mathrm{G} \omega \end{gathered}$$

Poslednja tri ograničenja nam daju oblast “unutar” efikasne granice, a prvo iznad linije $-C_0 - k_\alpha \sigma_p$. Dakle,ograničenja u našem problemu ustvari daju oblast A na slici 4. Pošto je naš cilj da maksimizujemo očekivani prinos mi tražimo maksimalnu vrednost od $\bar{r}_p$u oblasti A. Sa slike 4 je jasno da je to slučaj u tački T.



Slika 4 Dopustiva oblast A i optimalna Telserova tačka T

Koordinate tačke T možemo izračunati koristeći formule za efikasnu granicu i *shortfall* liniju.

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0{}^2) \text{ i } \sigma_p^2 = (\frac{-C_0-\bar{r}_p}{k_\alpha})^2$$

Iz prethodne dve jednakosti dobijamo

$$\bar{r}_p = \frac{bk_\alpha^2+d+\sqrt{dk_\alpha^2(a+2b+c-k_\alpha^2)}}{ck_\alpha^2-d}C_0.$$

Varijansu računamo po formuli

$$\sigma_p = \left(\frac{-C_0-\bar{r}_p}{k_\alpha}\right) = \frac{(c+b)k_\alpha^2+\sqrt{dk_\alpha^2(a+2b+c-k_\alpha^2)}}{(d-ck_\alpha^2)k_\alpha}C_0 \ .$$

$Primer\ 3$: Koristimo podatke iz primera 1 i tražimo Telserov portfolio. Za vrednost α biramo malu vrednost, recimo α=0.0001. Ako pretpostavimo da prinosi imaju normalnu raspodelu, tada je k_α=$k_{0.001}$=-3.719. U prethodnom primeru smo izračunali da je a=14%, b=6%,c=3% i d=6%. Uvrštavanjem vrednosti u formulu za očekivani prinos dobijamo

$$\bar{r}_p = \frac{bk_\alpha^2+d+\sqrt{dk_\alpha^2(a+2b+c-k_\alpha^2)}}{ck_\alpha^2-d}C_0=\frac{6(-3.719)^2+6+\sqrt{6(-3.719)^2(14+12+3-(-3.719)^2)}}{3(-3.719)^2-6}1=3.506$$

Efikasnu granicu dobijamo ubacivanjem u formulu

$$\sigma_p = \frac{(c+b)k_\alpha^2 + \sqrt{dk_\alpha^2(a+2b+c-k_\alpha^2)}}{(d-ck_\alpha^2)k_\alpha} C_0 = \frac{(3+6)(-3.719)^2 + \sqrt{6(-3.719)^2(14+12+3-(-3.719)^2)}}{(6-3(-3.719)^2)(-3.719)} 1 \approx 0.3107 .$$

Kao što vidimo, $\sigma_p \approx 0.3107 < \frac{\sqrt{3}}{3}$ što je rezultat koji dobijamo u Markovicovom modelu, odnosno korišćenjem modela sigurnosti smanjili smo rizik. Uz to povećao se prinos portfolija u odnosu na onaj koji smo dobili kada smo koristili Markovicov model (3.506>2)

3. ELIPTIČNE RASPODELE

Pretpostavka da prinosi imaju normalne raspodele nije realna. U stvarnosti raspodele prinosa imaju deblje repove. Ovde predstavljamo novu grupu raspodela koje se nazivaju eliptične raspodele i koje na realističniji način predstavljaju raspodele prinosa. Neka je dat n-dimenzionalni vektor X=$(X_1, X_2 \dots, X_n)^T$.

Definicija: X je eliptično raspodeljeno ako i samo ako ima sledeću funkciju gustine

$$f_x(x) = c_n|\Omega|^{-1/2} g_n\left[\frac{1}{2}(x-r)^T \Omega^{-1}(x-r)\right] \qquad (3.1)$$

za proizvoljni vektor r, nxn matricu Ω čiji su elementi w_k i neku funkciju $g_n(.)$ koja se naziva generator gustine.

Uslov $\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}\, g_n(x) d_x < \infty$ garantuje da je $g_n(x)$ generator gustine. Pošto integral gustine iznosi 1 možemo izračunati konstantu c_n. Izračunavanjem se dobija da je

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} [\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}\, g_n(x) d_x]^{-1} \qquad (3.2)$$

gde je $\Gamma(.)$gama funkcija.

Karakteristična funkcija za X koji ima eliptičnu raspodelu je $\Phi_X(t) \equiv E\left(e^{it^T X}\right) = e^{it^T r} \psi(\frac{1}{2} t^T \Omega t)$ za neki vektor r, pozitivno definitnu matricu Ω i proizvoljnu funkciju $\psi(t)$ koja se naziva karakteristični generator. Familija eliptičnih raspodela ima neke zanimljive osobine:

1. Ako je $\int_0^\infty g_1\,(x) d_x < \infty$ tada očekivanje vektora x postoji odnosno $E(x) = r$. Ako je $|\psi'(0)| < \infty$ gde je $|.|$ apsolutna vrednost, kovarijansna matrica postoji i važi da je $\mathrm{cov(X)} = -\psi'(0)\Omega$.

2. Ukoliko je X eliptično raspodeljeno tj. $X\colon E_n(r, \Omega, g_n)$ tada za neku mxn matricu A i neki m-dimenzionalni vektor B važi da svaka linearna kombinacija eliptičnih raspodela daje takodje eliptičnu raspodelu sa istom funkcijom generatora odnosno: $AX + B\colon E_m(Ar + B, A\Omega A^T, g_m)$.

3. Ukoliko X=$(X_1, X_2 \dots, X_n)^T$ ima eliptičnu raspodelu $X\colon E_n(r, \Omega, g_n)$ tada X_k ima $X_k\colon E_1(r_k, w_k^2, g_1)$ za k=1,2…n gde je w_k^2 k-ti elemenat u dijagonali matrice Ω. To znači da marginalne gustine možemo napisati $f_{x_k}(x) = \frac{c_1}{w_k} g_1\left[\frac{1}{2}(\frac{x-r_k}{w_k})^2\right]$.

Neki od primera eliptičnih raspodela su normalna, t-studentova, Laplasova, logistična,Besselova i Košijeva raspodela.

NORMALNA RASPODELA

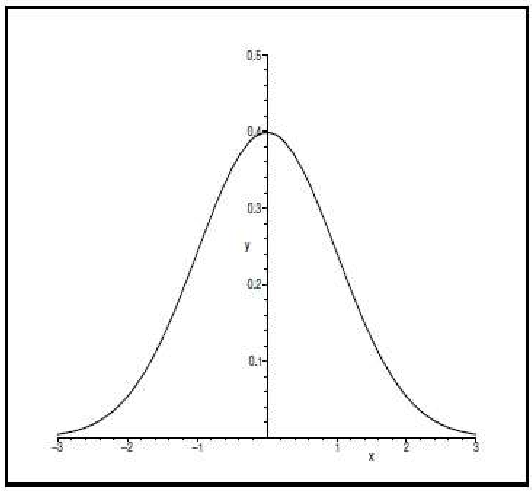
Najpoznatiji primer eliptične raspodele je normalna raspodela. Za neki vektor X generator gustine je: $g(u) = e^{-u}$.

Koristeći formulu za izračunavanje c_n dobijamo $c_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$. Za marginalnu funkciju gustine za X_k, f_{x_k}dobijamo $f_{x_k}(x) = \frac{1}{w_k\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-r_k}{w_k})^2}$

Ako X:N(r_k ,w_k^2) tada gustina za vektor X iznosi:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\Omega|^{-1/2} \exp\left[\frac{-1}{2}(x-r)^T \Omega^{-1}(x-r)\right] .$$

Pošto znamo da je $E(x) = r$ i cov(x)=G= Ω sledi da je $\sigma_k = w_k$.



Slika 5 Normalna raspodela

STUDENTOVA RASPODELA

Generator gustine za vektor X koji ima Studentovu t raspodelu sa *v* stepeni slobode je

$$g_n(u)=(1 + \frac{2u}{v})^{-(v+n)/2} .$$

Koristeći jednakost (3.2) može se pokazati da je

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+v}{2})}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(\pi v)^{n/2}}$$

pa dobijamo,na osnovu (3.1) mutivarijantna gustina data sa:

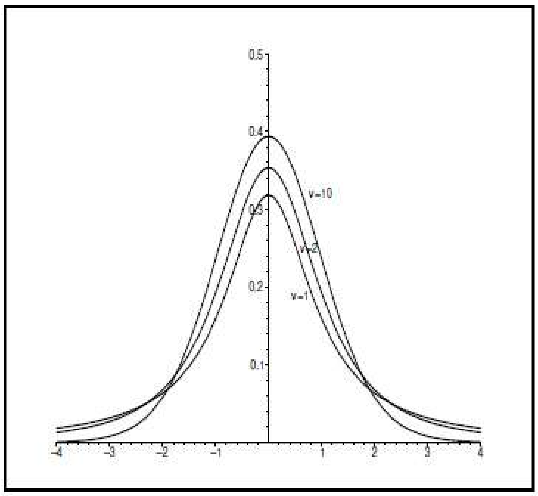
$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+v}{2})}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(\pi v)^{n/2}|\Omega|^{1/2}}\left[1+\frac{1}{v}(x-r)^T\Omega^{-1}(x-r)\right]^{-(n+v)/2} .$$

Za *n=1* dobijamo funkciju marginalne gustine slučajne promenjive X_k, k=1,…,*n*:

$$f_{x_k}(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi v}}\left[1+\frac{1}{v}x^2\right]^{-(v+1)/2} .$$

U formuli smo uzeli da je $w_k = 1$ i $r_k = 0$.

Za Studentovu raspodelu je pokazano da važi da je $Var(X_k) = \sigma_k^2 = \frac{v}{v-2}w_k^2$
Ukoliko uzmemo da je v =1 dobijamo Košijevu raspodelu, a ako stavimo da $v \longrightarrow \infty$ dobijamo normalnu raspodelu.



Slika 6 Studentova-t raspodela

LAPLASOVA RASPODELA

Generator gustine za Laplasovu familiju je:

$$g(u) = e^{-\sqrt{2u}} .$$

Na osnovu (3.2) možemo da izračunamo c_n :

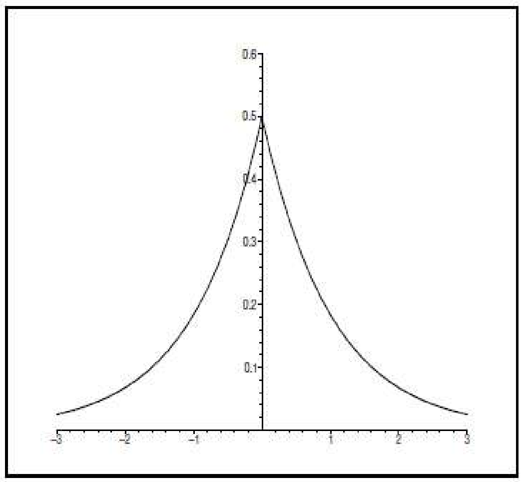
$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}}\left[\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\sqrt{2x}}dx\right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}}\left[\int_0^\infty y^{n-2}\, e^{-y\sqrt{2}}2ydy\right]^{-1}$$

gde smo koristili smenu $y = \sqrt{x}$.

Dalji račun nam daje:

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}}\left[\int_0^{\infty} 2y^{n-2}\, e^{-y\sqrt{2}}dy\right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}}\left[\frac{2\Gamma(n)}{2^{n/2}}\right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n)\pi^{n/2}}$$

što predstavlja multivarijantnu gustinu Laplasove raspodele.
Za Laplasovu raspodelu važi da je $Var(X_k) = \sigma_k^2 = 2w_k^2$



Slika 7 Laplasova raspodela

LOGISTIČKA RASPODELA

Generator gustine logističke raspodele dat je izrazom

$$g(u) = \frac{e^{-\sqrt{2u}}}{(1+e^{-\sqrt{2u}})^2}\ .$$

Koristeći (3.2), nakon izračunavanja i uzimajući u obzir da je

$$\frac{e^{-\sqrt{2x}}}{(1+e^{-\sqrt{2x}})^2} = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j e^{-j\sqrt{2x}}$$

dobijamo sledeći izraz za c_n:

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n)\pi^{n/2}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j^{1-n}\right]^{-1}\ .$$

Ako uzmemo da je *n*=1, izaračunavajući $c_1 = \frac{\Gamma(1/2)}{2\Gamma(1)\pi^{1/2}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j^{0}\right]^{-1}$ dobijamo:

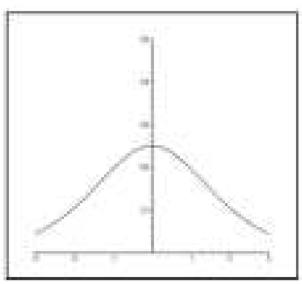
$$f_{x_k}(x) = \frac{1}{\omega_k}\frac{\exp\left(-\left|\frac{x-r_k}{w_k}\right|\right)}{\left(1+\exp\left(-\left|\frac{x-r_k}{w_k}\right|\right)\right)^2} = \frac{1}{\omega_k}\frac{\exp\left(-\frac{x-r_k}{w_k}\right)}{\left(1+\exp\left(-\frac{x-r_k}{w_k}\right)\right)^2}\ .$$

Za logističku raspodelu važi da je $(X_k) = \sigma_k^2 = \frac{\pi^2}{3} w_k^2$.

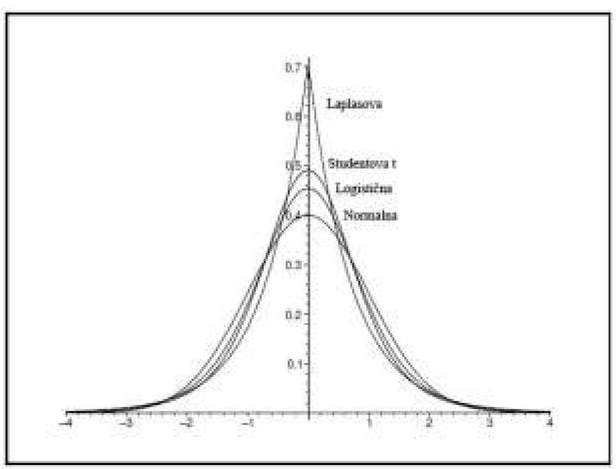
Najznačajnije razlike izmedju navedenih eliptičnih raspodela ogledaju se u debljini repova datih raspodela. Kod raspodela sa debljim repovima ekstremni prinosi se dešavaju češće nego kod onih sa tanjim repovima.

Matrica Ω ne mora biti jednaka kovarijansnoj matrici *G* .Njihov odnos se može izraziti kao *G* =$-\psi'(0)\,\Omega$. Budući da znamo vrednost izraza $\psi'(0)$ za svaku od navedenih raspodela,matricu Ω mozemo predstaviti:

$$\Omega = \begin{cases} G\ za\ normalnu\ raspodelu \\ \frac{v-2}{v} G\ za\ Studentovu\ t(v)\ raspodelu \\ \frac{G}{2}\ za\ Laplasovu\ raspodelu \\ \frac{3G}{\pi^2}\ za\ logističnu\ raspodelu \end{cases}$$



Slika 8 Logistička raspodela



Slika 9 Predstavljanje sve četiri eliptične raspodele

ELIPTIČNE RASPODELE I TELSEROV PORTFOLIO

Pretpostavimo da prinosi Imaju multivarijantnu eliptičnu raspodelu r:$E_n(r, \Omega, g_n)$

Na osnovu osobina eliptičnih raspodela mi znamo da važi

$$r_p = r^T \omega = \omega^T r: E_1(r\omega^T, \omega^T \Omega \omega, g_1)$$

odnosno

$$r_p : E_1(\bar{r}_p, \omega_p^2, g_1) .$$

Pošto je $\sigma_p^2 = -\psi'(0)\, \mathrm{w}_p^2$ na osnovu osobine (*) funkcija gustine ima sledeću formu:

$$f_p(x) = \frac{c_1}{\mathrm{w}_p} g_1[\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{r}_p}{\mathrm{w}_p})^2]$$

gde je c_1 konstanta definisana kao:

$$c_1 = \frac{\Gamma(1/2)}{(2\pi)^{1/2}} [\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} g_1(x)dx]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} g_1(x)dx]^{-1} .$$

Budžetsko ograničenje Telserovog portfolija je $P(r_p \leq -C_0) \leq \alpha$. Pošto je r_p eliptično raspodeljen, verovatnoću možemo napisati i kao:

$$P(r_p \leq -C_0) = \int_{x=-\infty}^{-C_0} \frac{c_1}{\mathrm{w}_p} g_1[\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{r}_p}{\mathrm{w}_p})^2]dx .$$

Koristeći smenu

$$z = \frac{x-\bar{r}_p}{\mathrm{w}_p} \Rightarrow x = z\mathrm{w}_p + \bar{r}_p \Rightarrow dx = \mathrm{w}_p dz$$

imamo

$$P(r_p \leq -C_0) = \int_{z=-\infty}^{\frac{-C_0-\bar{r}_p}{\mathrm{w}_p}} \frac{c_1}{\mathrm{w}_p} g_1(\frac{z^2}{2})\mathrm{w}_p dz = \int_{x=-\infty}^{\frac{-C_0-\bar{r}_p}{\mathrm{w}_p}} c_1 g_1(\frac{z^2}{2})dz .$$

Definišemo k_α kao kvantil za koji važi $\int_{z=-\infty}^{k_\alpha} c_1 g_1(\frac{z^2}{2})dz = \alpha$

$$P(r_p \leq -C_0) \leq \alpha$$

k_α zavisi samo od generatora gustine $g(u)$ i verovatnoće α.

Budžetsko ograničenje sada možemo zapisati kao:

$$\mathrm{P}(r_p \leq -C_0) \leq \alpha \Rightarrow \frac{-C_0-\bar{r}_p}{\mathrm{w}_p} \leq k_\alpha \Rightarrow \bar{r}_p \geq -C_0 - k_\alpha \mathrm{w}_p$$

Od sada pišemo budžetsko ograničenje u obliku $\bar{r}_p \geq -C_0 - z_\alpha \sigma_p$ gde je $z_\alpha = \frac{k_\alpha \mathrm{w}_p}{\sigma_p}$

Primenjujući ovu definiciju na Telserov problem optimizacije i Laplasovu raspodelu dobijamo:

$$\begin{gathered} \max \bar{r}_p \\ \bar{r}_p \geq -C_0 - z_\alpha \sigma_p \\ 1^T\omega = C_0 \\ \bar{r}_p = r^T\omega \\ \sigma_p^2 = \omega^T G\omega \end{gathered}$$

Sistem rešavamo na identičan način kao za normalnu raspodelu.U posmatranom slučaju dobijamo:

$$\omega_T = \frac{1}{d} G^{-1}\big((a\bar{1} - br)C_0 + (cr - b\bar{1})r_T\big) \text{ gde je } r_T = \frac{bz_\alpha^2 + d + \sqrt{dz_\alpha^2(a+2b+c-z_\alpha^2)}}{cz_\alpha^2 - d} C_0 \ .$$

4. OPTIMIZACIJA BAZIRANA NA VaR-u

Kod Telserovog modela smo videli da se rizik meri verovatnoćom dolaženja u situaciju da nam početni kapital bude manji od očekivanog prinosa, odnosno $P(r_p \leq -C_0)$. Ovakva mera rizika je samo uži slučaj mere rizika VaR (Value at Risk).

VaR na nivou poverenja 1-α nekog portfolija je definisan sa

$$P(r_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha$$

Možemo reći da je to minimalna količina koju investitor može da izgubi na nivou poverenja $1-\alpha$. Što je veći VaR na nekom nivou poverenja to je portfolio riskantniji. To znači da što je investitor odbojniji prema riziku on će preferirati ekstremno mali VaR. Ako uzmemo $VaR_\alpha = C_0$ gde je α mala zadata verovatnoća, definicija VaR-a postaje ustvari ograničenje iz prethodnog poglavalja. Kako je VaR naša nova mera rizika umesto standardne devijacije može se izračunati nova efikasna granica. Ta efikasna granica daje najveći očekivani prinos za dati nivo VAR-a, ili maksimalni VaR za fiksiran prinos. Po izgledu efikasna granica, kada su prinosi eliptično rasporedjeni, i kada posmatramo prinos i VaR je ista kao i efikasna granica u slučaju da posmatramo prinos i standardnu devijaciju. Kada imamo pretpostavku o eliptičnoj raspodeli VaR možemo zapisati kao

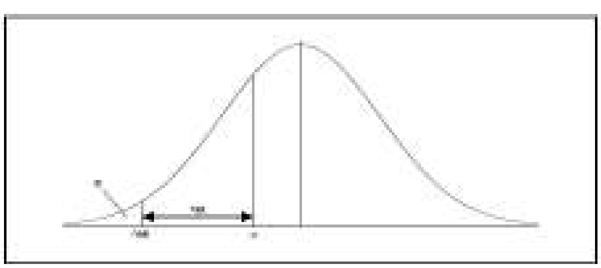
$$P(r_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{r_p-\bar{r}_p}{w_p} \leq \frac{-VaR_\alpha-\bar{r}_p}{w_p}\right) = \alpha \Leftrightarrow \frac{-VaR_\alpha-\bar{r}_p}{w_p} = k_\alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha = -\bar{r}_p - k_\alpha w_p$$

VaR preko prinosa i standardne devijacije možemo zapisati kao

$$VaR_\alpha = -\bar{r}_p - z_\alpha \sigma_p \tag{4.1}$$

Efikasna granica se može definisati tako što za dati VaR maksimizujemo očekivani prinos. To možemo predstaviti kao:

$$\max \bar{r}_p$$
$$VaR_\alpha = -\bar{r}_p - z_\alpha \sigma_p$$
$$\bar{r}_p = r^T \omega$$
$$\sigma_p^2 = \omega^T G \omega$$
$$\bar{1}^T \omega = C_0$$



Slika 10 Definicija VaR-a

Prvo ograničenje možemo transformisati u:

$$(VaR_\alpha + \bar{r}_p)^2 = (-z_\alpha \sigma_p)^2 \Leftrightarrow {VaR_\alpha}^2 + 2VaR_\alpha \bar{r}_p + {\bar{r}_p}^2 - z_\alpha^2 \sigma_p^2 = 0 \ .$$

Ako zamenimo jednakosti za $\bar{r}_p$ i σ_p^2 dobijamo

$${VaR_\alpha}^2 + 2VaR_\alpha r^T \omega + \omega^T r r^T \omega - z_\alpha^2 \omega^T G \omega = 0 \Leftrightarrow \mathrm{VaR}_\alpha^2 + 2VaR_\alpha r^T \omega + \omega^T \psi \omega = 0$$

gde je matrica ψ definisana kao:

$$\psi = r r^T - z_\alpha^2 G \ .$$

Sada problem maksimizacije postaje jednostavniji

$$\begin{gathered} \max r^T \omega \\ {VaR_\alpha}^2 + 2VaR_\alpha r^T \omega + \omega^T \psi \omega = 0 \ . \\ \bar{1}^T \omega = C_0 \end{gathered}$$

Kako za matricu ψ važi

$$\psi^T = (r r^T - z_\alpha^2 G)^T = (r r^T)^T - z_\alpha^2 G^T = r r^T - z_\alpha^2 G^T = \psi \ ,$$

ona je simetrična.

Definišemo sledeće konstante:

$$\begin{gathered} \hat{a} \equiv r^T \psi^{-1} r \\ \hat{b} \equiv r^T \psi^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \psi^{-1} r \\ \hat{c} \equiv \bar{1}^T \psi^{-1} \bar{1} \\ \hat{d} \equiv \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2 \ . \end{gathered}$$

Izvodimo vezu izmedju konstanti a, b, c, d i $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$. Izraz za inverznu matricu G možemo transformisati

$$G^{-1} = G^{-1} \psi \psi^{-1} = G^{-1}(r r^T - z_\alpha^2 G)\psi^{-1} = G^{-1} r r^T \psi^{-1} - z_\alpha^2 \psi^{-1} \ .$$

Koristeći izraz za G^{-1} imamo

$$\begin{gathered} a = r^T G^{-1} r = r^T G^{-1} r r^T \psi^{-1} r - z_\alpha^2 r^T \psi^{-1} r = a\hat{a} - z_\alpha^2 \hat{a} = \hat{a}(a - z_\alpha^2) \\ b = r^T G^{-1} \bar{1} = r^T G^{-1} r r^T \psi^{-1} \bar{1} - z_\alpha^2 r^T \psi^{-1} \bar{1} = a\hat{b} - z_\alpha^2 \hat{b} = \hat{b}(a - z_\alpha^2) \\ c = \bar{1}^T G^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T G^{-1} r r^T \psi^{-1} \bar{1} - z_\alpha^2 \bar{1}^T \psi^{-1} \bar{1} = b\hat{b} - z_\alpha^2 \hat{c} \end{gathered}$$

Izražavamo $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ preko konstanti a, b, c, d i dobijamo

$$\hat{a} = \frac{a}{a - z_\alpha^2}$$

$$\hat{b} = \frac{b}{a - z_\alpha^2}$$
$$\hat{c} = \frac{cz_\alpha^2 - d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)}$$
$$\hat{d} = \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2 = \frac{-d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)} \quad .$$

Koristeći Lagranžov metod rešavamo problem i dobijamo sledeće jednakosti

$$r + 2\lambda_1 VaR_\alpha r + 2\lambda_1 \psi\omega + \lambda_2 \bar{1} = 0$$
$$VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha r^T \omega + \omega^T \psi \omega = 0$$
$$\bar{1}^T \omega = C_0 \quad .$$

Rešavajući prvu jednakost po ω i uzimajući da je $\lambda_3 = \frac{-1}{2\lambda_1}$ i $\lambda_4 = \frac{-\lambda_2}{2\lambda_1}$ dobijamo

$$\omega = (\lambda_3 - VaR_\alpha)\psi^{-1} r + \lambda_4 \psi^{-1} \bar{1} \ .$$

Koristeći ovako dobijeno ω u treću jednakost dobijamo izraz za λ_4

$$\bar{1}^T \omega = (\lambda_3 - VaR_\alpha)\hat{b} + \lambda_4 \hat{c} = C_0 \Leftrightarrow \lambda_4 = \frac{C_0 + \hat{b}\widehat{VaR_\alpha} - \lambda_3 \hat{b}}{\hat{c}} \quad .$$

Nakon vraćanja u drugu formulu sistema dobijamo da je

$$\lambda_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{\hat{d}}\left(VaR_\alpha^2\left(\hat{d} - \hat{c}\right) - 2C_0\hat{b}\,VaR_\alpha - C_0^2\right)} = \pm\sqrt{W} \quad .$$

Kako imamo vrednosti za λ_3 i λ_4,možemo izračunati ω i dobijamo

$$\omega = \left(\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha\right)\psi^{-1}\, r + \frac{1}{\hat{c}}\left(C_0 + \hat{b}\,VaR_\alpha \mp \sqrt{W}\right)\psi^{-1}\bar{1} \quad .$$

Dakle funkcija za prinos portfolija kao funkciju VaR-a je

$$\bar{r}_p = r^T \omega = \left(\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha\right)\hat{a} + \frac{1}{\hat{c}}\left(C_0 + \hat{b}\,VaR_\alpha \mp \sqrt{W}\right)\hat{b} = \frac{\hat{d}}{\hat{c}}(\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha + \frac{\hat{b}}{\hat{d}}C_0) \quad .$$

U prethodnom izrazu mi najpre izražavamo $\sqrt{W}$, odnosno W, i rešavamo kvadratnu jednačinu po VaR_α. Dobijamo:

$$VaR_\alpha = -\bar{r}_p + \sqrt{\frac{1}{\hat{d}}((\hat{d} - \hat{c})\bar{r}_p{}^2 + 2\hat{b}C_0\bar{r}_p - \hat{a}C_0^2)} \ .$$

Zatim uz pomoć veze a, b, c, d i $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$.

$$VaR_\alpha = -\bar{r}_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}$$

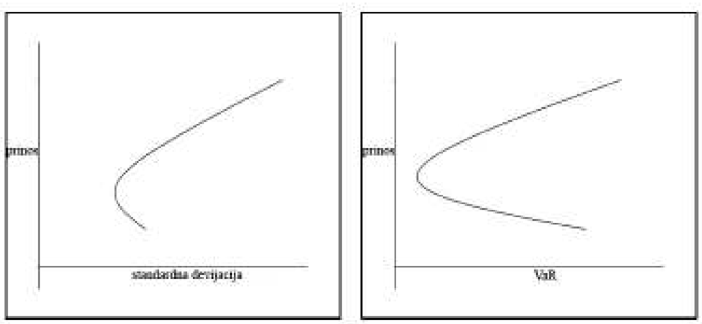
Poslednji korak je da se transformiše u izraz koji sadrži prinos i standardnu devijaciju,gde koristimo izraz za VaR_α (4.1)

$$-\bar{r}_p - z_\alpha\sigma_p = -\bar{r}_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}$$

gde pretpostavljamo da je z_α negativno. Dakle, prinos-VaR efikasna granica izražena preko prinos-st.devijacija data je sa:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}$$

što je zapravo prinos-varijansa efikasna granica. Dakle, dolazimo do zaključka da minimizacija varijanse je u stvari isto kao minimizacija VaR-a.



Slika 11 Efikasna granica koja zavisi od standardne devijacije sa jedne i od VaR-a sa druge strane

4.1. OPTIMALNI PORTFOLIJI

Investitor može da izabere da investira u portfolio sa minimalnim VaR-om, koji se naravno razlikuje od portfolija sa minimalnom varijansom.

4.1.1 PORTFOLIO SA MINIMALNIM VaR-om

Ako u formuli za VaR_α potražimo prvi izvod po $\bar{r}_p$ i izjednačimo sa nulom dobijamo

$$\frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \bar{r}_p} = -1 - \frac{z_\alpha(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}} = 0$$

Kada izrazimo $\bar{r}_p$ iz prethodne jednakosti dobijamo izraz za minimalnu vrednost:

$$r_{min} = (\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{cz_\alpha^2 - d}})C_0$$

Odgovarajuće VaR_α je:

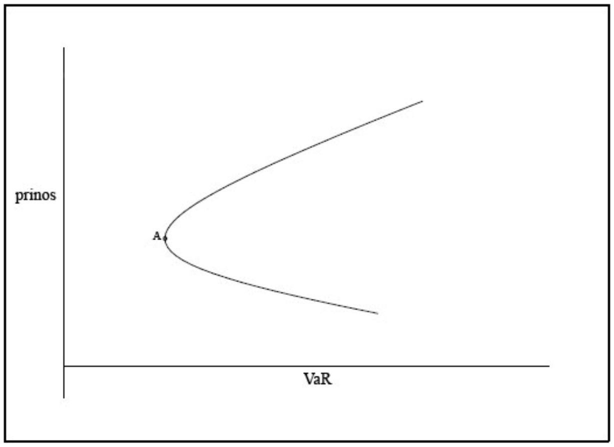
$$VaR_{min} = -r_{min} - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{d}(cr_{min}^2 - 2bC_0 r_{min} + aC_0^2)} = \left(-\frac{b}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{cz_\alpha^2 - d}\right)C_0 \ .$$

Minimalno VaR standardna devijacija je:

$$\sigma_{min} = \sqrt{\frac{1}{d}(cr_{min}^2 - 2bC_0 r_{min} + aC_0^2)} = \frac{-z_\alpha}{\sqrt{cz_\alpha^2 - d}}C_0 \ .$$

Alokacija ω u portfolio sa minimalnim VaRom data je sa ;

$$\omega_{min} = \frac{1}{c\sqrt{cz_\alpha^2 - d}}G^{-1}(\left(\sqrt{cz_\alpha^2 - d} - b\right)\bar{1} + cr)C_0$$



Slika 12 Portfolio sa minimalnim VaR-om

4.1.2. TANGENTNI VaR PORTFOLIO

Tangentni VaR portfolio je portfolio gde linija koja prolazi kroz koordinatni početak je tangenta na efikasnu granicu prinosa i st.devijacije.Prema tome, nagib tangente mora biti isti kao i nagib efikasne granice. Dakle,

$$\frac{\Delta \mathrm{VaR_{tvr}}}{\Delta \mathrm{r_{tvr}}} = \frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \bar{r}_p}|_{\bar{r}_p = r_{tvr}} \ .$$

Koristeci formulu dobijamo

$$\frac{-r_{tvr} - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{d}(cr_{tvr}^2 - 2bC_0 r_{tvr} + aC_0^2)} - 0}{r_{tvr} - 0} = -1 - \frac{z_\alpha(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}}|_{\bar{r}_p = r_{tvr}} \ .$$

Iz jednakosti sledi:

$$r_{tvr} = \frac{a}{b}C_0$$

Vidimo da smo dobili isti rezultat kao i kod tangentnog portfolija kod prinosa i standardne devijacije.Dakle, $r_{tvr} = r_{tg}$

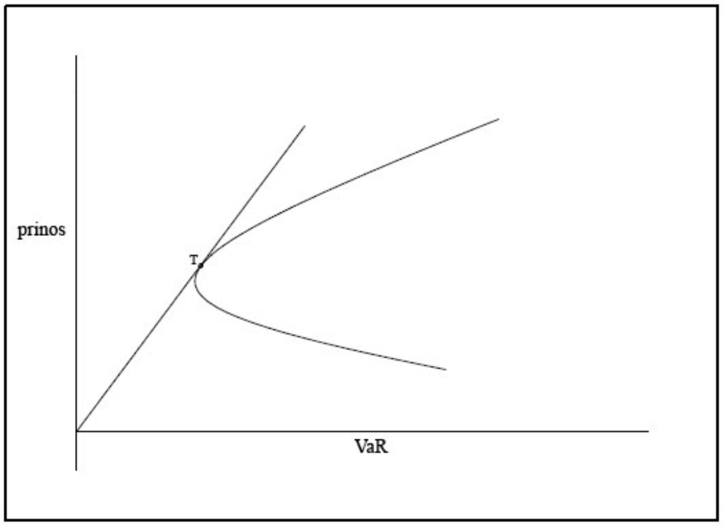
$$max\frac{\bar{r}_p}{VaR_\alpha} = max\frac{\bar{r}_p}{-\bar{r}_p - z_\alpha\sigma_p} = max\frac{-\bar{r}_p - z_\alpha\sigma_p}{\bar{r}_p}$$

$$= max\frac{-z_\alpha\sigma_p}{\bar{r}_p} = max\frac{\bar{r}_p}{\sigma_p} \ .$$

Odgovarajući VaR je:

$$VaR_{tg} = -r_{tg} - z_\alpha \sigma_{tg} = -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$

i alokacija ω_{tg} je ista kao i alokacija kod slučaja prinos-st.devijacija.



Slika 13 Portfolio sa minimalnim VAR-om

$Primer\ 4$: Koristimo podatke iz primera 1. VaR se posmatra na kraći period, pa posmatramo očekivane dnevne prinose. Neka je zadati nivo poverenja 97.5% odnosno α=0.025. Uvodimo važnu pretpostavku da očekvani prinosi imaju normalnu raspodelu (u praksi je jako teško utvrditi kojoj raspodeli su najbliži oćekivani dnevni prinosi), dakle $z_{0.025}$=$k_{0.025}$=-1.96. Iz primera 1 imamo da je a=14%, b=6%, c=3%, d=6%. Portfolio sa minimalnim VaR-om ima sledeće koordinate:

$$r_{min} = (\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{cz_\alpha^2 - d}})C_0 = (\frac{6}{3} + \frac{6}{3\sqrt{11.5248 - 6}})1=2.85$$

Minimalna standardna devijacija za VaR je

$$\sigma_{min}=\frac{-z_\alpha}{\sqrt{cz_\alpha^2 - d}}C_0=\frac{1.96}{2.35}1=0.834$$

Udele za minimalni VaR dobijamo ubacujući vrednosti u formulu:

$$\omega_{min} = \frac{1}{c\sqrt{cz_\alpha^2 - d}} G^{-1}\left(\left(\sqrt{cz_\alpha^2 - d} - b\right)\bar{1} + cr\right) C_0 = \frac{1}{7.05}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left((2.35 - 6)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)1$$

$$= \begin{bmatrix} -0.09217 \\ 0.33323 \\ 0.75863 \end{bmatrix}.$$

Ubacivanjem vrednosti za niži VaR (slučaj kada je investitor odbojniji prema riziku) dobijamo i niži očekivani prinos i nižu standardnu devijaciju.

5. EVA I RAROC

U ovom poglavlju za razliku od prethodnih mi ćemo razmatrati određene modele ali sa različitim funkcijama posmatranja (objektivnim funkcijama). One su bazirane na tzv. dodatoj ekonomskoj vrednosti (*Economic value added*) i prihodu od kapitala prilagođenog riziku (*Risk adjusted return of capital*)

EVA

Dodatnu ekonomsku vrednost (EVA) definišemo:

$$\text{EVA}= očekivani\ prinos\ portfolija - utrošak\ kapitala\ .$$

Što je veća EVA to je bolji učinak za investitora. Očekivani prinos portfolija dat je sa $E(r_p)$. Ali pošto imamo troškove kapitala očekivani prinos je korigovan za troškove. Utrošak kapitala sadrži dva parametra. To je stopa utroška kapitala r_{cap} pomnožen sa količinom kapitala. Generalno nije definisano šta je količina kapitala. Neki smatraju da je to početni kapital C_0 a neki smatraju da je to VaR (ili utrošeni kapital). EVA predstavlja nominalnu vrednost, a ne procenat.

RAROC

Postoji više različitih definicija za RAROC. Mi ćemo ga definisati kao

$$\text{RAROC}=\frac{očekivani\ prinos\ portfolija}{količina\ kapitala}\ .$$

Što je veći RAROC to je veći učinak investitora. RAROC predstavlja relativnu meru rizika, a količinu kapitala možemo definisati ili kao početni kapital C_0 ili kao utrošeni kapital VaR.

	Alocirani kapital	Utrošeni kapital
EVA	$E(r_p) - r_{cap}C_0$	$E(r_p) - r_{cap}VaR_\alpha$
RAROC	$\frac{E(r_p)}{C_0}$	$\frac{E(r_p)}{VaR_\alpha}$

Tabela 1: Načini izračunavanja EVA-e i RAROC-a

5.1. NOVI TELSEROVI MODELI

Videli smo četiri nova načina za merenje uspeha u tabeli 1. Ova četiri modela mogu biti inplementirana u Telserov model sa VaR ograničenjem. Rešavamo četiri dobijena nova Telserova modela.

5.1.1. EVA SA ALOCIRANIM KAPITALOM

Koristeći EVA-u sa alociranim kapitalom kao objektivnu funkciju dobijamo sledeći problem optimizacije

$$\max E(r_p) - r_{cap}C_0$$
$$E(r_p) = \bar{r}_p = r^T\omega$$
$$P(r_p \leq -VaR_c) \leq \alpha$$
$$\bar{1}^T\omega = C_0$$

gde je VaR_c maksimalni dozvoljeni VaR za portfolio.

Zato što je $r_{cap}C_0$ konstanta, gornji problem je isti kao:

$$\max \bar{r}_p$$
$$\bar{r}_p = r^T\omega$$
$$VaR_\alpha \leq VaR_c$$
$$\bar{1}^T\omega = C_0\ .$$

Rešenje ja dato sa:

$$r_{opt} = r_T = \frac{bz_\alpha^2C_0 + dVaR_c - z_\alpha\sqrt{d((a-z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_cC_0 + cVaR_c^2)}}{cz_\alpha^2 - d} \qquad (5.1)$$

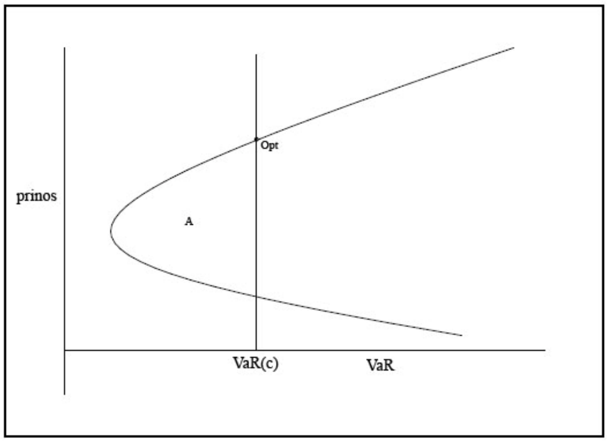
a odgovarajuća standardna devijacija

$$\sigma_{opt} = \sigma_T = \frac{z_\alpha(bC_0 + cVaR_c) - \sqrt{d((a-z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_cC_0 + cVaR_c^2)}}{d - cz_\alpha^2}$$

a VaR je jednak sa VaR_c. Optimalna alokacija ω_{opt} je

$$\omega_{opt} = \omega_T = \frac{1}{d}G^{-1}((cr - b\bar{1})r_T + (a\bar{1} - br)C_0)\ .$$

U prostoru standardna devijacija- VaR to možemo predstaviti grafički (Slika 14)



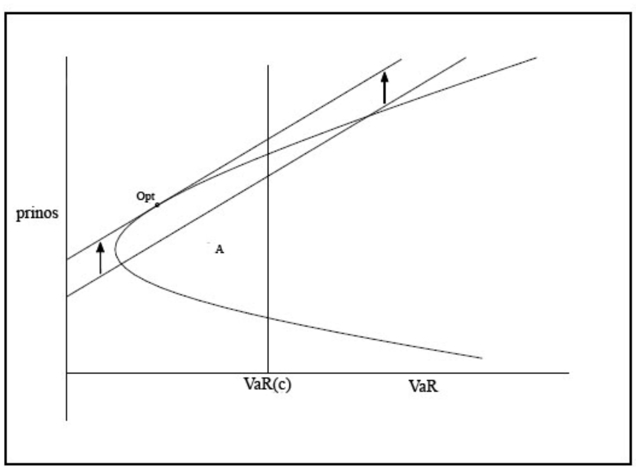
Slika 14 Optimalni portfolio EVA sa alociranim kapitalom

5.1.2. EVA SA UTROŠENIM KAPITALOM

Ako uzmemo iskorišćeni kapital umesto alociranog, problem optimizacije postaje

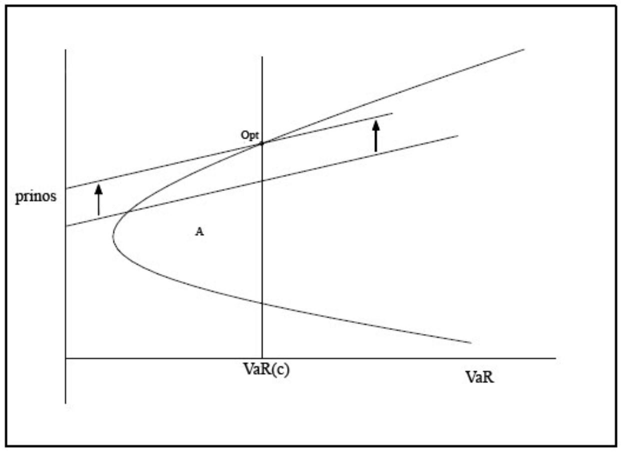
$$
\begin{gathered}
max E(r_p) - r_{cap} VaR_\alpha \\
E(r_p) = \bar{r}_p = r^T \omega \\
VaR_\alpha \leq VaR_c \\
\bar{1}^T \omega = C_0 \ .
\end{gathered}
$$

Objektivna funkcija $E(r_p) - r_{cap} VaR_\alpha \equiv u$ se nalazi na grafiku standardna devijacija-VaR. To je prava $\bar{r}_p = u + r_{cap} VaR_\alpha$. Maksimiziranje EVA-e znači maksimiziranje prave u, ili najviše moguće pomeranje linije u području A, dok je koeficijent nagiba r_{cap} konstantan. Ovu liniju nazivamo EVA linija.



Slika 15 Pomeranje EVA linije sa velikim r_{cap}

Pomerajući EVA liniju što je više moguće dobijamo optimalni portfolio. Kao što vidimo, optimalni portfolio se razlikuje od Telserove tačke. Nagib EVA linije (r_{cap}) jednak je nagibu efikasne granice. Ali ovaj optimalni portfolio zavisi od vrednosti r_{cap}, što je nagib EVA linije.
Ako je nagib EVA linije mnogo manji (što znači da je r_{cap} mnogo manje) mi dobijamo sliku ispod.



Slika 16 Pomeranje EVA linije sa malim r_{cap}

Primećujemo razliku. Iz razloga što je dopustiva oblast A ograničena sa shortfall ograničenjem , najviša EVA linija preseca efikasnu granicu u Telserovoj tački, i optimum nije u tački dodira efikasne granice i EVA linije.

Dakle, optimalna alokacija je ili tačka gde je nagib EVA linije i efikasne granice isti ili u Telserovoj tački i od nagiba EVA linije zavisi optimalna alokacija.

Izračunaćemo za koju vrednost nagiba r_{cap} dostižemo tačku preokreta. Moramo izjednačiti nagib efikasne granice u Telserovoj tački i nagib EVA linije tj.

$$\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial VaR_\alpha}|_{\bar{r}_p=r_T} = r_{cap} \Leftrightarrow \frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \bar{r}_p}|_{\bar{r}_p=r_T} = \frac{1}{r_{cap}} \qquad (5.2)$$

Podsećamo, efikasna granica za prostor srednja devijacija- VaR je data sa:

$$VaR_\alpha = -\bar{r}_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}$$

Ako potražimo izvod prethodnog izraza po $\bar{r}_p$ dobijamo:

$$\frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \bar{r}_p} = -1 - \frac{z_\alpha(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}} = \frac{-d\sigma_p - z_\alpha(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sigma_p} .$$

Koristeći (5.2) i rešavajući izraz po r_{cap} dobijamo:

$$r_{cap} = \frac{d\sigma_T}{-d\sigma_T - z_\alpha(cr_T - bC_0)} = r_{cap}^*$$

Gde su r_T i σ_T sredina i standardna devijacija Telserove tačke.
Mi imamo prvu situaciju ako je $r_{cap} > r_{cap}^*$ i drugu situaciju ako je $r_{cap} \leq r_{cap}^*$.

Sada ćemo izračunati optimalne vrednosti. Optimalna vrednost u situaciji 2 je Telserov portfolio, što smo već izračunali. Sada računamo optimalne vrednosti u situaciji 1. U optimalnoj situaciji nagib efikasne granice je jednak sa r_{cap} za koje je $r_{cap} > r_{cap}^*$.

Dakle

$$\frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \bar{r}_p} = \frac{1}{r_{cap}}$$

$$-1 - \frac{z_\alpha(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}} = \frac{1}{r_{cap}} \qquad (5.3)$$

Izražavajući jednakost po $\bar{r}_p$ dobijamo:

$$r_{opt} = (b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}})\frac{1}{c}C_0$$

gde je K konstanta definisana kao K=$\frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap}+1}$. Primetimo da je K< 0. Ovo možemo postići tako što primetimo da izraz (5.3) možemo napisati kao:

$$-1 - \frac{1}{r_{cap}} - \frac{z_\alpha(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}} = 0$$

Ako ovaj izraz podelimo sa $\frac{r_{cap}+1}{r_{cap}}$ dobijamo:

$$-1 - \frac{\frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap}+1}(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}} = -1 - \frac{K(c\bar{r}_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)}} = 0$$

Odgovarajuće σ_{opt} je :

$$\sigma_{opt} = d\sqrt{\frac{1}{d}(c\bar{r}_p{}^2 - 2bC_0\bar{r}_p + aC_0^2)} = \frac{-K}{\sqrt{cK^2 - d}}C_0$$

a VaR je jednak :

$$VaR_\alpha = -r_{opt} - z_\alpha\sigma_{opt} = (-\frac{b}{c} + \frac{cz_\alpha K - d}{c\sqrt{cK^2 - d}})C_0 \ .$$

i time smo izračunali optimalni portfolio za situaciju 1.

Kraće zapisano možemo reći da $\bar{r}_p$ kad objektivna funkcija maksimizuje EVA-u sa utrošenim kapitalom izgleda:

$$r_{opt} = \left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}}\right)\frac{1}{c}C_0 \quad \text{ako } r_{cap} > r_{cap}^* \text{ gde je } K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap} + 1}$$

$$r_{opt} = r_T \qquad \text{ako} \quad r_{cap} \le r_{cap}^* \quad \text{gde je} \quad K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap} + 1}$$

gde je r_T Telserova sredina dati sa (5.1). Odgovarajuća optimalna alokacija ω_{opt} je na efikasnoj granici:

$$\omega_{opt} = \frac{1}{d}G^{-1}((cr - b\bar{1})r_{opt} + (a\bar{1} - br)C_0) \ .$$

5.1.3.RAROC SA ALOCIRANIM KAPITALOM

Sada posmatramo objektivnu funkciju baziranu na RAROC-u. Prvo posmatramo slučaj sa alociranim kapitalom. Problem postaje:

$$max\frac{E(r_p)}{C_0}$$
$$E\left(r_p\right) = r^T\omega$$
$$P(r_p \le -VaR_c) \le \alpha$$
$$\bar{1}^T\omega = C_0$$

Kako je C_0 konstanta i prepisujući *shortfall* ograničenje gornji problem postaje identičan problemu:

$$max = \bar{r}_p$$
$$\bar{r}_p = r^T\omega$$

$$VaR_\alpha \leq VaR_c$$
$$\bar{1}^T\omega = C_0 \ .$$

koji je identičan sa Telserovim problemom kao i problem optimizacije EVA-e sa alociranim kapitalom. Dakle rešenja za ovaj problem su ista, kao i rešenja problema EVA-e sa alociranim kapitalom.

5.1.4. RAROC SA UTROŠENIM KAPITALOM

Problem optimizacije RAROC-a kada imamo utrošeni kapital je

$$max\frac{E(r_p)}{VaR_\alpha}$$
$$E(r_p) = \bar{r}_p = r^T\omega$$
$$VaR_\alpha \leq VaR_c$$
$$\bar{1}^T\omega = C_0 \ .$$

Objektivna funkcija $\frac{\bar{r}_p}{VaR_\alpha} \equiv u$ može biti napisana kao RAROC linija:

$$\bar{r}_p = uVaR_\alpha$$

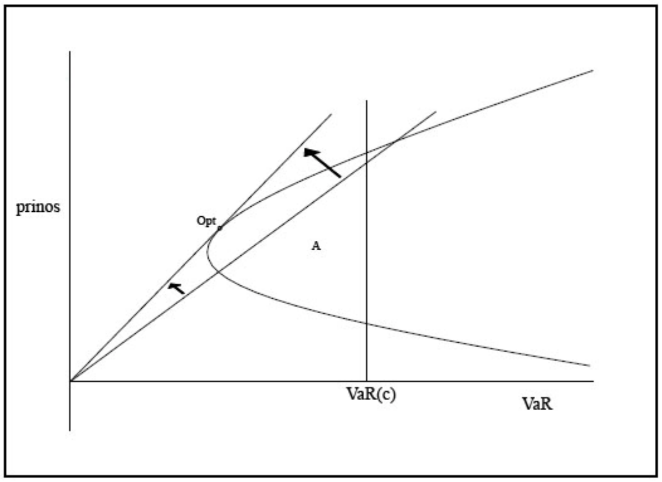
Pa maksimizacija RAROC-a je ustvari isto kao i pronalaženje maksimalnog nagiba u na prvobitnoj liniji, koja jos uvek ima presek sa oblasti A.

Vidimo da je optimum tačka dodira u aritmetička sredina- VaR okruženju kao što smo definisali u prethodnom poglavlju. Podsetimo se da imamo istu tačku dodira i u aritmetička sredina-standardna devijacija okruženju. To znači da:

$$r_{opt} = \frac{a}{b}C_0$$

$$\sigma_{opt} = \frac{\sqrt{a}}{b}C_0$$
$$VaR_\alpha = -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$

Primetimo da može nastati problem ako vrednost VaR-a u tački dodira $-\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)\,C_0$ na desnoj strani shortfall linije VaR_c . Tada tangentni VaR nije u oblasti A. Zato moramo da smanjimo nagib RAROC linije dok ona ne dodirne oblast A. Tada se optimum pomera do Telserove tačke, kao sto pokazuje slika 17.



Slika 17 Maksimizovanje nagiba RAROC linije

Možemo izraziti formulu na sledeći način:

$$r_{opt} = r_T \quad \text{ako } VaR_c < -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$
$$r_{opt} = r_{tg} \quad \text{ako } VaR_c \geq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$

I odgovarajuća optimalna alokacija ω_{opt} se nalazi na efikasnoj granici:

$$\omega_{opt} = \frac{1}{d}G^{-1}((cr - b\bar{1})r_{opt} + (a\bar{1} - br)C_0).$$

5.2. POREĐENJE EVA-e I RAROC-a

Možemo napraviti jednostavno poređenje EVA-e i RAROC-a. Već smo konstatovali da je EVA broj, a RAROC procenat, ali se pitamo kakva je veza između njihovih optimalnih vrednosti.

Ako koristimo alocirani kapital optimalni portfoliji su im isti, zato što su i jedno i drugo optimalni Telserovi portfoliji. Interesantnije je posmatrati slučaj sa utrošenim kapitalom. Diskutujemo četiri situacije.

Situacija 1 Pretpostavimo da je

$$r_{cap} \leq r_{cap}^{*} \;\; i \;\; VaR_c \leq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0 \,.$$

Onda u obe situacije Telserov portfolio je optimalan , pa optimum kod EVA-e je isti kao i optimum kod RAROC-a. Pišemo

$$r_{opt}^{EVA} = r_{opt}^{RAROC}$$

Situacija 2 Sledeće se menja kad imamo sledeću situaciju:

$$r_{cap} \leq r_{cap}^{*} \quad i \;\; VaR_c > -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{\alpha})C_0 \;.$$

Onda optimalni EVA portfolio ostaje Telserov portfolio, ali RAROC-ov maksimizujući portfolio se menja u tangentni portfolio, pa u ovom slučaju imamo:

$$r_{opt}^{EVA} > r_{opt}^{RAROC}$$

Situacija 3   Treća moguća situacija je da imamo:

$$r_{cap} > r_{cap}^{*} \quad i \quad VaR_c \leq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{\alpha})C_0 \;.$$

U ovom slucaju EVA maksimizujući portfolio je manji od Telserovog portfolija, što je ustvari optimalni RAROC portfolio, pa je :

$$r_{opt}^{EVA} < r_{opt}^{RAROC} \;.$$

Situacija 4 Poslednja mogućnost je da se desi sledeće:

$$r_{cap} > r_{cap}^{*} \quad i \quad VaR_c > -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{\alpha})C_0 \;.$$

Sada imamo da je:

$$r_{opt}^{EVA} = \left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}}\right)\frac{1}{c}C_0, \qquad\qquad r_{opt}^{RAROC} = \frac{a}{b}C_0 \;.$$

Računamo za koju vrednost r_{cap} su ove dve optimalne vrednosti iste. Dakle,

$$\left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}}\right)\frac{1}{c}C_0 = \frac{a}{b}C_0 \;.$$

Pa lako izražavamo:

$$K = -\sqrt{a}$$

Iz razloga što je $K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap}+1}$, posle računa dobijamo da je:

$$r_{cap} = \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha+\sqrt{a}} .$$

Dakle, ako je trošak stope kapitala jednak sa ovom vrednošću, imamo $r_{opt}^{EVA} = r_{opt}^{RAROC}$. Ako je vrednost r_{cap} manja, EVA linija dobija manji nagib, pa se optimalna EVA srednja vrednost pomera na desno. U drugom slučaju, ako je r_{cap} veće, optimum se pomera na levo. Skraćeno možemo zapisati za četvrtu situaciju sledeće:

$$r_{opt}^{EVA} < r_{opt}^{RAROC} \text{ ako } r_{cap} > \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha+\sqrt{a}}$$
$$r_{opt}^{EVA} = r_{opt}^{RAROC} \text{ ako } r_{cap} = \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha+\sqrt{a}}$$
$$r_{opt}^{EVA} < r_{opt}^{RAROC} \text{ ako } r_{cap} > \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha+\sqrt{a}}$$

Setimo se da u svakom slučaju u ovoj situaciji moramo imati da je $r_{cap} > r_{cap}^*$.

$Primer\ 5$: Posmatramo opet primer 1 i opet pretpostavimo da je raspodela prinosa normalna i da je nivo poverenja 97.5% dakle $z_{0.025} = -1.96$. Pretpostavimo da je godišnji utrošak kapitala 15%. Dnevna stopa utroška kapitala je

r_{cap}=1$-(0.85)^{1/250}$=0.00065 (u godini imamo približno 250 radnih dana)

Neka je maksimalni dozvoljen VaR u ovom primeru VaR_c=0.1

EVA-u sa alociranim kapitalom dobijamo koristeći formule za optimalni prinos i devijaciju

$$r_{opt} = r_T = \frac{bz_\alpha^2 C_0 + dVaR_c - z_\alpha\sqrt{d\left(\left(a-z_\alpha^2\right)C_0^2 + 2bVaR_cC_0 + cVaR_c^2\right)}}{cz_\alpha^2 - d} = \frac{6(-1.96)^2+6*0.1-(-1.96)\sqrt{6((14-(-1.96)^2)1+12*0.1+3*0.01)}}{3*(-1.96)^2-6} = 7.213.$$

$$\sigma_{opt} = \sigma_T = \frac{z_\alpha(bC_0+cVaR_c) - \sqrt{d\left(\left(a-z_\alpha^2\right)C_0^2 + 2bVaR_cC_0 + cVaR_c^2\right)}}{d-cz_\alpha^2} = \frac{-1.96(6+3(0.1))-\sqrt{6((14-(-1.96)^2)+12(0.1)+3*0.01)}}{6-3(-1.96)^2} = 3.73.$$

Udele računamo po formuli:

$\omega_{opt} = \omega_T = \frac{1}{d}G^{-1}((cr - b\bar{1})r_{opt} + (a\bar{1} - br)C_0)$=$\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$($\left(3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)7.213 +$ $(14\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix})1)$=$\begin{bmatrix}-2.27\\0.334\\2.93967\end{bmatrix}$.

Ako posmatramo utrošeni kapital, optimum se menja. Da bismo videli koja formula daje optimum, računamo r_{cap}^*

$r_{cap}^* = \frac{d\sigma_T}{-d\sigma_T - z_\alpha(cr_T - bC_0)} = \frac{6*3.73}{-6*3.73-(-1.96)(3*7.213-6)}$=2.705>$r_{cap}$.

Iz tog razloga optimum je portfolio rađen po Telserovom modelu, dakle r_{cap}.

Ukoliko želimo da maksimizujemo RAROC sa utrošenim kapitalom , koristimo formulu

$VaR_\alpha = -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$=$-\frac{\sqrt{14}}{6}(\sqrt{14} - 1.96)1$< VaR_c

Iz tog razloga elemente optimalnog portfolija računamo kao

$r_{opt} = \frac{a}{b}C_0$=$\frac{14}{6}$ 1=2.33, $\sigma_{opt} = \frac{\sqrt{a}}{b}C_0 = \frac{\sqrt{14}}{6}$ 1=0.6236 .

6. NEIZVESNOST POČETNIH PARAMETARA

U ovom poglavlju pokazujemo kako možemo modelirati polazne parametre kao što su $\bar{r}$ i G. Teško je proceniti tačne vrednosti ovih parametara iz razloga što se menjaju svakodnevno. Budući da se optimalni portfolio neprekidno menja u zavisnosti od $\bar{r}$ i G, cilj je da ako se početni parametri $\bar{r}$ i G malo promene, optimalni portfolio ne bi trebalo da se mnogo menja. Mi definišemo raspodelu funkcije verovatnoće za promenjive parametre $\bar{r}$ i G i ovo uključujemo u problem optimizacije. Međutim, metod gde su svi parametri nepoznati (nesigurni) ima nekoliko problema. Prvo, funkcije raspodele za parametre $\bar{r}$ i G je jako teško utvrditi i drugo, čak i kada bismo utvrdili raspodelu tih parametara ona verovatno ne bi bila eliptična i time ne bismo mogli da rešimo problem. Zbog toga mi unapred pretpostavljamo da su parametri $\bar{r}$ i σ unutar nekog intervala i problem optimizacije rešavamo za najgori (najnepovoljniji) mogući scenario.

Pretpostavimo da investitor ne zna tačne vrednosti očekivanog prinosa i kovarijansne matrice, ali zna interval u kojem oni leže. Donju granicu interval ćemo označiti slovom D u gornjem indeksu, a gornju granicu ćemo označiti slovom G, dakle možemo pisati

$$\bar{r}_i^D \le \bar{r}_i \le \bar{r}_i^G \quad \text{za svako } i$$

$$\sigma_{ij}^D \le \sigma_{ij} \le \sigma_{ij}^G \quad \text{za svako } i,j$$

Koristitćemo i sledeće oznake: $\bar{r}_i^* = \frac{\bar{r}_i^D + \bar{r}_i^G}{2}$, $\beta_i = \frac{\bar{r}_i^G - \bar{r}_i^D}{2}$, $\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}^D + \sigma_{ij}^G}{2}$, $\tau_{ij} = \frac{\tau_{ij}^G - \tau_{ij}^D}{2}$

Možemo da pišemo sledeće:

$$\bar{r}_i^* - \beta_i \le \bar{r}_i \le \bar{r}_i^* + \beta_i \quad \text{za svako } i$$

$$\sigma_{ij}^* - \tau_{ij} \le \sigma_{ij} \le \sigma_{ij}^* + \tau_{ij} \quad \text{za svako } i,j$$

Dakle, intervale za celokupne vrednosti možemo prikazati na sledeći način

$$S_r = \{\bar{r} : \bar{r}^* - \beta \le \bar{r} \le \bar{r}^* + \beta, \beta \ge 0\} \text{ i } S_G = \{G : G^* - \tau \le G \le G^* + \tau,\ \tau \ge 0\}$$

gde je S_r skup vrednosti za parametar $\bar{r}$, a skup S_G skup vrednosti za parametar G.

Budući da parametri koji nisu egzaktni, ne možemo odrediti ni eksplicitne izraze za optimalne vrednosti.

Umesto toga, problem se može rešiti tzv. *Second order cone problemom (SOCP).*
SOCP ima sledeću formu:

$$\min f^{\mathrm{T}} x$$

$$\|A_i x + b_i\| \leq c_i^{\mathrm{T}} x + d_i \quad i = 1, \dots, n$$

gde je $\|.\|$ klasična Euklidska norma, odnosno $\|x\| = \sqrt{x^{\mathrm{T}} x}$, vektori f, x i c n-dimenzionalni.

Pokušavamo da predstavimo Markovicov model optimizacije preko SOCP. Markovicov model možemo napisati kao

$$max\ r^T \omega - \frac{1}{2} \rho \omega^T \mathrm{G}\omega$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

gde je ρ koeficijent odbojnosti prema riziku. Ovaj problem lako predstavljamo preko problema minimuma

$$min\ \omega^T \mathrm{G}\omega - \frac{2}{\rho} r^T \omega$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Sada transformišemo izraz

$$\omega^T \mathrm{G}\omega - \frac{2}{\rho} r^T \omega = \left(G^{\frac{1}{2}}\omega\right)^{\mathrm{T}} \left(G^{\frac{1}{2}}\omega\right) - \frac{1}{\rho}\omega^T G^{\frac{1}{2}} G^{-\frac{1}{2}} r - \frac{1}{\rho}\omega^T G^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} r + \left(\frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r\right)^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r\right) - \left(\frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r\right)^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r\right) = \left(G^{\frac{1}{2}}\omega - \frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r\right)^{\mathrm{T}} \left(G^{\frac{1}{2}}\omega - \frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r\right) - \frac{1}{\rho^2} r^T G^{-1} r = \left\| G^{\frac{1}{2}}\omega - \frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r \right\|^2 - \frac{a}{\rho^2}$$

Dakle, problem optimizacije možemo napisati na sledeći način

$$min \left\| G^{\frac{1}{2}}\omega - \frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r \right\|^2 - \frac{a}{\rho^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Odnosno uvodimo promenjivu s kako bi funkcija koju posmatramo bila linearna

$$min\, s$$
$$\left\| G^{\frac{1}{2}}\omega - \frac{1}{\rho} G^{-\frac{1}{2}} r \right\| \leq s$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i - 1 = 0$$

Pomenuli smo da optimizaciju radimo za slučaj najgoreg mogućeg scenarija. Međutim postavlja se pitanje šta je za nas najgori mogući scenario za očekivani prinos i standardnu devijaciju? Ukoliko kratka prodaja nije dozvolljena jasno je da je najgori mogući scenario onaj scenario gde je očekivani prinos minimalan. Međutim ukoliko je kratka prodaja dozvoljena najgori mogući slučaj za taj konkretni i-ti prinos je najveći mogući prinos jer će investitora u tom slučaju koštati najviše novca. Ista analogija važi I za kovarijanse.

Markovicov problem za najgori mogući slučaj možemo napisati:

$$\max_{\omega} \min_{\bar{r},G} [\bar{r}^T \omega - \frac{1}{2} \rho \omega^T G \omega]$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Kako je ρ kao parametar averzije prema riziku uvek pozitivan problem možemo pisati kao

$$\max_{\omega} \{\min_{\bar{r}} [\bar{r}^T \omega] - \frac{1}{2} \rho \max_{G} [\omega^T G \omega]\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Prvo transformišemo izraz za minimalni očekivani prinos

$$\min_{\bar{r}} [\bar{r}^T \omega] = \min_{\bar{r}} \sum_{i} \bar{r}_i \, \omega_i = \sum_{i:\omega_i < 0} (\bar{r}_i^* + \beta_i) \omega_i + \sum_{i:\omega_i \geq 0} (\bar{r}_i^* - \beta_i) \omega_i$$
$$= \sum_{i} \bar{r}_i^* \, \omega_i + \sum_{i:\omega_i < 0} \beta_i \omega_i - \sum_{i:\omega_i \geq 0} \beta_i \omega_i = \sum_{i} (\bar{r}_i^* \omega_i + \beta_i |\omega_i|)$$

$$= (\bar{r}_i^*)^T \omega - \beta^T |\omega|$$

Isto tako tražimo izraz za maksimalnu varijansu

$$\max_{G} [\omega^T G \omega] = \max_{G} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \, \omega_i \omega_j = \sum_{i,j:\omega_i \omega_j < 0} \left(\sigma_{ij}^* - \tau_{ij}\right) \omega_i \omega_j + \sum_{i,j:\omega_i \omega_j \geq 0} \left(\sigma_{ij}^* + \tau_{ij}\right) \omega_i \omega_j$$
$$= \sum_{ij} \sigma_{ij}^* \, \omega_i \omega_j + \sum_{ij} \tau_{ij}^* \, |\omega_i \omega_j| = \sum_{ij} \sigma_{ij}^* \, \omega_i \omega_j + \sum_{ij} \tau_{ij}^* \, |\omega_i| |\omega_j|$$

$$= \omega^T G^* \omega + |\omega|^T \tau |\omega|$$

Sada možemo naš problem pisati kao

$$\max_{\omega} \{(\bar{r}^*)^T\omega - \beta^T|\omega| - \frac{1}{2}\rho\omega^T G^*\omega - \frac{1}{2}\rho|\omega|^T\tau|\omega|\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Ovo jeste problem SOCP što možemo uočiti uvođenjem novih promenljivih
η i $\boldsymbol{\delta}$ u funkciju koju posmatramo

$$\max_{\omega,\eta,\delta} \{(\bar{r}^*)^T\omega - \beta^T|\omega| - \frac{1}{2}\rho\eta - \frac{1}{2}\rho\delta\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$
$$\eta \geq \omega^T G^*\omega$$
$$\delta \geq |\omega|^T\tau|\omega|$$

Za bilo koje pozitivno definitno A, vektor x i pozitivan skalar y možemo pisati

$$x^T Ax \leq y \;\;\Leftrightarrow\;\; 4x^T Ax \leq 4y \;\;\Leftrightarrow\;\; 4x^T Ax - 2y + y^2 + 1 \leq$$
$$2y + y^2 + 1 \;\Leftrightarrow\;\; 4x^T A^{1/2}A^{1/2}x + (1-y)^2 \leq (1+y)^2 \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} 2A^{1/2}x \\ 1-y \end{pmatrix} \right\| \leq 1+y$$

Koristeći ovo mi možemo dva uslova napisati kao

$$\max_{\omega,\eta,\delta} \{(\bar{r}^*)^T\omega - \beta^T|\omega| - \frac{1}{2}\rho(\eta + \delta)\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$
$$\left\| \begin{pmatrix} 2(G^*)^{1/2}\omega \\ 1-\eta \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\eta$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2\tau^{1/2}|\omega| \\ 1-\delta \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\delta$$

Ovaj izraz za problem skoro pa predstavlja SOCP problem. Problem koji se javlja jeste apsolutna vrednost od ω. Problem možemo prevazići uvoženjem n-dimenzionalnog vektora $\boldsymbol{\zeta}$ tako da važi da je $\zeta_i \geq \omega_i$ i $\zeta_i \geq -\omega_i$ čime garantujemo da je $\zeta_i \geq |\omega_i|$.
Takođe množeći prvi izraz sa -1 problem traženja maksimuma postaje problem traženja minimuma. Dakle naš problem postaje:

$$\max_{\omega,\eta,\delta} \{-(\bar{r}^*)^T\omega + \beta^T\zeta + \frac{1}{2}\rho(\eta + \delta)\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2(G^*)^{1/2}\omega \\ 1-\eta \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\eta$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2\tau^{1/2}\zeta \\ 1-\delta \end{pmatrix} \right\| \leq 1+\delta,$$

$$\zeta_i \geq |\omega_i|$$

Ovim smo predstavili Markovicov model preko SOCP problema. Traženje rešenja ovog modela je izuzetno zahtevno, tako da on predstavlja više teorijski nego praktičan model rešavanja problema. Jedan od razloga zašto je teorijski jeste i definisanje najgoreg scenarija tako što smo uzimali svaki elemenat matrice kovarijansi kao najnepovoljniji mogući, za šta je verovatnoća da se zapravo desi izuzetno mala, a u teorijskom razmatranju je daleko najpovoljnija.

ZAKLJUČAK

U ovom radu dat je širok spektar mogućih modela za optimizaciju portfolija. Međutim svi razmatrani modeli su razmatrani za jedan period, tako da ostaje pitanje kako bi se i da li bi se oni mogli proširiti i na više vremenskih perioda. Pošli smo od Markovicovog modela kao osnovnog modela optimizacije i njegovom transformacijom i uvođenjem Telserovog modela dobili različite druge modele optimizacije. Neki od tih modela kao npr. Telserov ne bazira se samo na parametrima sa normalnom raspodelom, već se može koristiti i kada imamo neku drugu eliptičnu raspodelu. Naravno ukoliko investitor želi da maksimizuje svoju EVA-u ili RAROC modeli koje smo dobili mogu biti korišćeni

Poseban izazov predstavlja modeliranje nesigurnosti početnih (ulaznih) parametara kao što su očekivani prinos i standardna devijacija analiziranih u poglavlju šest, odnosno nalaženje modela optimizacije koji bi bili primenjiviji u praksi. Neki autori predlažu modeliranje pomoću Bayes-Stein metode (opširnije videti u Jorion, “*Bayes – Stein Estimation for Portfolio Analysis*“ *Journal of Financial and Quantitative Analysis* Vol.21, No 3, 1986).

Literatura

[1] Artzner P., Delbaen F., Eber J., *Heath Coherent Measures of Risk*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1998

[2] Billion M., Casarin R., Toniolo G., *Extreme Returns in a Shortfall Risk Framework*, University of Venice, 2002

[3] Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay C., *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University, 1997

[4] Elton E., Gruber M., *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, Carnegie Mellon University, 1981

[5] Jameson R., "*Between Raroc and a Hard Place*", ERisk.com, 2001

[6] Lobo M.S., *Robust and Convex Optimization with Applications in Finance*, Stanford University, 2000

[7] Markowitz H., "*Portfolio Selection*", Journal of Finance no. 7, 1952

[8] Rajter-Ćirić D., *Verovatnoća*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2008

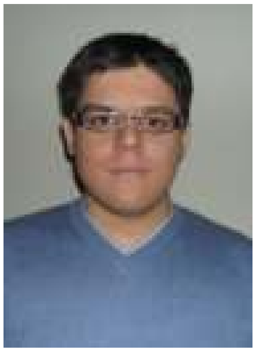
[9] Rice J., *Mathematical Statistics and Data Analysis*, Wadsworth & Brooks, Belmont, California, 1995

[10] Rudolf M., *Algorithms for Portfolio Optimization and Portfolio Insurance*, P.Haupt, 1994

[11] Tütüncü R., Koenig M., *Robust Asset Allocation*, , Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 2000

[12] Valdez E., Chernih A., *Wang's Capital Allocation Formula for Elliptically – Contoured Distributions*, Journal: Insurance mathematics and economics - INSUR MATH ECON , vol. 33, no. 3, 2003

Kratka biografija



Vladimir Šaraba je rođen 24.09.1987. u Sarajevu. Osnovnu školu „Dositej Obradović" završio je u Novom Sadu kao nosilac Vukove diplome. Gimnaziju „Svetozar Marković" u Novom Sadu, završio je 2006. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisao je Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer finansijska matematika. Osnovne studije je završio 2010. godine sa prosečnom ocenom 9,29. Iste godine je upisao master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, modul Finansijska matematika i položio je sve ispite predviđene planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine sa prosečnom ocenom 9,60.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: master rad
VR
Autor: Vladimir Šaraba
AU
Mentor: dr Dora Seleši
MN
Naslov rada: Uopštenja Markovicovog modela
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2013.
GO
Izdavač: autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada:6 poglavlja/52 strane/16 slika/12 literature
FO
Naučna oblast: matematika
NO
Naučna disciplina: primenjena matematika
ND
Predmetna odrednica, ključne reči: optimizacija portfolija, Markovicov model, modeli sigurnost kao prioritet, Telserov model, optimizacija bazirana na VaR-u, dodatnu ekonomsku vrednost, prihod od kapitala prilagođenog riziku
KR, PO

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena: /
VN
Izvod: U master radu dajemo matematički pregled modela za optimizaciju portfolija. Počinjemo sa Markovicovim modelom kao osnovnim modelom optimizacije i CAP modelom kao modelom za određivanje korektne cene dobra. Predstavljamo tzv. *safety first* modele (princip sigurnost kao prioritet) odnosno modele koji se baziraju na *shortfall* verovatnoćama. Posebno radimo optimizaciju portfolija baziranu na Telserovom modelu kao najprimenjivijem *safety first* modelu. Diskutujemo o eliptičnim raspodelama i njihovim osobinama. Razmatramo VaR kao meru rizika kao i Dodatnu ekonomsku vrednost (*EVA*) i Prihod kapitala prilagođenog riziku (*RAROC*) i implementiramo ih u prethodne modele.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 6.10.2011.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Zorana Lužanin,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Danijela Rajter-Ćirić,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Dora Seleši,
vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: monographic type
DT
Type of record: printed text
TR
Contents Code: master thesis
CC
Author: Vladimir Šaraba
AU
Mentor: dr Dora Seleši
MN
Title: Generalizations of the Markowitz-model
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2013
PY
Publisher:author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 6 chapters/52 pages/16 pictures/12 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Applied Mathematics
SD
Subject, key words: Portfolio optimization, Markowitz model, safety first model, Telsers model, optimization based on VaR, Economic value added, Risk adjusted return of capital
SKW

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics
HD
Note: /
N
Abstract: In this paper we give mathematical overview of some models for portfolio optimization. We start with Markovitz model as a basic model for portfolio optimization and with CAP model as basic model for determination of the correct price of goods. We introduce so called safety first models as a models based on shortfall probabilities. We optimize portfolio based on Telser model as a most applicable safety first model. We discuss elliptical distributions and their properties. We also discuss VaR as a risk measurement as well as Economic value added and Risk adjusted return of capital and we implement them in previous models.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 6.10.2011.
AS
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB
President: Dr Zorana Lužanin,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr Danijela Rajter-Ćirić,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor: Dr Dora Seleši,
Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad