



UNIVERZITET U NOVOM ŠADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI  
FAKULTET  
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I  
INFORMATIKU



Tijana Trninić

# **PREDIKCIJE I KORELACIJE BERZANSKOG INDEKSA FTSE 100**

- MASTER RAD -

Novi Sad, 2018.



# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>9</b>
<b>1 Globalizacija i međuzavisnost finansijskih tržišta</b>	<b>11</b>
1.1 Berzanski indeksi . . . . .	12
1.2 Faktori koji utiču na kretanje akcija i berzanskih indeksa . . . . .	13
1.2.1 Uticaj valute . . . . .	13
1.2.2 Uticaj kamatne stope . . . . .	13
1.2.3 Ekonomski izgledi zemlje . . . . .	13
1.2.4 Promene u politici . . . . .	14
1.2.5 Ekonomska i politička dešavanja . . . . .	14
1.3 Povezanost Velike Britanije i Amerike . . . . .	15
1.4 Povezanost Velike Britanije sa zemljama Evropske Unije i Švajcarskom . . . . .	15
<b>2 Analiza vremenskih serija</b>	<b>17</b>
2.1 Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće . . . . .	17
2.2 Pojam stohastičkog procesa i vremenske serije . . . . .	21
2.3 Prinosi akcija . . . . .	23
2.4 Test normalnosti . . . . .	23
2.5 Pojam stacionarnosti i autokorelacije . . . . .	24
2.6 Autoregresivni modeli pokretnih proseka (ARMA) . . . . .	25
2.6.1 Stacionarnost ARMA modela . . . . .	26
2.6.2 Određivanje reda ARMA modela . . . . .	26
2.6.3 Adekvatnost ARMA modela . . . . .	27
2.6.4 Predikcije ARMA modela . . . . .	27
2.7 Model nestacionarnih vremenskih serija (ARIMA) . . . . .	28
2.7.1 Test jediničnih korena . . . . .	28
2.8 Vektorski autoregresivni model . . . . .	29
2.8.1 Uslov stacionarnosti za VAR model . . . . .	30
2.8.2 Određivanje reda VAR modela . . . . .	31
2.8.3 Pojam i test kointegracije vremenskih serija . . . . .	31

2.8.4	Pojam i test Grandžerove kauzalnosti vremenskih serija . . . . .	33
2.8.5	Provera adekvatnosti VAR modela - LM test . . . . .	34
2.8.6	Heteroskedastičnost među rezidualima - BP test . . . . .	34
2.8.7	Predikcije VAR modela . . . . .	35
2.8.8	Ispitivanje stabilnosti modela - CUSUM test . . . . .	35
2.9	Greške predviđanja . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Istraživanje i empirijski rezultati</b>	<b>37</b>
3.1	Analiza kretanja berzanskih indeksa . . . . .	38
3.2	Testiranje stacionarnosti . . . . .	40
3.3	Deskriptivne statistike i korelacije . . . . .	43
3.4	Formiranje ARIMA modela za britanski berzanski indeks FTSE 100 . . . . .	44
3.4.1	Ocena ARIMA modela . . . . .	45
3.4.2	Adekvatnost modela . . . . .	46
3.4.3	Formiranje i analiza prediktivnih vrednosti ARIMA modela . . . . .	46
3.5	Formiranje VAR modela za britanski berzanski indeks FTSE 100 . . . . .	49
3.5.1	Optimalan broj koraka . . . . .	49
3.5.2	Johansenov test kointegracije . . . . .	50
3.5.3	Grandžerov test kauzalnosti . . . . .	50
3.5.4	Ocenjeni i redukovani VAR model . . . . .	51
3.5.5	Adekvatnost modela i pregled nekih važnijih osobina reziduala . . . . .	52
3.5.6	CUSUM test stabilnosti . . . . .	53
3.5.7	Formiranje i analiza prediktivnih vrednosti VAR modela . . . . .	54
3.6	ARIMA i VAR model koji uključuju podatke nakon Bregzita . . . . .	57
	<b>Zaključak</b>	<b>61</b>
	<b>Literatura</b>	<b>63</b>

# Popis tabela

3.2.1 Rezultati DF testa za serije na logaritamskom nivou . . . . .	41
3.2.2 Rezultati DF testa za serije logaritamskih prinosa . . . . .	43
3.3.1 Deskriptivna statistika za logaritamske prinose berzanskih indeksa . . . . .	43
3.3.2 Matrica koeficijenata korelacije . . . . .	44
3.4.1 Ocenjeni ARMA(4,4) model za seriju logaritamskih prinosa . . . . .	45
3.4.2 Redukovani model za seriju logaritamskih prinosa . . . . .	45
3.4.3 Ljung-Box statistika . . . . .	46
3.4.4 Greške predviđanja za modele . . . . .	47
3.4.5 Procenat predikcija čije su relativne greške manje od zadatih granica . . . . .	48
3.4.6 Primer dinamičkih prediktivnih vrednosti . . . . .	49
3.5.1 AIC kriterijum . . . . .	49
3.5.2 Johansenov test kointegracije . . . . .	50
3.5.3 Grandžerov test kauzalnosti . . . . .	51
3.5.4 VAR model za serije logaritamskih prinosa . . . . .	51
3.5.5 Redukovani VAR model za serije logaritamskih prinosa . . . . .	52
3.5.6 Rezultati LM testa . . . . .	52
3.5.7 Rezultati BP testa . . . . .	53
3.5.8 Deskriptivna statistika za rezidualne VAR modela . . . . .	53
3.5.9 Greške predviđanja za VAR model . . . . .	55
3.5.10 Procenat predikcija čije su relativne greške manje od zadatih granica; VAR . . . . .	56
3.5.11 Primer dinamičkih prediktivnih vrednosti za VAR model . . . . .	57
3.6.1 Greške predviđanja za ARMA(3,4) model . . . . .	58
3.6.2 Procenat predikcija sa zadatim granicama relativnog odstupanja za ARMA(3,4) . . . . .	58
3.6.3 Greške predviđanja za VAR model . . . . .	59
3.6.4 Procenat predikcija sa zadatim granicama relativnog odstupanja za VAR . . . . .	59



# Popis slika

3.1.1 Kretanje berzanskih indeksa na osnovnom nivou . . . . .	39
3.1.2 Kretanje berzanskih indeksa na osnovnom nivou za jun 2016. . . . .	40
3.2.1 Vrednost berzanskih indeksa na logaritamskom nivou . . . . .	41
3.2.2 Logaritamski prinosi berzanskih indeksa . . . . .	42
3.4.1 Stvarne i prediktivne vrednosti indeksa dobijene statičkom metodom . . . . .	47
3.4.2 Statičke prediktivne i stvarne vrednosti indeksa za januar i februar 2016. . . . .	48
3.5.1 CUSUM test . . . . .	54
3.5.2 Stvarne i prediktivne vrednosti dobijene statičkom metodom za VAR model . . . . .	55
3.5.3 Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za januar i februar 2016. za VAR model . . . . .	56





# Predgovor

“Znanje, to su zlatne lestvice preko kojih se ide u nebesa; znanje je svetlost koja osvetljava naš put kroz život i vodi nas u budućnost punu večne slave.”

---

*Mihajlo Pupin (1858 - 1935) - srpski i američki naučnik, pronalazač i profesor*

U poslednjih nekoliko decenija prognoziranje određenih ekonomskih i drugih pojava je sve prisutniji predmet velikog broja naučnih radova i česta tema na mnogim seminarima i konferencijama. Jedan od krucijalnih razloga zbog čega je prognoziranje tako važno leži u činjenici da ono predstavlja osnovu za buduće odluke i planiranja i ima primenu u mnogim oblastima kao što su: ekonomija, finansije, demografija, fizika, medicina i druge.

Da bi se dobile što preciznije i tačnije prognoze koje povećavaju efikasnost pri donošenju odluka, potrebna su dobra teorijska znanja i poznavanje statističkih i ekonometrijskih alata i modela. U praksi su najzastupljeniji jednodimenzionalni i višedimenzionalni ekonometrijski modeli koji se baziraju na pretpostavkama da buduće vrednosti zavisne promenljive zavise od sopstvenih prethodnih vrednosti i prethodnih vrednosti jedne ili više drugih promenljivih. Rađanje novih i prevazilaženje starih modela neprekidan je proces koji unosi posebnu notu neizvesnosti i zanimljivosti u ovoj oblasti.

Ovaj rad se bavi proučavanjem međuzavisnosti finansijskih tržišta odabranih zemalja kao i predviđanjem njegovih budućih kretanja. Za analizu istorijskih kretanja na finansijskom tržištu korišćeni su berzanski indeksi. Zemlje koje su odabrane za ovo istraživanje se nalaze na listi najrazvijenijih zemalja koje između ostalog imaju jaku ekonomsku i istorijsku povezanost.

U prvom poglavlju data je teorijska pozadina ovog istraživanja. Navedeni su najvažniji faktori koji utiču na kretanje cena akcija i berzanskih indeksa. Objašnjena je i ekonomska povezanost odabranih zemalja, čime se opravdava njihov izbor za ovo istraživanje.

U drugom poglavlju dat je pregled osnovnih definicija i pojmova iz oblasti teorije verovatnoće i stohastičke analize. Takođe, predstavljeni su modeli vremenskih serija kao i statistički testovi koji su sastavni deo u analizi nekog skupa podataka i ekonometrijskom modeliranju.

U trećem poglavlju prikazani su i objašnjeni dobijeni rezultati sprovedenih statističkih testova, kao i ocenjenih ekonometrijskih modela. Takođe su analizirani svi pokazatelji koji su služili za procenu valjanosti ocenjenih modela i preciznosti dobijenih predikcija. Za sprovođenje ovih testova i konstruisanje ekonometrijskih modela korišćen je statistički program *EViews*.

*Najveću zahvalnost dugujem svojoj majci Slavici, ocu Stevanu i sestri Tamari na bezuslovnoj ljubavi i podršci koju mi neprestano pružaju. Sve što sam u životu postigla i što ću nastaviti da postizem dugujem njima.*

*Veliku zahvalnost dugujem Radivoju, Matei, Ani i Tijani na podršci, iskrenim savetima i dobrom podnošenju moje nervoze za vreme ispitnih rokova.*

*Takođe, želim da se zahvalim svim profesorima i asistentima koji su mi predavali na izuzetno lepoj saradnji i nesebično prenetom znanju tokom ovih pet godina.*

*Na kraju, posebnu zahvalnost dugujem svojoj mentorki docentu dr Nataši Krklec Jerinkić na savetima, pomoći i podršci pruženoj tokom pisanja ovog rada ali i tokom čitavog studiranja.*

# Glava 1

## Globalizacija i međuzavisnost finansijskih tržišta

Glavni faktori koji su podstakli razvitak i integraciju svetskih finansijskih tržišta proteklih decenija su globalizacija i liberalizacija. Globalizacija predstavlja proces interakcije i integracije među ljudima i kompanijama širom sveta, koji je podstaknut međunarodnom trgovinom i investiranjem zahvaljujući brzom razvoju informacionih i telekomunikacionih tehnologija. Ovaj proces ima uticaja na životnu sredinu, kulturu, političke sisteme, ekonomski razvoj i prosperitet. Ekonomska globalizacija označava stvaranje jedinstvenog svetskog tržišta sa slobodnim protokom robe i kapitala preko državnih granica.

U procesu globalizacije sve više dolaze do izražaja multinacionalne korporacije čiji prihodi često prevazilaze bruto domaći proizvod pojedinih zemalja u kojima se nalaze njihove poslovnice. Zbog toga ovakve korporacije imaju snažan uticaj na svetsku ekonomiju i međunarodne odnose.

Kako su procesi globalizacije i liberalizacije doveli do povećane međuzavisnosti na finansijskim tržištima, sada dešavanja na jednom tržištu mogu da diktiraju dešavanja na drugom tržištu. Jedan od osnovnih parametara koji se koristi prilikom sagledavanja kapaciteta i performansi nekog tržišta je njegova tržišna kapitalizacija. Ona govori o veličini nekog tržišta kao i mogućem potencijalu za ulaganje. Stavljanjem ovog pokazatelja u odnos sa bruto domaćim proizvodom dobijaju se relativni pokazatelji koji govore o stepenu razvijenosti nekog tržišta kapitala u globalnim okvirima. Takođe tržišna kapitalizacija predstavlja jedan od indikatora veličine i obima operacija na berzi. Dobija se množenjem tržišne cene svih kotiranih akcija na berzi sa ukupnim brojem svih akcija.

Ono što se može primeniti na nivou celog tržišta, može se primeniti i na svaku kompaniju pojedinačno, tako da je tržišna kapitalizacija jedne kompanije jednaka proizvodu njene tržišne cene i broja emitovanih akcija. Međutim, vrlo je malo verovatno da će sve akcije jedne kompanije biti raspoložive za trgovanje, pa se iz tih razloga uvodi pojam *free-float kapitalizacija* koja se računa kao proizvod tržišne cene kompanije i broja akcija koje se nalaze u slobodnom prometu, odnosno kojima se redovno može trgovati na organizovanom tržištu.

U ovom radu proučavaće se međuzavisnost tržišta Amerike, Velike Britanije, Švajcarske, Nemačke i Francuske, sa glavnim ciljem da se objasni u kojoj meri kretanje na tržištima pomenutih zemalja utiče na kretanje na tržištu Velike Britanije. U tu svrhu posmatraće se berzanski indeksi pomenutih zemalja: Dow Jones Industrial Average (američki indeks), FTSE

100 (britanski indeks), Swiss market Index (švajcarski indeks), CAC 40 (francuski indeks), DAX (nemački indeks). Od pomenutih zemalja najveću tržišnu vrednost ima američko tržište, dok tržišta ostalih zemalja se nalaze među prvih deset sa najvećom tržišnom kapitalizacijom [3].

## 1.1 Berzanski indeksi

Berze su organizovana i striktno regulisana finansijska tržišta na kojima se trguje hartijama od vrednosti, robom, uslugama ili valutama. Hartije od vrednosti predstavljaju dokumente kojima se obećava isplata novca, kamate ili dividende<sup>1</sup>. One se prodaju i kupuju na tržištu kapitala i spadaju u grupu najznačajnijih finansijskih instrumenata kojima se trguje na finansijskim tržištima. U hartije od vrednosti spadaju akcije, obveznice, opcije itd.

Berzanski indeksi predstavljaju jedan od najznačajnijih indikatora razvoja finansijskih tržišta i privrede u celini. Služe za analizu istorijskih kretanja na finansijskom tržištu, ali i za prognozu budućih kretanja kako na tržištu tako i u ekonomiji uopšte. Oni se izračunavaju tako što se podeli ukupna tržišna vrednost odabranih kompanija sa liste u sadašnjem trenutku sa njihovom tržišnom vrednošću u baznom periodu. Ponderi kompanije u indeksu zavise od tržišne vrednosti tih kompanija, odnosno kompanije sa većim brojem prodatih akcija i većom cenom više utiču na kretanje tog indeksa.

Postoji nekoliko vrsta berzanskih indeksa koji se koriste. Najzastupljeniji su kompozitni indeksi koji izražavaju najširu bazu kompanija kojima se trguje na nekoj berzi i predstavljaju pokazatelj ukupnog učinka nekog tržišta tokom vremena. Takođe često se koriste i blue chip indeksi koji predstavljaju odabrani broj najprofitabilnijih kompanija kojima se trguje na berzi. Kompanije koje ulaze u ovaj indeks su finansijski stabilne, dobro razvijene i svojim investitorima obezbeđuju konstantne prihode, što ih čini poželjnim za investiranje [5]. U nastavku biće predstavljeni indeksi koji su korišćeni u ovom radu.

- **Dow Jones Industrial Average** je američki berzanski indeks. Predstavlja ponderisan prosek cena trideset vodećih kompanija čijim se akcijama trguje na njujorškoj berzi, što znači da akcije sa većim cenama imaju veći relativni uticaj na veličinu proseka, bez obzira na veličinu tržišne vrednosti kompanije i na obim prodatih akcija. Bazna godina je 1896.
- **FTSE 100** je britanski berzanski indeks. Reflektuje ponašanje sto kompanija sa najvećom tržišnom kapitalizacijom. Većina ovih kompanija posluje u drugim državama, zato kretanje ovog indeksa nije dobar pokazatelj ekonomije Velike Britanije. Ponderisan je tržišnom kapitalizacijom tako da kompanije sa većom tržišnom vrednošću imaju više uticaja na kretanje indeksa. Bazna godina je 1984.
- **CAC 40** je indikator francuskog tržišta. Ponderisan je tržišnom kapitalizacijom i prati akcije četrdeset najvećih kompanija. Oko 45% akcija je u vlasništvu stranih investitora, što je rezultat činjenice da je veliki broj kompanija ovog indeksa internacionalan. Bazna godina je 1987.
- **DAX** je nemački blue chip berzanski indeks takođe ponderisan tržišnom kapitalizacijom. Reflektuje ponašanje trideset najvećih kompanija čijim akcijama se trguje na frankfurtskoj berzi. Bazna godina je 1987.

---

<sup>1</sup>Deo profita koji akcionar naplaćuje na osnovu svoje akcije

- **Swiss Market Index** je švajcarski blue chip berzanski indeks. Prati kretanje dvadeset najvećih i najlikvidnijih akcija kojima se trguje na berzama u Ženevi, Bazelu i Cirihu. Bazna godina je 1988.

## 1.2 Faktori koji utiču na kretanje akcija i berzanskih indeksa

Postoji mnogo faktora koji utiču na rast i na pad berzanskih indeksa, a u ovom radu biće spomenuti oni faktori koji imaju najveći uticaj na njegovo kretanje. Kako berzanski indeksi prate kretanje akcija određenih kompanija, to znači da su ova dva pojma usko povezana, odnosno da će se porast cena akcija tih kompanija reflektovati na porast vrednosti indeksa. Primeri koji će biti predstavljeni uglavnom su bazirani na kretanju britanskog berzanskog indeksa.

### 1.2.1 Uticaj valute

Jačanje neke valute može da utiče i pozitivno i negativno na cene akcija, zavisno od toga da li kompanije većinu svog profita ostvaruju u stranoj državi ili u matičnoj zemlji. Većina kompanija indeksa FTSE 100 svoje prihode ostvaruje izvan Velike Britanije stoga je jako bitno koliki je kurs funte i valute u kojoj je prihod ostvaren. Na primer ako kurs funta-dolar iznosi 2\$ onda je prihod od 1000\$ vredan 500 £. Sa druge strane ako se kurs funta-dolar pomeri i iznosi 1.5\$ za funtu, tada će prihod od 1000\$ biti vredan 666.67£. Dakle, prihod se povećao za 33% kao rezultat slabljenja funte. Dalje, kako prihod neke kompanije raste, tako ona postaje sve atraktivnija za investitore, pa rastu i cene akcija a samim tim i vrednost indeksa.

### 1.2.2 Uticaj kamatne stope

Centralna banka Velike Britanije može da poveća ili umanja kamatne stope sa ciljem da stabilizuje ili stimuliše britansku ekonomiju. Ovo je poznato kao monetarna politika<sup>2</sup>. Ako kompanija pozajmi novac da bi proširila i unapredila svoje poslovanje, veća kamatna stopa znači da će i dug koji treba da se vrati biti veći. Dalje, ovo implicira da će profit koji kompanija ostvaruje biti manji, a samim tim i cene akcija te kompanije će pasti što će ovu kompaniju učiniti manje atraktivnom za investiranje.

### 1.2.3 Ekonomski izgledi zemlje

Ako postoji tendencija da će se privreda razviti i proširiti, to će uticati da cene akcija porastu. Investitori će ulagati više u te akcije jer očekuju veću dobit. Sa druge strane ako ekonomski izgledi zemlje nisu sigurni, investitori mogu smanjiti njihovu kupovinu i početi njihovu prodaju.

---

<sup>2</sup>Deo ekonomske politike države koji čini skup mera i aktivnosti koje utvrđuje i sprovodi centralna banka radi ostvarivanja svog osnovnog cilja propisanog zakonom.

### 1.2.4 Promene u politici

Ako nova vlada stupi na vlast ona može da odluči da uvede određene promene koje mogu imati pozitivne i negativne posledice na poslovanje i ekonomiju uopšte. Te promene mogu da dovedu do promene u kamatnim stopama ili u inflaciji, što će dovesti do promene i cena akcija a samim tim i vrednosti indeksa.

### 1.2.5 Ekonomska i politička dešavanja

Promene u svetu mogu uticati kako na globalnu ekonomiju tako i na kretanje finansijskih tržišta. U ovom radu posmatraće se period od 2010. do 2017. godine, pa će u nastavku biti navedeni neki od važnijih događaja iz tog perioda koji su imali značajan uticaj na kretanje cena akcija i berzanskih indeksa:

- **Snizavanje kreditnog rejtinga Amerike**

Agencija za kreditne rejtinge Standard & Poor's je 5. avgusta 2011. snizila kreditni rejting Amerike sa najbolje ocene AAA na AA<sup>+</sup>. Amerika se smatrala jednom od najrazvijenijih zemalja, najsigurnijom za investiranje, međutim nakon ovog događaja izgubila je tu titulu. Nesigurnost koja se javila na američkim tržištima proširila se na ceo svet kao domino efekat. Na primer i kreditni rejting Francuske je bio AAA a nacionalni dug je bio skoro isti kao Amerike što je značilo da postoji mogućnost da se snizi i kreditni rejting Francuske. Niži kreditni rejting značio je da je država sve manje sposobna da isplati svoj dug, što je imalo negativne posledice za celu ekonomiju i za strane investitore. Kamatne stope su porasle, a cene akcija su se snizile.

- **Učestalost terorističkih napada**

Teroristički napadi koji se poslednjih godina dešavaju u sve većem broju u Evropi i širom sveta imaju ubedljivo najveći uticaj na turizam. Evropa je bila jedna od najpopularnijih turističkih destinacija, ali ovakva dešavanja dovela su do toga da su ljudi sve manje birali da posećuju poznate evropske i svetske metropole. Smanjenje broja turista značilo je i da su hoteli u tim gradovima slabije poslovali, odnosno imali su manji profit, što se odrazilo na snizavanje cena akcija hotela. Ovo je zabeleženo u Francuskoj, gde su nakon terorističkog napada u Nici akcije francuske multinacionalne hotelske grupe Accor Hotel znatno opale [13], a kako je Accor Hotel sastavna komponenta francuskog berzanskog indeksa CAC 40, došlo je i do pada tog indeksa.

- **Bregzit**

Odluka Velike Britanije da izađe iz Evropske Unije uzdrmala je čitav svet a njene posledice su brojne. Agencija za kreditne rejtinge Moody's snizila je kreditni rejting Velike Britanije zbog ekonomske nesigurnosti i neizvesne budućnosti [14]. Takođe britanska funta je pretrpela najveći pad u poslednjih trideset dve godine. Pad funte uticao je na uvoz i izvoz robe iz Velike Britanije. Roba koja se uvozila iz stranih država je bila skuplja, dok je roba koja se izvozila bila jeftinija, što je dovelo do pojave deficita. Strani državljani koji su radili u Britaniji sada su za posao birali druge zemlje kao što su Nemačka ili Amerika. Kao članica Evropske Unije, Velika Britanija je mogla slobodno da prodaje i kupuje proizvode širom Evropske Unije bez plaćanja dodatnih poreza i tarifa. Takođe Evropska Unija ima

sporazum o slobodnoj trgovini sa Norveškom, Švajcarskom, Južnom Afrikom i Severnom Korejom. Izvan Evropske Unije, Velika Britanija će morati da dogovara nove sporazume o slobodnoj trgovini.

### **1.3 Povezanost Velike Britanije i Amerike**

Amerika se smatra najvećim investitorom u Velikoj Britaniji. Američke kompanije investirale su oko 600 biliona dolara u Veliku Britaniju što je skoro četvrtina njenih ukupnih investicija u Evropi. Dve trećine tih investicija u Britaniji uglavnom odlazi u finansije, osiguranje i holding kompanije. Velika Britanija je takođe jedan od najvećih investitora Amerike i investirala je u Ameriku oko 480 biliona dolara od čega se najviše ulagalo u američki proizvodni sektor [15].

Takođe, američke kompanije su jedno od najvećih tržišta rada u Velikoj Britaniji. Skoro 1.4 miliona Britanaca zaposleno je u američkim kompanijama, dok je 1.1 miliona Amerikanaca zaposleno u britanskim kompanijama.

Na osnovu podataka iz 2015. godine Amerika je bila najveći izvozni partner Velike Britanije i drugi najveći uvozni partner.

Na polju turizma takođe postoji velika povezanost Amerike i Velike Britanije. Godišnje više od 4.5 miliona Britanaca poseti Ameriku i potroši oko 14 milijardi dolara, dok sa druge strane godišnje oko 3 miliona ljudi iz Amerike poseti Veliku Britaniju i potroši oko 10 milijardi dolara [16].

Na osnovu podataka iz 2017. godine čak 71% prihoda kompanija britanskog indeksa FTSE 100 je ostvareno izvan granica Velike Britanije od toga 20% prihoda je došlo iz Amerike, dok 5% i 10% prihoda je ostvareno u Francuskoj i Nemačkoj, respektivno [11]. Činjenica da većina prihoda dolazi iz stranih zemalja, a najviše iz Amerike je i razlog zbog čega Bregzit nije imao neku veliku posledicu na kretanje britanskog berzanskog indeksa, jer uzimajući u obzir šta je ranije rečeno za uticaj valute na njegovo kretanje, znatno oslabljena funta je uticala na to da su prihodi koji su dolazili iz Amerike bili veći.

Na osnovu iznesenih podataka može da se zaključi da postoji jaka obostrana veza između Amerike i Velike Britanije, stoga će se očekivati da na kretanje britanskog tržišta najveći uticaj ima američko tržište.

### **1.4 Povezanost Velike Britanije sa zemljama Evropske Unije i Švajcarskom**

Postoji obostrano jak uticaj između Evropske Unije kao jedne celine i Velike Britanije, ali kako je akcenat ovog rada na berzanskim indeksima posmatraće se povezanost Velike Britanije sa Francuskom i Nemačkom.

Na osnovu podataka iz 2015. godine Velika Britanija je 12.9% od ukupnog broja investicija investirala u Nemačku [20]. Nemačka je druga zemlja po redu u koju Velika Britanija najviše investira posle Amerike. Sa druge strane posmatrajući Nemačku, 10% investicija odlazi u Veliku Britaniju i čini je trećom zemljom po redu u koju Nemačka najviše ulaže [21]. Nemačka je prvi evropski izvozni partner Velike Britanije, a posmatrajući globalno onda je drugi najveći izvozni partner posle Amerike, dok je sa druge strane Nemačka prvi uvozni partner Velike Britanije.

Posmatrajući britanski berzanski indeks FTSE 100, 9.71% prihoda koji dolaze iz stranih zemalja dolazi iz Nemačke.

Analizirajući podatke iz 2015. godine Francuska je 11% svojih investicija investirala u Veliku Britaniju, dok je procenat investicija koje je Velika Britanija investirala u Francusku znatno manji [19]. Velika Britanija je peta po redu zemlja u koju Francuska izvozi svoju robu, dok je Francuska treći najveći izvozni centar britanske robe.

Na osnovu iznesenih podataka o povezanosti Velike Britanije sa Francuskom i Nemačkom može da se očekuje da će veći uticaj imati britansko tržište na francusko i nemačko, nego što će ova dva tržišta imati uticaja na britansko.

Povezanost Velike Britanije i Švajcarske je slabija u poređenju sa ostalim posmatranim zemljama. Jedan od razloga može biti to što je Švajcarska najviše povezana sa svojim susednim zemljama. Nemačka je njen najveći trgovinski partner, pa zatim Francuska, Austrija i Italija. Na listi najvećih trgovinskih i investicionih partnera Velike Britanije Švajcarska ne ulazi u prvih deset, i obrnuto. Stoga se očekuje da neće biti povezanosti između ova dva tržišta ili da će ta povezanost biti slaba. Razlog što se posmatra povezanost ove dve zemlje može da se objasni činjenicom da je Švajcarska najrazvijenija zemlja koja se nalazi u Evropi ali nije član Evropske Unije. Takođe, zbog izlaska Velike Britanije iz Evropske Unije odnosi ove dve zemlje će se svakako promeniti u budućnosti.



# Glava 2

## Analiza vremenskih serija

Analiza vremenskih serija je statistička disciplina koja je našla primenu u mnogim oblastima ekonomije, finansija, prirodnih i društvenih nauka, i beleži dinamičan razvoj poslednjih decenija. Ona povezuje grupu statističkih metoda kako bi se iz vremenske serije izvukle potencijalno bitne informacije. Najvažniji ciljevi u analizi vremenskih serija je da se pomoću određenih statističkih testova izvedu zaključci o osnovnim karakteristikama vremenske serije, objasni njeno ponašanje i da se na osnovu istorijskih podataka prognozira buduća vrednost neke pojave. U ovom poglavlju biće predstavljeni statistički testovi, kao i modeli koji su korišćeni pri analizi vremenskih serija berzanskih indeksa i konstruisanju ekonometrijskog modela za predviđanje budućih vrednosti. Pre predstavljanja modela definišaće se osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće i stohastičke analize koji su osnova svega daljeg.

### 2.1 Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće

**Definicija 2.1.1** *Slučajan događaj  $A$  (ili samo događaj  $A$ ) je podskup skupa elementarnih događaja  $\Omega$ . On se sastoji od onih elementarnih događaja  $\omega$  koji imaju svojstvo kojim se događaj  $A$  definiše.*

**Aksioma 2.1.1** (Aksioma  $\sigma$ -polja)

*Podskup  $\mathcal{F}$  partitivnog skupa  $\mathcal{P}(\Omega)$  je  $\sigma$ -polje (  $\sigma$ -algebra ) nad  $\Omega$  ako važe uslovi:*

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
2. ako  $A \in \mathcal{F}$ , onda  $\bar{A} \in \mathcal{F}$ , gde je  $\bar{A}$  komplement skupa  $A$ ,
3. ako  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ , onda  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

**Definicija 2.1.2** *Borelovo  $\sigma$ -polje  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  je  $\sigma$ -polje definisano nad skupom realnih brojeva. Formira se pomoću familije poluotvorenih intervala  $[a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  i sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseči te familije, kao i skupove koji se dobijaju uzimanjem komplementa. Može se pokazati da  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  sadrži sve otvorene, zatvorene, poluotvorene intervale i unije tih skupova.*

**Aksioma 2.1.2** (Aksioma verovatnoće)

Neka je  $\Omega$  skup elementarnih događaja i  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -polje nad  $\Omega$ . Funkcija  $P : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$  se zove verovatnoća na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$  ako zadovoljava sledeće uslove:

1.  $P(\Omega) = 1$ ,
2. Ako  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , onda

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , gde je  $\Omega$  skup svih elementarnih događaja,  $\mathcal{F}$  je  $\sigma$ -polje nad  $\Omega$ , a  $P$  je verovatnoća na  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Definicija 2.1.3** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoća i  $A, B \in \mathcal{F}$ , pri čemu je  $P(B) > 0$ . Uslovna verovatnoća  $P(A|B)$  (verovatnoća događaja  $A$  pod uslovom da se realizovao događaj  $B$ ) je

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

**Definicija 2.1.4** Preslikavanje  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ , gde je  $X = (X_1, \dots, X_n)$  je  $n$ -dimenzionalna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ako  $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$  za svako  $S \in \mathcal{B}_n$ , gde je  $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  Borelovo  $\sigma$ -polje. Ekvivalentno, kažemo da je  $X$   $\mathcal{F}$ -merljivo.

**Definicija 2.1.5** Funkcija raspodele  $n$ -dimenzionalne slučajne promenljive  $X = (X_1, \dots, X_n)$  je

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_n) &= F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= P(\{X_1 < x_1\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\}), -\infty < x_1, \dots, x_n < \infty. \end{aligned}$$

**Definicija 2.1.6** Slučajna promenljiva  $X = (X_1, \dots, X_n)$  je diskretna (diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup tačaka u  $\mathbb{R}^n$ :

$$R_X = \{(x_1^{(k_1)}, \dots, x_n^{(k_n)}); k_1, \dots, k_n = 1, 2, \dots\}$$

takav da je  $P\{X \in \overline{R_X}\} = 0$ . Skup  $R_X$  je skup svih mogućih vrednosti za  $X$ .

**Definicija 2.1.7** Slučajna promenljiva  $X = (X_1, \dots, X_n)$  je  $n$ -dimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa ako postoji integrabilna funkcija  $f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ ,  $-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty$ , takva da je, za svaki Borelov skup  $S \in \mathcal{B}_n$ ,

$$P\{(X_1, \dots, X_n) \in S\} = \int \dots \int_S f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Funkcija  $f_X(x)$  zove se gustina raspodele verovatnoća (ili samo gustina raspodele) slučajne promenljive  $X$ .

Specijalno, ako izaberemo  $S = \{(u_1, \dots, u_n); u_k < x_k, k = 1, \dots, n\}$  dobijamo

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$$

za svako  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

U nastavku definisani pojmovi su dati za jednodimenzionalne slučajne promenljive ( $n = 1$ ).

**Definicija 2.1.8** *Kvantil reda  $p$  je ona vrednost  $x_p$  za koju važi da je  $F_X(x_p) = P(X < x_p) = p$ ,  $p \in (0, 1)$ , gde  $F_X(x) = P(X < x)$  predstavlja funkciju raspodele za jednodimenzionalnu slučajnu promenljivu.*

**Definicija 2.1.9** *Neka je  $X$  apsolutno neprekidna slučajna promenljiva. Očekivanje slučajne promenljive  $X$  dato je sa,*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

*i ono postoji ako gornji integral apsolutno konvergira, odnosno, ako*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

**Definicija 2.1.10** *Momenat reda  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , slučajne promenljive  $X$  je  $E(X^k)$ . Centralni momenat reda  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , slučajne promenljive  $X$  je*

$$E((X - E(X))^k).$$

Dakle, matematičko očekivanje je momenat reda 1.

**Definicija 2.1.11** *Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive  $X$  zove se disperzija (varijansa) slučajne promenljive  $X$  i označava se sa  $D(X)$  ili  $\sigma^2(X)$ .*

Dakle,

$$D(X) = E((X - E(X))^2).$$

Za izračunavanje disperzije često se koristi i sledeći izraz:

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

**Definicija 2.1.12** *Standardna devijacija (standardno odstupanje, prosečno odstupanje) slučajne promenljive  $X$  se definiše kao*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Numeričke karakteristike koje opisuju zavisnost između slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$  su kovarijansa i koeficijent korelacije.

**Definicija 2.1.13** *Kovarijansa slučajne promenljive  $(X, Y)$  je*

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

**Definicija 2.1.14** *Koeficijent korelacije slučajne promenljive  $(X, Y)$  je*

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

Slučajne promenljive  $X$  i  $Y$  su nekorelisane ako je  $\rho_{XY} = 0$ , pozitivno korelisane za  $\rho_{XY} > 0$  i negativno korelisane za  $\rho_{XY} < 0$ .

### Normalna raspodela

Slučajna promenljiva  $X$  ima normalnu  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  raspodelu, gde  $\mu \in \mathbb{R}$ , a  $\sigma > 0$ . U slučaju kada su parametri normalne raspodele  $\mu = 0$  i  $\sigma^2 = 1$  dobija se  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodela koja se naziva *standardizovana normalna raspodela*. To je jedna od vrlo često korišćenih raspodela u teoriji verovatnoće i matematičke statistike.

Funkcija gustine i funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  raspodelom predstavljene su jednačinama (2.1.1) i (2.1.2), redom.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \quad (2.1.1)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, x \in \mathbb{R}. \quad (2.1.2)$$

Takođe, na osnovu gore navedenih formula može se pokazati da je  $\mu$  očekivanje, a  $\sigma^2$  disperzija slučajne promenljive  $X$ .

**Definicija 2.1.15** *Neka je  $X$  slučajna promenljiva sa očekivanjem  $E(X)$  i disperzijom  $D(X)$ . Standardizovana (normalizovana) slučajna promenljiva  $X^*$  je*

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

**Teorema 2.1.1** *Neka je  $X^*$  standardizovana slučajna promenljiva. Tada je*

$$E(X^*) = 0 \text{ i } D(X^*) = 1.$$

**Definicija 2.1.16** *Momenat reda tri standardizovane slučajne promenljive se naziva koeficijent asimetričnosti i definiše se sa*

$$S_X = E \left[ \frac{(X - E(X))^3}{\sigma_x^3} \right].$$

*Ukoliko je  $S_X = 0$  raspodela je simetrična, za  $S_X > 0$  raspodela je asimetrična na desno, a za  $S_X < 0$  raspodela je asimetrična na levo.*

**Definicija 2.1.17** *Momenat reda četiri standardizovane slučajne promenljive se naziva koeficijent spljoštenosti i definiše se sa*

$$K_X = E \left[ \frac{(X - E(X))^4}{\sigma_x^4} \right].$$

*Za  $K = 3$  raspodela ima normalnu spljoštenost, za  $K > 3$  raspodela je više izdužena u odnosu na normalnu raspodelu i za  $K < 3$  raspodela je više spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu.*

**Definicija 2.1.18** *Uslovno očekivanje za slučajnu promenljivu  $X$  pod uslovom da se realizovao događaj  $B$  ( $P(B) > 0$ ) je*

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

**Definicija 2.1.19** Neka je  $Y$  prosta slučajna promenljiva i neka je  $\{y_1, \dots, y_n\}$  skup vrednosti promenljive  $Y$ . Tada je uslovno očekivanje slučajne promenljive  $X$  pod uslovom da je poznata vrednost slučajne promenljive  $Y$  dato sa

$$E(X|Y) = \begin{cases} E(X|A_1), & \omega \in A_1 \\ \vdots \\ E(X|A_n), & \omega \in A_n \end{cases}$$

ili

$$E(X|Y) : \begin{pmatrix} E(X|A_1) & E(X|A_2) & \dots & E(X|A_n) \\ P(A_1) & P(A_2) & \dots & P(A_n) \end{pmatrix}$$

gde je  $A_i = \{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y_i\}$  i  $Y = y_i$  ako  $\omega \in A_i$  za  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 2.1.2** Neka je  $X$  proizvoljna slučajna promenljiva i  $Y$  prosta slučajna promenljiva, tada važi:

- $E(X|Y)$  je slučajna promenljiva,
- $E(X|Y)$  je  $\mathcal{F}(Y)$ -merljivo (jer je  $E(X|Y)$  funkcija od  $Y$ ),
- $\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP$  za sve  $A \in \mathcal{F}(Y)$ .

**Teorema 2.1.3** (Osobine uslovnog očekivanja)

1. Ako je  $X$   $\nu$ -merljivo, tada je  $E(X|\nu) = X$  skoro sigurno,
2. Ako  $a, b \in \mathbb{R}$ , tada važi  $E(aX + bY|\nu) = aE(X|\nu) + bE(Y|\nu)$ ,
3. Ako je  $X$  nezavisno od  $\nu$ , tada  $E(X|\nu) = E(X)$  skoro sigurno,
4. Ako je  $X$   $\nu$ -merljivo i  $XY$  integrabilna, tada je  $E(XY|\nu) = XE(Y|\nu)$ .

## 2.2 Pojam stohastičkog procesa i vremenske serije

Pretpostavimo da se u nekom trenutku  $t$  vremenskog intervala  $I$  posmatra neka karakteristika  $X$  fizičkog sistema koja je slučajnog karaktera. Tada je  $X(t)$  slučajna promenljiva za svako  $t \in I$ . Ovo implicira da je skup svih  $X(t)$ ,  $t \in I$  slučajna funkcija vremena. Tako se dolazi do pojma stohastičkog procesa.

**Definicija 2.2.1** Slučajni (stohastički) proces je familija slučajnih promenljivih  $\{X(t), t \in I\}$  definisanih na istom prostoru verovatnoće, gde je  $I$  parametarski skup.

Stohastički proces je funkcija dva parametra  $X(\omega, t)$ , gde  $\omega \in \Omega$  predstavlja skup vrednosti slučajne promenljive, a  $t \in I$  predstavlja vremenski interval. Za fiksirani vremenski trenutak  $t_0 \in I$  dobija se jedna slučajna promenljiva, a za fiksirano  $\omega_0 \in \Omega$  se dobija realna funkcija vremena koja se naziva trajektorija ili realizacija stohastičkog procesa.

**Definicija 2.2.2** *Vremenski niz ili vremenska serija je skup hronološki uređenih vrednosti promenljive, koja predstavlja pojavu ili stohastički proces u vremenu.*

Vremenska serija može da se posmatra kao jedna realizacija stohastičkog procesa ili kao uzorak iz kolekcije svih mogućih realizacija stohastičkog procesa. Cilj analize vremenskih serija je da se na osnovu konkretne vremenske serije izvedu zaključci o karakteristikama celog procesa.

Neka  $\{x_t\}_{t \in T}$  predstavlja jednu realizaciju stohastičkog procesa odnosno uzorak iz kolekcije na konačnom vremenskom intervalu dužine  $T$ . Tada je:

- Uzoračko očekivanje

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$$

- Uzoračka disperzija

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)^2$$

- Standardna devijacija uzorka

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2}$$

- Uzorački koeficijent korelacije

$$\hat{\rho}_{x,y} = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)(y_t - \hat{\mu}_y)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)^2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_y)^2}}$$

- Uzorački koeficijent asimetrije

$$\hat{S}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)^3$$

- Uzorački koeficijent spljoštenosti

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_x)^4$$

$\hat{S}(x)$  i  $\hat{K}(x) - 3$  asimptotski prate normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i disperzijama  $6/T$  i  $24/T$ , redom.

## 2.3 Prinosi akcija

Postoje bar dva razloga zašto se za modeliranje cena akcija koristi serija njenih prinosa. Prvi razlog je zbog lakše uporedivosti, jer za prinose nije bitno u kojoj su valuti izraženi. Drugi razlog je što serija prinosa ima lepše statističke osobine kao što su stabilnija varijansa i stacionarnost.

Neka je  $P_t$  cena akcije u trenutku  $t$  i pretpostavlja se da akcije ne isplaćuju dividende.

**Neto prinos** akcije za period od  $t - 1$  do  $t$  je

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

dok je neto prinos akcije za  $k$  perioda

$$R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}.$$

**Bruto prinos** za jedan period i za  $k$  perioda predstavljeni su sledećim formulama:

$$G_t = 1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

$$G_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \prod_{j=0}^{k-1} G_{t-j}$$

**Logaritamski prinos** predstavlja prirodni logaritam od bruto prinosa i za jedan period iznosi

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1}$$

gde je  $p_t = \ln(P_t)$ .

Vrednost logaritamskog prinosa za  $k$  perioda je

$$r_t[k] = \ln G_t[k] = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} + \cdots + \ln \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}$$

i njegova prednost se ogleda u činjenici da je prinos za  $k$  perioda jednak sumi prinosa za jedan period, što je mnogo lakše za izračunati nego proizvod. Takođe logaritamski prinosi imaju pogodnije statističke osobine.

## 2.4 Test normalnosti

Zbog svojih lepih statističkih osobina, u analizama česta je pretpostavka da serija prinosa prati normalnu raspodelu. Normalna raspodela je u potpunosti određena sa parametrima  $\mu$  i  $\sigma^2$ , odnosno sa njenim očekivanjem i varijansom.

Neka je data serija prinosa  $\{r_1, \dots, r_T\}$ . Test koji se najčešće koristi za ispitivanje normalnosti je Jarque-Bera. Ovaj test ispituje da li koeficijenti asimetrije i spljoštenosti odgovaraju normalnoj raspodeli. Dakle nulta hipoteza koja se testira je da ovi koeficijenti odgovaraju normalnoj raspodeli, odnosno da su koeficijenti asimetrije i spljoštenosti jednaki nula i tri, redom. Test statistika koja se koristi je

$$JB = \frac{\hat{S}(r)^2}{6/T} + \frac{(\hat{K}(r) - 3)^2}{24/T}$$

i ona asimptotski prati  $\chi^2$  raspodelu sa dva stepena slobode. Nulta hipoteza se odbacuje ukoliko je vrednost test statistike veća od kvantila  $\chi^2$  raspodele sa dva stepena slobode, ili ukoliko je registrovana  $p$  vrednost manja od zadatog nivoa značajnosti. U suprotnom nulta hipoteza se prihvata.

## 2.5 Pojam stacionarnosti i autokorelacije

Ispitivanje stacionarnosti vremenskih serija je jedan od prvih koraka koji se radi u analizi nekog skupa podataka. Stacionarnost je pretpostavka koja je osnova mnogih statističkih procedura korišćenih u analizi vremenskih serija. U nastavku rada kada se kaže stacionarna serija misliće se na slabo stacionarnu seriju.

**Definicija 2.5.1** *Vremenska serija  $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  je striktno stacionarna ako  $(r_{t_1}, \dots, r_{t_k})$  i  $(r_{t_1+t}, \dots, r_{t_k+t})$  imaju istu raspodelu za svako  $t$ , pri čemu  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}$ .*

Drugim rečima, vremenska serija je striktno stacionarna ako je raspodela  $(r_{t_1}, \dots, r_{t_k})$  invarijantna u odnosu na vreme. Ovo je dosta jak uslov koji je teško proveriti i zato se uvodi pojam slabe stacionarnosti.

**Definicija 2.5.2** *Vremenska serija  $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  je slabo stacionarna ako su  $E(r_t)$  i  $Cov(r_t, r_{t-l})$  nezavisne od vremenskog trenutka  $t$  za svako  $l \in \mathbb{Z}$ .*

Dakle, vremenska serija je slabo stacionarna ako se njena statistička svojstva ne menjaju tokom vremena, odnosno ako važi:

- $E(r_t) = \mu$  (očekivanje je konstanta)
- $Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$  (kovarijansa zavisi samo od  $l$ )

$Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$  se naziva kovarijansa kašnjenja  $l$  i važi da je  $\gamma_0 = D(r_t)$  i  $\gamma_l = \gamma_{-l}$ .

Implicitna pretpostavka slaboj stacionarnosti je da su prva dva momenta konačna, odnosno  $E(r_t) < \infty$  i  $E(r_t^2) < \infty$ .

**Definicija 2.5.3** *Autokorelacija kašnjenja  $l$  (ACF) slabe stacionarne serije  $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  je*

$$\rho_l = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{Var(r_t)Var(r_{t-l})}} = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{Var(r_t)} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0},$$

gde zbog slabe stacionarnosti važi da je  $Var(r_t) = Var(r_{t-l})$ .



ACF zavisi samo od  $l$  i iz definicije se lako zaključuje da je  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_l = \rho_{-l}$  i  $-1 \leq \rho_l \leq 1$ .

**Definicija 2.5.4** Uzoračka autokorelacija kašnjenja  $l$  (ACF) slabo stacionarne vremenske serije  $\{r_t | t = 1, \dots, T\}$  je

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}, \quad 0 \leq l < T - 1$$

gde je  $\bar{r}$  uzoračka srednja vrednost vremenske serije.

### Ljung-Box statistika

Ljung i Box (1978) su definisali statistički test koji ispituje odsustvo autokorelacije među članovima vremenske serije i on je prikazan sledećom formulom:

$$Q(m) = T(T + 2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{T - l}$$

Nulta hipoteza koja se testira je  $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$  odnosno ne postoji autokorelacija među članovima vremenske serije protiv alternativne  $H_a : \rho_i \neq 0$  za neko  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Nulta hipoteza se odbacuje na nivou značajnosti  $\alpha$  ako je  $Q(m) > \chi_{\alpha}^2$ , gde je  $\chi_{\alpha}^2$  kvantil hi-kvadrat raspodele sa  $m$  stepeni slobode. Analogno, nulta hipoteza se odbacuje ako je registrovana  $p$  vrednost manja od nivoa značajnosti  $\alpha$ .

## 2.6 Autoregresivni modeli pokretnih proseka (ARMA)

U analizi vremenskih serija ARMA modeli predstavljaju alat pomoću kog se mogu predvideti buduće vrednosti neke vremenske serije. Oni se baziraju na pretpostavci da je vremenska serija koja se modelira stacionarna. Buduće vrednosti vremenske serije se objašnjavaju pomoću prethodnih vrednosti te iste vremenske serije i prethodnih vrednosti belog šuma koji predstavlja neku inovaciju, odnosno spoljni uticaj na koji ne može da se utiče. Pre uvođenja formalnih definicija modela uvode se još neki bitni pojmovi:

**Definicija 2.6.1** Vremenska serija  $a_t$  se naziva beli šum ako je  $\{a_t\}$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa konačnim očekivanjem i varijansom. Ako  $a_t$  prati normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom  $\sigma^2$  ta serija se naziva Gausovski beli šum.

**Definicija 2.6.2** Vremenska serija  $\{r_t\}$  je linearna ako može da se zapiše kao

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}$$

gde je  $\mu = E(r_t)$ ,  $\psi_0 = 1$ , i  $\{a_t\}$  predstavlja niz nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa očekivanjem nula i dobro definisanom disperzijom, tj.  $\{a_t\}$  je beli šum.

Ako je  $\{r_t\}$  slabo stacionarna serija, očekivanje i disperzija su

$$E(r_t) = \mu$$

$$D(r_t) = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

gde je  $\sigma_a^2$  disperzija šuma. Činjenica da je  $D(r_t) < \infty$  implicira da  $\{\psi_i^2\}$  mora da konvergira, odnosno  $\psi_i^2 \rightarrow 0$  kada  $i \rightarrow \infty$ . Ovo u stvari znači da uticaj šoka  $a_{t-i}$  na  $r_t$  opada kako  $i$  raste.

**Definicija 2.6.3** *Vremenska serija  $\{r_t\}$  prati ARMA( $p, q$ ) proces ako je  $r_t$  stacionarna vremenska serija i ako može da se predstavi preko jednačine*

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$$

gde je  $\{a_t\}$  beli šum, a  $p, q = 0, 1, 2, \dots$

Preciznije rečeno, vrednost vremenske serije u trenutku  $t$  koja predstavlja zavisnu promenljivu je objašnjena pomoću prethodnih  $p$  vrednosti te iste serije i prethodnih  $q$  vrednosti belog šuma.

Ako je  $q=0$  dobija se autoregresivni model reda  $p$  tj. AR( $p$ ). U ovom slučaju vrednost serije u trenutku  $t$  se objašnjava samo preko  $p$  prethodnih vrednosti te iste serije. Sa druge strane ako je  $p=0$  dobija se model pokretnih proseka reda  $q$  tj. MA( $q$ ) i ovo znači da se vrednost serije u trenutku  $t$  opisuje pomoću prethodnih vrednosti belog šuma. Dakle, AR( $p$ ) i MA( $q$ ) su specijalni slučajevi ARMA( $p, q$ ) modela.

## 2.6.1 Stacionarnost ARMA modela

Gornja jednačina može da se zapiše i kao

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)r_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)a_t$$

gde  $B$  predstavlja operator unazad (*engl. back-shift*) za koji važi da je  $Br_t = r_{t-1}$ . Levi polinom je polinom AR modela, dok je desni polinom MA modela. Kako je MA model uvek slabo stacionaran jer predstavlja linearnu kombinaciju belih šumova, karakteristike ARMA modela se određuju na osnovu AR polinoma. Ako su sva rešenja karakteristične jednačine AR polinoma manja od jedan po apsolutnoj vrednosti, onda sledi da je ARMA model slabo stacionaran.

## 2.6.2 Određivanje reda ARMA modela

Postoji nekoliko načina da se odredi optimalan red modela, ali u ovom radu koristiće se AIC kriterijum (Akaike information criterion). AIC kriterijum omogućuje da se iz skupa modela izabere onaj koji najbolje opisuje vremensku seriju koja se modelira.

Neka je funkcija verodostojnosti pomoću koje ocenjujemo nepoznate parametre modela predstavljena sledećom formulom

$$f(\theta) = -T/2 \ln(2\pi) - T/2 \ln \sigma_a^2 + \sum_{i=1}^T \frac{(a_t(\theta))^2}{2\sigma_a^2}$$

gde je  $\theta$  vektor nepoznatih parametara koje ocenjujemo, odnosno  $\theta = (\theta_q, \dots, \theta_1, \phi_0, \sigma_a, \phi_p, \dots, \phi_1)$ . Dalje neka je  $\hat{\theta}$  vektor ocenjenih koeficijenata dobijen metodom maksimalne verodostojnosti, odnosno kada se gornja funkcija maksimizuje, i neka je  $f(\hat{\theta})$  vrednost funkcije u tom vektoru. Vrednost AIC kriterijuma se izračunava na osnovu formule

$$AIC = 2k - 2 \ln f(\hat{\theta})$$

gde je  $k=q+2+p$  broj ocenjenih parametara. Za red modela bira se onaj model koji ima najmanju vrednost AIC kriterijuma.

### 2.6.3 Adekvatnost ARMA modela

Neka je  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_q, \dots, \hat{\theta}_1, \hat{\phi}_0, \hat{\sigma}_a, \hat{\phi}_p, \dots, \hat{\phi}_1)$  vektor ocenjenih koeficijenata. Adekvatnost modela se ispituje pomoću Ljung-Box statistike gde se testira nulta hipoteza da ne postoji autokorelacija među rezidualima. Model je adekvatan ako se reziduali ponašaju kao beli šum, odnosno ako je

$$r_t - \hat{r}_t = \hat{a}_t$$

gde je  $\hat{r}_t = \hat{\phi}_0 + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \hat{\theta}_i a_{t-i}$ .

### 2.6.4 Predikcije ARMA modela

Pod pretpostavkom da je poznata istorija do trenutka  $t$ , vrednost serije u trenutku  $t + 1$  se određuje pomoću uslovnog očekivanja

$$\hat{r}_t(1) = E(r_{t+1} | \mathcal{F}_t) = E(\phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t+1-i} + a_{t+1} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t+1-i} | \mathcal{F}_t) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t+1-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t+1-i}$$

gde je  $E(a_{t+1}) = 0$ . Greška predviđanja za jedan korak unapred je  $e_t(1) = r_{t+1} - \hat{r}_t(1) = a_{t+1}$ .

Prediktivne vrednosti za  $l$  koraka unapred se dobijaju na sledeći način

$$\hat{r}_t(l) = E(r_{t+l} | \mathcal{F}_t) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i E(r_{t+l-i} | \mathcal{F}_t) - \sum_{i=1}^q \theta_i E(a_{t+l-i} | \mathcal{F}_t)$$

gde je  $E(r_{t+l-i} | \mathcal{F}_t) = r_{t+l-i}$  i  $E(a_{t+l-i} | \mathcal{F}_t) = a_{t+l-i}$  za  $l - i \leq 0$  i  $E(r_{t+l-i} | \mathcal{F}_t) = \hat{r}_t(l - i)$  i  $E(a_{t+l-i} | \mathcal{F}_t) = 0$  ako je  $l - i > 0$ . Greška predviđanja za  $l$  koraka unapred iznosi  $e_t(l) = r_{t+l} - \hat{r}_t(l)$ .

Postoje dva načina predviđanja. Prvi način je predviđanje statičkom metodom koja podrazumeva predviđanje za jedan korak unapred i tada je razlika između stvarne i prediktivne vrednosti jednaka belom šumu. Drugi način je dinamički način predviđanja koji pri određivanju prediktivne vrednosti za  $l$  koraka unapred koristi prethodne predviđene vrednosti.

## 2.7 Model nestacionarnih vremenskih serija (ARIMA)

Prethodna analiza bazirala se na činjenici da je vremenska serija koju modeliramo stacionarna, ali u stvarnosti mnoge vremenske serije, kao što su na primer serije cena i prinosa akcija, su nestacionarne. Posmatrajući nestacionarnu seriju kroz vreme uočava se rastući ili opadajući trend, što znači da se njena statistička svojstva menjaju tokom vremena. Ukoliko je uočen rastući trend, očekivana vrednost će se tokom vremena povećavati.

Korišćenje nestacionarnih vremenskih serija u regresionoj analizi može da dovede do pogrešnih zaključaka. Na primer, može da se javi "lažna regresija" među podacima. Dalje dobijeni ocenjeni koeficijenti nisu najefikasniji mogući i model može da ima dobre statističke osobine ali da ima jako lošu prediktivnu moć.

Jedan od načina da se eliminišu trendovi u vremenskim serijama jeste da se one diferenciraju i svedu na stacionarnu seriju. Tako dolazimo do pojma integrisanog stohastičkog procesa i autoregresivnog integrisanog modela pokretnih proseka tj. ARIMA modela.

**Definicija 2.7.1** *Stohastički proces  $\{X_t | t \in T\}$  je integrisan proces reda  $d$  ako može da bude transformisan u stacionarni stohastički proces diferenciranjem  $d$  puta.*

**Definicija 2.7.2** *Vremenska serija  $\{y_t\}$  prati  $ARIMA(p, k, q)$  model ako  $\{r_t = y_t - y_{t-1}\}$  prati  $ARIMA(p, k - 1, q)$  model.*

### 2.7.1 Test jediničnih korena

Kako je jedna od osnovnih karakteristika najvećeg broja vremenskih serija tendencija stalnog rasta ili opadanja, nestacionarnost vremenske serije može da se uoči i posmatrajući grafički prikaz vremenske serije ali za njeno ispitivanje postoje posebni statistički testovi. U ovom radu stacionarnost vremenskih serija će se ispitivati pomoću Dickey–Fuller testa jediničnih korena (DF).

Radi jednostavnosti, ovaj test će biti objašnjen samo za AR(1) model

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + a_t$$

gde je  $a_t$  beli šum. Na osnovu ranije definisanog *back-shift* operatora i AR polinoma sledi da je AR(1) model slabo stacionaran ako je  $|\phi_1| < 1$ . Ako je  $|\phi_1| \geq 1$  serija  $r_t$  je nestacionarna i varijansa teži u beskonačno kako vreme ide u beskonačno.

DF test testira nultu hipotezu  $H_0 : |\phi_1| = 1$  protiv alternativne  $H_1 : |\phi_1| < 1$ . Oduzimajući sa obe strane  $r_{t-1}$  u AR(1) modelu dobijamo

$$r_t - r_{t-1} = (\phi_1 - 1)r_{t-1} + a_t$$

odnosno

$$\Delta r_t = (\phi_1 - 1)r_{t-1} + a_t$$

gde je  $\alpha = \phi_1 - 1$  pa nulta i alternativna hipoteza mogu da se zapišu na drugi način, odnosno  $H_0 : \alpha = 0$  protiv alternativne  $H_1 : \alpha < 0$ .

Ako je  $\phi_1 = 1$  dobija se da je

$$\Delta r_t = a_t$$

a kako je  $a_t$  beli šum sledi da je  $\Delta r_t$  stacionarna vremenska serija. Tako se vremenska serija diferenciranjem svodi na stacionarnu vremensku seriju.

## 2.8 Vektorski autoregresivni model

Zbog porasta međuzavisnosti na finansijskim tržištima, da bi se izveli što precizniji zaključci o istorijskim kretanjima i mogućim budućim kretanjima tržišta jedne zemlje, potrebno je ispitati koje su druge zemlje takođe imale uticaja na kretanje tog tržišta .

U ovom delu biće predstavljen vektorski autoregresivni model (VAR) koji kretanje jedne promenljive objašnjava pomoću prethodnih vrednosti te iste promenljive i prethodnih vrednosti jedne ili više drugih promenljivih.

**Definicija 2.8.1** *Vremenska serija reda  $k$  ( $k$ -dimenzionalni vektor)  $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, \dots, r_{kt})'$  je VAR proces reda 1 ili VAR(1) ako prati model*

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{r}_{t-1} + \mathbf{a}_t$$

gde je  $\boldsymbol{\phi}_0$   $k$ -dimenzionalni vektor,  $\boldsymbol{\Phi}$  je matrica  $k \times k$ , i  $\{\mathbf{a}_t\}$  je niz serijski nekorelisanih vektora sa očekivanjem nula i matricom kovarijanse  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

Matrica kovarijanse  $\boldsymbol{\Sigma}$  treba da bude pozitivno definitna <sup>1</sup>, u suprotnom bi vektor  $\mathbf{r}_t$  mogao da se redukuje. Takođe pretpostavlja se da  $\mathbf{a}_t$  prati višedimenzionalnu normalnu raspodelu.

Neka je  $k = 2$ , odnosno  $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, r_{2t})'$ ,  $\mathbf{a}_t = (a_{1t}, a_{2t})'$ . VAR(1) model se sastoji od dve jednačine

$$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11}r_{1,t-1} + \Phi_{12}r_{2,t-1} + a_{1t} \quad (2.8.1)$$

$$r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21}r_{1,t-1} + \Phi_{22}r_{2,t-1} + a_{2t} \quad (2.8.2)$$

gde je  $\Phi_{ij}$  element  $i$ -te vrste i  $j$ -te kolone matrice  $\boldsymbol{\Phi}$  i  $\phi_{0i}$   $i$ -ti element vektora  $\boldsymbol{\phi}_0$ .

Posmatrajući prvu jednačinu koeficijent  $\Phi_{12}$  predstavlja uticaj od  $r_{2,t-1}$  na  $r_{1t}$ . Ako je  $\Phi_{12} = 0$  to znači da  $r_{1t}$  ne zavisi od  $r_{2,t-1}$  i da zavisi samo od svojih prethodnih vrednosti. Slično ako je  $\Phi_{21} = 0$  sledi da  $r_{2t}$  ne zavisi od  $r_{1,t-1}$  već samo od svojih prethodnih vrednosti.

Može da se desi da je  $\Phi_{12} = 0$  ali da je  $\Phi_{21} \neq 0$  što znači da  $r_{1t}$  ne zavisi od  $r_{2,t-1}$  ali da  $r_{2t}$  zavisi od  $r_{1,t-1}$ , pa se kaže da postoji jednosmerna veza između ove dve promenljive. Ukoliko su oba koeficijenta nula tada su promenljive nepovezane, a ako su oba koeficijenta različita od nule kaže se da postoji obostrana veza.

Uopštenje VAR(1) modela je VAR(p) model:

**Definicija 2.8.2** *Vremenska serija  $\mathbf{r}_t$  reda  $k$  prati VAR(p) model ako zadovoljava jednačinu*

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{r}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p\mathbf{r}_{t-p} + \mathbf{a}_t$$

gde je  $\boldsymbol{\phi}_0$   $k$ -dimenzionalni vektor,  $\boldsymbol{\Phi}_j$  su matrice  $k \times k$ , i  $\{\mathbf{a}_t\}$  je niz serijski nekorelisanih vektora sa očekivanjem nula i matricom kovarijanse  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

<sup>1</sup>Simetrična kvadratna matrica je pozitivno definitna ako su joj svi karakteristični koreni pozitivni.

### 2.8.1 Uslov stacionarnosti za VAR model

Pretpostavljajući slabu stacionarnost VAR(1) modela i uzimajući da je  $E(\mathbf{a}_t) = \mathbf{0}$  dobija se da je

$$E(\mathbf{r}_t) = \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{\Phi}E(\mathbf{r}_{t-1}).$$

Kako zbog slabe stacionarnosti  $E(\mathbf{r}_t)$  ne zavisi od vremenskog trenutka  $t$ , odnosno uvek je konstantno sledi da je

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{r}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\phi}_0$$

gde je  $\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}$  nesingularna matrica, a  $\mathbf{I}$  predstavlja jediničnu  $k \times k$  matricu.

Uzimajući da je  $\boldsymbol{\phi}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})\boldsymbol{\mu}$  VAR(1) model može da se zapiše kao

$$(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{a}_t.$$

Neka je  $\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu}$  vremenska serija reda  $k$  korigovana za svoje očekivanje  $\boldsymbol{\mu}$ . Onda VAR(1) model može da se zapiše kao

$$\tilde{\mathbf{r}}_t = \mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{r}}_{t-1} + \mathbf{a}_t.$$

Ponavljajući ovaj postupak dobija se da je

$$\tilde{\mathbf{r}}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{\Phi}\mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{\Phi}^2\mathbf{a}_{t-2} + \mathbf{\Phi}^3\mathbf{a}_{t-3} + \dots$$

Ovaj izraz daje nekoliko karakteristika VAR(1) modela:

1. Kako je  $\mathbf{a}_t$  serijski nekorelisan vektor, sledi da je  $Cov(\mathbf{a}_t, \mathbf{r}_{t-l}) = 0$ , za  $l > 0$ ,
2. Množenjem izraza sa  $\mathbf{a}'_t$ , primenom očekivanja i korišćenjem činjenice o serijskoj nekorelisanosti  $\mathbf{a}_t$ , dobija se da je  $Cov(\mathbf{r}_t, \mathbf{a}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$ ,
3. Koeficijenti  $\mathbf{\Phi}^j$  predstavljaju uticaje prethodnih vrednosti šokova  $\mathbf{a}_{t-j}$  na  $\mathbf{r}_t$  i važi da  $\mathbf{\Phi}^j$  konvergira ka nuli kada  $j \rightarrow \infty$ , odnosno uticaji šokova opadaju kako se ide dublje u prošlost. Ovaj uslov implicira da svi karakteristični koreni matrice  $\mathbf{\Phi}$  moraju biti manji od 1 po modulu u suprotnom uticaji šokova mogu da budu jako veliki. Ovo je ujedno potreban i dovoljan uslov za slabu stacionarnost serije  $\mathbf{r}_t$ .

Kako je

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}| = \lambda^k \left| \mathbf{I} - \mathbf{\Phi} \frac{1}{\lambda} \right|$$

sledi da su rešenja od  $|\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}B| = |\mathbf{\Phi}(B)|$  gde je  $B = \frac{1}{\lambda}$  inverzne vrednosti karakterističnih korena matrice  $\mathbf{\Phi}$ . Ekvivalentan potreban i dovoljan uslov slabe stacionarnosti je da su rešenja od  $|\mathbf{\Phi}(B)|$  veća od 1 po modulu.

Uopšteno, posmatrajući VAR(p) model i koristeći *back-shift* operator jednačina VAR(p) može da se zapiše i na sledeći način

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1B - \dots - \mathbf{\Phi}_pB^p)\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{a}_t,$$

gde je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica  $k \times k$ . Stavljajući da je  $\mathbf{\Phi}(B) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1B - \dots - \mathbf{\Phi}_pB^p)$  gornja jednačina postaje

$$\mathbf{\Phi}(B)\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{a}_t$$

gde  $\mathbf{\Phi}(B)$  predstavlja matrični polinom. Potreban i dovoljan uslov za slabu stacionarnost za VAR(p) model je ekvivalentan uslovu za VAR(1) model.

### 2.8.2 Određivanje reda VAR modela

Kao i kod ARMA modela i ovde će za određivanje reda modela koristiti AIC kriterijum. Pod pretpostavkom da  $\mathbf{a}_t$  prati višedimenzionalnu normalnu raspodelu, vrednost AIC kriterijuma je

$$AIC(i) = \ln(|\hat{\Sigma}_i|) + \frac{2k^2i}{T},$$

gde  $i$  predstavlja broj prethodnih vrednosti koje treba uključiti u model,  $k$  broj koeficijenata u jednačini,  $T$  veličina uzorka,  $\hat{\Sigma}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\mathbf{a}}_t^{(i)} [\hat{\mathbf{a}}_t^{(i)}]'$  je uzoračka matrica reziduala,  $|\hat{\Sigma}_i|$  njena determinanta, a  $\hat{\mathbf{a}}_t^{(i)} = \mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\phi}}_0^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1^{(i)} \mathbf{r}_{t-1} - \cdots - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i^{(i)} \mathbf{r}_{t-i}$  vektor reziduala. Za red modela bira se onaj za koji je vrednost AIC kriterijuma najniža.

### 2.8.3 Pojam i test kointegracije vremenskih serija

Pre 1980-tih većina ekonomista koristila je linearnu regresiju za modeliranje nestacionarnih serija. Kasnije je pokazano da ovakav pristup može dovesti do pojave lažne regresije. Činjenica da većina makroekonomskih vremenskih serija ima jedinični koren podstakla je razvoj teorije nestacionarnih vremenskih serija. Engle i Granger su prvi istakli da linearna kombinacija dve ili više nestacionarnih vremenskih serija može da bude stacionarna. Ukoliko ovo važi kaže se da su te nestacionarne vremenske serije kointegrirane a stacionarna linearna kombinacija tih serija se naziva kointegracijska jednačina.

Postojanje kointegracijske veze među vremenskim serijama znači da su skokovi i padovi jedne serije praćeni skokovima i padovima drugih serija na duži vremenski rok, odnosno vremenske serije koje su međusobno kointegrirane se slično ponašaju. Poznavanje i razumevanje kointegriranosti među finansijskim tržištima je od ključnog značaja pri donošenju investicionih odluka.

Postoji nekoliko pristupa za testiranje vremenskih serija na postojanje kointegracijske jednačine, ali u ovom radu će se koristiti Johansenov test kointegracije. Pre nego što se objasni pozadina ovog testa daćemo formalnu definiciju kointegracije.

**Definicija 2.8.3** *Neka su  $r_{1t}, \dots, r_{kt}$  vremenske serije reda integracije jedan, tj. nestacionarne vremenske serije. Ako postoje koeficijenti  $\beta_1, \dots, \beta_k$  takvi da je  $\beta_1 r_{1t} + \cdots + \beta_k r_{kt}$  stacionarna vremenska serija, kaže se da su vremenske serije  $r_{1t}, \dots, r_{kt}$  kointegrirane.*

Gornja definicija predstavlja specijalan slučaj kointegriranosti vremenskih serija jer su sve vremenske serije reda integracije jedan. Uopštena definicija data je u nastavku:

**Definicija 2.8.4** *Neka je  $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, \dots, r_{kt})'$   $k$ -dimenzionalna vremenska serija, gde svaka komponenta predstavlja vremensku seriju reda integracije  $d$ . Ako postoji vektor  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$  takav da, ako je  $\boldsymbol{\beta}' \mathbf{r}_t = \beta_1 r_{1t} + \cdots + \beta_k r_{kt}$  vremenska serija reda integracije  $d - b$  za  $d \geq b > 0$ , kaže se da je  $\mathbf{r}_t$  kointegrirana vremenska serija reda  $(d, b)$  i ta klasa vremenskih serija se označava sa  $CI(d, b)$ .*

### Vektorski model sa korekcijom greške (VECM)

Radi boljeg razumevanja pojma kointegrisanosti vremenskih serija, posmatra se VAR(p) model sa trendom za k-dimenzionalnu vremensku seriju  $\mathbf{r}_t$ , odnosno

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{r}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{r}_{t-p} + \mathbf{a}_t$$

gde  $\mathbf{a}_t$  predstavlja Gausovski beli šum,  $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 t$ , gde su  $\boldsymbol{\mu}_0$  i  $\boldsymbol{\mu}_1$  su k-dimenzionalni konstantni vektori.

Pod pretpostavkom da su komponente vektora  $\mathbf{r}_t$  vremenske serije reda integracije jedan i da postoji jedna ili više kointegracijskih veza među vremenskim serijama, vektorski model sa korekcijom greške (VECM) za dati VAR(p) model je dat sa

$$\Delta \mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\Pi} \mathbf{r}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_1^* \Delta \mathbf{r}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_{p-1}^* \Delta \mathbf{r}_{t-p+1} + \mathbf{a}_t, \quad (2.8.3)$$

gde je  $\boldsymbol{\Phi}_j^* = -\sum_{i=j+1}^p \boldsymbol{\Phi}_i$  za  $j = 1, \dots, p-1$ ,  $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\Phi}_p + \boldsymbol{\Phi}_{p-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_1 - \mathbf{I} = -\boldsymbol{\Phi}(1)$ , gde su  $\boldsymbol{\alpha}$  i  $\boldsymbol{\beta}$  matrice punog ranga dimenzija  $k \times m$ , a  $m$  predstavlja broj kointegracijskih vektora.

Vremenska serija  $\boldsymbol{\beta}' \mathbf{r}_{t-1}$  je stacionarna serija, a kolone matrice  $\boldsymbol{\beta}$  su kointegracioni vektori od  $\mathbf{r}_t$ . U teoriji vremenskih serija može da se pokaže da uzorački koeficijent korelacije između nestacionarne serije reda integracije jedan i stacionarne vremenske serije teži u nula kada veličina uzorka teži u beskonačno, stoga stacionarnost vremenske serije  $\boldsymbol{\beta}' \mathbf{r}_{t-1}$  može da se opravda na ovaj način. U VECM modelu serija  $\mathbf{r}_{t-1}$  predstavlja nestacionarnu vremensku seriju, dok serija  $\Delta \mathbf{r}_t$  predstavlja stacionarnu vremensku seriju. Ovo implicira da jedini način da taj model bude dobro definisan je da serija  $\boldsymbol{\beta}' \mathbf{r}_{t-1}$  bude stacionarna.

Član  $\boldsymbol{\Pi} \mathbf{r}_{t-1}$  predstavlja član korekcije greške i igra glavnu ulogu u izučavanju kointegracije. U zavisnosti od traga matrice  $\boldsymbol{\Pi}$  tri slučaja su od interesa pri razmatranju VECM modela.

1.  $\text{rank}(\boldsymbol{\Pi}) = 0$ . Ovo implicira da je  $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$  i da komponente vektora  $\mathbf{r}_t$  nisu kointegrisane i u tom slučaju se koristi VAR(p-1) model.
2.  $\text{rank}(\boldsymbol{\Pi}) = k$ . Ovo implicira da je  $|\boldsymbol{\Phi}(1)| \neq 0$  i komponente vektora  $\mathbf{r}_t$  su stacionarne vremenske serije.
3.  $0 < \text{rank}(\boldsymbol{\Pi}) = m < k$  implicira da se  $\boldsymbol{\Pi}$  može zapisati kao  $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}'$ , gde je  $\text{rank}(\boldsymbol{\alpha}) = \text{rank}(\boldsymbol{\beta}) = m$ . U tom slučaju koristi se VECM model definisan u jednačini (2.8.3).

### Johansenov test kointegracije

U analizi vremenskih serija Johansenov test predstavlja proceduru za testiranje k vremenskih serija koje imaju jedan jedinični koren na postojanje kointegracije. Ovaj test dozvoljava više od jedne kointegracijske veze. Postoje dve test statistike koje se koriste za testiranje na postojanje kointegracije, statistika traga i statistika maksimalnog karakterističnog korena. U ovom radu koristiće se statistika traga.

Statistika traga zasniva se na tragu matrice  $\boldsymbol{\Pi}$  i za ocenjene karakteristične korene  $\hat{\lambda}_i$  predstavljena je formulom

$$\lambda(m) = -T \sum_{i=m+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i),$$



gde  $n$  predstavlja maksimalan mogući broj kointegracionih vektora. Veza između karakterističnih korena i traga matrice je što trag matrice može da se dobije kao suma njenih karakterističnih korena. Takođe važi da je  $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_n$ . Testira se nulta hipoteza da postoji  $m$  kointegracionih jednačina ili ekvivalentno da je  $\text{rank}(\mathbf{\Pi}) = m$ , protiv alternativne da je taj broj veći od  $m$ , ili da je  $m < \text{rank}(\mathbf{\Pi}) \leq n$ . Ako se nulta hipoteza odbaci onda se testira nulta hipoteza da je broj kointegracijskih jednačina  $m + 1$  protiv alternativne da je taj broj veći od  $m + 1$ . Postupak se završava kada se nulta hipoteza prvi put prihvati. Nulta hipoteza se prihvata ako je registrovana  $p$  vrednost veća od praga značajnosti, u suprotnom se odbacuje.

### 2.8.4 Pojam i test Grandžerove kauzalnosti vremenskih serija

Jedan od koraka u analizi vektorskog autoregresivnog modela pre ocenjivanja modela je ispitivanje smera kauzalne veze između posmatranih vremenskih serija. Grandžerova kauzalnost ispituje korisnost jedne promenljive na formiranje prediktivnih vrednosti druge promenljive.

Ako se posmatra VAR(1) model za dvodimenzionalnu vremensku seriju  $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, r_{2t})$ , odnosno

$$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11}r_{1,t-1} + \Phi_{12}r_{2,t-1} + a_{1t} \quad (2.8.4)$$

$$r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21}r_{1,t-1} + \Phi_{22}r_{2,t-1} + a_{2t} \quad (2.8.5)$$

gde su  $a_{1t}$  i  $a_{2t}$  nekorelisani beli šumovi. Tada mogu da se jave sledeći slučajevi:

1.  $r_{1t}$  uzrokuje kretanje promenljive  $r_{2t}$  i obrnuto ne važi, odnosno  $\Phi_{21}$  je statistički značajan tj. različit je od nule, dok  $\Phi_{12}$  nije statistički značajan, odnosno statistički je jednak nuli.
2.  $r_{1t}$  ne uzrokuje kretanje promenljive  $r_{2t}$ , dok sa druge strane  $r_{2t}$  uzrokuje kretanje  $r_{1t}$ . Ovo znači da je  $\Phi_{21} = 0$  a  $\Phi_{12} \neq 0$ .
3.  $r_{1t}$  uzrokuje  $r_{2t}$  i  $r_{2t}$  uzrokuje  $r_{1t}$ , odnosno postoji dvosmerna kauzalna veza, oba koeficijenta  $\Phi_{12}$  i  $\Phi_{21}$  su statistički značajna.
4.  $r_{1t}$  i  $r_{2t}$  su nezavisne promenljive, odnosno koeficijenti  $\Phi_{12}$  i  $\Phi_{21}$  su statistički jednaki nuli.

Pre primene Grandžerovog testa kauzalnosti treba da se utvrdi da su sve vremenske serije stacionarne i takođe treba da se odredi optimalan broj koraka. Test statistika koja se koristi je data sa

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/m}{RSS_U/(T - k - 1)}$$

gde  $RSS_R$  predstavlja sumu kvadrata reziduala za restrikovani model, a  $RSS_U$  sumu kvadrata reziduala za nerestrikovani model. Ako se posmatra jednačina (2.8.4) restrikovani model predstavlja model u kom se isključuje uticaj promenljive  $r_{2t}$  odnosno uzima se da je  $\Phi_{12} = 0$ , dok nerestrikovani model ne isključuje uticaj te promenljive. Za oba modela se ocenjuju koeficijenti, a zatim se traže njihove sume kvadrata reziduala. Nulta hipoteza koja se testira za ovu jednačinu je  $H_0: r_{2t}$  ne uzrokuje kretanje  $r_{1t}$ , odnosno  $\Phi_{12} = 0$  protiv alternativne  $H_1: r_{2t}$  uzrokuje kretanje  $r_{1t}$ , tj.  $\Phi_{12} \neq 0$ . Test statistika prati Fišerovu raspodelu  $F_{m, T-k}$  sa  $k$  stepeni slobode, gde je  $m$  broj restrikcija (ograničenja) u modelu, u ovom slučaju  $m = 1$ , dok je  $k$  broj ocenjenih koeficijenata u nerestrikovanom modelu, tj.  $k = 3$ . Ako je vrednost test statistike  $F$  veća od kritične vrednosti, nulta hipoteza se odbacuje, odnosno  $\Phi_{12} \neq 0$ .

### 2.8.5 Provera adekvatnosti VAR modela - LM test

Kao i kod ARMA modela tako se i ovde za proveru adekvatnosti modela ispituje da li su reziduali međusobno nekorelisani. U ovom delu će se za ispitivanje postojanja serijske korelisanosti među rezidualima koristiti test Lagranžovih množitelja (LM test).

Posmatra se k-dimenzionalni VAR(p) model

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{r}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{r}_{t-p} + \mathbf{a}_t$$

gde su  $\boldsymbol{\phi}_0$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_i$ , i  $\mathbf{a}_t$  definisani kao ranije. Dakle,  $\mathbf{a}_t$  predstavlja vektor grešaka za koji se pretpostavlja da prati normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i matricom kovarijanse  $\boldsymbol{\Sigma}$ , odnosno  $\mathbf{a}_t$  je beli šum. LM test se zasniva na pomoćnoj regresionoj jednačini

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{r}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{r}_{t-p} + \boldsymbol{\rho}_1 \mathbf{a}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\rho}_s \mathbf{a}_{t-s} + \mathbf{u}_t$$

gde  $\mathbf{u}_t$  predstavlja beli šum. Nulta hipoteza koja se testira je  $H_0 : \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \cdots = \boldsymbol{\rho}_s = \mathbf{0}$ , odnosno ne postoji serijska korelisanost među rezidualima, protiv alternativne da su reziduali međusobno korelisani, odnosno  $H_1 : \exists i$  tako da  $\boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$ . Kao i ranije, ako je registrovana  $p$  vrednost veća od praga značajnosti znači da se nulta hipoteza o odsustvu autokorelacije među rezidualima prihvata, u suprotnom se odbacuje.

### 2.8.6 Heteroskedastičnost među rezidualima - BP test

Pojam heteroskedastičnosti među rezidualima označava pojavu da se varijanse reziduala tokom vremena razlikuju i da zavise od vremenskog trenutka  $t$ . Sa druge strane, kada su varijanse grešaka jednake tokom vremena, kaže se da su reziduali homoskedastični. Jedan od razloga postojanja heteroskedastičnosti je postojanje autlajera u podacima. Uključivanje ili isključivanje ovakvih podataka mogu značajno promeniti rezultate analize.

Postojanje heteroskedastičnosti ima veliku posledicu na prediktivnu moć modela. Prediktivne vrednosti mogu znatno da odstupaju od stvarnih vrednosti. Takođe, ocena koeficijenata OLS metodom pretpostavlja da su reziduali homoskedastični i narušavanje ove pretpostavke znači da dobijeni ocenjeni koeficijenti nisu efikasni. Testiranje reziduala na postojanje heteroskedastičnosti će se raditi pomoću Breusch-Pagan testa (BP test) koji se sprovodi sledećim koracima:

1. Na osnovu ocenjenog k-dimenzionalnog VAR(p) modela dobija se ocenjeni vektor grešaka obeležen sa  $\hat{\mathbf{a}}_t$ ,
2. BP test se zasniva na oceni koeficijenata jednačine

$$\hat{\mathbf{a}}_t^2 = \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{r}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Psi}_p \mathbf{r}_{t-p} + \boldsymbol{\eta}_t$$

gde su  $\hat{\mathbf{a}}_t^2$ ,  $\boldsymbol{\psi}_0$ , i  $\boldsymbol{\eta}_t$  k-dimenzionalni vektori, a  $\boldsymbol{\eta}_t$  je vektor grešaka modela sa očekivanjem nula, dok  $\boldsymbol{\Psi}_i$  predstavljaju matrice dimenzije  $k \times k$ . Dakle, pretpostavlja se da kvadrati grešaka mogu da se opišu preko nezavisnih promenljivih iz VAR(p) modela.

3. Nulta hipoteza koja se testira je  $H_0 : \boldsymbol{\Psi}_1 = \cdots = \boldsymbol{\Psi}_p = \mathbf{0}$ , odnosno postoji homoskedastičnost među rezidualima, protiv alternativne da su reziduali heteroskedastični tj.  $H_1 : \exists i$  tako da  $\boldsymbol{\Psi}_i \neq \mathbf{0}$ .

### 2.8.7 Predikcije VAR modela

Tehnika za formiranje predikcija kod vektorskog autoregresivnog modela potpuno je analogna tehnici kod jednodimenzionalnog autoregresivnog modela. Neka je data  $k$ -dimenzionalna vremenska serija. Pretpostavljajući da je poznata istorija do trenutka  $t$ , vrednost serije  $j$ , gde  $j = 1, \dots, k$  u trenutku  $t + 1$  je

$$\hat{r}_{jt}(1) = E(r_{j,t+1}|\mathcal{F}_t) = E(\phi_{j0} + \sum_{i=1}^p \phi_{ji}r_{j,t+1-i} + a_{j,t+1}|\mathcal{F}_t) = \phi_{j0} + \sum_{i=1}^p \phi_{ji}r_{j,t+1-i}$$

gde je  $E(a_{j,t+1}) = 0$ . Greška predviđanja za jedan korak unapred je  $e_{jt}(1) = r_{j,t+1} - \hat{r}_{jt}(1) = a_{j,t+1}$ .

Prediktivne vrednosti za  $l$  koraka unapred se dobijaju na sledeći način

$$\hat{r}_{jt}(l) = E(r_{j,t+l}|\mathcal{F}_t) = \phi_{j0} + \sum_{i=1}^p \phi_{ji}E(r_{j,t+l-i}|\mathcal{F}_t)$$

gde je  $E(r_{j,t+l-i}|\mathcal{F}_t) = r_{j,t+l-i}$  za  $l - i \leq 0$  i  $E(r_{j,t+l-i}|\mathcal{F}_t) = \hat{r}_{jt}(l - i)$  ako je  $l - i > 0$ . Greška predviđanja za  $l$  koraka unapred iznosi  $e_{jt}(l) = r_{j,t+l} - \hat{r}_{jt}(l)$ .

### 2.8.8 Ispitivanje stabilnosti modela - CUSUM test

Postoji nekoliko tehnika za ispitivanje stabilnosti modela, ali u ovom radu stabilnost će se ispitivati pomoću kumulativne sume reziduala. Neka je data  $k$ -dimenzionalna vremenska serija i neka je  $r_{jt}$   $j$ -ta vremenska serija gde  $j = 1, \dots, k$ . Test statistika za ispitivanje stabilnosti modela za seriju  $r_{jt}$  data je sa

$$CUSUM_t = \sum_{i=p+1}^t \frac{\hat{e}_{ji,s}(1)}{\hat{\sigma}_e} \quad t = p + 1, \dots, T$$

gde  $p + 1$  predstavlja trenutak kad se prvi put pravi predikcija, jer za dobijanje sadašnje vrednosti serije je potrebno  $p$  prethodnih vrednosti. Vrednosti  $CUSUM_t$  testa grafički se prikazuju u zavisnosti od trenutka  $t$  sa granicama značajnosti od 5%. Stabilnost modela se proverava za period na kom je model ocenjen. Model je stabilan ukoliko kumulativna suma reziduala ostaje u granicama značajnosti za ceo posmatrani period. U suprotnom, model je nestabilan. Kretanje kumulativne sume izvan granica značajnosti ukazuje na velika odstupanja stvarnih od fitovanih vrednosti serije.

## 2.9 Greške predviđanja

Da bi ispitali valjanost dobijenih predikcija osim grafičkog prikaza stvarnih i prediktivnih vrednosti potrebno je izračunati i greške predviđanja. Neka je  $T + 1, \dots, T + h$  period za koji se prave predikcije i neka su stvarna i prediktivna vrednost za trenutak  $t$  označene sa  $r_t$  i  $\hat{r}_t$  respektivno. Tada je:

## 1. Standardna devijacija greške predviđanja

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} (\hat{r}_t - r_t)^2}$$

## 2. Prosečna apsolutna greška

$$MAE = \frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} |\hat{r}_t - r_t|$$

## 3. Prosečno apsolutno procentualno odstupanje

$$MAPE = \frac{100}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} \left| \frac{\hat{r}_t - r_t}{r_t} \right|$$

## 4. Tejlorov koeficijent nejednakosti

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} (\hat{r}_t - r_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} r_t^2} + \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{t=T+1}^{T+h} \hat{r}_t^2}}$$

gde  $U \in [0, 1]$ . Što je vrednost ovog koeficijenta bliža nuli, model je bolji. Ovaj koeficijent se može razložiti na tri komponente:

- Mera pristrasnosti (BM) predstavlja procenat greške koji dolazi iz modela i kakva god da je vrednost Tejlorovog koeficijenta nejednakosti, BM treba da bude blizu nule.
- Mera kovarijanse (CM) meri procenat greške koji dolazi izvan modela i na koji ne može da se utiče.
- Mera disperzije (VM) pokazuje u kojoj meri je varijansa prediktivnih vrednosti uspela da isprati varijansu stvarnih vrednosti. Ukoliko je ova vrednost velika znači da postoje velike fluktuacije među stvarnim vrednostima koje prediktivne vrednosti nisu uspele da isprate.

Prve dve greške  $RMSE$  i  $MAE$  zavise od skale u kojoj su podaci izraženi. One bi trebale da se koriste za upoređivanje prediktivne moći iste vremenske serije kroz različite modele. Ostala dva pokazatelja su uporediva i za modele ocenjene na različitim vremenskim serijama. Za  $MAPE$  ne postoji gornje ograničenje, dok se  $U$  nalazi između 0 i 1 i što je vrednost ova dva pokazatelja bliža nuli, model je bolji.

## Glava 3

# Istraživanje i empirijski rezultati

Osnovu za analizu predstavljali su iznosi berzanskih indeksa Velike Britanije, Francuske, Nemačke, Švajcarske i Amerike. Korišćeni su dnevni podaci sa zatvaranja berzi za period od 4. januara 2010. do 31. avgusta 2017. koji su preuzeti sa *Bloomberg-a*. Bitno je naglasiti da su sve serije indeksa imale jednak broj podataka odnosno da se vodilo računa o poklapanjima radnih dana. U cilju konstruisanja ekonometrijskog modela za predikcije londonskog berzanskog indeksa, vremenski period je podeljen na dva potperioda. Za ocenu modela korišćen je potperiod od 4. januara 2010. do 31. decembra 2015, dok je za testiranje valjanosti predikcija korišćen potperiod od 4. januara 2016. do 31. avgusta 2017. Ovakvom podelom je omogućeno da se proverí da li je model uspeo da isprati fluktuacije koje su se dogodile nakon referenduma 23. juna 2016. godine kada je izglasano da Velika Britanija izađe iz Evropske Unije. Ovako ocenjen model upoređiće se sa modelom za čiju bi se ocenu koristio i period do kraja juna 2016. godine tj. u koji će biti uključeni i podaci nakon referenduma.

U ekonomskim istraživanjima i prilikom ocene ekonometrijskih modela za predikcije često se koriste logaritmovane vremenske serije. Jedan od razloga za ovakvu transformaciju leži u činjenici da logaritmovana serija ima stabilniju varijansu od originalne serije. Upravo iz tog razloga u ovom radu analiza podataka i ocena ekonometrijskog modela radiće se na logaritmovanim podacima.

Pre početka analize uvode se oznake

$$\begin{aligned}LF(t) &= \ln(F_t), \\LC(t) &= \ln(C_t), \\LD(t) &= \ln(D_t), \\LDJ(t) &= \ln(DJ_t), \\LS(t) &= \ln(S_t)\end{aligned}$$

koje predstavljaju logaritmovane serije berzanskih indeksa Velike Britanije, Francuske, Nemačke, Amerike i Švajcarske, respektívno, dok oznake

$$\begin{aligned}DLF(t) &= \ln(F_t) - \ln(F_{t-1}), \\DLC(t) &= \ln(C_t) - \ln(C_{t-1}), \\DLD(t) &= \ln(D_t) - \ln(D_{t-1}), \\DLDJ(t) &= \ln(DJ_t) - \ln(DJ_{t-1}), \\DLS(t) &= \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})\end{aligned}$$

predstavljaju serije logaritamskih prinosa.

### 3.1 Analiza kretanja berzanskih indeksa

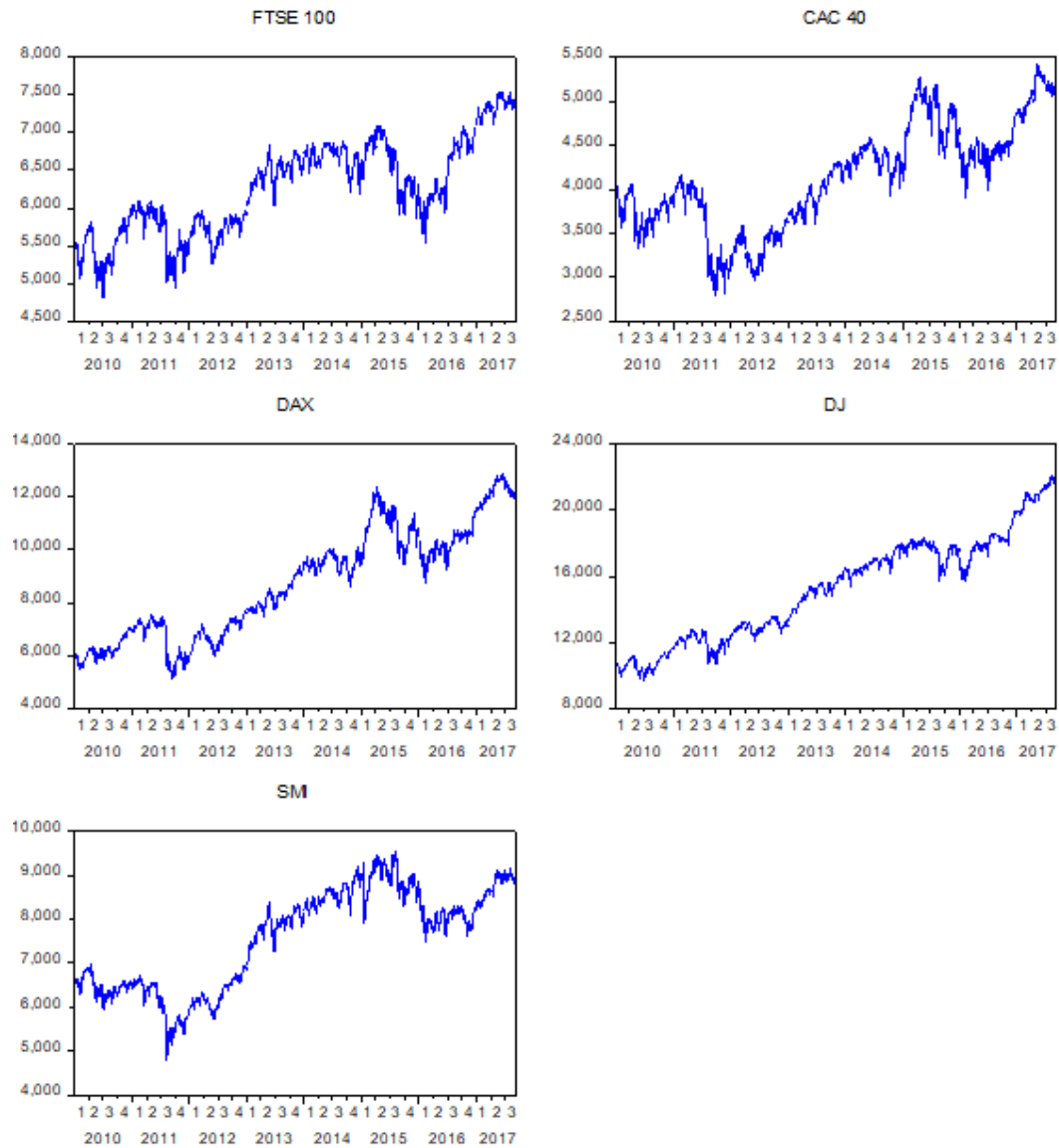
Na Slici 3.1.1 predstavljeno je kretanje berzanskih indeksa za posmatrani period. Najveći pad kod svih indeksa zabeležen je u avgustu 2011. godine, što je ujedno i najveći pad nakon Svetske finansijske krize koja se dogodila 2008. godine. Smatra se da je ovaj pad uzrokovao snižavanje kreditnog rejtinga Amerike 5. avgusta 2011. godine sa najbolje ocene AAA na AA<sup>+</sup> po prvi put nakon 1917. godine, od strane Standard & Poor's agencije za kreditne rejtinge. Najveća posledica američke krize bila je gubitak poverenja investitora i likvidnosti globalnih finansijskih tržišta. U svetu poznat kao Crni ponedeljak odnosi se na 8. avgust 2011. godine, odnosno prvi radni dan nakon snižavanja kreditnog rejtinga Amerike. Berzanski indeks Dow Jones Industrial Average je opao za 634.76 poena, odnosno za 5.6% što je bio šesti najveći pad u istoriji ovog indeksa. Ostali indeksi su takođe zabeležili velike padove u avgustu. Francuski CAC 40 je opao za 5.5% 18. avgusta 2011, dok je za period od 30. juna do 5. septembra 2011. vrednost indeksa pala sa 3982.21 na 2999.54. Britanski FTSE 100 je opao za 4.5% 18. avgusta, dok je 22. septembra 2011. godine zabeležio najveći dnevni pad od 2. marta 2009. godine. Vrednost nemačkog DAX-a je pala za 29% za period od 30. juna do 5. septembra 2011.

Dan koji je takođe uzdrmao finansijska tržišta je 23. jun 2016. godine kada je izglasano da Velika Britanija izađe iz Evropske Unije. Kada se londonska berza sutradan otvorila britanski berzanski indeks FTSE 100 je pao sa 6338.10 na 5806.13, odnosno skoro 9% u prvih 10 minuta trgovanja. Na kraju dana vrednost indeksa je bila za 3% manja nego prethodnog dana. Do 1. jula FTSE 100 je porastao iznad nivoa na kom je bio pre referendumu. Ovo je ujedno i najveći porast indeksa u jednoj nedelji od 2011. Do 11. jula indeks je porastao za više od 20% u odnosu na minimalnu vrednost indeksa koja je iznosila 5536.97 zabeležena 11. februara 2016. Takođe, francuski CAC 40 je dan nakon referendumu opao za 8%, Swiss Market Index je opao za 3.56%, dok je nemački DAX opao za 7%. Niža vrednost nekog berzanskog indeksa znači da su akcije jedne ili više kompanija tog indeksa opale.

Najveći gubitak dan nakon referendumu su pretrpele akcije banaka gde su akcije Lloyds Bank pale za 21%, a akcije Royal Bank of Scotland i Barclays za 18% [28]. Takođe, gubitak su pretrpele i banke drugih zemalja. Akcije nemačke banke Deutsche Bank su pale za 14% [29]. London je vodeći svetski finansijski centar, a vest o napuštanju Evropske Unije donela je neizvesnost u budućnost njegovog bankarskog sektora.

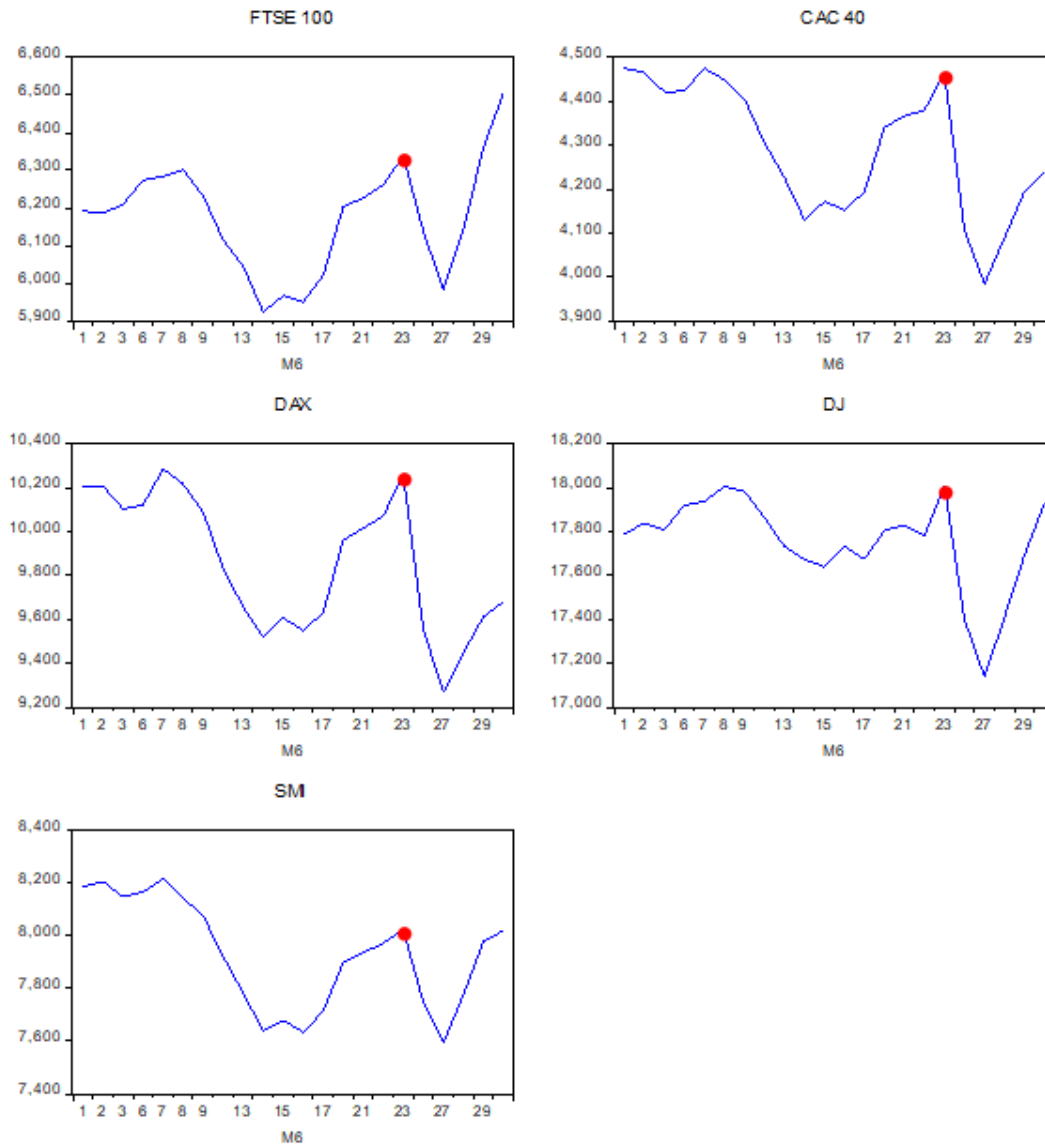
Ubedljivo najveći uticaj Bregzit je imao na britansku funtu gde je funta oslabila za 9% u odnosu na američki dolar, što je predstavljalo najveći pad u poslednje 32 godine, dok je u odnosu na evro oslabila za 7%. Britanska funta je nastavila da slabi, a 8. jula je postala najlošija valuta, lošija čak od argentinskog pezosa koji je bio prethodna najlošija valuta.

Nakon prvobitnog pada posle referendumu britanski berzanski indeks je nastavio da raste i do kraja godine dostigao je svoj maksimum. Sa druge strane britanska funta je nastavila da slabi. Jedan od razloga zašto se britanski indeks tako brzo oporavio je upravo ranije pomenuti efekat deviznog kursa. Kako je ranije rečeno, većina od sto kompanija britanskog berzanskog indeksa su multinacionalne kompanije koje većinu svog posla obavljaju izvan Velike Britanije, stoga veliki deo njihovog prihoda dolazi iz inostranstva.



**Slika 3.1.1:** Kretanje berzanskih indeksa na osnovnom nivou

Radi boljeg sagledavanja uticaja Bregzita na pomenute berzanske indekse, na Slici 3.1.2 predstavljeno je kretanje berzanskih indeksa za jun 2016. godine, a crvenom bojom je označen 23. jun. Jasno se uočava da je nakon referenduma zabeležen pad svih indeksa. Nakon prvobitnog šoka koji je usledio prvog radnog dana nakon referenduma vrlo brzo su svi indeksi krenuli da rastu, dok se londonski berzanski indeks već do kraja juna popeo iznad nivoa na kom je bio pre referenduma.



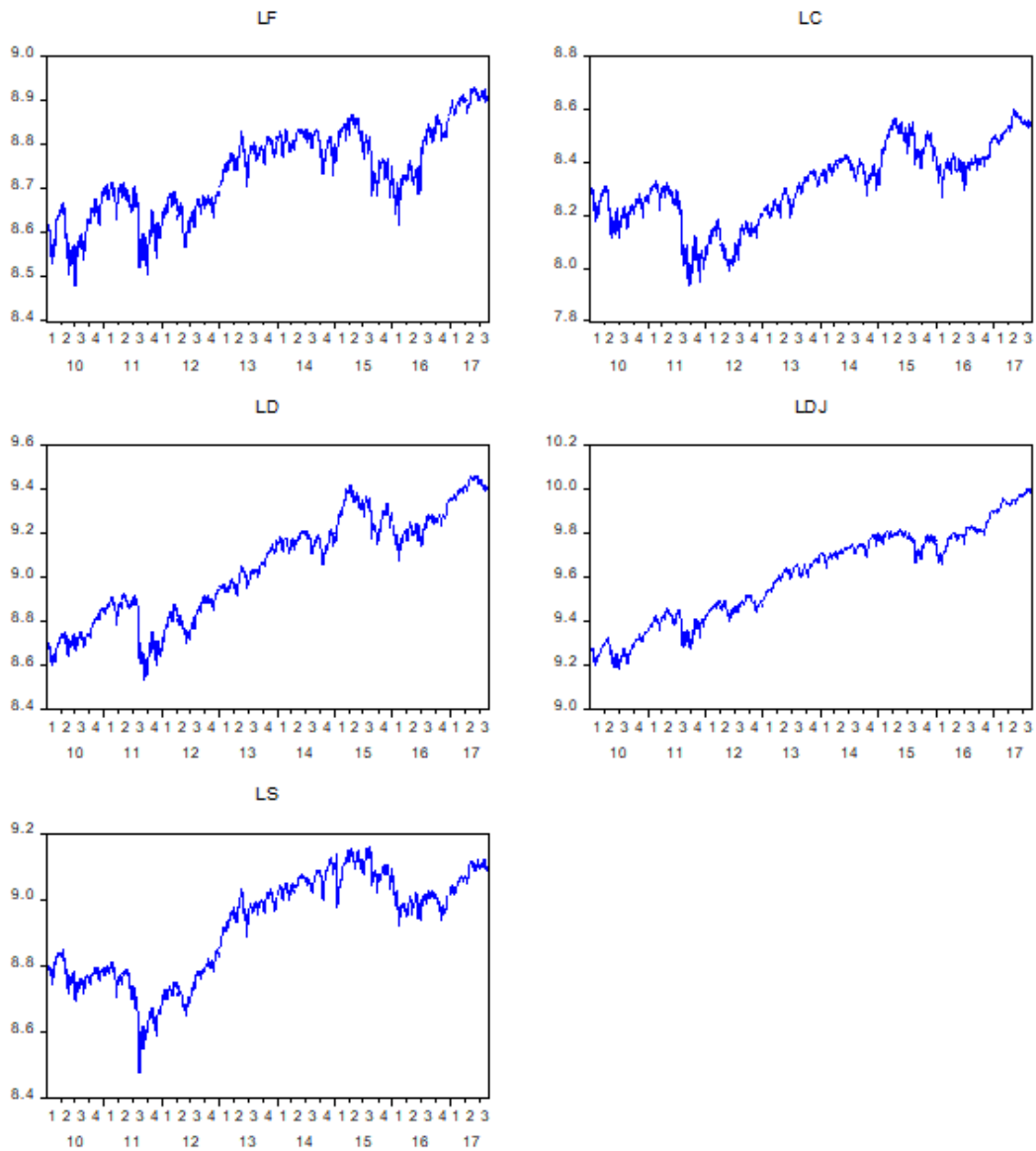
Slika 3.1.2: Kretanje berzanskih indeksa na osnovnom nivou za jun 2016.

## 3.2 Testiranje stacionarnosti

Modeli koji se koriste u radu baziraju se na pretpostavkama o stacionarnosti vremenskih serija, zato se pre same ocene modela pomoću određenih testova mora ispitati njihova stacionarnost. Kao što je ranije navedeno, za ocenu ekonometrijskog modela korišće se logaritmovani podaci, stoga u nastavku rada sva analiza zasnovana je na logaritmovanim serijama berzanskih indeksa. Registrovane  $p$  vrednosti zavisice od toga da li je u model uključena konstanta, konstanta i trend ili ništa od navedenog.

Posmatrajući Sliku 3.2.1 može se zaključiti da sve serije imaju rastući trend što je jedan od pokazatelja da su serije nestacionarne, što se potvrđuje DF testom jediničnih korena (Tabela 3.2.1). Kako su sve registrovane  $p$  vrednosti veće od 0.05, na nivou značajnosti od 5% sve nulte hipoteze se prihvataju, odnosno serije indeksa na logaritamskom nivou su nestacionarne.



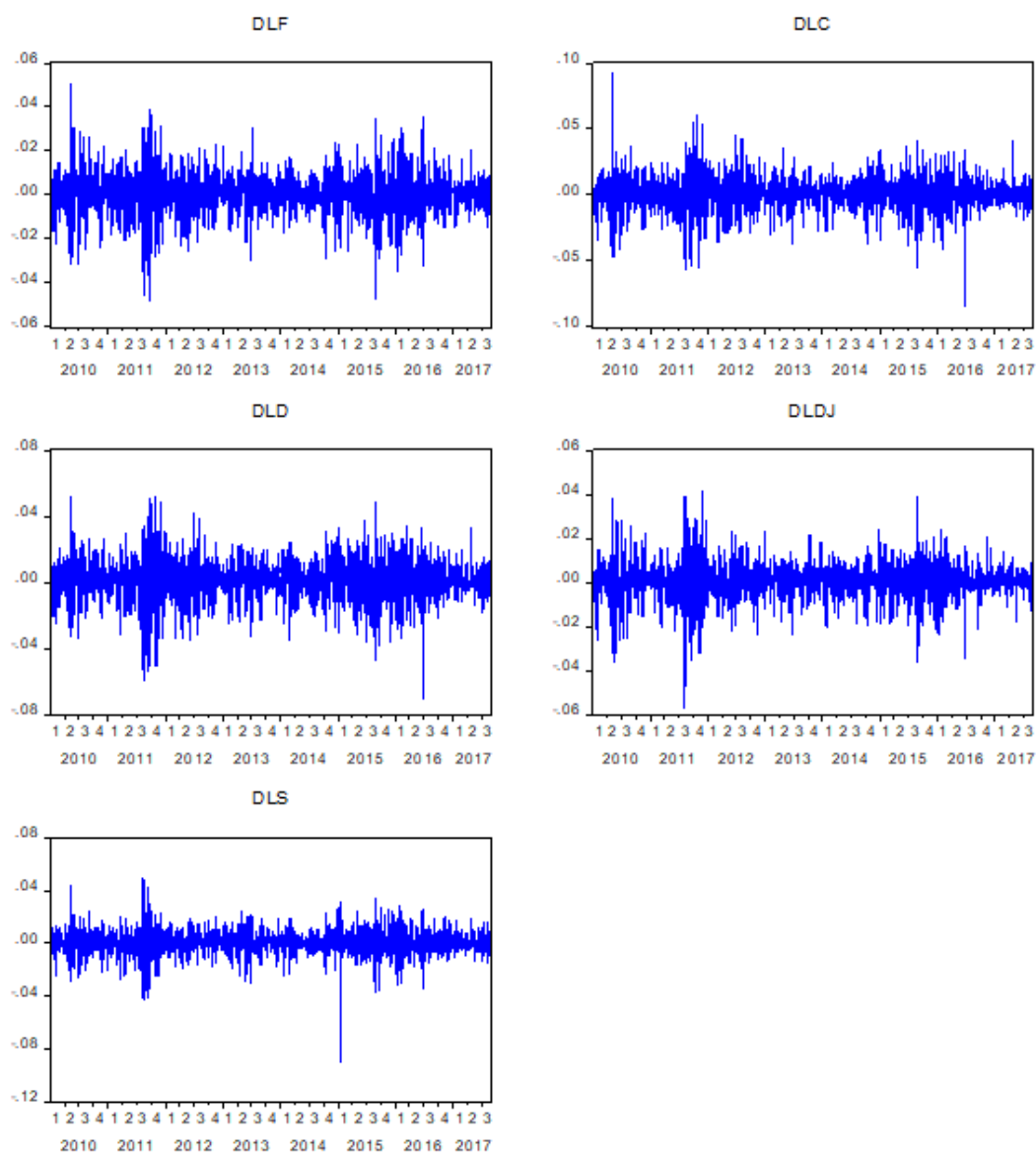


Slika 3.2.1: Vrednost berzanskih indeksa na logaritamskom nivou

	<b>Konstanta</b>	<b>Konstanta i trend</b>	<b>Ni konstanta ni trend</b>
<b>LF</b>	0.3036	0.0643	0.8634
<b>LC</b>	0.4474	0.0576	0.7963
<b>LD</b>	0.7249	0.0899	0.9444
<b>LDJ</b>	0.8453	0.0734	0.9863
<b>LS</b>	0.5824	0.2491	0.8527

Tabela 3.2.1: Rezultati DF testa za serije na logaritamskom nivou

Sa druge strane, posmatrajući logaritamske prinose na Slici 3.2.2 vidi se da sve serije osciluju oko nule i da se ne uočavaju rastući ili opadajući trendovi, pa se može zaključiti da su serije logaritamskih prinosa stacionarne, što se takođe može potvrditi testom stacionarnosti.



**Slika 3.2.2:** Logaritamski prinosi berzanskih indeksa

U Tabeli 3.2.2 prikazane su registrovane  $p$  vrednosti za DF test stacionarnosti za logaritamske prinose. Sve registrovane  $p$  vrednosti su manje od 0.05 što znači da se na nivou značajnosti od 5% sve nulte hipoteze odbacuju, pa se zaključuje da su serije logaritamskih prinosa stacionarne.

Iz ovog dela rada zaključuje se da su sve serije berzanskih indeksa na logaritamskom nivou integrisane stepena 1, što znači da postaju stacionarne nakon prvog diferenciranja. Ovo dalje implicira da će se za ocenu ekonometrijskog modela koristiti serije logaritamskih prinosa.

	<b>Konstanta</b>	<b>Konstanta i trend</b>	<b>Ni konstanta ni trend</b>
<b>LF</b>	0.0000	0.0000	0.0001
<b>LC</b>	0.0001	0.0000	0.0001
<b>LD</b>	0.0000	0.0000	0.0001
<b>LDJ</b>	0.0001	0.0000	0.0001
<b>LS</b>	0.0000	0.0000	0.0000

**Tabela 3.2.2:** Rezultati DF testa za serije logaritamskih prinosa

### 3.3 Deskriptivne statistike i korelacije

Jedan od početnih koraka u analizi bilo kakvih podataka je ispitivanje osnovnih statističkih osobina. Osnovne mere koje se koriste za opisivanje podataka su očekivanje, medijana, standardna devijacija, minimalna i maksimalna vrednost kao i koeficijenti spljoštenosti i asimetričnosti. U Tabeli 3.3.1 predstavljene su vrednosti deskriptivnih statistika za logaritamske prinose posmatranih berzanskih indeksa.

	<b>DLF</b>	<b>DLC</b>	<b>DLD</b>	<b>DLDJ</b>	<b>DLS</b>
<b>Očekivanje</b>	0.000152	0.000120	0.000348	0.000368	0.000150
<b>Medijana</b>	0.000481	0.000367	0.000860	0.000490	0.000503
<b>Max</b>	0.050322	0.092208	0.052104	0.041533	0.049027
<b>Min</b>	-0.047795	-0.083844	-0.070673	-0.057061	-0.090703
<b>Standardna devijacija</b>	0.009603	0.013074	0.012460	0.008630	0.009594
<b>Koeficijent asimetrije</b>	-0.166466	-0.141945	-0.264185	-0.420666	-0.722470
<b>Koeficijent ekscesa</b>	5.518924	6.854940	5.563115	7.155297	9.965585
<b>Jarque-Bera</b>	532.6053	1232.645	565.0205	1482.882	4175.096
<b>p vrednost</b>	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

**Tabela 3.3.1:** Deskriptivna statistika za logaritamske prinose berzanskih indeksa

Očekivane vrednosti svih logaritamskih prinosa indeksa su približno jednake nuli što je takođe uočeno na Slici 3.2.2 gde se jasno videlo da vrednosti svih indeksa osciluju oko nule. Najveća očekivana vrednost zabeležena je kod američkog berzanskog indeksa, dok je najmanja zabeležena kod francuskog.

Standardna devijacija nam govori koliko u proseku elementi skupa odstupaju od očekivane vrednosti tog istog skupa. Standardne devijacije za sve indekse su bliske nuli. Najveće odstupanje od očekivane vrednosti ima francuski berzanski indeks.

Koeficijent asimetričnosti nam daje informaciju da li je većina vrednosti u uzorku manja ili veća od očekivane vrednosti. Ukoliko je koeficijent asimetričnosti manji od nule to znači da je većina vrednosti u uzorku manja od očekivane vrednosti, i obrnuto ako je koeficijent veći od nule to znači da je većina vrednosti u uzorku veća od očekivane vrednosti. U datoj tabeli su za sve serije vrednosti koeficijenata asimetričnosti negativne, što znači da je većina podataka iz

serija manja od njihovih očekivanih vrednosti. Na osnovu koeficijenta asimetričnosti investitori mogu bolje da procene kakve će biti buduće vrednosti serije.

Koeficijent spljoštenosti nam govori koliko je neka raspodela spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu. Ako je koeficijent spljoštenosti veći od tri to znači da raspodela ima deblje repove što ukazuje na postojanje autlajera, ako je jednak tri to znači da je raspodela normalno spljoštena i ako je manji od tri raspodela ima tanje repove. U datoj tabeli vrednosti koeficijenata spljoštenosti za sve indekse su dosta iznad tri.

Jarque-Bera (JB) test normalnosti testira da li koeficijenti asimetričnosti i spljoštenosti odgovaraju normalnoj raspodeli. Nulta hipoteza koja se testira glasi da podaci imaju koeficijent asimetričnosti jednak nuli, a koeficijent spljoštenosti jednak tri, odnosno da ovi koeficijenti odgovaraju normalnoj raspodeli. Na osnovu registrovanih  $p$  vrednosti u Tabeli 3.3.1 zaključuje se da se za sve serije indeksa nulte hipoteze odbacuju, odnosno serije indeksa ne prate normalnu raspodelu.

### Koeficijent korelacije

Koeficijent korelacije predstavlja jačinu povezanosti između dve promenljive. Povezanost dve promenljive znači da kretanje jedne promenljive može da se opiše pomoću kretanja druge. U Tabeli 3.3.2 su predstavljeni koeficijenti korelacije za logaritamske prinose berzanskih indeksa.

	<b>DLF</b>	<b>DLC</b>	<b>DLD</b>	<b>DLDJ</b>	<b>DLS</b>
<b>DLF</b>	1				
<b>DLC</b>	0.872538	1			
<b>DLD</b>	0.839040	0.932075	1		
<b>DLDJ</b>	0.638852	0.659057	0.646269	1	
<b>DLS</b>	0.765266	0.788231	0.778316	0.567204	1

**Tabela 3.3.2:** Matrica koeficijenata korelacije

Svi koeficijenti korelacije su statistički značajni jer su sve registrovane  $p$  vrednosti nula, pa ih nismo unosili u rad. Takođe pozitivna vrednost koeficijenta korelacije znači da ako jedna promenljiva raste, da će rasti i druga.

## 3.4 Formiranje ARIMA modela za britanski berzanski indeks FTSE 100

U ovom delu koristiće se najjednostavniji način da se predvide buduće vrednosti berzanskog indeksa FTSE 100, odnosno buduće vrednosti indeksa FTSE 100 će se predviđati samo u odnosu na njegove prethodne vrednosti i prethodne vrednosti belog šuma. Za ocenu ARIMA modela će se koristiti potperiod od 4. januara 2010. do 31. decembra 2015.

### 3.4.1 Ocena ARIMA modela

Na osnovu AIC kriterijuma model koji je najbolje ispratio kretanje berzanskog indeksa FTSE 100 je ARMA(4,4) koji je konstruisan na seriji logaritamskih prinosa indeksa. Ocenjeni model predstavljen je u Tabeli 3.4.1.

	Koeficijent	p vrednost
<b>C</b>	0.000146	0.0062
<b>AR(1)</b>	0.201947	0.0000
<b>AR(2)</b>	-0.051371	0.0192
<b>AR(3)</b>	-0.132306	0.0000
<b>AR(4)</b>	0.925933	0.0000
<b>MA(1)</b>	-0.189926	0.8637
<b>MA(2)</b>	0.027387	0.4986
<b>MA(3)</b>	0.139055	0.9032
<b>MA(4)</b>	-0.976517	0.9458
$R^2$	0.021832	
$Adj.R^2$	0.016111	

**Tabela 3.4.1:** Ocenjeni ARMA(4,4) model za seriju logaritamskih prinosa

Iz date tabele vidi se da koeficijenti koji stoje uz prethodne vrednosti belog šuma nisu statistički značajni jer su njihove registrovane  $p$  vrednosti veće od 0.05, pa se nulte hipoteze koje glase da je koeficijent statistički jednak nuli prihvataju. Koeficijent determinacije  $R^2$  je dosta nizak, što ne znači nužno da je model loš, jer ukoliko su neki ocenjeni koeficijenti statistički značajni to implicira da se sadašnje vrednosti serije mogu objasniti preko prethodnih vrednosti serije i belog šuma. Dakle, ocenjeni ARMA(4,4) model predstavljen je sledećom jednačinom:

$$DLF(t) = 0.000146 + 0.201947DLF(t-1) - 0.051371DLF(t-2) - 0.132306DLF(t-3) + 0.925933DLF(t-4) - 0.189926a_{t-1} + 0.027387a_{t-2} + 0.139055a_{t-3} - 0.976517a_{t-4}$$

Pre nego što se pređe na deo gde će se ispitivati adekvatnost modela i predikcije, ocenjeni model će se redukovati postepeno tako što će se izbacivati promenljive jedna po jedna počevši od one koja ima najveću registrovanu  $p$  vrednost, a onda će se ponovo oceniti model i analizirati značajnost novih koeficijenata, a zatim ponovo izbaciti promenljiva sa najvećom registrovanom  $p$  vrednosti. U Tabeli 3.4.2 predstavljeni su ocenjeni koeficijenti tako redukovanog modela.

	Koeficijent	p vrednost
<b>C</b>	9.31e-05	0.4940
<b>AR(2)</b>	0.919480	0.0000
<b>MA(2)</b>	-0.960225	0.0000
$R^2$	0.010745	
$Adj.R^2$	0.008824	

**Tabela 3.4.2:** Redukovani model za seriju logaritamskih prinosa

Na osnovu podataka iz tabele zaključuje se da su oba koeficijenta statistički značajna na nivou značajnosti od 5%. Koeficijent determinacije je takođe nizak kao i u prvom modelu. Ocenjeni redukovani model je predstavljen sledećom jednačinom:

$$DLF(t) = 0.0000931 + 0.91948DLF(t - 2) - 0.960225a_{t-2}$$

Niska vrednost koeficijenata determinacije dobijena u oba modela će se najviše odraziti na formiranje predikcija, jer ukoliko je koeficijent nizak, ne može se očekivati da će predikcije biti precizne.

### 3.4.2 Adekvatnost modela

Sledeći korak nakon ocene modela je provera njegove adekvatnosti. Adekvatnost modela se testira pomoću Ljung-Box Q statistike za  $m$  koraka unazad. Za  $m$  se najčešće uzima  $\ln T$ , gde je  $T$  veličina serije [23]. Nulta hipoteza koja se testira glasi da ne postoji autokorelacija do  $m$ -tog koraka unazad. Model je adekvatan ukoliko se reziduali ponašaju kao beli šum, odnosno ako su reziduali međusobno nekorelisani. U Tabeli 3.4.4 predstavljene su vrednosti Ljung-Box Q statistike i registrovane  $p$  vrednosti za oba modela.

Broj koraka unazad	ARMA model		Redukovan model	
	Q statistika	p vrednost	Q statistika	p vrednost
1	0.5306	0.466	1.7336	0.188
2	0.6617	0.718	1.7535	0.416
3	0.6886	0.876	1.7611	0.623
4	1.6378	0.802	2.8904	0.576
5	2.8010	0.731	3.3678	0.643

Tabela 3.4.3: Ljung-Box statistika

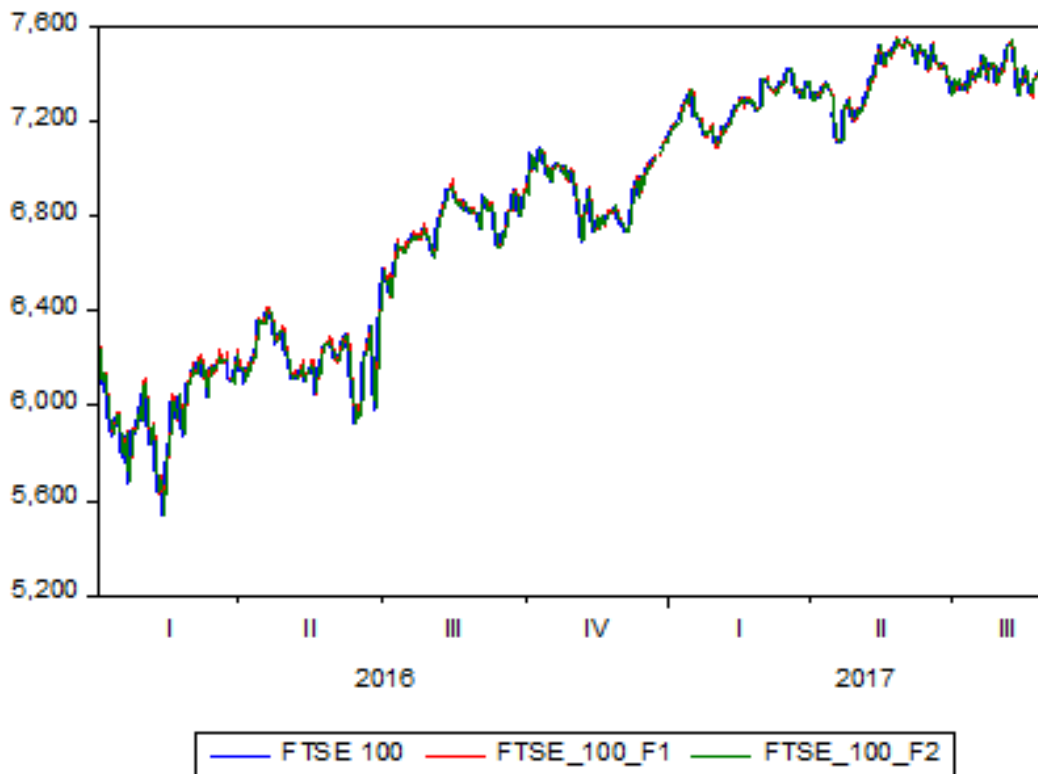
Na osnovu rezultata iz tabele vidi se da su sve registrovane  $p$  vrednosti veće od 0.05 što znači da se sve nulte hipoteze prihvataju, odnosno reziduali se ponašaju kao beli šum.

### 3.4.3 Formiranje i analiza prediktivnih vrednosti ARIMA modela

Na osnovu ARMA(4,4) i redukovanog modela koji su ocenjeni na seriji logaritamskih prinosa indeksa za potperiod od 4. januara 2010. do 31. decembra 2015. formirane su prediktivne vrednosti za britanski berzanski indeks FTSE 100 na osnovnom nivou za potperiod od 4. januara 2016. do 31. avgusta 2017. Na Slici 3.4.1 grafički su predstavljene stvarne i prediktivne vrednosti indeksa dobijene statičkom metodom. Plavu boju predstavljaju stvarne vrednosti indeksa FTSE 100, crvenom bojom označene su prediktivne vrednosti ARMA(4,4) modela, dok zelena boja predstavlja prediktivne vrednosti redukovanog modela.

Da bi se izveli neki precizniji zaključci o validnosti predikcija nije dovoljan samo grafički prikaz, nego je potrebno da se izračunaju i greške predviđanja. U Tabeli 3.4.4 nalaze se greške predviđanja za oba modela. Prosečno apsolutno procentualno odstupanje (MAPE) od stvarnih vrednosti je 0.64% za prvi model, odnosno 0.63% za drugi model. U oba modela vrednosti

Tejlorovog koeficijenta nejednakosti (U) su blizu nule kao i procenat grešaka koje dolaze iz modela (BP). Procenat grešaka koji dolazi izvan modela za oba modela je 99% što znači da 99% grešaka dolazi od uticaja spoljne sredine. Ovo su pokazatelji da su prediktivne vrednosti validne.

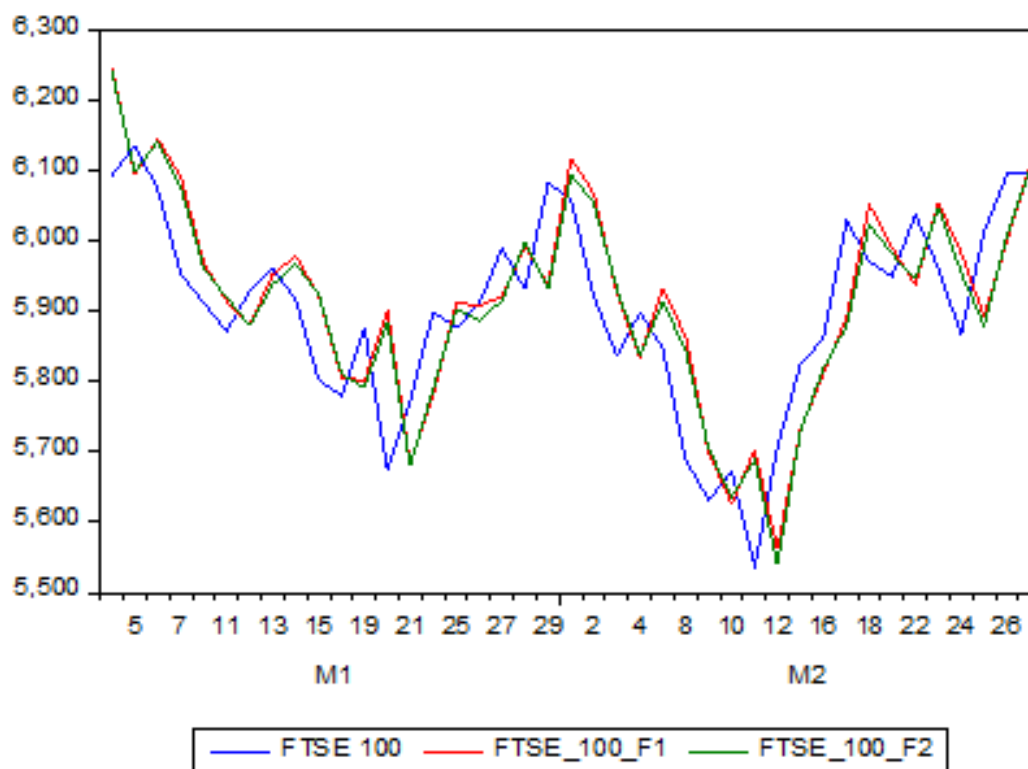


Slika 3.4.1: Stvarne i prediktivne vrednosti indeksa dobijene statičkom metodom

	ARMA model	Redukovan model
<b>RMSE</b>	56.82689	55.94471
<b>MAE</b>	41.92516	41.40808
<b>MAPE</b>	0.636428	0.627397
<b>U</b>	0.004150	0.004087
<b>BP</b>	0.000043	0.005639
<b>VP</b>	0.010664	0.001325
<b>CP</b>	0.989297	0.993035

Tabela 3.4.4: Greške predviđanja za modele

Kako bi se bolje sagledale razlike između stvarnih i prediktivnih vrednosti na Slici 3.4.2 je predstavljeno kretanje stvarnih i prediktivnih vrednosti za januar i februar 2016. godine, dok je u Tabeli 3.4.5 predstavljen procenat predikcija sa apsolutnom relativnom greškom manjom od 1%, 2% i 3%. Iz tabele se vidi da 96% predikcija iz prvog modela, odnosno 95% predikcija iz drugog modela ima apsolutno relativno odstupanje manje od 2%, dok kod oba modela 99% prediktivnih vrednosti ima grešku manju od 3%.



**Slika 3.4.2:** Statičke prediktivne i stvarne vrednosti indeksa za januar i februar 2016.

Relativna greška	FTSE_100_F1	FTSE_100_F2
< 1%	81%	80%
< 2%	96%	95%
< 3%	99%	99%

**Tabela 3.4.5:** Procenat predikcija čije su relativne greške manje od zadatih granica

Kao što je ranije rečeno statičkom metodom za formiranje predikcija korišćene su prethodne stvarne vrednosti serije. Ovaj metod predviđanja podrazumeva da je period za koji se formiraju predikcije poznat.

Ukoliko je period za koji se formiraju prediktivne vrednosti nepoznat, onda se koristi dinamički metod predviđanja, gde se za prediktivne vrednosti za nekoliko koraka unapred koriste prethodne predviđene vrednosti. U Tabeli 3.4.6 prikazano je nekoliko dinamičkih predikcija za oba modela kao i stvarne vrednosti indeksa FTSE 100. Iz table se vidi da prediktivne vrednosti odstupaju od stvarnih vrednosti, ali da to odstupanje nije veliko. Najveća odstupanja od 2.3% za prvi model odnosno 2% za drugi model od stvarne vrednosti dobijena su za 7. januar 2016. U ovom primeru može se zaključiti da su predikcije ispratile stvarno kretanje indeksa na kratak rok, ali se ne može očekivati da isprate stvarno kretanje na dugi rok, jer kako se povećava vremenski horizont za koji se prave predikcije, povećava se i varijansa greške predviđanja, što dalje implicira da se povećava nesigurnost u predikcije.



	FTSE_100	FTSE_100_F1	FTSE_100_F2
<b>1/05/2016</b>	6137.24	6097.564	6098.776
<b>1/06/2016</b>	6073.38	6142.305	6136.428
<b>1/07/2016</b>	5954.08	6093.610	6078.325
<b>1/08/2016</b>	5912.44	5961.126	5953.401
<b>1/11/2016</b>	5871.83	5915.958	5916.910

Tabela 3.4.6: Primer dinamičkih prediktivnih vrednosti

### 3.5 Formiranje VAR modela za britanski berzanski indeks FTSE 100

U prethodnom delu prikazan je model koji je buduće vrednosti britanskog indeksa predviđao u odnosu na prethodne vrednosti te serije i prethodne vrednosti belog šuma, ali kako su svetska tržišta međusobno korelisana, kretanje jednog indeksa može da se objasni pomoću kretanja drugog. Ranije je pokazano da su koeficijenti korelacije između Velike Britanije, Francuske, Nemačke, Amerike i Švajcarske statistički značajni, zato će se u ovom delu kretanje berzanskog indeksa FTSE 100 pokušati objasniti pomoću sopstvenih prethodnih vrednosti i prethodnih vrednosti indeksa pomenutih zemalja i u te svrhe koristiće se VAR model.

Model će se formirati za potperiod od 4. januara 2010. do 31. decembra 2015. na serijama logaritamskih prinosa jer se i ovaj model bazira na pretpostavkama o stacionarnosti serija.

#### 3.5.1 Optimalan broj koraka

Pre ocene modela se pomoću AIC kriterijuma određuje optimalan broj koraka koji se uključuje u model. Na osnovu dobijenih vrednosti u Tabeli 3.5.1 vrednost AIC kriterijuma je najmanja za korak dva, stoga optimalan broj koraka koji će se koristiti pri formiranju modela je dva. Preciznije rečeno, pri formiranju modela koristiće se vrednosti serija logaritamskih prinosa za prethodna dva dana.

<i>i</i>	<i>AIC(i)</i>
<b>0</b>	-36.17301
<b>1</b>	-36.37153
<b>2</b>	-36.38776*
<b>3</b>	-36.37675
<b>4</b>	-36.37400
<b>5</b>	-36.37113
<b>6</b>	-36.35995

Tabela 3.5.1: AIC kriterijum

### 3.5.2 Johansenov test kointegracije

Kako je ranije pokazano testovima jediničnih korena da su logaritmovane serije berzanskih indeksa nestacionarne, kao i to da su prve diference tih serija stacionarne, pre samog formiranja modela potrebno je ispitati i postojanje kointegracijskih jednačina.

Postojanje kointegracije među vremenskim serijama, kako je ranije rečeno, znači da se te vremenske serije ponašaju slično, odnosno da su skokovi i padovi jedne serije praćeni skokovima i padovima druge serije na duži rok. Poznavanje kointegracijske veze među tržištima je od velikog značaja za internacionalne investitore jer je njihov cilj da minimizuju rizik od gubitka. Iz tih razloga oni neće ulagati u tržišta koja su međusobno kointegrirana jer ukoliko dođe do gubitka na jednom tržištu, i druga tržišta će pretrpeti gubitke. Ukoliko bi ulagali u tržišta koja nisu međusobno kointegrirana, gubici na jednom tržištu bi mogli da se kompezuju dobitcima na drugom tržištu. Za ispitivanje postojanja kointegracijske veze između berzanskih indeksa pomenutih zemalja koristiće se Johansenov test kointegracije čiji su rezultati predstavljeni u Tabeli 3.5.2.

Nulta hipoteza	Test traga	p vrednost
Nema KJ	74.98752	0.0701
Jedna KJ	40.96902	0.4226
Dve KJ	22.27059	0.5772

**Tabela 3.5.2:** Johansenov test kointegracije

U ovom testu prvo se testira nulta hipoteza da nema kointegracijskih jednačina, protiv alternativne da je broj kointegracijskih jednačina bar jedan. Ukoliko se nulta hipoteza prihvati tu se završava testiranje i to znači da nema kointegracijskih jednačina. Ukoliko se pak odbaci nulta hipoteza znači da postoji bar jedna kointegracijska jednačina. Zatim se testira nulta hipoteza da postoji tačno jedna kointegracijska jednačina protiv alternativne da je taj broj veći od jedan. Testiranje se završava kada se prvi put prihvati nulta hipoteza. Maksimalan broj kointegracijskih jednačina koji može da se dobije u ovom primeru je dva. Iz rezultata dobijenih u Tabeli 3.5.2 zaključuje se da ne postoji ni jedna kointegracijska jednačina jer se nulta hipoteza prihvata već u prvom koraku.

### 3.5.3 Grandžerov test kauzalnosti

U cilju dobijanja adekvatnog modela a kasnije i validnih predikcija potrebno je odrediti koje promenljive su korisne za formiranje prediktivnih vrednosti zavisne promenljive. Ovo se radi pomoću Grandžerovog testa kauzalnosti.

Kako je glavni cilj ovog dela istraživanja da se oceni VAR model kako bi se predvidele buduće vrednosti berzanskog indeksa FTSE 100, testiraće se da li su berzanski indeksi Francuske, Nemačke, Amerike i Švajcarske korisni za formiranje prediktivnih vrednosti tog indeksa. Nulta hipoteza koja se testira glasi da promenljivu treba isključiti iz modela, odnosno ona nije korisna za formiranje prediktivnih vrednosti indeksa FTSE 100. U Tabeli 3.5.3 se nalaze rezultati Grandžerovog testa kauzalnosti. Na osnovu registrovanih  $p$  vrednosti zaključuje se da je jedino američki berzanski indeks koristan za formiranje prediktivnih vrednosti britanskog indeksa, dok ostali indeksi mogu da se isključe iz modela pošto nemaju nikakvog uticaja na FTSE 100.

Nulta hipoteza	F test	p vrednost
DLC ne uzrokuje DLF	1.05726	0.3476
DLD ne uzrokuje DLF	1.66232	0.1900
DLDJ ne uzrokuje DLF	56.3592	0.0000
DLS ne uzrokuje DLF	0.25814	0.7725

Tabela 3.5.3: Grandžerov test kauzalnosti

### 3.5.4 Ocenjeni i redukovani VAR model

Iz prethodnih delova zaključeno je da će se za formiranje modela koristiti vrednosti logaritamskih prinosa za prethodna dva dana. Takođe određenim statističkim testovima pokazano je da ne postoji kointegracija između berzanskih indeksa pomenutih zemalja kao i to da jedino američki indeks uzrokuje kretanje britanskog indeksa, dok će se ostali indeksi isključiti iz modela.

Pre nego što se indeksi koji ne uzrokuju kretanje britanskog indeksa isključe iz modela oćeniće se VAR model koji uključuje sve indekse. U Tabeli 3.5.4 predstavljeni su ocenjeni koeficijenti VAR modela kao i registrovane  $p$  vrednosti za te koeficijente za serije logaritamskih prinosa.

	Koeficijent	p vrednost
C	-0.0000406	0.8668
DLF(-1)	-0.031618	0.5697
DLF(-2)	-0.010898	0.8427
DLC(-1)	-0.170443	0.0024
DLC(-2)	0.037757	0.5023
DLD(-1)	0.028867	0.5886
DLD(-2)	-0.127577	0.0170
DLDJ(-1)	0.413466	0.0000
DLDJ(-2)	0.138895	0.0005
DLS(-1)	-0.040679	0.3271
DLS(-2)	-0.009556	0.8150
$R^2$	0.076872	
$Adj.R^2$	0.070862	

Tabela 3.5.4: VAR model za serije logaritamskih prinosa

Ukoliko bi se koristio ovaj model za formiranje budućih vrednosti indeksa FTSE 100 koristile bi se vrednosti američkog indeksa za prethodna dva dana, vrednost francuskog indeksa za jedan dan unazad i vrednost nemačkog indeksa od pre dva dana. Na osnovu dobijenih rezultata iz tabele i zaključaka koji su izvedeni na osnovu Grandžerovog testa kauzalnosti vidi se da ne važi striktno da ukoliko je koeficijent statistički značajan da je on značajan za formiranje predikcija promenljive za koju se model pravi.

Posmatrajući Tabelu 3.5.4 može se zaključiti da francuski i nemački indeks imaju uticaja na kretanje britanskog indeksa, ali Grandžerov test je pokazao upravo suprotno. U Tabeli 3.5.5 prikazani su ocenjeni koeficijenti redukovano modela, tj. modela iz kog su izbačene promenljive koje nisu korisne za formiranje prediktivnih vrednosti indeksa FTSE 100.

	Koeficijent	p vrednost
<b>C</b>	-0.0000499	0.8372
<b>DLF(-1)</b>	-0.200981	0.0000
<b>DLF(-2)</b>	-0.092439	0.0062
<b>DLDJ(-1)</b>	0.363286	0.0000
<b>DLDJ(-2)</b>	0.100035	0.0085
$R^2$	0.060949	
$Adj.R^2$	0.058513	

**Tabela 3.5.5:** Redukovani VAR model za serije logaritamskih prinosa

Vrednost koeficijenta determinacije je dosta niska i iznosi 6.1%, ali kao što je ranije napomenuto to ne znači da je model loš. Svi koeficijenti su statistički značajni na nivou značajnosti od 5%. Ocenjeni VAR model predstavljen je sledećom jednačinom:

$$DLF(t) = -0.0000499 - 0.200981DLF(t-1) - 0.092439DLF(t-2) + 0.363286DLDJ(t-1) + 0.100035DLDJ(t-2)$$

Najveći pozitivni uticaj na današnju vrednost  $DLF$  ima jučerašnja vrednost  $DLDJ$ , odnosno porast promenljive  $DLDJ(t-1)$  za 1% izaziva porast promenljive  $DLF$  za 0.36%, pod uslovom da su ostale promenljive konstantne. Sa druge strane najveći negativan uticaj na današnju vrednost  $DLF$  ima jučerašnja vrednost te iste promenljive, odnosno rast od 1% promenljive  $DLF(t-1)$  izaziva smanjenje promenljive  $DLF$  za 0.2% takođe pod pretpostavkom da su ostale promenljive ostale nepromenjene.

### 3.5.5 Adekvatnost modela i pregled nekih važnijih osobina reziduala

Za testiranje postojanja serijske korelisanosti među rezidualima modela koristiće se test Lagranžovih množitelja (LM). Ukoliko rezultati testa ukazuju da ne postoji korelacija među rezidualima, to će značiti da je model adekvatan. Nulta hipoteza koja se testira je da ne postoji serijska korelisanost među rezidualima, protiv alternativne da su reziduali međusobno korelisani. U Tabeli 3.5.6 se nalaze rezultati LM testa.

Test statistika	p vrednost
0.388731	0.8234

**Tabela 3.5.6:** Rezultati LM testa

Kako je registrovana  $p$  vrednost veća od 0.05, nulta hipoteza se prihvata, što implicira da ne postoji serijska korelisanost među rezidualima, pa se može zaključiti da je model adekvatan.

Postojanje homogenosti ili heteroskedastičnosti među rezidualima je takođe jedna od bitnijih osobina reziduala. Jedna od posledica prisustva heteroskedastičnosti među rezidualima je da predviđene vrednosti imaju veliko odstupanje od stvarne vrednosti. Testiranje reziduala na postojanje heteroskedastičnosti će se raditi pomoću Breusch-Pagan (BP) testa. Nulta hipoteza koja se testira je da ne postoji heteroskedastičnost među rezidualima, protiv alternativne da postoji. Iz Tabele 3.5.7 se zaključuje da postoji heteroskedastičnost među rezidualima jer se nulta hipoteza odbacuje.

$\chi^2$	p vrednost
59.35009	0.0000

**Tabela 3.5.7:** Rezultati BP testa

Ostale osobine reziduala kao što su očekivanje, standardna devijacija, koeficijenti asimetričnosti i spljoštenosti prikazani su u Tabeli 3.5.8.

	Reziduali
<b>Očekivanje</b>	0.00000
<b>Medijana</b>	0.00030
<b>Max</b>	0.051725
<b>Min</b>	-0.046206
<b>Standardna devijacija</b>	0.009523
<b>Koeficijent asimetrije</b>	-0.161630
<b>Koeficijent ekscesa</b>	5.543088
<b>Jarque-Bera</b>	423.6067
<b>p vrednost</b>	0.000000

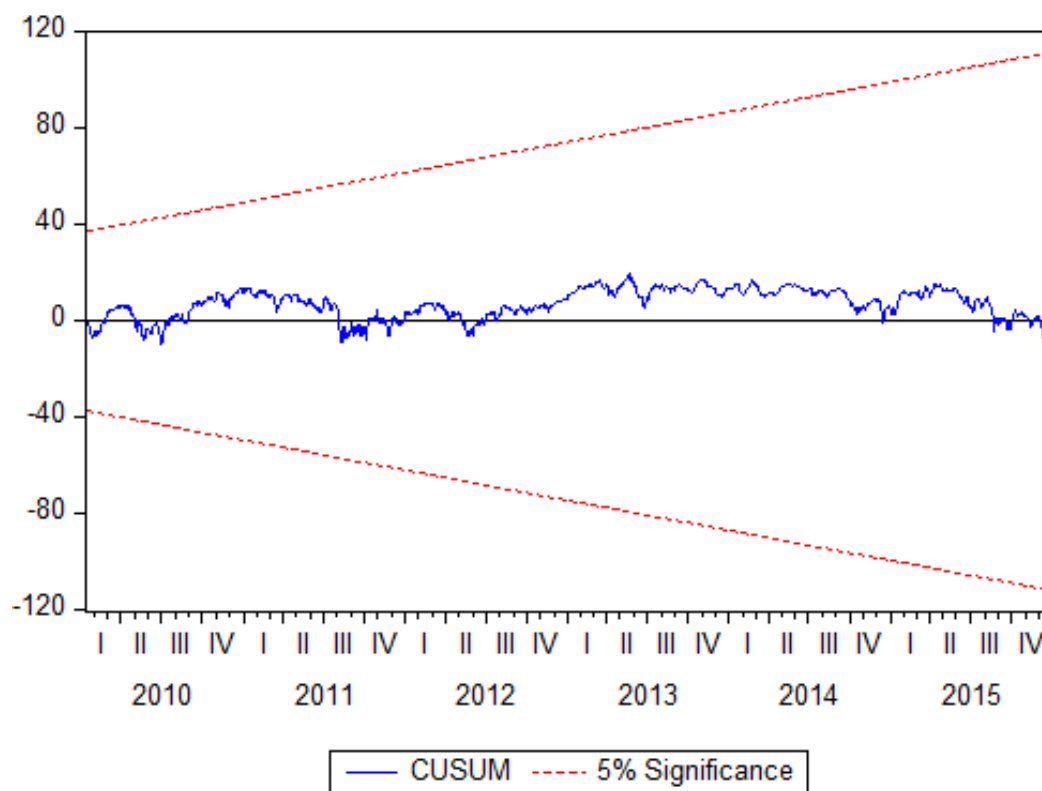
**Tabela 3.5.8:** Deskriptivna statistika za rezidualne VAR modela

Očekivana vrednost reziduala tj. odstupanja stvarne od fitovane vrednosti je nula. Standardna devijacija reziduala je približno nula što ukazuje da je odstupanje reziduala od njegove srednje vrednosti malo. Negativna vrednost koeficijenta asimetrije znači da je većina podataka manja od očekivane vrednosti, a koeficijent spljoštenosti ukazuje na postojanje debljih repova odnosno autlajera. Rezultat Jarque-Bera testa je da reziduali ne prate normalnu raspodelu jer se nulta hipoteza o normalnosti odbacuje na osnovu registrovane  $p$  vrednosti.

### 3.5.6 CUSUM test stabilnosti

Još jedan od ključnih pokazatelja da je ocenjeni model dobar jeste da je on stabilan. U ekonometriji šok predstavlja neku neočekivanu promenu u vremenskoj seriji koja može da dovede do velikih grešaka u predviđanju i uopšteno da dovede u pitanje valjanost ocenjenih koeficijenata modela. CUSUM testom stabilnosti se testira da li kumulativne sume reziduala osciluju oko nule za period za koji je model ocenjen. Ukoliko je odgovor potvrđan može da

se tvrdi da je model stabilan, a ukoliko nije, model je nestabilan. Nestabilnost modela ukazuje da su se negde pojavila velika odstupanja među rezidualima. Na Slici 3.5.1 plavom bojom je predstavljena kumulativna suma reziduala (vrednost CUSUM testa). Crvene isprekidane linije predstavljaju granice značajnosti od 5%. Ukoliko vrednosti CUSUM testa ostaju u granicama značajnosti zaključuje se da je model stabilan. U suprotnom je nestabilan.



**Slika 3.5.1:** CUSUM test

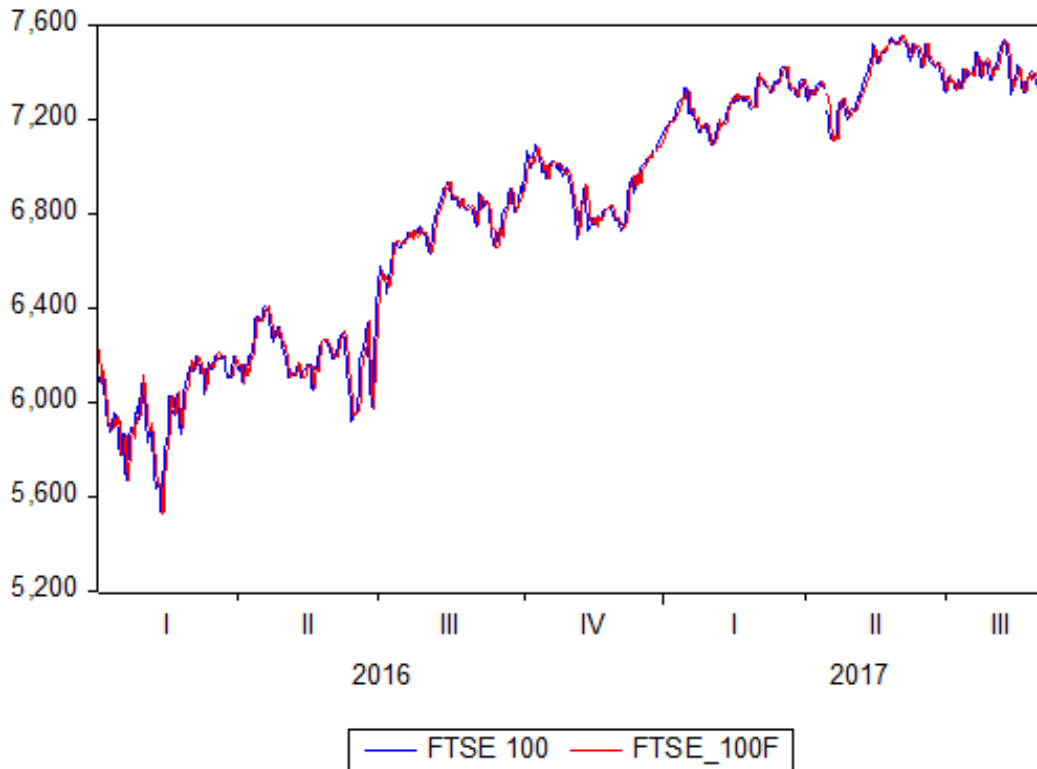
Sa slike se vidi da nije bilo nekih većih, neočekivanih promena u vrednostima reziduala. Vrednost CUSUM testa osciluje oko nule do kraja trećeg kvartala 2012. Nakon toga pa sve do kraja drugog kvartala 2015. vrednosti kumulativnih suma su pozitivne i odstupaju od nule, ali je to odstupanje malo, i do kraja 2015. ponovo osciluju oko nule. Takođe vrednosti testa ostaju u granicama značajnosti za ceo posmatrani period, što implicira da je model stabilan.

### 3.5.7 Formiranje i analiza prediktivnih vrednosti VAR modela

U prethodnim delovima pokazano je da su ocenjeni koeficijenti modela statistički značajni, da su reziduali međusobno nekorelisani, da osciluju oko nule i da nemaju nekih velikih odstupanja. Dakle, pokazane su sve karakteristike modela koji je pogodan za predviđanje budućih vrednosti serije, a u ovom primeru za predviđanje vrednosti britanskog berzanskog indeksa FTSE 100.

Na osnovu dobijenog VAR modela koji je ocenjen na serijama logaritamskih prinosa za potperiod od 4. januara 2010. do 31. decembra 2015. formirane su prediktivne vrednosti

za berzanski indeks FTSE 100 za potperiod od 4. januara 2016. do 31. avgusta 2017. na osnovnom nivou. Kretanje stvarnih i prediktivnih vrednosti dobijenih statičkom metodom predviđanja predstavljeno je na Slici 3.5.2. Plava boja predstavlja stvarne vrednosti indeksa, dok crvena boja predstavlja prediktivne vrednosti modela.



**Slika 3.5.2:** Stvarne i prediktivne vrednosti dobijene statičkom metodom za VAR model

U Tabeli 3.5.9 prikazane su greške predviđanja kako bi se bolje sagledala valjanost dobijenih predikcija. Prosečna apsolutna greška (MAE) je 40.27, što znači da se u proseku stvarna od prediktivne vrednosti razlikuje za 40.27, što je dosta malo odstupanje. Prosečno apsolutno procentualno odstupanje (MAPE) od stvarnih vrednosti je 0.61%. Tejlorov koficijent (U) je blizak nuli, procenat grešaka koji dolazi iz modela (BP) je 0.1% dok je procenat grešaka koji dolazi izvan modela 99% (CP).

	<b>VAR model</b>
<b>RMSE</b>	54.19176
<b>MAE</b>	40.27778
<b>MAPE</b>	0.613099
<b>U</b>	0.004031
<b>BP</b>	0.001600
<b>VP</b>	0.000039
<b>CP</b>	0.998365

**Tabela 3.5.9:** Greške predviđanja za VAR model

Rezultati u Tabeli 3.5.9 kao i Slika 3.5.2 ukazuju na to da su predikcije dobijene statičkom metodom dobro ispratile kretanje stvarnih vrednosti indeksa FTSE 100 za posmatrani period.

U Tabeli 3.5.10 su prikazani procenti predikcija koji su imali apsolutnu relativnu grešku manju od 1%, 2%, 3% i 3.5%. Ovde se jasno vidi da su sve predviđene vrednosti imale apsolutnu relativnu grešku manju od 3.5%, dok je čak 95% predikcija imalo grešku manju od 2%, a 82% je imalo grešku manju od 1%. Iz priloženih rezultata zaključuje se da među predikcijama nije bilo nekih značajnijih odstupanja od stvarnih vrednosti tokom posmatranog perioda, što se potvrđuje na Slici 3.5.3 na kojoj je prikazano kretanje stvarnih i prediktivnih vrednosti za januar i februar 2016.

Relativna greška	FTSE_100F
< 1%	82%
< 2%	95%
< 3%	99%
< 3.5%	100%

**Tabela 3.5.10:** Procenat predikcija čije su relativne greške manje od zadatih granica; VAR



**Slika 3.5.3:** Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za januar i februar 2016. za VAR model

Dinamičke predikcije su i ovde uspele da isprate stvarne vrednosti na kratak rok, dok su se na duži rok javila veća odstupanja. U Tabeli 3.5.11 prikazano je nekoliko dinamičkih predikcija indeksa FTSE 100 kao i njegove stvarne vrednosti.



	FTSE_100d	FTSE_100Fd
1/05/2016	6137.24	6057.946
1/06/2016	6073.38	6137.189
1/07/2016	5954.08	6044.117
1/08/2016	5912.44	5900.197
1/11/2016	5871.83	5889.824

**Tabela 3.5.11:** Primer dinamičkih prediktivnih vrednosti za VAR model

### 3.6 ARIMA i VAR model koji uključuju podatke nakon Bregzita

U prethodnom delu ocenjeni su modeli na serijama logaritamskih prinosa za potperiod od 4. januara 2010. do 31. decembra 2015. Ovi podaci nisu uključivali dešavanja koja su se dogodila nakon Bregzita ali su predikcije koje su pravljene obuhvatale i taj period. Dobijeni rezultati su pokazali da su prediktivne vrednosti za posmatrani period uspele da isprate kretanje stvarnih vrednosti indeksa bez nekih većih odstupanja. Ovo implicira takođe da je model uspeo da isprati fluktuacije koje su se dogodile nakon Bregzita.

U ovom delu napraviće se kratka analiza ARIMA i VAR modela koji će se oceniti na podacima od 4. januara 2010. do 30. juna 2016. Ovaj period obuhvatio je i dan kada je izglasano da Britanija izađe iz Evropske Unije kao i prve šokove koji su se dogodili nakon tog dana na svetskim i evropskim berzama. Cilj ovog dela je da se vidi kakvu će prediktivnu moć imati ovako ocenjeni modeli. Ovde će se takođe za ocenu modela koristiti serije logaritamskih prinosa i analiza modela će se vršiti istim koracima kao u prethodnom delu.

#### Kratka analiza ARIMA modela

Na osnovu AIC kriterijuma, model koji je najbolje ispratio kretanje indeksa FTSE 100 za posmatrani period je ARMA(3,4) ocenjen na seriji logaritamskih prinosa i dat je sledećom jednačinom:

$$DLF(t) = 0.0000928 + 0.497092DLF(t - 1) - 0.459513DLF(t - 2) + \\ + 0.762358DLF(t - 3) - 0.460883a_{t-1} + 0.416239a_{t-2} - 0.731840a_{t-3} - 0.106028a_{t-4}$$

Svi koeficijenti su statistički značajni jer su sve registrovane  $p$  vrednosti manje od 0.05. Koeficijent determinacije je i ovde nizak i iznosi 1.5%. Rezultati Ljung-Box Q statistike pokazuju da je ovako ocenjeni model adekvatan, odnosno ne postoji serijska korelisanost među rezidualima.

Kako ocenjeni model ima statistički značajne koeficijente i kako je adekvatan to implicira da se može koristiti za dobijanje budućih vrednosti indeksa FTSE 100. Predikcije su pravljene za period od 1. jula 2016. do 31. avgusta 2017. U Tabeli 3.6.1 su predstavljene greške predviđanja za posmatrani period. Prosečno apsolutno procentualno odstupanje (MAPE) je 0.48%, Tejlorov

koeficijent nejednakosti (U) je približno nula, dok su procenti grešaka koji dolaze iz modela (BP) i od uticaja spoljašnje sredine (CP) 1.28% i 98.26% redom. Ovde je procenat grešaka koji dolazi iz modela veći u odnosu na prethodni ARMA model, ali se može smatrati prihvatljivim. Dobijeni rezultati ukazuju na to da su prediktivne vrednosti dobro ispratile kretanje indeksa.

	<b>ARMA model</b>
<b>RMSE</b>	43.45588
<b>MAE</b>	34.06348
<b>MAPE</b>	0.480553
<b>U</b>	0.003045
<b>BP</b>	0.012811
<b>VP</b>	0.004566
<b>CP</b>	0.982623

**Tabela 3.6.1:** Greške predviđanja za ARMA(3,4) model

U Tabeli 3.6.2 je prikazan procenat predikcija koji ima apsolutno relativno odstupanje manje od zadatih granica. Iz tabele se vidi da sve predikcije imaju apsolutno relativno odstupanje manje od 3%, dok 99.6% ima odstupanje manje od 2% od stvarne vrednosti. Ovo su takođe dobri pokazatelji koji govore da nije bilo nekih neočekivanih velikih odstupanja za posmatrani period za koji su se pravile prediktivne vrednosti.

<b>Relativna greška</b>	<b>FTSE_100F</b>
< 1%	77%
< 2%	99%
< 3%	100%

**Tabela 3.6.2:** Procenat predikcija sa zadatim granicama relativnog odstupanja za ARMA(3,4)

## Kratka analiza VAR modela

Za ocenu modela koristiće se vrednosti serija logaritamskih prinosa za prethodna dva dana, što je dobijeno na osnovu AIC kriterijuma. Na osnovu Johansenovog testa kointegracije zaključeno je da ne postoji kointegracijska jednačina a na osnovu Grandžerovog testa kauzalnosti pokazano je da je i ovde jedino američki indeks koristan za formiranje prediktivnih vrednosti britanskog indeksa. Ocenjeni model dat je sledećom jednačinom:

$$DLF(t) = -0.0000147 - 0.188617DLF(t-1) - 0.079355DLF(t-2) + 0.364370DLDJ(t-1) + 0.069394DLDJ(t-2)$$

Svi koeficijenti su statistički značajni na nivou značajnosti 5% dok je koeficijent determinacije 6%. Registrovana  $p$  vrednost testa Lagranžovih množitelja (LM) je veća od 0.05, što znači da ne postoji serijska korelisanost među rezidualima. Kumulativna suma reziduala osciluje oko nule tokom posmatranog vremena, bez većih odstupanja, što implicira da je model stabilan.

Pokazane su sve poželjne osobine jednog modela, pa je naredni korak formiranje prediktivnih vrednosti. Period za koji se formiraju prediktivne vrednosti je takođe od 1. jula 2016. do 31. avgusta 2017. Na osnovu podataka u Tabeli 3.6.3 vidi se da prediktivne vrednosti imaju dobre osobine. Srednje apsolutno procentualno odstupanje od stvarne vrednosti je 0.46%. Procenat grešaka koji dolazi iz modela je 2% dok je procenat grešaka koji dolazi od spoljnih uticaja 99%.

	<b>VAR model</b>
<b>RMSE</b>	42.84262
<b>MAE</b>	32.75153
<b>MAPE</b>	0.462099
<b>U</b>	0.003002
<b>BP</b>	0.00200
<b>VP</b>	0.001143
<b>CP</b>	0.996751

**Tabela 3.6.3:** Greške predviđanja za VAR model

Iz Tabele 3.6.4 vidi se da 91% predikcija ima apsolutnu relativnu grešku manju od 1%, dok 99.3% ima odstupanje manje od 2% od stvarne vrednosti. I ovde je dobijeno da sve predikcije imaju apsolutno relativno odstupanje manje od 3%.

<b>Relativna greška</b>	<b>FTSE_100F</b>
< 1%	91.4%
< 2%	99.3%
< 3%	100%

**Tabela 3.6.4:** Procenat predikcija sa zadatim granicama relativnog odstupanja za VAR



# Zaključak

Proces donošenja investicione odluke često je povezan sa predviđanjem budućih vrednosti i analiziranjem istorijskih podataka vrednosti berzanskog indeksa kao glavnog pokazatelja stepena razvijenosti finansijskog tržišta. Ispitivanje međuzavisnosti finansijskih tržišta je od velikog interesa za investitore čiji je glavni cilj da diverzifikuju svoj portfolio.

Svrha ovog istraživanja je bila da se objasni u kojoj meri kretanje berzanskih indeksa posmatranih zemalja utiču na kretanje britanskog berzanskog indeksa. Takođe jedan od ciljeva je bio i da se ispita kakav će uticaj Bregzit imati na ocenjivanje ekonometrijskih modela, odnosno kako će ocenjivanje modela koji ne uključuju i koji uključuju podatke sa Bregzita imati uticaja na značajnost ocenjenih koeficijenata, stabilnost modela i njihove prediktivne vrednosti.

Rezultati statističkih testova u oba slučaja pokazali su da tržišta nisu međusobno kointegrirana kao i to da je na predviđanje budućih vrednosti britanskog berzanskog indeksa najveći uticaj imalo američko tržište. Na osnovu detaljno sprovedene analize zaključeno je da su oba modela imala sve poželjne karakteristike, a to su adekvatnost, stabilnost i statistički značajne koeficijente. Takođe na osnovu grešaka predviđanja zaključeno je da su oba modela imala dobru prediktivnu moć i da je najveći procenat grešaka dolazio od uticaja spoljnih faktora, odnosno izvan modela, a samo mali procenat je dolazio iz modela.

Dakle, uključivanje podataka prvih nekoliko dana nakon Bregzita u model nije donelo nikakve značajne promene u karakteristikama ocenjenog modela i njegovoj prediktivnoj moći u poređenju sa modelom koji nije uključivao te podatke. Stoga, može da se zaključi da Bregzit nije imao veliki uticaj na kretanje berzanskog indeksa FTSE 100 a razlog za to upravo leži u činjenici koja je već ranije iznesena, a to je da najveći deo prihoda kompanija ovog indeksa dolazi iz stranih zemalja.

Ekonometrijski modeli koji su korišćeni u ovom istraživanju su jednodimenzionalni ARIMA modeli i višedimenzionalni VAR modeli. Ranije je već rečeno da je, zbog povećane međuzavisnosti među svetskim i evropskim tržištima koja je nastala kao posledica globalizacije, mnogo realnije koristiti višedimenzionalne modele koji uključuju i uticaje drugih promenljivih.

Buduća istraživanja bi mogla da uključe neke nelinearne ekonometrijske modele. Problem heteroskedastičnosti bi mogao da se reši pomoću GARCH modela i njegovih modifikacija, koji bi ispratio kretanje volatilnosti tokom vremena. Takođe u model bi mogle da se uključe neke druge makroekonomske promenljive od kojih takođe zavisi kretanje cena akcija a samim tim i kretanje berzanskog indeksa.



# Bibliografija

- [1] Lončar Jelena, *Globalizacija-pojam, nastanak i trendovi razvoja*, Prirodno-matematički fakultet u Zagrebu, 2005;
- [2] Beogradska berza, Odeljenje Analize, *Free-float tržišna kapitalizacija*, Beograd, 2007;
- [3] Business insider, *World's Top 10 Countries by Market Cap*, 2016;  
dostupno na: [www.businessinsider.com/world-stock-market-capitalizations-2016-11](http://www.businessinsider.com/world-stock-market-capitalizations-2016-11)
- [4] Kapital Magazin, *Berzanski indeksi*, 2013;  
dostupno na: <https://www.kapitalmagazin.rs/berzanski-indeksi/>
- [5] Zoran Jeremić, *Finansijska tržišta i finansijski posrednici*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2012;
- [6] Investopedia, *Dow Jones Industrial Average - DJIA*;  
dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/d/dowdivisor.asp>
- [7] Investopedia, *CAC 40*;  
<https://www.investopedia.com/terms/c/cac40.asp>
- [8] Investopedia, *DAX*;  
dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/d/dax.asp>
- [9] Investopedia, *FTSE*;  
dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/f/ftse.asp>
- [10] Wikipedia, *Swiss Market Index*;  
dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Swiss\\_Market\\_Index](https://en.wikipedia.org/wiki/Swiss_Market_Index)
- [11] David Brett, *How currencies move stockmarkets*, 2017;
- [12] The Ontario Securities Commission, *Factors that can affect stock prices*, 2017;
- [13] Doug McIntyre, *Terrorism: How Wall Street Responds to Attacks*, 2015;  
dostupno na: <https://www.investopedia.com/articles/07/terrorism.asp>
- [14] BBC News, *UK credit rating downgraded by Moody's*, 2016;
- [15] U.S. Chamber of Commerce, *U.S.-UK Trade and Investment Ties*, 2017;  
dostupno na: <https://www.uschamber.com/international/europe/us-uk-business-council/us-uk-trade-and-investment-ties>

- [16] Wikipedia, the free encyclopedia, *United Kingdom–United States relations*;
- [17] Investopedia, *Brexit impact on the U.S.*, 2016;  
dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/b/brexit.asp>
- [18] Santander Trade Portal, *Switzerland: Foreign investment*, 2017;
- [19] Santander Trade Portal, *France: Foreign investment*, 2017;
- [20] Santander Trade Portal, *German: Foreign investment*, 2017;
- [21] Santander Trade Portal, *UK: Foreign investment*, 2017;
- [22] Santander Trade Portal, *USA: Foreign investment*, 2017;
- [23] TsayRS, *Analysis of Financial Time Series. 2<sup>th</sup>ed*, New Jersey, 2005;
- [24] Kovačić Z. J, *Analiza vremenskih serija*, Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet u Beogradu, 1995;
- [25] Maddala G.S. *Introduction to Econometrics 2<sup>th</sup>ed*. New York: Macmillan Publishing Company; 1992;
- [26] Rajter-Ćirić, Danijela, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2009;
- [27] Lozanov-Crvenković, Zagorka, *Statistika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu.
- [28] Charles Riley and Heather Long, *Biggest losers: 'Brexit' is already hitting these companies*, CNN Money, 2016;
- [29] Ivana Kottasova and Alanna Petroff, *This is Brexit: London and European stocks get crushed*, CNN Money, 2016;



## Kratka biografija



Tijana Trninić je rođena 5. februara 1993. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu “Prva vojvođanska brigada” završila je u Novom Sadu 2008. godine i dobitnik je “Vukove diplome”. Gimnaziju “Isidora Sekulić”, prirodno-matematički smer, završila je u Novom Sadu 2012. godine. Sve četiri godine je bila odličan učenik. Nakon toga, upisala je Prirodno-matematički fakultet, smer Primenjena matematika, modul Matematika finansija, gde je 2015. godine završila osnovne studije sa prosekom 8.71. Iste godine upisala je i master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija, zaključno sa julskim rokom 2017. godine i ostvarila je prosečnu ocenu 9,07. Tokom studiranja bila je član marketing tima Departmana za matematiku i informatiku i učestvovala je na Festivalima nauke u Beogradu i

Novom Sadu. Takođe je u 2017. godini bila na letnjoj praksi u Narodnoj banci Srbije u sektoru za finansijsku stabilnost gde je bila nagrađena preporukom Guvernera Narodne banke Srbije za rad koji je uradila tokom prakse.

Novi Sad, februar 2018.

Tijana Trninić

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*

**TD**

Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*

**TZ**

Vrsta rada: *master rad*

**VR**

Autor: *Tijana Trninić*

**AU**

Mentor: *docent dr Nataša Krklec Jerinkić*

**MN**

Naslov rada: *Predikcije i korelacije berzanskog indeksa FTSE 100*

**NR**

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*

**JP**

Jezik izvoda: *s/e*

**JI**

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*

**ZP**

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

**UGP**

Godina: *2018.*

**GO**

Izdavač: *autorski reprint*

**IZ**

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

**MA**

Fizički opis rada: *3 poglavlja, 54 strane, 29 lit. citata, 9 slika, 23 tabele*

**FO**

Naučna oblast: *matematika*

**NO**

Naučna disciplina: *primenjena matematika*

**ND**

Ključne reči: *globalizacija, finansijska tržišta, berzanski indeksi, kointegracija, kauzalnost, ARMA, VAR*

**PO**  
**UDK**

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu

**ČU**

Važna napomena:

**VN**

*Izvod: Cilj rada je da se ispita međuzavisnost finansijskih tržišta Velike Britanije, Amerike, Nemačke, Francuske, i Švajcarske. Koristiće se podaci sa berzi odabranih zemalja i formiraće se jednodimenzionalni i višedimenzionalni ekonometrijski modeli i predikcije za britanski berzanski indeks. Na osnovu raznih statističkih testova ispitaće se valjanost ocenjenih modela i dobijenih predikcija.*

**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 08.06.2017.

**DP**

Datum odbrane:

**DO**

Članovi komisije:

**KO**

Predsednik: *dr Nataša Krejić, redovni profesor*

Član: *dr Nataša Krklec Jerinkić, docent*

Član: *dr Dora Seleši, redovni profesor*

**UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: *monograph type*

**DT**

Type of record: *printed text*

**TR**

Contents code: *Master thesis*

**CC**

Author: *Tijana Trninić*

**AU**

Mentor: *Assist. Prof. Nataša Krklec Jerinkić, PhD*

**MN**

Title: *Predictions and Correlations of FTSE 100 stock market index*

**XI**

Language of text: *Serbian (latin)*

**LT**

Language of abstract: *s/e*

**LA**

Country of publication: *Republic of Serbia*

**CP**

Locality of publication: *Vojvodina*

**LP**

Publication year: *2018.*

**PY**

Publisher: *author's reprint*

**PU**

Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

**PP**

Physical description: *3 sections, 54 pages, 29 references, 9 figures , 23 tables*

**PD**

Scientific field: *mathematics*

**SF**

Scientific discipline: *applied mathematics*

**SD**

Key words: *globalisation, financial markets, stock market indices , cointegration, causality, ARMA, VAR*

**UC**

Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*

**HD**

Note:

**N**

*Abstract: The purpose of this paper is to investigate the interdependence between financial markets of Great Britain, America, Germany, France, and Switerland. Based on data from stock markets of selected countries we will create forecast model for british stock market index. For checking validity of model and obtained predictions we will use different statistical tests.*

**AB**

Accepted by the Scientific Board on: *08.06.2017.*

**ASB**

Defended:

**DE**

Thesis defend board:

**DB**

President: *Prof. Nataša Krejić, PhD*

Member: *Assist. Prof. Nataša Krklec Jerinkić, PhD*

Member: *Prof. Dora Seleši, PhD*