UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tamara Bandulaja

Primena stohastičkih modela u biologiji i ekologiji

Master rad

Mentor:
Prof. dr Danijela Rajter - Ćirić

Novi Sad, 2015

Sadržaj

Predgovor

Naučnici se u polju biologije i ekologije suočavaju sa dinamkom prirode, u smislu rasta populacije, širenje epidemija, promena na genima, promena u ćelijama i drugo. Kako je evolucija fenomena prirode nepredvidljiva, treba da primenjujemo matematičke modele koji nam omogućavaju uvid u tako kompleksne procese. Takvi matematički modeli su stohastički. Dakle, stohastički modeli uzimaju u obzir određen stepen slučajnosti i tako predviđaju ishod. Ovaj rad se bavi upravo takvim stohastičkim modelima, odnosno njihovom primenom u biologiji i ekologiji.

Rad se sastoji od četiri poglavlja i dodatka. Poglavlja obuhvataju baziČnu teoriju stohastičkih diferencijalnih jednačina i lanaca Markova, kao i njihovu primenu u različitim stohastičkim modelima u poljima biologije i ekologije.

U prvom poglavlju su prikazani osnovni pojmovi i definicije stohastičkih diferencijalnih jednačina i lanaca Markova, čime se obezbeđuje teoretska osnova za razumevanje naknadnih analiza.

U drugom poglavlju, na osnovu utvrđene teorije lanaca Markova, prikazujemo model u polju genetike i model rađanja i umiranja u populaciji. Spomenute modele ispitujemo kroz realne situacije. Takođe, bavimo se i primenom lanaca Markova u proučavanju dinamike bolesti.

U narednom, trećem poglavlju opisujemo Itôve procese u biologiji kroz primere. Zatim, uvodimo model u biologiji, koji prati ponašanje ćelije raka i efekte tretmana *in vivo*. Opisujemo primenu dinamičkog kontrasta poboljšanja slike i eksperiment koji se zasniva na praćenju kontrastnih sredstava, prethodno ubrizganih u pacijenta i snimanju medicinskih slika. Model obuhvata deterministički i stohastički deo, kao i poređenje njihovih rezultata. Potom, uvodimo Logistički model populacije, gde je veličina populacije predstavljena kao diskretna slučajna promenljiva. Obuhvaćen je deterministički model, koji ignoriše prirodne varijacije, kao i stohastički model koji uključuje prirodne varijacije u model kao nepredviđene situacije poput vremena ili fluktuacije u resursima.

U poslednjem, četvrtom poglavlju prikazujemo stohastički model predator - plen. Kao jedan od fundamentalnih modela u polju ekologije, predstavlja pouzdan alat za razumevanje problema ekologije, evolucije i ekosistema. Razmatramo interakciju predatora i plena u uslovima stohastičkog prikaza Lotka - Voltera modela. Istražujemo stohastičke procese rađanja i izumiranja populacije predatora i plena u interakciji. Zatim, uvodimo model interakcije dve populacije, koje mogu biti iste vrste. Populacije stupaju u interakciju u uslovima migracije, epidemije ili u vidu predatora - plena, ako su različite populacije. Na kraju, predstavljamo model interakcije dve populacije, koji uzima u obzir varijabilnost okoline.

Najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima Mariji i Bori, sestrama Marijani i Marini, ostatku porodice, kao i mom voljenom Mladenu, na bezuslovnoj podršci i razumevanju tokom celog školovanja, kao i na veri u mene i moj rad.

Takođe, hvala mojim prijateljima i hvala mojoj dragoj koleginici Ivani, zbog koje će mi studentski dani ostati u najlepšem sećanju.

Posebnu zahvalnost upućujem mojoj mentorki, dr Danijeli Rajter - Ćirić na nesebičnoj pomoći, za praktične i korisne savete, za usmeravanje i ideje pri izradi ovog rada. Takođe, zavhvaljujem se i članovima komisije dr Sanji Rapajić i dr Dori Seleši.

1

Osnove stohastičke analize

U ovom poglavlju navodimo neke pojmove stohastičke analize koji će nam trebati u daljem radu. Detaljnije ćemo se upoznati sa Markovskim procesima i stohastičkim diferencijalnim jednačinama, jer su one važne u modeliranju koje ćemo prikazati.

1.1 Uslovno očekivanje

Uslovnu verovatnoću događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B, definišemo kao

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},\ P(B) > 0.$$

Želimo da definišemo očekivanu vrednost slučajne promenljive X, ako se realizovao događaj B, tj. $E(X|B)$. Imajmo u vidu da događaj B, koji se realizovao možemo da posmatramo kao novi prostor verovatnoća, sa

$$\tilde{P} = \frac{P}{P(B)}.$$

Definicija 1.1.1. *Ako je $P(B) > 0$, onda je*

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP.$$

Postavlja se pitanje, kako da definišemo očekivanu vrednost slučajne promenljive X, ako je data slučajna promenljiva Y, tj. $E(X|Y)$?

Razmatranje počinjemo u slučaju da je Y prosta slučajna promenljiva. Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, \mathrm{P})$ prostor verovatnoća na kom je definisana prosta slučajna promenljiva Y, takva da je $Y = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, tj.

$$Y = \begin{cases} a_1, na\ A_1 \\ a_2, na\ A_2 \\ \vdots \\ a_m, na\ A_m \end{cases},$$

za različite realne brojeve $a_1, ..., a_m$ i A_1, A_2,...,A_m disjunktne događaje čija je unija baš Ω. Svaki događaj se realizuje sa pozitivnom verovatnoćom. Neka je X druga slučajna promenljiva definisana na Ω.
Poznavajući vrednosti $Y(\omega)$, možemo reći koji od događaja $A_1, A_2, ..., A_m$ sadrži ω. Dakle, naša najbolja procena za X jeste upravo srednja vrednost X na svakom odgovarajućem događaju, tj.

$$E(X|Y) := \begin{cases} \frac{1}{P(A_1)} \int_{A_1} X\, dP,\ na\ A_1 \\ \frac{1}{P(A_2)} \int_{A_2} X\, dP,\ na\ A_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{P(A_m)} \int_{A_m} X\, dP,\ na\ A_m \end{cases} = \begin{cases} E(X|A_1),\ na\ A_1 \\ E(X|A_2),\ na\ A_2 \\ \vdots \\ E(X|A_m),\ na\ A_m \end{cases}$$

Lema 1.1.1. *Neka je* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *Tada je*

$$\mathcal{U}(\mathbf{X}) := \{\mathbf{X}^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

σ *- algebra generisana slučajnom promenljivom* $\mathbf{X}$. *Ovo je najmanja pod-* σ *- algebra od* $\mathcal{U}$ *u odnosu na koju je* $\mathbf{X}$ *merljivo.*

Napomena 1. *Ako je slučajna promenljiva* $\mathbf{Y}$ *funkcija od* $\mathbf{X}$, *tj.* $\mathbf{Y} = \Phi(\mathbf{X})$, *za neku funkciju* Φ, *onda je* $\mathbf{Y}$ $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ *- merljivo. Obratno, ako je* $\mathbf{Y} : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{U}(\mathbf{X})$ *- merljivo, onda postoji funkcija* Φ *takva da važi* $\mathbf{Y} = \Phi(\mathbf{X})$.

Primetimo:

(1) $E(X|Y)$ je slučajna promenljiva, a ne konstanta;

(2) $E(X|Y)$ je $\mathcal{U}(Y)$ - merljivo.

Može se dokazati da je $\int_A X\, dP = \int_A E(X|Y)\, dP$, za svako $A \in \mathcal{U}(Y)$.

Definicija 1.1.2. *Neka je* Y *slučajna promenljiva. Tada je* $E(X|Y)$ $\mathcal{U}(Y)$*-merljiva slučajna promenljiva takva da*

$$\int_A X\, dP = \int_A E(X|Y)\, dP,$$

za svako $A \in \mathcal{U}(Y)$.

Uviđamo da vrednost Y nije toliko bitna, koliko σ - algebra koju generiše Y.

Definicija 1.1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, \mathrm{P})$ prostor verovatnoća. Pretpostavimo da je $\mathcal{V}$ σ - algebra, takva da $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ integrabilna slučajna promenljiva, onda definišemo $E(X|\mathcal{V})$ kao slučajnu promenljivu na Ω, takvu da je*

(1) $E(X|\mathcal{V})$ $\mathcal{V}$ *- merljivo,*

(2) $\int_A X\, dP = \int_A E(X|\mathcal{V})\, dP$, *za svako* $A \in \mathcal{V}$.

Napomena 2.

(1) $E(X|Y) = E(X|\mathcal{U}(Y))$;

(2) $E(E(X|\mathcal{V})) = E(X)$;

(3) $E(X) = E(X|\mathcal{W})$, *gde je* $\mathcal{W} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Teorema 1.1.1. *Neka je X integrabilna slučajna promenljiva. Tada za svaku σ - algebru $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, uslovno očekivanje $E(X|\mathcal{V})$ postoji i jedinstveno je do na $\mathcal{V}$ - merljive skupove verovatnoće nula.*

Teorema 1.1.2. (Osobine uslovnog očekivanja)

(1) Ako je X $\mathcal{V}$ - merljivo, onda je $E(X|\mathcal{V}) = X$ skoro sigurno;

(2) Ako su a, b konstante, onda je $E(aX + bY|\mathcal{V}) = aE(X|\mathcal{V}) + bE(Y|\mathcal{V})$ skoro sigurno;

(3) Ako je $\mathcal{V}$ - merljivo i XY je integrabilno, onda $E(XY|\mathcal{V}) = XE(Y|\mathcal{V})$ skoro sigurno;

(4) Ako je X nezavisno od $\mathcal{V}$, onda $E(X|\mathcal{V}) = E(X)$ skoro sigurno;

(5) Ako $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, onda $E(X|\mathcal{W}) = E(E(X|\mathcal{V})|\mathcal{W}) = E(E(X|\mathcal{W})|\mathcal{V})$ skoro sigurno;

(6) Ako je $X \leq Y$ skoro sigurno implicira $E(X|\mathcal{V}) \leq E(Y|\mathcal{V})$ skoro sigurno.

1.2 Martingali

Model martingala predstavlja takozvanu "fer" igru, gde događaji iz prošlosti ne pomažu da se predvidi očekivana vrednost budućih pobeda. Što znači da se vrednost martingala menja, ali njegovo očekivanje ostaje konstantno u toku vremena.

Definicija 1.2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathrm{P})$ *prostor verovatnoća. Filtracija* $\{U_t | t \in [0, T]\}$ *je familija* σ *- algebri tako da za sve* $0 \leq s \leq t \leq T$ *važi* $U_s \subset U_t \subset \mathcal{U}$. *Ako je* $T = [0, \infty)$, *onda je* $U_\infty = \sigma\{\bigcup U_t\}$.

Krenimo od pretpostavke da su $Y_1, Y_2, ...$ nezavisne realne slučajne promenljive sa $E(Y_i) = 0$, za $i = 1, 2, ...$ Neka je $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$. Ukoliko su nam date vrednosti $S_1, ..., S_n$, koju vrednost možemo da očekujemo za S_{n+k}? Na osnovu uslovnog očekivanja dolazimo i do odgovora:

$$\begin{aligned} E(S_{n+k}|S_1, ..., S_n) &= E(Y_1 + \cdots + Y_{n+k}|S_1, ..., S_n) \\ &+ E(Y_{n+1} + \cdots + Y_{n+k}|S_1, ..., S_n) \\ &= Y_1 + \cdots + Y_n + \underbrace{E(Y_{n+1} + \cdots + Y_{n+k})}_{=0} = S_n. \end{aligned}$$

Dakle, najbolja procena za buduću vrednost S_{n+k} je data istorijom do trenutka n, što je S_n. Pretpostavimo da nam je Y_i isplata u "fer" igri (klađenja) u trenutku t i S_n predstavlja totalni dobitak u trenutku n. Tada naša pređašnja jednakost znači da u bilo kom trenutku buduće očekivane pobede, u odnosu na pobede do sada, je trenutna količina para. Ono što imamo u sadašnjosti očekujemo da imamo i u budućnosti.

Definicija 1.2.2. *Neka je* $X_1, ..., X_n, ...$ *niz realnih slučajnih promenljivih, sa* $E(\mid X_i \mid) < \infty$, $i = 1, 2, ...$ *Ako je*

$$X_k = E(X_j | X_1, ..., X_k),$$

skoro svuda, za svako $j \geq k$, *onda se* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *naziva diskretni martingal.*

Definicija 1.2.3. *Neka je* $X(\cdot)$ *realni stohastički proces. Tada se*

$$\mathcal{U}(t) := \mathcal{U}(X(s), 0 \leq s \leq t),$$

σ *- algebra koja generiše slučajnu promenljivu* $X(s)$, *za* $0 \leq s \leq t$, *naziva istorija procesa do vremena* $t \geq 0$ *(uključujući i* t*).*

Definicija 1.2.4. *Neka je* $X(\cdot)$ *stohastički proces, takav da* $E(\mid X(t) \mid) < \infty$, *za svako* $t \geq 0$. *Ako je*

$$X(s) = E(X(t)|\mathcal{U}(s)),$$

skoro sigurno, za svako $0 \leq s \leq t$, *onda se* $X(\cdot)$ *naziva martingal.*

Definicija 1.2.5. *Neka je $X(\cdot)$ stohastički proces i neka je $E(\mid X(t) \mid) < \infty$, za svako $t \geq 0$. Ako je*

$$X(s) \leq E(X(t)|\mathcal{U}(s)),$$

skoro sigurno, za svako $0 \leq s \leq t$, onda se $X(\cdot)$ naziva submartingal.

Teorema 1.2.1. (Nejednakost diskretnih martingala)

(1) Ako je $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ submartingal, onda važi:

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_n^+),$$

za svako $n = 1, 2, ...$ i $\lambda > 0$.

(2) Ako je $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ martingal i $1 \leq p \leq \infty$, onda važi:

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n} \mid X_k \mid^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(\mid X_n \mid^p),$$

za svako $n = 1, 2...$

Teorema 1.2.2. (Nejednakost martingala)
Neka je $X(\cdot)$ stohastički proces sa neprekidnim uzoračkim putem skoro svuda.

(1) Ako je $X(\cdot)$ submartingal, onda je

$$P\left(\max_{1\leq s\leq t} X(s) \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X(t)^+),$$

za svako $\lambda > 0$ i $t \geq 0$.

(2) Ako je $X(\cdot)$ martingal i $1 \leq p \leq \infty$, onda je

$$E\left(\max_{1\leq s\leq t} \mid X(s) \mid^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(\mid X(t) \mid^p).$$

1.3 Lanci Markova

1.3.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.3.1. *Stohastički proces $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ u diskretnim vremenskim trenucima ima Markovsko svojstvo, ako:*

$$P\{X_n = i_n|X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}\},$$

za $i_k \in 1, 2, ..., k = 0, 1, ..., n$. Tada se stohastički proces naziva lanac Markova.

Dakle, Markovsko svojstvo opisuje osobinu Markovskih procesa da verovatnoća da se sistem nađe u nekom stanju u budućnosti zavisi samo od stanja u sadašnjem trenutku, a ne od stanja sistema u prošlosti.

Definicija 1.3.2. *Verovatnoća prelaza iz i - tog stanja u trenutku n u j - to stanje u trenutku $n+1$ za $i, j = 1, 2, ...$ u jednom koraku se definiše kao*

$$p_{ji}(n) = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}.$$

Definicija 1.3.3. *Ako verovatnoća prelaza $p_{ji}(n)$ u lancu Markova ne zavisi od trenutka n, onda kažemo da je lanac Markova homogen. U suprotnom je nehomogen.*

Ukoliko nije naglašeno drugačije, pretpostavićemo da je lanac Markova homogen.

Verovatnoća prelaza u jednom koraku zadovoljava uslov da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ji} = 1,$$

za $i = 1, 2, ...$ i $p_{ji} \geq 0$. Što znači da sa verovatnoćom jedan, proces u stanju i se mora pomeriti u neko drugo stanje j, $j \neq i$ ili će ostati u istom stanju i i u narednom vremenskom trenutku.

Definicija 1.3.4. *Matrica prelaza verovatnoća prelaza u jednom koraku u lancu Markova se definiše kao:*

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{22} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Ako je skup stanja konačan $(1, 2, ..., N)$, onda je matrica prelaza P veličine $N \times N$. Primetimo da je suma elemenata kolone $\sum_{j=1}^{N} p_{ji} = 1$.

Definicija 1.3.5. *Nenegativna matrica, u kojoj su sume elemenata kolone jednake jedan, se naziva stohastičkom matricom.*

Definicija 1.3.6. *Verovatnoća prelaza u n koraka u oznaci $p_{ji}^{(n)}$ je verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j u n koraka:*

$$p_{ji}^{(n)} = P\{X_n = j | X_0 = i\}.$$

Matrica prelaza u n koraka je oblika $P^{(n)} = \left(p_{ji}^{(n)}\right)$. U slučaju kada je $n = 1$ onda je $p_{ji}^{(1)} = p_{ji}$, i $P^{(1)} = P$. Kada je $n = 0$ onda je

$$p_{ji}^{(0)} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, \ j = i, \\ 0, \ j \neq i, \end{cases}$$

gde δ_{ji} predstavlja Kronekerov delta simbol i $P^{(0)} = I$, gde je I jedinična matrica.

Veza koja postoji između verovatnoće prelaza u n koraka, verovatnoće prelaza u s koraka i verovatnoće prelaza u $(n-s)$ koraka je poznata kao Čelmen - Kolmogorova jednačina:

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}^{(n-s)} p_{ki}^{(s)}, \ \ 0 < s < n.$$

Za dokaz se pozivamo na [6]:

$$\begin{aligned} p_{ji}^{(n)} &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X_n = j, X_s = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X_n = j | X_s = k, X_0 = i\} P\{X_s = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X_n = j | X_s = k\} P\{X_s = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}^{(n-s)} p_{ki}^{s}. \end{aligned}$$

Čelmen - Kolmogorova jednačina u matričnom obliku:

$$P^{(n)} = P^{(n-s)} P^{(s)}.$$

Kako je $P^{(1)} = P$, te je i $P^{(2)} = P^2$, tj. u opštem slučaju $P^{(n)} = P^n$.

Neka je sada $p(n)$ vektor, takav da je $p(n) = (p_1(n, p_2(n)), ...)^T$, gde je $p_i(n) = P\{X_n = i\}$, stanja su raspoređena po rastućem redosledu u vektoru i zadovoljeno je $\sum_{i=1}^{\infty} p_i(n) = 1$. Tada važi

$$p_i(n+1) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} p_j(n).$$

U matričnom obliku je

$$p(n+1) = Pp(n),$$

ili uopšteno

$$p(n+m) = P^{(n+m)}p(0) = P^n(P^m p(0)) = P^n p(m).$$

1.3.2 Klasifikacija stanja lanaca Markova

Definicija 1.3.7. *U stanje j se može stići iz stanja i, ako važi $p_{ji}^{(n)} > 0$, za $n \geq 0$ u oznaci $i \to j$. Ako se iz stanja j može stići u stanje i, $j \to i$ i iz stanja i se može stići u stanje j, $i \to j$, onda kažemo da su stanja i i j iste klase, tj. da stanja i i j međusobno komuniciraju, u oznaci $i \leftrightarrow j$.*

Iz toga zaključujemo da postoje nenegativni celi brojevi n i n' takvi da $p_{ji}^{(n)} > 0$ i $p_{ij}^{(n')} > 0$, i da relacija $i \leftrightarrow j$ predstavlja relaciju ekvivalencije na skupu stanja $\{1, 2, ...\}$. Nećemo navoditi dokaz, i pretpostavićemo da su zadovoljene relacije simetrije, tranzitivnosti i refleksivnosti [7].

Definicija 1.3.8. *Relacija ekvivalencije stanja u lancu Markova se definiše kao skup klasa ekvivalencije.*

Definicija 1.3.9. *Skup klasa ekvivalencije u lancu Markova se definiše kao klase lanca Markova.*

Definicija 1.3.10. *Ako postoji samo jedna klasa lanca Markova, onda kažemo da je lanac Markova nesvodljiv, ali ako postoji više od jedne klase, onda je lanac Markova svodljiv.*

Definicija 1.3.11. *Skup stanja D je zatvoren, ako neko stanje van skupa D ne može stići do nekog stanja u skupu D u jednom koraku: $p_{ji} = 0$ ako $i \in D$ i $j \notin D$.*

Definicija 1.3.12. *Neka je $\{0, 1, ..., N\}$ skup stanja. Kažemo da je stanje apsorbujuće, ako vazi $p_{jj} = 1$, $j = 0, ..., N$.*

Model slučajnog hoda

Slučajan hod je termin koji se koristi u matematici (spomenuli smo ga kod Braunovog procesa), da bi opisao put koji se sastoji od niza nasumičnih koraka. Na primer, putanja molekula kroz tečnost ili gas, put kojim životinje tragaju za hranom ili čak kretanje cena na berzi. Neka je $\{0, \pm1, \pm2, ...\}$ skup stanja lanca Markova. Kažemo da je taj skup stanja slučajan hod, pri čemu stanja nisu apsorbujuća, ako za neko $p > 0$, gde je p verovatnoća kretanja udesno i za neko $q > 0$, gde je q verovatnoća kretanja ulevo, $p + q = 1$ važi:

$$p_{i,i+1} = q$$

i

$$p_{i+1,i} = p,$$

za $i \in \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

Definicija 1.3.13. *Period stanja i u oznaci $d(i)$, je najveći zajednički delilac svih $n \geq 1$, za koje $p_{ii}^{(n)} > 0$, tj.*

$$d(i) := nzd\{n | p_{ii}^{(n)} > 0 \; i \; n \geq 1\}.$$

Definicija 1.3.14.

(1) Ako je $d(i) > 1$ period stanja i, onda kažemo da je taj period periodičan;

(2) Ako je $d(i) = 1$ period stanja i, onda kažemo da je taj period aperiodičan;

(3) Ako je $p_{ii}^{(n)} = 0$, za svako $n \geq 1$, onda je $d(i) = 0$.

Teorema 1.3.1. *Ako $i \leftrightarrow j$, onda je $d(i) = d(j)$.*

Dokaz.
Slučaj kada je $d(i) = 0$ nećemo pokazati, jer je trivijalno.

- Pokažimo da je $d(i) \geq d(j)$. Pretpostavimo da je $d(i) \geq 1$. Neka je $p_{ii}^{(s)} > 0$, za neko $s > 0$. Tada $d(i)$ deli s. Kako je $i \leftrightarrow j$, postoje m i n, takvi da su $p_{ij}^{(m)} > 0$ i $p_{ji}^{(n)} > 0$. Tada

  $$p_{jj}^{(n+s+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(m)} > 0.$$

  Pošto važi i $p_{ii}^{(2s)} > 0$, $p_{jj}^{(n+2s+m)} > 0$, onda znamo da $d(j)$ deli $(n+s+m)$ i $(n+2s+m)$, pa mora deliti i $(n+2s+m)-(n+s+m) = s$. Dakle, za proizvoljno s sledi $d(i) \geq d(j)$.

- Pretpostavimo da je $p_{jj}^{(t)} > 0$, za neko $t > 0$, tada na analogan način dolazimo do $d(i) \leq d(j)$.

Tada dolazimo do $d(i) = d(j)$.

Povratna i prolazna stanja

Definicija 1.3.15. *Neka je $f_{ii}^{(n)}$ verovatnoća da sistem prvi put dođe u stanje i u trenutku n, $n \geq 1$, ako je u početnom trenutku bio u stanju i, tj.*

$$f_{ii}^{(n)} = P\{X_n = i, X_m \neq i, m = 1, 2, ..., n-1 | X_0 = i\}.$$

Verovatnoća $f_{ii}^{(n)}$ se naziva verovatnoća prvog povratka i označava prvi put kada se lanac Markova vrati u stanje i,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \leq 1.$$

Definišimo $f_{ii}^{(0)} = 0$, i primetimo da je $f_{ii}^{(1)} = p_{ii}$. Međutim u opštem slučaju $f_{ii}^{(n)} \neq p_{ii}^{(n)}$.

Definicija 1.3.16. *:*

(1) Stanje i je povratno, ako

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1,$$

(2) Stanje i je prolazno, ako

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1.$$

Dakle, stanje je povratno ako je verovatnoća da se sistem iz stanja i barem jednom vrati u stanje i, u suprotnom je stanje prolazno.

Ako je stanje i povratno, onda skup $\{f_{ii}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ definiše verovatnoću raspodele za slučajnu promenljivu koja predstavlja prvi trenutak vraćanja

$$T_{ii} = \inf_{m \geq 1} \{m | X_m = i \; i \; X_0 = i\},$$

pri čemu je $T_{ii} = n$ sa verovatnoćom $f_{ii}^{(n),}$ $n = 0, 1, ...$

Ako je stanje i prolazno, onda skup $\{f_{ii}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ ne definiše ceo skup verovatnoća koje su neophodne za definisanje verovatnoće raspodele. Međutim, možemo definisati verovatnoću nevraćanja u stanje i, kao $1 - f_{ii}$. Onda slučajnu promenljivu T_{ii} možemo posmatrati kao "vreme čekanja", dok se lanac ne vrati u stanje i.

Definicija 1.3.17. *Očekivanje raspodele se naziva i očekivanje prvog trenutka vraćanja za stanje i u oznaci* $\mu_{ii} = E(T_{ii})$*, tj. za povratno stanje i:*

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}.$$

Kako T_{ii} nije definisano za prolazno stanje, pretpostavićemo da je očekivanje uvek beskonačno.

Definicija 1.3.18. *Ako povratno stanje i zadovoljava* $\mu_{ii} < \infty$*, onda kažemo da je stanje i pozitivno povratno, a ukoliko zadovoljava* $\mu_{ii} = \infty$*, onda je stanje nula povratno.*

Definicija 1.3.19. *Neka je* $f_{ji}^{(n)}$ *verovatnoća da sistem prvi put dođe u stanje j, u trenutku n,* $n \geq 1$*, ako je u početnom trenutku bio u stanju i,* $j \neq i$*, tj.*

$$f_{ji}^{(n)} = P\{X_n = j, X_m \neq j, m = 1, 2, ..., n-1 | X_0 = i\},\ j \neq i.$$

Verovatnoća $f_{ji}^{(n)}$ se naziva verovatnoća prvog prolaza,

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} \leq 1.$$

Definišemo $f_{ji}^{(0)} = 0$ i takođe, u opštem slučaju $f_{ji}^{(n)} \neq p_{ji}^{(n)}$.

Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} = 1$, onda sa $\{f_{ji}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ definišemo verovatnoću raspodele slučajne promenljive T_{ji}, gde je

$$T_{ji} = \inf_{m \geq 1} \{m | X_m = j; X_0 = i\}.$$

Definicija 1.3.20. *Ako je* $X_0 = i$*, onda se očekivanje prvog trenutka prolaza u stanje j, u oznaci* $\mu_{ji} = E(T_{ji})$ *definiše kao*

$$\mu_{ji} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ji}^{(n)},\ j \neq i.$$

Konvergencija

Teorema 1.3.2. *Stanje i je povratno (prolazno) ako i samo ako* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ *divergira (konvergira), tj.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty (< \infty).$$

Posledica 1.3.1. *Pretpostavimo da je $i \leftrightarrow j$. Stanje i je povratno (prolazno) ako i samo ako je stanje j povratno (prolazno).*

Dokaz. Pretpostavimo da je $i \leftrightarrow j$ i da je stanje i povratno. Tada postoje $m, n \geq 1$, takvi da $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} < 0$. Neka je k pozitivan ceo broj, takav da

$$p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

Tada je

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} = p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)}.$$

Desna strana će divergirati zato što smo pretpostavili da je i povratno stanje (na osnovu prethodne teoreme). Logično, i $\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)}$ divergira, pa je i stanje j povratno. Dokaz je analogan, kada je i prolazno stanje.

Posledica 1.3.2. *Svaka klasa povratnih stanja u lancu Markova je zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je D klasa povratnih stanja. Pretpostavimo da nije zatvoren skup. Tada će neko stanje $i \in D$ i stanje $j \notin D$, $p_{ji} > 0$. Kada $j \notin D$, stanje j ne može da se vrati u skup D, jer bi u suprotnom $i \leftrightarrow j$. Počevši od stanja i, verovatnoća da se ne vrati u D je najmanje p_{ji} ili $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \geq 1 - p_{ji} < 1$, što je u kontradikciji da je i povratno stanje. Zato D mora biti zatvoren skup.

Teorema 1.3.3. *Neka je lanac Markova povratan, aperiodičan i nesvodljiv. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}},$$

gde je μ_{ii} očekivanje trenutka vraćanja za stanje i, definisano u Definiciji 1.3.17. pri čemu su i i j bilo koja stanja u lancu. Ako $\mu_{ii} = \infty$, onda $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

Teorema 1.3.4. *Neka je lanac Markova povratan, d - periodičan i nesvodljiv. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}},$$

i $p_{ii}^{(m)} = 0$, ako m nije višestrukost od d, $d \geq 1$ i μ_{ii} očekivanje trenutka vraćanja za stanje i, definisano u Definiciji 1.3.17. Ako $\mu_{ii} = \infty$, onda $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$.

Definicija 1.3.21. *Stanje je ergodično, ako je i aperiodično i pozitivno povratno. Lanac Markova je ergodičan, ako je aperiodičan, pozitivno povratan i nesvodljiv.*

Kada je cela klasa stanja ili ako je lanac ergodičan, onda kažemo da su jako ergodični. Ako je ergodična klasa stanja ili ako je lanac nula povratan, onda kažemo da su slabo ergodični.

1.3.3 Stacionarnost

Definicija 1.3.22. *Lanac Markova sa skupom stanja* $\{1, 2, ...\}$ *ima stacionarnu raspodelu, ako postoji nenegativan vektor* $\pi = (\pi_1, \pi_2, ...)^T$, *koji zadovoljava* $P\pi = \pi$, *pri čemu je* $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$.

Stacionarna raspodela predstavlja ekvilibrijum lanca Markova, što znači da raspodela verovatnoća ostaje fiksirana u toku vremena, tj. ako $p(0) = \pi$, onda je $p(n) = P^{(n)}\pi = \pi$, za svako n.

Teorema 1.3.5. *Pretpostavimo da je diskretni lanac Markova nesvodljiv, pozitivno povratan i aperiodičan (jako ergodičan), sa skupom stanja* $\{1, 2, ...\}$ *i da je* P *matrica prelaza. Tada postoji jedinstvena stacionarna raspodela* $\pi = (\pi_1, \pi_2, ...)^T$, $P\pi = \pi$, *takva da* $\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = \pi_i$, *za* $i, j = 1, 2, ...$

Teorema daje dovoljan i potreban uslov za egzistenciju i jedinstvenost. Za matricu prelaza važi

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_1 & \pi_1 & \cdots \\ \pi_2 & \pi_2 & \pi_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Odnosno, $\lim_{n\to\infty} P^n p(0) = \pi$.

1.3.4 Lanac Markova sa konačnim skupom stanja

Lema 1.3.1. *Ako je* j *prolazno stanje, a* i *je proizvoljno stanje u lancu Markova sa konačnim skupom stanja, onda je*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = 0.$$

Teorema 1.3.6. *U lancu Markova sa konačnim skupom stanja, ne mogu sva stanja biti prolazna, ali sva stanja jesu pozitivno povratna.*

U odeljku stacionarnosti smo naveli Definiciju 1.3.22. koja važi i za lance Markova sa konačnim skupom stanja, gde je vektor $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)^T$ i $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$. π je desni svojstven vektor matrice prelaza P, odnosno nenula vektor koji zadovoljava $P\pi = \lambda\pi$, gde je $\lambda = 1$ svojstvena vrednost. Postoji najviše N linearnio nezavisnih svojstvenih vektora koji zadovoljavaju $\lambda = 1$, u suprotnom lanac Markova ne bi bio jedinstven.

Teorema 1.3.7. *Pretpostavimo da je lanac Markova sa konačnim skupom stanja aperiodičan i nesvodljiv. Tada postoji jedinstvena stacionarna raspodela $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)^T$, takva da*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_i, \ i, j = 1, 2, ..., N.$$

Metode za racunanje matrice prelaza u n koraka:

(1) Neka lanac Markova ima konačan skup stanja i neka je P^n kvadratna matrica prelaza u n koraka. Tada možemo izvesti opšti oblik matrice prelaza na osnovu teorije iz linearne algebre. P je oblika $P = UCU^{-1}$, gde je C dijagonalna matrica[1] i U je nesingularna matrica[2] ako i samo ako je matrica P dijagonalizabilna, a dijagonalizabilna je ako i samo ako ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Odnosno, u našem slučaju $P^n = UC^nU^{-1}$. Pretpostavićemo da P ima N svojstvenih vrednosti $\lambda_1, ..., \lambda_N$, da je x_j desni svojstveni vektor koji odgovara λ_j i da je y_j levi svojstveni vektor: $Px_j = \lambda_j x_j$ i $y_j^T P = \lambda_j y_j^T$. Definišimo kvadratne matrice $H := (x_1, ..., x_N)$ čije su kolone desni svojstveni vektori i $K := (y_1, ..., y_N)$ čije su kolone levi svojstveni vektori. Primetimo da su matrice H i K nesingularne matrice, jer su im vektori linearno nezavisni. Te ih možemo zapisati u obliku $PH = HC$ i $K^T P = CK^T$, za $C = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)$. Sada je $P = HCH^{-1}$ ili $P = (K^T)^{-1}CK^T$. Kada su $U = H$ ili $U = (K^T)^{-1}$ dobijamo $P = UCU^{-1}$. Matrica prelaza u n koraka zadovoljava $P^n = HC^nH^{-1}$ i $P^n = (K^T)^{-1}C^nK^T$.

(2) Neka važe iste pretpostavke kao u (1). Primetimo da je

$$y_j^T P x_i = y_j^T \lambda_i x_i = y_j^T \lambda_j x_i.$$

Ako je $\lambda_i \neq \lambda_j$, onda je $y_j^T x_i = 0$, levi i desni svojstveni vektori su ortogonalni. Pretpostavimo da su svojstveni vektori linearno zavisni i

[1]Dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nula $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

[2]Kvadratna matrica A je nesingularna matrica, ako postoji kvadratna matrica B, takva da je $AB = BA = I$, gde je I jedinčna matrica.

pretpostavimo da su izabrani y_j i x_j ortonormalni:

$$y_j^T x_i = \begin{cases} 0, \ i \neq j \\ 1, \ i = j. \end{cases}$$

Tada $K^T H = I$ ili $K^T = H^{-1}$, te je

$$\begin{aligned} P &= HCH^{-1} = HCK^T \\ &= (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_N)(y_1, ..., y_N)^T \\ &= \lambda_1 x_1 y_1^T + \cdots + \lambda_N x_N y_N^T \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i y_i^T \end{aligned}$$

Kako je matrica $x_i y_i^T x_j y_j^T$ nula matrica za $i \neq j$, onda je $\sum_{i=1}^{N} x_i y_i^T = HK^T = I$. U opštem slučaju $P^n = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^n x_i y_i^T$.

Obe metode daju isti izraz matrice P^n.

1.4 Braunovo kretanje (Vinerov proces)

Jedan od važnijih stohastičkih procesa jeste Braunovo kretanje, koji je dobio ime po škotskom botaničaru Robertu Braun, koji je posmatrao nepravilno kretanje čestica polena u vodi.

Precizna matematička formulacija je data tek kasnije od strane Noberta Viner. Zato se često se naziva i Vinerov proces.

Prvo što su matematičari spazili jesu svojstva haotičnog kretanja:

(a) putanja jedne čestice je nepravilna i nema tangentu ni u jednoj tački,

(b) kretanje koje opisuje dve ili više čestice deluje nezavisno.

Slučajan hod : Posmatrajmo kretanje čestice na sledeći način : neka se pomeranja vrše na levo ili na desno prelazeći rastojanje Δx, sa verovatnoćama $\frac{1}{2}$. Neka $X(t)$ predstavlja poziciju čestice u trenutku $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, ...$ Definišimo sada

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

gde je X_i nezavisna slučajna promenljiva, takva da

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = \frac{1}{2} \\ P(X_i = 0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

za $i = 1, 2, ...$ Tada su $E(X_i) = \frac{1}{2}$ i $V(X_i) = \frac{1}{4}$.
S_n predstavlja broj pomeraja u desno do vremena $t = n\Delta t$. Sada je

$$X(t) = S_n\Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = (2S_n - n)\Delta x.$$

Primetimo

$$\begin{aligned} V(X(t)) &= (\Delta x)^2 V(2S_n - n) \\ &= (\Delta x)^2 4V(S_n) \\ &= (\Delta x)^2 4nV(X_i) \\ &= (\Delta x)^2 n \\ &= \frac{(\Delta n)^2}{\Delta t} t. \end{aligned}$$

Neka nam je sad $D = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$, D je pozitivna konstanta. Tada

$$X(t) = (2S_n - n)\Delta x = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right)\sqrt{n}\Delta x = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right)\sqrt{tD}.$$

Na osnovu Moavr - Laplasove teoreme sledi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(a \leq X(t) \leq b) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{\sqrt{tD}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leq \frac{b}{\sqrt{tD}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{tD}}}^{\frac{b}{\sqrt{tD}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dx. \end{aligned}$$

Dakle, položaj čestice ima normalnu raspodelu $X(t) : N(0, Dt)$.

Za $D = 1$, defisaćemo takozvano standardizovano Braunovo kretanje.

Definicija 1.4.1. *Stohastički proces $W(\cdot)$ se naziva Braunovo kretanje ili Vinerov proces, ako :*

(1) $W(0) = 0$,

(2) $W(t) - W(s) : N(0, t - s)$, *za svako* $t \geq s \geq 0$,

(3) za svako $0 < t_1 < \cdots t_n$, *slučajne promenljive* $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$,... $W(t_n) - W(t_{n-1})$ *su nezavisne.*

Zapazimo da $E(W(t)) = 0$ i $V(W(t)) = t$, što znači da je Vinerov proces Gausov proces[3].

Neka je $W(\cdot)$ Braunovo kretanje. Kako $W(t) : N(0,t)$, onda za svako $t > 0$ i $a \leq b$,

$$P(a \leq W(t) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx.$$

Pretpostavimo da su $0 < t_1 < \cdots < t_n$, i da su $a_i \leq b_i$, $i = 1, ..., n$ realni brojevi. Zanima nas šta će biti zajednička verovatnoća, odnosno verovatnoća čija trajektorija Braunovog kretanja uzima vrednosti između a_i i b_i u vremenu t_i, za svako $i = 1, ..., n$

$$P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1, \cdots, a_2 \leq W(t_2) \leq b_2)?$$

Znamo da je

$$P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}}\, dx_1,$$

za dato $W(t_1) = x_1$, $a_1 \leq x_1 \leq b_1$. Tada proces ima normalnu raspodelu $N(x_1, t_2 - t_1)$ na $[t_1, t_2]$ intervalu. Istom logikom bi verovatnoća da je $a_2 \leq W(t_2) \leq b_2$ bila jednaka

$$\int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{|x_2 - x_1|^2}{2(t_2 - t_1)}}\, dx_2.$$

Na osnovu toga je

$$P((a_1 \leq W(t_1) \leq b_1, a_2 \leq W(t_2) \leq b_2) =$$
$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} g(x_1, t_1|0) g(x_2 t_2 - t_1|x_1)\, dx_2 dx_1,$$

za

$$g(x, t|y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

U opštem slučaju

$$(*) \quad P((a_1 \leq W(t_1) \leq b_1, \cdots, a_n \leq W(t_n) \leq b_n) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1})\, dx_n ... dx_n.$$

[3]Stohastički proces X se naziva Gausov proces, ako za svaki konačan skup $t_1, ..., t_k$, vektor slučajnih promenljivih $(X(t_1), ..., X(t_k))$ ima k - dimenzionalnu normalnu raspodelu.

Teorema 1.4.1. *Neka je $W(\cdot)$ jednodimenzionalno Braunovo kretanje. Tada za svako pozitivno n, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ i funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ važi*

$$\begin{aligned} E(f(W(t_1), ..., W(t_n))) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) g(x_1, t_1|0) \\ & \quad g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1})\, dx_n ... dx_1. \end{aligned}$$

Za izbor

$$f(x_1, ..., x_n) = \chi_{[a_1,b_1]}(x_1) \cdots \chi_{[a_n,b_n]}(x_n)$$

dobijamo upravo $(*)$.

Dokaz. Neka su $X_i := W(t_i)$ i $Y_i := X_i - X_{i-1}$, za svako $i = 1, 2, ..., n$. Definišimo

$$h(y_1, ..., y_n) := f(y_1, y_1 + y_2, ..., y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Tada je za nezavisne slučajne promenljive $Y_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$, za svako $i = 1, ..., n$ i svako $Y_i : N(0, t_i - t_{i-1})$

$$\begin{aligned} E(f(W(t_1), ..., W(t_n))) &= E(h(Y_1, ..., Y_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, ..., y_n) g(y_1, t_1|0) \\ & \quad g(y_2, t_2 - t_1|0) \cdots g(y_n, t_n - t_{n-1}|0)\, dy_n ... dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) g(y_1, t_1|0) \\ & \quad g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1})\, dx_n ... dx_1, \end{aligned}$$

pri čemu su $y_i = x_i - x_{i-1}$, za $i = 1, ..., n$, $x_0 = 0$, a Jakobijan za ovu smenu promenljivih je jednak jedan.

Teorema 1.4.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, \mathrm{P})$ prostor verovatnoće na kom je definisano prebrojivo mnogo nezavisnih slučajnih promenljivih $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ sa $N(0, 1)$ raspodelom. Tada postoji jednodimenzionalno Braunovo kretanje $W(\cdot)$ definisano za svako $\omega \in \Omega$ i $t \leq 0$.*

Lema 1.4.1. *Pretpostavimo da je $W(\cdot)$ jednodimenzionalno Braunovo kretanje. Tada je autokovarijansna funkcija data sa:*

$$E(W(t)W(s)) = t \wedge s = min\{s, t\},$$

za svako $t \geq 0$ i $s \geq 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $t \geq s \geq 0$. Tada na osnovu nezavisnosti $W(t) - W(s)$ od $W(s)$ i $W(s) : N(0, s)$ sledi

$$\begin{aligned} E(W(t)W(s)) &= E((W(s) + W(t) - W(s))W(s)) \\ &= E(W^2(s)) + E((W(t) - W(s))W(s)) \\ &= s + \underbrace{E(W(t) - W(s))}_{=0}\underbrace{E(W(s))}_{=0} \\ &= s = s \wedge t. \end{aligned}$$

Definicija 1.4.2. *$\mathbb{R}^n$ vrednosni stohastički proces $W(\cdot) = (W^1(\cdot), ..., W^n(\cdot))$ je n - dimenzionalno Braunovo kretanje (ili n - dimenzionalni Vinerov proces), ako :*

(1) za svako $k = 1, 2, ..., n$ $W^k(\cdot)$ je jednodimenzionalni Vinerov proces,

(2) σ - algebre $\mathcal{W}^k := \mathcal{U}(W^k(t)|t \geq 0)$ su nezavisne, za $k = 1, ..., n$.

Na osnovu ova dva uslova, dobijamo prostor verovatnoća sa n nezavisnih jednodimenzionalnih Vinerovih procesa $W^k(\cdot)$, $k = 1, ..., n$. Tada je $W(\cdot) = (W^1(\cdot), ..., W^n(\cdot))$ n - dimenzionalno Braunovo kretanje.

Lema 1.4.2. *Ako je $W(\cdot)$ n - dimenzionalno Braunovo kretanje i ako je δ_{kl} za $k, l = 1, ..., n$ Kronekerova delta funkcija, onda:*

(1) $E(W^k(t)W^l(s)) = (t \wedge s)\delta_{kl}$, $k, l = 1, 2, ..., n$,

(2) $E((W^k(t) - W^k(s))(W^l(t) - W^l(s))) = (t - s)\delta_{kl}$, $k, j = 1, ...n$, $t \geq s \geq 0$.

Teorema 1.4.3.

(1) Ako je $W(\cdot)$ n - dimenzionalno Braunovo kretanje, onda $W(t)$ ima normalnu raspodelu $N(0, tI)$ za svako $t > 0$. Tada je

$$P(W(t) \in A) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \, dx,$$

za svaki Borelov podskup $A \in \mathbb{R}^n$;

(2) Za svako $m = 1, 2, ...$ i svaku funkciju $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned} E(f(W(t_1), ..., W(t_m))) &= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_m) g(x_1, t_1|0) \\ & \quad g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \cdots g(x_m, t_m - t_{m-1}|x_{m-1}) \\ & \quad dx_m ... dx_1, \end{aligned}$$

gde je

$$g(x,t|y) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}.$$

1.5 Beli šum

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fiksirano. Posmatrajmo običnu diferencijalnu jednačinu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{b}(x(t))\ (t > 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

za dato $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ($x(t)$ je stanje sistema u vremenu $t \geq 0$, $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$). Rešenje te ODJ je trajektorija $x(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$.

Međutim, sistemi koji su modelirani sa ODJ ne mogu da predvide ponašanja trajektorija. Dakle, treba da modifikujemo ODJ tako da uključimo verovatnoću slučajnih efekata koji utiču na sistem. Tada dolazimo do :

$$(*) \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\xi(t)\ (t > 0) \\ \mathbf{X}(0) = x_0 \end{cases},$$

za $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{n\times m}$, gde se $\xi(\cdot)$ naziva beli šum. U slučaju kada je $m = n$, $x_0 = 0$, $\mathbf{b} \equiv 0$ i $\mathbf{B} \equiv I$, onda je rešenje $(*)$ n - dimenzionalno Braunovo kretanje $W(\cdot)$, odnosno $\dot{W}(\cdot) = \xi(\cdot)$.

Zašto se $\dot{W}(t) = \xi(t)$ naziva beli šum?
Pre nego što odgovorimo na to pitanje, navedimo neke korisne definicije.

Ako je $X(\cdot)$ bilo koji realni stohastički proces sa $E(X^2(t)) < \infty$, za svako $t \geq 0$, onda je

$$r(t,s) := E(X(t)X(s)),\ t,s \geq 0,$$

autokorelaciona funkcija od $X(\cdot)$.

Definicija 1.5.1. *Ako je $r(t,s) = c(t-s)$, za neko $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $E(X(t)) = E(X(s))$, za svako $t,s \geq 0$, onda je stohastički proces $X(\cdot)$ stacionaran u širem smislu.*

Beli šum je po definiciji Gausov proces (Gausov beli šum) i stacionaran u širem smislu, sa $c(\cdot) = \delta_0$, gde je δ Dirakova delta distribucija.

Definicija 1.5.2. *Spektralna gustina stohastičkog procesa $X(\cdot)$ se definiše na sledeći način:*

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}c(t)\,dt,\ za\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Primetimo da važi:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \delta_0 \, dt = \frac{1}{2\pi}, \; za\ svako\ \lambda.$$

To znači da je spektar gustine belog šuma $\xi(\cdot)$ konstantan, odnosno nepromenljiv. Otuda i naziv "beli". Po analogiji bela svetlost je sačinjena od različitih boja (frekvencija) svetlosti koje su kombinovane zajedno. Možemo zaključiti da beli šum proizvodi u isto vreme kombinaciju zvukova, od kojih svaki ima različitu frekvenciju. Kombinacija tih zvukova se čuje kao buka, tj. šum.

Međutim, kako su Gausovi beli šumovi $\xi(t)$ i $\xi(s)$ međusobno nekorelisani za $t \neq s$, a i nezavisni sa beskonačnom disperzijom, onda kao takvi ne postoje kao klasični stohastički procesi, već se oni posmatraju kao takozvani uopšteni procesi. Primena ovog procesa je pogodna matematička apstrakcija, koja opisuje pojave koje se menjaju sa prelaskom iz jednog u drugo stanje.

1.6 Stohastička integracija

Posmatrajmo sledeću jednakost:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s)\, d\mathbf{W}, \text{za svako}\ t \geq 0.$$

$\mathbf{X}_0$ je slučajna promenljiva koja je nezavisna od Braunovog kretanja (može biti neka konstanta). Prvi integral na desnoj strani se može rešiti kao običan integral, ali kako da rešimo drugi integral? Braunovo kretanje nije nigde diferencijabilno, pa kakav smisao ima ovaj integral? Dakle, naš cilj je da definišemo integral oblika $\int_o^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$, za što širu klasu stohastičkih procesa $\mathbf{G}$, tako da desna strana jednačine ima smisla.

1.6.1 Definicija Pejli - Viner - Zigmunda

Pejli, Viner i Zigmund su 1959. godine definisali stohastički integral, koji se zasniva na parcijalnoj integraciji. Dobijen integral je usaglašen sa Itovim integralom, kada su oba integrala definisana.

Definicija 1.6.1. (Pejli - Viner - Zigmund)
Pretpostavimo da je $g : [0,1] \to$ neprekidno diferencijabilna funkcija, takva da je $g(0) = g(1) = 0$. Tada je

$$\int_0^1 g\, dW := -\int_0^1 g' W\, dt.$$

Primetimo da je g obična deterministička funkcija, a ne stohastički proces i da je $\int_0^1 g\,dW$ slučajna promenljiva.

Lema 1.6.1. (Osobine Pejli - Viner - Zigmund integrala)

(1) $E\big(\int_0^1 g\,dW\big) = 0$;

(2) $E\Big(\big(\int_0^1 g\,dW\big)^2\Big) = \int_0^1 g^2\,dt.$

Dokaz.

(1) $E\big(\int_0^1 g\,dW\big) = -\int_0^1 g' \underbrace{E(W(t))}_{=0}\,dt.$

(2)

$$\begin{aligned}
E\Big(\big(\int_0^1 g\,dW\big)^2\Big) &= E\Big(\int_0^1 g'(t)W(t)\,dt \int_0^1 g'(s)W(s)\,ds\Big)\\
&= \int_0^1\int_0^1 g'(t)g'(s)\underbrace{E(W(t)W(s))}_{=t\wedge s}\,dsdt\\
&= \int_0^1 g'(t)\Big(\int_0^t sg'(s)\,ds + \int_t^1 tg'(s)\,ds\Big)\,dt\\
&= \int_0^1 g'(t)\Big(tg(t) - \int_0^t g\,ds - tg(t)\Big)\,dt\\
&= \int_0^1 g'(t)\Big(-\int_0^t g\,ds\Big)\,dt = \int_0^1 g^2\,dt.
\end{aligned}$$

1.6.2 Definicija stohastičkih integrala pomoću Rimanovih suma

Da bi nastavili dalje sa izučavanjem integrala oblika $\int_0^T W\,dW$, $(G = W)$ gde je $W(\cdot)$ jednodimenzionalno Braunovo kretanje, uvešćemo pojam Rimanovih suma.
Želimo da konstruišemo aproksimaciju pomoću Rimanovih suma.

Definicija 1.6.2.

(1) Posmatramo interval $[0, T]$. *Particija* P *intervala* $[0, T]$ *je konačna kolekcija tačaka* $[0, T]$*:*

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\};$$

(2) Maksimalno rastojanje za particiju P je

$$| P | := \max_{0 \le k \le m-1} | t_{k+1} - t_k |;$$

(3) Za fiksirano $0 \le \lambda \le 1$ i datu particiju P intervala $[0, T]$ definišemo

$$\tau_k := (1 - \lambda) t_k + \lambda t_{k+1},$$

$k = 0, ..., m - 1;$

(4) Za takvu particiju P i za $0 \le \lambda \le 1$, definišemo Rimanovu sumu

$$R = R(P, \lambda) := \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)(W(\tau_{k+1}) - W(\tau_k)).$$

Ovako definisana Rimanova suma je dobra aproksimacija za integral

$$\int_0^T W dW.$$

Međutim, šta se dešava kada $| P | \to 0$, za λ fiksirano?

Sa $L^2(0, T)$ ćemo označiti prostor svih realnih kvadratno - integrabilnih funkcija definisanih na $(0, T)$.

Lema 1.6.2. *Ako je $P^n = \{0 = t_0^n < t_1^{n < \cdots < t_m^n = T}\}$ particija intervala $[0, T]$, $n \in \mathbb{N}$ i $0 \le \lambda \le 1$ je fiksirano, onda definišemo*

$$R^n := \sum_{k=0}^{m_n - 1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)).$$

Tada je

$$lim_{n \to \infty} R^n = \frac{W(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T,$$

za limes iz L^2 prostora, odnosno

$$E\left(\left(R^n - \frac{W(T)^2}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T\right)^2\right) \to 0.$$

Limes aproksimacije Rimanovih suma zavisi od izbora deobnih tačaka $t_k^n \le \tau_k^n \le t_{k+1}^n$, što znači da ne možemo jedinstveno definisati stohastički integral $\int_0^T W \, dW$.

PRIMER 1. *Za $\lambda = 0$ dobijamo Itôvu definiciju integrala*

$$\int_0^T W\,dW = \frac{W(T)^2}{2} - \frac{T}{2}.$$

PRIMER 2. *Za $\lambda = \frac{1}{2}$ dobijamo Stratonovičevu definiciju integrala*

$$\int_0^T W\,dW = \frac{W(T)^2}{2}.$$

1.6.3 Itôv stohastički integral

Neka je $W(\cdot)$ jednodimenzionalno Braunovo kretanje definisano na nekom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{U}, \mathrm{P})$.

Definicija 1.6.3. *σ - algebra*

$$\mathcal{W}(t) := \mathcal{U}(W(s)|0 \le s \le t)$$

se naziva istorija Braunovog kretanja do trenutka t, uključujući i t.

Definicija 1.6.4. *σ - algebra*

$$\mathcal{W}^+(t) := \mathcal{U}(W(s) - W(t)|s \ge t)$$

se naziva budućnost Braunovog kretanja posle trenutka t.

Definicija 1.6.5. *Familija $\mathcal{F}(\cdot)$ σ - algebri $\subseteq \mathcal{U}$ se naziva neanticipirajuća ako:*

(1) $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$, za svako $t \ge s \ge 0$,

(2) $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t)$, za svako $t \ge 0$,

(3) $\mathcal{F}$ je nezavisno od $\mathcal{W}^+(t)$, za svako $t \ge 0$.

$\mathcal{F}$ ćemo definisati kao:

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{U}(W(s), X_0),$$

$0 \le s \le t$, gde je X_0 je slučajna promenljiva nezavisna od $\mathcal{W}^+(0)$, a $\mathcal{F}$ sadrži sve dostupne informacije u vremenu t.

Definicija 1.6.6. *Stohastički proces $G(\cdot)$ se naziva neanticipirajući proces (uzimajući u obzir $\mathcal{F}(\cdot)$) ako je za svako $t \ge 0$, $G(t)$ $\mathcal{F}$ - merljivo.*

Znači da za svako $t \geq 0$ slučajna promenljiva $G(t)$ zavisi samo od dostupnih informacija σ - algebre $\mathcal{F}(t)$.

Definicija 1.6.7. *Kažemo da je proces $G(\cdot)$ progresivno merljiljiv, ako je neanticipirajuć i zajednički merljivo (i po t i po ω).*

Definicija 1.6.8. *Sa $\mathbb{L}^2(0,T)$ označavamo prostor svih realno, progresivno merljivih stohastičkih prostora $G(\cdot)$ tako da*

$$E\bigg(\int_0^T G^2\,dt\bigg) < \infty.$$

Definicija 1.6.9. *Sa $\mathbb{L}^1(0,T)$ označavamo prostor svih realno, progresivno merljivih procesa $F(\cdot)$ tako da*

$$E\bigg(\int_0^T \mid F \mid dt\bigg) < \infty.$$

Najpre ćemo dati definiciju Itovog stohastičkog integrala za takozvane step procese.

Definicija 1.6.10. *Proces $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ se naziva step proces, ako postoji particija $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$, tako da $G(t) \equiv G_k$, za $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, ..., m-1$.*

Tada je slučajna promenljiva G_k $\mathcal{F}(t_k)$ - merljiva, pošto je G neanticipirajuće.

Definicija 1.6.11. *Neka je $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ step proces. Itôv stohastički integral od G na intervalu $[0,T]$ je dat sa:*

$$\int_0^T G\,dW := \sum_{k=0}^{m-1} G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

Lema 1.6.3. (Osobine Itôvog integrala step procesa)
Za sve konstante $a, b \in \mathbb{R}$ i za svaki step proces $G, H \in \mathbb{L}^2$ važi:

(1)

$$\int_0^T (aG + bH)\,dW = a\int_0^T G\,dW + b\int_0^T H\,dW,$$

(2)

$$E\bigg(\int_0^T G\,dW\bigg) = 0,$$

(3)

$$E\bigg(\Big(\int_0^T G\,dW\Big)^2\bigg) = E\Big(\int_0^T G^2\,dt\Big).$$

Svaki progresivno merljiv stohastički proces se može aproksimirati nizom step procesa, što će nam pomoći da uvedemo definiciju stohastičkih integrala u opštem slučaju.

Lema 1.6.4. (Aproksimacija pomoću step procesa)
Ako je $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$, onda postoji niz $\{G^n\}$ ograničenih step procesa $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$, takvih da

$$E\Big(\int_0^T \mid G - G^n \mid^2\ dt\Big) \to 0\; n \to \infty.$$

Lema 1.6.5. *Ako je $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ i G^n step proces (opisan u prethodnoj lemi), onda*

$$E\bigg(\Big(\int_0^T (G^n - G^m)\,dW\Big)^2\bigg) = E\Big(\int_0^T (G^n - G^m)^2\,dt\Big) \to 0,\ n \to \infty.$$

Definicija 1.6.12. *Neka je $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ i $\{G^n\}$ niz ograničenih step procesa koji aproksimira G u smislu Leme 1.6.4. Tada definišemo Itôv stohastički integral procesa G kao*

$$\int_0^T G\,dW := \lim_{n\to\infty} \int_0^T G^n\,dW$$

i limes sa desne strane postoji u L^2.

Teorema 1.6.1. (Osobine Itôvog integrala)
Za sve konstante $a, b \in \mathbb{R}$ i za svako $G, H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ važi:

(1)

$$\int_0^T (aG + bH)\,dW = a\int_0^T G\,dW + b\int_0^T H\,dW,$$

(2)

$$E\Big(\int_0^T G\,dW\Big) = 0,$$

(3)

$$E\bigg(\Big(\int_0^T G\,dW\Big)^2\bigg) = E\Big(\int_0^T G^2\,dt\Big).$$

(4)
$$E\Big(\int_0^T G\,dW \int_0^T H\,dW\Big) = E\Big(\int_0^T GH\,dt\Big).$$

1.6.4 Itôva formula

Definicija 1.6.13. *Neka je $X(\cdot)$ realan stohastički proces koji zadovoljava:*

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F\,dt + \int_s^r G\,dW,$$

za neko $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ i za sve $0 \le s \le r \le T$. Tada kažemo da $X(\cdot)$ ima stohastički diferencijal

$$dX = F\,dt + G\,dW,$$

za $0 \le t \le T$.

Napomena 3. *Diferencijalni simboli su samo skraćenica za izraz integrala.*

Teorema 1.6.2. (Itôva formula)
Neka $X(\cdot)$ ima stohastički diferencijal

$$dX = F\,dt + G\,dW,$$

za $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Pretpostavimo da je funkcija $u : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ neprekidna i sa postoje neprekidni parcijalni izvodi $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Neka je

$$Y(t) := u(X(t), t).$$

Tada proces Y ima stohastički diferencijal dat sa:

$$\begin{aligned}(2)\; dY &= \frac{\partial u}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}\,dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2\,dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2\right)dt + \frac{\partial u}{\partial x}G\,dW.\end{aligned}$$

Izraz (2) znači da za svako $0 \le s \le r \le T$,

$$\begin{aligned}Y(r) - Y(s) &= u(X(r), r) - u(X(s), s) \\ &= \int_s^r \left(\frac{\partial u}{\partial t}(X,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(X,t)F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X,t)G^2\right)dt \\ &+ \int_s^r \frac{\partial u}{\partial x}(X,t)G\,dW.\end{aligned}$$

Kako za $X(t) = X(0) + \int_0^t F\,ds + \int_0^t G\,dW$, $X(\cdot)$ ima neprekidnu trajektoriju skoro sigurno, onda za skoro svako ω, funkcije $t \to \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X(t),t)$ su neprekidne, te su integrali pod (2) dobro definisani.

Lema 1.6.6. (Dva jednostavna stohastička diferencijala)

(1) $d(W^2) = 2W\,dW + dt$;

(2) $d(tW) = W\,dt + t\,dW$.

Teorema 1.6.3. (Itôvo pravilo proizvoda)
Pretpostavimo da nam je dato:

$$\begin{cases} dX_1 = F_1\,dt + G_1\,dW \\ dX_2 = F_2\,dt + G_2\,dW \end{cases},$$

za $0 \le t \le T$, $F_1, F_2 \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G_1, G_2 \in \mathbb{L}^2(0,T)$. *Tada proizvod deinišemo na sledeći način*

$$d(X_1X_2) = X_2\,dX_1 + X_1\,dX_2 + G_1G_2\,dt.$$

Definicija 1.6.14. *Ako je* $X(\cdot) = (X^1(\cdot), ..., X^n\cdot) \in \mathbb{R}^n$ *stohastički proces, takav da*

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F\,dt + \int_s^r G\,dW,$$

za neko $F \in \mathbb{L}^1_n(0,T,)$ $G \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$, *i za svako* $0 \le s \le r \le T$, *onda kažemo da* $X(\cdot)$ *ima stohastički diferencijal*

$$dX = F\,dt + G\,dW.$$

Odnosno,

$$dX^i = F^i\,dt + \sum_{j=1}^m G^{i,j}\,dW^j,$$

za svako $i = 1, ..., n$.

Teorema 1.6.4. (Itôva formula za n dimenzija)
Pretpostavimo da je $dX = F\,dt + G\,dW$ *kao iz prethodne definicije. Neka je* $u : \mathbb{R}^n \times [0,T]$ *neprekidna sa neprekidnim parcijalnim izvodima* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1, ..., n$. *Tada je Itôva formula za n dimenzija definisana na sledeći način:*

$$d(u(X(t),t)) = \frac{\partial u}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{l=1}^m G^{il}G^{jl}\,dt,$$

gde je $(X(t),t)$ *argument parcijalnih izvoda funkcije* u.

1.7 Stohastičke diferencijalne jednačine

Začetak istorije stohastičkih diferencijalnih jednačina nas vraća u 1827. godinu, kada je škotski botaničar Robert Braun definisao "Braunovo kretanje", posmatrajući nepravilno kretanje polenovih čestica u kapi vode. 1905. godine Albert Ajnštajn je povezao Braunovo kretanje sa difuznim jednačinama, odnosno prezentovao vezu između mikroskopskih nepravilnih pokreta čestica i difuznih jednačina. To je kasnije rezultiralo dokazivanjem postojanja atoma. Nakon toga, 1920. godine, Nobert Viner je dao matematičku formulaciju haotičnog kretanja na osnovu Braunovog kretanja, zvanu "Vinerov proces". Potom je 1942. godine, Kijoši Ito rekonstruisao koncept stohastičkih integrala i kreirao teoriju stohasticckih diferencijalnih jednačina, koje opisuju kretanje usled slučajnih događaja.

Stohastičke diferencijalne jednačine su veoma značajne, jer uključuju slučajan uticaj sredine u modele. Zbog toga imaju veliku primenu u modeliranju realnih fenomena u poljima fizike, mehanike, biologije, ekologije i drugih oblasti.

Prirodno proširenje modela običnih diferencijalnih jednačina je upravo model stohastičkih diferencijalnih jednačina, u kojima su parametri modelirani kao slučajni procesi u odgovarajućoj formi ili je uzeta u obzir buka (šum), tj. njen uticaj na sistem jednačina. Koristićemo i Braunovo kretanje, što dovodi do sistema sa determinističkim i stohastičkim delom:

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\, d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases},$$

gde je $\mathbf{X}$ stohastički proces koji nije deterministička funkcija i $\mathbf{W}$ Vinerov proces, i kako nigde nije diferencijabilan, treba da objasnimo na šta se diferencijalno odnosi. Prisetimo se da je $\dot{W}(t) = \xi(t)$, gde je $\xi(t)$ beli šum, definisan kao Gausov proces za svako fiksirano t i $E(\xi(t), \xi(s)) = 0$ ako $t \neq s$.

Funkcija $\mathbf{b}$ se naziva drift koeficijent ili deterministička komponenta, a $\mathbf{B}$ koeficijent difuzije ili stohastička komponenta (sistem buke), i mogu biti nelinearni.

Definicija 1.7.1. *Ako su* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{B}$ *nezavisni od* t*, onda je proces vremenski homogen.*

1.7.1 Definicija, egzistencija i jedinstvenost rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina

Sad kad smo uveli i definisali sve potrebne termine za uopštenje stohastičkih diferencijalnih jednačina, možemo da se baziramo na njihovo izučavanje.

Neka je $\mathbf{W}(\cdot)$ m - dimenzionalno Braunovo kretanje i neka je X_0 n - dimenzionalna slučajna promenljiva, nezavisna od $\mathbf{W}(\cdot)$. Neka je od sada

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{U}(\mathbf{X_0}, \mathbf{W}(\mathbf{s})),$$

$0 \leq s \leq t$, σ - algebra generisana $\mathbf{X_0}$ i neka je istorija Braunovog kretanja sve do t (ukljucujući i t.)

Pretpostavimo da je $T > 0$ dato i da su date funkcije

$$\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$$

i

$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to M^{n\times m}.$$

Bitno je naglasiti da ovo nisu slučajne promenljive.

Definicija 1.7.2. *Kažemo da je realni stohastički proces* $\mathbf{X}(\cdot)$ *rešenje Itôve stohastičke diferencijalne jednačine*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\,dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\,d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases},$$

za $0 \leq t \leq T$, *ako:*

(1) $\mathbf{X}(\cdot)$ *je progresivno merljiv stohastički proces na* $\mathcal{F}(\cdot)$,

(2) $\mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}^1_n(0, T)$,

(3) $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$,

(4) $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s)\,ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s)\,d\mathbf{W}$, *za svako* $0 \leq t \leq T$.

Da bismo utvrdili kada postoji rešenje ovako definisanih stohastičkih diferencijalnih jednačina i da li je to rešenje jedinstveno, krenućemo od ispitivanja jednodimenzionalnih stohastičkih diferencijalnih jednačina.
Pretpostavimo da je $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iz klase C^1, takvo da je $| b' | \leq L$, za neku konstantu L. Hoćemo da rešimo jednodimenzionalnu stohastičku diferencijalnu jednačinu :

$$(*) \begin{cases} dX = b(X)\,dt + dW \\ X(0) = x, x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

koju možemo interpretirati i na sledeći način :

$$X(t) = x + \int_0^t b(X)\, ds + W(t),$$

za $t \geq 0$. Rešenje ćemo konstruisati na osnovu metode sukcesivne aproksimacije. Neka je $X^0(t) \equiv x$, i neka je

$$X^{n+1}(t) := x + \int_0^t b(X^n)\, ds + W(t),$$

za $t \geq 0$ i $n = 0, 1, ...$ Definišimo i

$$D^n(t) := \max_{0 \leq s \leq t} \mid X^{n+1}(s) - X^n(s) \mid,$$

$n = 0, 1, ...$ Primetimo da za datu trajektoriju Braunovog kretanja, imamo:

$$D^0(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s b(x)\, dr + W(s) \right| \leq C,$$

za svako $0 \leq t \leq T$ i C zavisi od ω. Sada možemo da tvrdimo da je:

$$D^n(t) \leq C \frac{L^n}{n!} t^n,$$

za $n = 0, 1, ...$ i $0 \leq t \leq T$.

$$\begin{aligned}
D^n(t) &= \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \Big(b(X^n(r)) - b(X^{n-1}(r)) \Big)\, dr \right| \\
&\leq L \int_0^t D^{n-1}(s)\, ds \\
&\leq L \int_0^t C \frac{L^{n-1} s^{n-1}}{(n-1)!}\, ds \text{ (na osnovu indukcije)} \\
&= C \frac{L^n t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Za $m \geq n$ imamo

$$\max_{0 \leq t \leq T} \mid X^m(t) - X^n(t) \mid \leq C \sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^k T^k}{k!} \to 0,\ n \to \infty.$$

Za skoro svako ω, $X^n(\cdot)$ uniformno konvergira, za $0 \leq t \leq T$ ka granici procesa $X(\cdot)$, što je i rešenje $(*)$.

Sledeće što želimo da ispitamo je rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina smenom promenljivih.
Neka je data jednodimenzionalna stohastička diferencijalna jednačina oblika:

$$(**) \begin{cases} dX = b(X)\,dt + \sigma\,dW \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Posvetimo se prvo rešavanju ovog oblika:

$$(***) \begin{cases} dY = f(Y)\,dt + dW \\ Y(0) = y, \end{cases}$$

za neku funkciju f koju ćemo naknadno definisati (izabrati) i nađimo funkciju u, takvu da zadovoljava $X := u(Y)$ i koja će biti rešenje $(**)$. Primetimo da oblik $(***)$ možemo rešiti malopređašnjom metodom za oblik $(*)$. Ako pretpostavimo da su nam poznate funkcije f i u, onda možemo iskoristiti Itôvu formulu kao

$$\begin{aligned} dX &= u'(Y)\,dY + \frac{1}{2}u''(Y)\,dt \\ &= \left[u'f + \frac{1}{2}u''\right] dt + u'\,dW. \end{aligned}$$

Znači da je $X(\cdot)$ rešenje $(**)$ pod uslovom da

$$\begin{cases} u'(Y) = \sigma(X) = \sigma(u(Y)), \\ u'(Y)f(Y) + \frac{1}{2}u''(Y) = b(X) = b(u(Y)), \end{cases}$$

i $u(y) = x$. Time smo dobili običnu diferencijalnu jednačinu:

$$\begin{cases} u'(z) = \sigma(u(z)),\ z \in \mathbb{R} \\ u(y) = x \end{cases},$$

pri čemu je $' = \frac{d}{dz}$. Kako znamo u, onda nam je lako da rešimo običnu diferencijalnu jednačinu i nađemo f,

$$f(z) = \frac{1}{\sigma(u(z))}\left[b(u(z)) - \frac{1}{2}u''(z)\right].$$

Sada možemo uopštiti princip egzistencije i jedinstvenosti rešenja.

Lema 1.7.1. (Gronvalova lema)
Neka su ϕ i f nenegativne, neprekidne funkcije definisane za $0 \le t \le T$, i neka je $C_0 \ge 0$ neka konstanta. Ako je

$$\phi(t) \le C_0 + \int_0^t f\phi\,ds, \ \ \textit{za svako}\ 0 \le t \le T,$$

onda

$$\phi(t) \le C_0 e^{\int_0^t f\,ds}, \ \ \textit{za svako}\ 0 \le t \le T.$$

Dokaz. Neka je

$$\Phi(t) := C_0 + \int_0^t f\phi\, ds.$$

Tada je $\Phi' = f\phi \leq f\Phi$, i

$$(e^{-\int_0^t f\, ds}\Phi)' = (\Phi' - f\Phi)e^{-\int_0^t f\, ds} \leq (f\phi - f\phi)e^{-\int_0^t f\, ds} = 0.$$

Te je

$$\Phi(t)e^{-\int_0^t f\, ds} \leq \Phi(0)e^{-\int_0^0 f\, ds} = C_0.$$

Na kraju dobijamo

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f\, ds},$$

što smo i trebali da pokažemo.

Teorema 1.7.1. (Egzistencija i jedinstvenost)
Pretpostavimo da su $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *i* $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to M^{n\times m}$ *neprekidne funkcije i da zadovoljavaju sledeće uslove:*

(1)

$$\mid \mathbf{b}(x,t) - \mathbf{b}(\hat{x},t) \mid \leq L \mid x - \hat{x} \mid$$

i

$$\mid \mathbf{B}(x,t) - \mathbf{B}(\hat{x},t) \mid \leq L \mid x - \hat{x} \mid,$$

za svako $0 \leq t \leq T$, $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$

(2)

$$\mid \mathbf{b}(x,t) \mid \leq L(1+ \mid x \mid)$$

i

$$\mid \mathbf{B}(x,t) \mid \leq L(1+ \mid x \mid),$$

za svako $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^n$ *i neku konstantu* L.

Dalje, neka je $\mathbf{X_0}$ *realna slučajna promenljiva, koja zadovoljava sledeće uslove:*

(1) $E(\mid \mathbf{X_0} \mid^2) < \infty$,

(2) nezavisna je od $\mathcal{W}^+(0)$,

i neka je $\mathbf{W}(\cdot)$ *je* m *- dimenzionalno Braunovo kretanje. Tada postoji jedinstveno rešenje* $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$ *stohastičke diferencijalne jednačine:*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X},t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X},t)\, d\mathbf{W}, \text{ za svako } 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases}$$

Pod jedinstvenim rešenjem podrazumevamo da ako $\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$, sa neprekidnim uzoračkim putem skoro sigurno, i oba su rešenja stohastičke diferencijalne jednačine, onda

$$P(\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t), \text{ za svako } 0 \leq t \leq T) = 1.$$

Uslov pod (1) znači da $\mathbf{b}$ i $\mathbf{B}$ zadovoljavaju Lipšicov uslov. Uslov (2) sledi iz Lipšicovog uslova.

Dokaz.

• Prvo ćemo dokazati jedinstvenost.

Pretpostavimo da su $\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}$ rešenja, tada za svako $0 \leq t \leq T$ važi:

$$\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \big(\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big)\, ds + \int_0^t \big(\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big)\, d\mathbf{W}.$$

Dalje, ako iskoristimo ovu osobinu $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ i primenimo očekivanje, dobijamo:

$$\begin{aligned} E(\mid \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}} \mid^2) \;&\leq\; 2E\bigg(\bigg| \int_0^t \big(\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big)\, ds\bigg|^2\bigg) \\ &+\; 2E\bigg(\bigg| \int_0^t \big(\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big)\, d\mathbf{W}\bigg|^2\bigg) \end{aligned}$$

Ukoliko tako iskoristimo i Koši - Švarcovu nejednakost

$$\mid \int_0^t f\, ds\big|^2 \leq t \int_0^t \mid f \mid^2 \, ds,$$

za svako $t > 0$ i neku funkciju $f : [0,t] \to \mathbb{R}^n$, onda dobijamo da je

$$\begin{aligned} E\bigg(\bigg| \int_0^t \big(\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big)\, ds\bigg|^2\bigg) \;&\leq\; TE\bigg(\int_0^t \big|\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big|^2\, ds\bigg) \\ &\leq\; L^2 T \int_0^t E(\mid \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}} \mid^2)\, ds \end{aligned}$$

i da je

$$\begin{aligned} E\bigg(\bigg| \int_0^t \big(\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big)\, d\mathbf{W}\bigg|^2\bigg) \;&\leq\; E\bigg(\int_0^t \big|\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s)\big|^2\, d\mathbf{W}\bigg) \\ &\leq\; L^2 \int_0^t E(\mid \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}} \mid^2)\, ds. \end{aligned}$$

Dakle, za neku odgovarajuću konstantu C:

$$E(|\,\mathbf{X}(t)-\hat{\mathbf{X}}(t)\,|^2) \leq C\int_0^t E(|\,\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}}\,|^2)\,ds,$$

za $0 \leq t \leq T$. Neka je sada $\phi(t) := E(|\,\mathbf{X}(t)-\hat{\mathbf{X}}(t)\,|^2)$, te možemo zaključiti da je $\phi(t) \leq C\int_0^t \phi(s)\,ds$. Gronwall - ova lema za C_0 implicira da je $\phi \equiv 0$. Tada je $\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t)$, za svako $0 \leq t \leq T$, kao i da je $\mathbf{X}(r) = \hat{\mathbf{X}}(r)$, za sve racionalne $0 \leq r \leq T$, osim za neki skup nula verovatnoća. Kako $\mathbf{X}$ i $\hat{\mathbf{X}}$ imaju neprekidan uzorački put skoro sigurmo, onda je

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T}|\,\mathbf{X}(t)-\hat{\mathbf{X}}(t)\,|>0\right)=0.$$

• Sledeće što treba dokazati jeste egzistencija. Neka je

$$\begin{cases} \mathbf{X}^0(t) := \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}^{n+1}(t) := \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n(s),s)\,ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s),s)\,d\mathbf{W}, \end{cases}$$

za $n = 0,1,...$ i $0 \leq t \leq T$, i neka je

$$d^n(t) := E(|\,\mathbf{X}^{n+1}(t)-\mathbf{X}^n(t)\,|^2).$$

Tada tvrdimo da je

$$(\star)\ \ d^n(t) \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!},$$

za svako $n = 0,1,...$, $0 \leq t \leq T$ i neku konstantu M, koja zavisi od L, T i $\mathbf{X}_0$.
Za $n = 0$:

$$\begin{aligned} d^0(t) &= E(|\,\mathbf{X}^1(t)-\mathbf{X}^0(t)\,|^2) \\ &= E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}_0,s)\,ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}_0,s)\,d\mathbf{W}\right|\right) \\ &\leq 2E\left(\left|\int_0^1 L(1+|\,\mathbf{X}_0\,|)\,ds\right|^2\right) + 2E\left(\int_0^t L^2(1+|\,\mathbf{X}_0\,|^2)\,ds\right) \\ &\leq tM, \end{aligned}$$

za neku dovoljno veliku konstantu M.

Za $n-1$:

$$\begin{aligned}
d^n(t) &= E(\mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t) \mid^2) \\
&= E\Big(\Big| \int_0^t \big(\mathbf{b}(\mathbf{X}^n, s)\, ds - \mathbf{b}(\mathbf{X}^{n-1}, s)\big)\, ds \\
&+ \int_0^t \big(\mathbf{B}(\mathbf{X}^n, s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^{n-1}, s)\big)\, d\mathbf{W}\Big|^2\Big) \\
&\leq 2TL^2 E\Big(\int_0^t \mid \mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1} \mid^2\, ds\Big) \\
&+ 2L^2 E\Big(\int_0^t \mid \mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1} \mid^2\, ds\Big) \\
&\leq 2L^2(1+T)\int_0^t \frac{M^n s^n}{n!}\, ds \text{ (na osnovu indukcije)} \\
&\leq \frac{M^n t^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

te je $M \geq 2L^2(1+T)$. Time smo pokazali da važi $(\star)$.
Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq t\leq T} \mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t) \mid^2 &\leq 2TL^2 \int_0^T \mid \mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1} \mid^2\, ds \\
&+ 2\max_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t \big(\mathbf{B}(\mathbf{X}^n, s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^{n-1}, s)\big)\, d\mathbf{W}\Big|^2.
\end{aligned}$$

Na osnovu nejednakosti martingala sledi:

$$\begin{aligned}
E\Big(\max_{0\leq t\leq T} \mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t) \mid^2\Big) &\leq 2TL^2 \int_0^T E(\mid \mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1} \mid^2)\, ds \\
&+ 8L^2 \int_0^T E(\mid \mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1} \mid^2)\, ds \\
&\leq C\frac{(MT)^n}{n!} \text{ na osnovu } (\star).
\end{aligned}$$

Iskoristićemo i Borel - Kantelijevu lemu, koja implicira:

$$\begin{aligned}
P\Big(\max_{0\leq t\leq T} \mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t) \mid > \frac{1}{2^n}\Big) &\leq 2^{2n} E\Big(\max_{0\leq t\leq T} \mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t) \mid^2\Big) \\
&\leq 2^{2n}\frac{C(MT)^n}{n!}
\end{aligned}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\frac{(MT)^n}{n!} < \infty.$$

Tada je

$$P\bigg(\max_{0 \le t \le T} \mid \mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t) \mid > \frac{1}{2^n} \bigg) = 0.$$

Dakle, za skoro svako ω

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}^0 + \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{X}^{j+1} - \mathbf{X}^j)$$

uniformno konvregira na $[0, T]$ ka procesu $\mathbf{X}(\cdot)$. Odnosno, u našem slučaju $\mathbf{X}^{n+1}(\cdot)$, za

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s)\, d\mathbf{W},$$

za $0 \le t \le T$. Što je stohastička diferencijalna jednačina:

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\, d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases}$$

za svako $0 \le t \le T$.

• Preostalo je još da pokažemo da $\mathbf{X}(\cdot) \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$.

Znamo:

$$\begin{aligned} E(\mid \mathbf{X}^{n+1}(t) \mid^2) &\le CE(\mid \mathbf{X}_0 \mid^2) + CE\bigg(\bigg| \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n, s)\, ds \bigg|^2 \bigg) \\ &+ CE\bigg(\bigg| \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n, s)\, d\mathbf{W} \bigg| \bigg) \\ &\le C(1 + E(\mid \mathbf{X}_0 \mid^2)) + C \int_0^t E(\mid \mathbf{X}^n \mid^2)\, ds, \end{aligned}$$

gde je C neka konstanta. Na osnovu indukcije sledi

$$E(\mid \mathbf{X}^{n+1}(t) \mid^2) \le \bigg[C + C^2 + \cdots + C^{n+2} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \bigg] (1 + E(\mid \mathbf{X}^n \mid^2)),$$

tj. kada sredimo nejednakost

$$E(\mid \mathbf{X}^{n+1}(t) \mid^2) \le C(1 + E(\mid \mathbf{X}^n \mid^2)) e^{Ct}.$$

Pustimo sada da $n \to \infty$ i dobijamo

$$E(\mid \mathbf{X}(t) \mid^2) \le C(1 + E(\mid \mathbf{X}^n \mid^2)) e^{Ct},$$

za svako $0 \le t \le T$.

Time smo pokazali da $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$.

2

Primena lanaca Markova u biološkim naukama

Lanci Markova imaju veliku primenu u biološkom modeliranju, jer nam omogućavaju da bolje razumemo dinamiku u polju biologije. Neki od primera su: modeliranje oblika ćelija u podeli slojeva epitelnih ćelija, stanje jonskih kanala u ćeliji membrane, simulacije funkcije mozga i drugo. Posmatrajmo niz stohastičkih promenljivih $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ koje nazivamo stohastičkim procesom, gde su slučajne promenljive X_n diskretne slučajne promenljive, definisane na konačnom ili prebrojivom skupu stanja. Taj niz može da označava merenja nivoa glikemije[1] na svakih deset minuta, za pacijente koji boluju od dijabetesa. Najjednostavniji model stohastičkih procesa jeste onaj sa slučajnim promenljivima koje su međusobno nezavisne. Međutim, ovaj model je i previše jednostavan da bi zabeležio bitne karakteristike podataka. Ako je na primer, visok nivo glikemije, onda očekujemo da će biti visok i nakom deset minuta. Stohastički proces koji uzima u obzir nezavisnost između opažanja predstavlja Markovski proces.

2.1 Markovski model u genetici

Glavna primena lanca Markova u biologiji je u polju genetike samim tim ćemo se više posvetiti toj temi.

Izučavajući nasledne osobine biljke graška, Gregor Mendel je postavio osnovne zakone i principe nasleđivanja i tako osnovao nauku klasične genetike[2].

[1]Glikemija je osnovni parametar za postavljanje dijagnoze dijabetesa, ali i za procenu kontrole dijabetesa.

[2]Genetika je nauka koja proučava gene, naslednost i varijaciju između organizama.

Mendel je predvideo da svaki gen[3] može doći u više različitih alela[4]. Različite osobine zavise od različitih tipova alela. Tako je Mendel pratio osobine koje imaju dve različite forme od kojih su neke: visina (stabla) biljke - visoko ili patuljastio stablo, oblik zrna - okruglo ili naborano, boja zrna - žuto ili zeleno, oblik mahune - puna ili naborana, itd. Ove zaključke je doneo na osnovu sledećeg eksperimenta: prvo je ukrstio biljke sa visokim stablom (koje potiču samo iz linije biljaka sa visokim stablom) i biljke sa patuljastim stablom (koje potiču samo iz linije biljaka sa patuljastim stablom), za rezultat je dobio biljke sa visokim stablom. Potom je uzeo dobijene biljke, ukrstio ih i dobio drugu generaciju biljaka, gde je otprilike $\frac{1}{4}$ biljaka imala patuljasto stablo (iako se prva generacija sastojala samo od biljaka sa dugačkim stablom). Dakle, osobina jedne biljke je dominirala nad drugom biljkom u prvoj generaciji, da bi u drugoj odnos dominacije bio $3 : 1$.

Svaka biljka ima dva gena, po jedan od svakog "roditelja". Svaki gen može doći u jednom od dve alele i njih ćemo označiti sa A i a, pri čemu je jedna od te dve alele dominanta (kao npr. biljka sa visokim stablom). U tom slučaju genetska sekvenca AA ili Aa (redosled nije važan) ili aa (mutirani[5] recesivan alel[6]) se naziva genotip. Kombinacija alela AA i aa, (oba alela su jednaka) se naziva homozigotnim, dok se Aa (različite alele) nazivaju heterozigotnim.

Sada ćemo se usmeriti na model genetskog inbridinga[7] Za prvu generaciju ćemo na slučajan način izabrati dve individue, koje uparivanjem daju drugu generaciju. Zatim se iz druge generacije biraju dva potomka različitog pola, koji uparivanjem daju treću generaciju. Četvrta generacija se dobija uparivanjem dva potomka suprotnih polova iz treće generacije. Dakle, proces se može ponavljati beskonačno mnogo puta. Uzimajući ovaj proces u obzir, formulisaćemo lanac Markova sa diskretnim vremenskim periodima. Neka X_n karakteriše genotip oba roditelja, na prethodno opisan način. Tada kombinacije:

(1) $AA \times AA$,

(2) $AA \times Aa$,

(3) $Aa \times Aa$,

[3]Gen je osnovna materijalna i funkcionalna jedinica genetičkog materijala, tj. biološkog nasleđivanja.

[4]Alel je jedan od dvaju ili više oblika DNK sekvence pojedinačnog gena.

[5]Mutacija predstavlja promene redosleda nukleotida u DNK koje se trajno zadržavaju i prenose na potomačke ćelije.

[6]Recesivan alel je gen koji ispoljava svoje dejstvo samo ako je prisutan u paru.

[7]Ukrštanje u srodstvu, predstavlja ukrštanje jedinki koje imaju zajedničkog pretka u jednom od šest najbližih pokoljenja. Najuža veza u srodstvu je inbriding.

(4) $Aa \times aa$,

(5) $AA \times aa$,

(6) $aa \times aa$,

predstavljaju moguće vrednosti za X_n. Sledeće što treba da odredimo, jesu verovatnoće prelaza i matrica prelaza.
Prvi par genotipa $AA \times AA$, označava da oba roditelja imaju po AA genotip, što znači da će njihov potomak imati isti genotip AA, te je $p_{11} = 1$. Isto važi i za šesti par genotipa $aa \times aa$, pa je $p_{66} = 1$. Posmatrajmo genotip $AA \times Aa$. Neka $Z_1 \in \{A, a\}$ predstavlja alelu koja se prenosi sa roditelja genotipa AA na potomka, i neka $Z_2 \in \{A, a\}$ predstavlja alelu koja se prenosi sa roditelja genotipa Aa na potomka. Ako sa Y označimo genotip potomka, izabranog na slučajan način, onda je:

$$\begin{aligned} P\{Y = AA\} &= P\{Z_1 = A, Z_2 = A\} = P\{Z_1 = A\}P\{Z_2 = A\} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y = aA\} &= P\{Z_1 = A, Z_2 = a\} + P\{Z_1 = a, Z_2 = A\} \\ &= P\{Z_1 = A\}P\{Z_2 = a\} + P\{Z_1 = a\}P\{Z_2 = A\} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y = a\} &= P\{Z_1 = a, Z_2 = a\} = P\{Z_1 = a\}P\{Z_2 = a\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ako sa Y_1 i Y_2 označimo genotipe dva potomka izabrana na slučajan način, onda je:

$$P\{Y_1 \times Y_2 = AA \times AA\} = P\{Y_1 = AA\}P\{Y_2 = AA\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y_1 \times Y_2 = AA \times Aa\} = P\{Y_1 = AA\}P\{Y_2 = Aa\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y_1 \times Y_2 = AA \times aA\} = P\{Y_1 = AA\}P\{Y_2 = aA\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y_1 \times Y_2 = Aa \times Aa\} = P\{Y_1 = Aa\}P\{Y_2 = Aa\} = \frac{1}{4}$$

Tada su $p_{12} = \frac{1}{4}$, $p_{22} = \frac{1}{2}$ i $p_{32} = \frac{1}{4}$. Prateći ovaj šablon, matrica prelaza za šest stanja lanca Markova je oblika:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako podelimo matricu po blokovima, dobićemo matricu oblika

$$P = \begin{bmatrix} 1 & A & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & B & 1 \end{bmatrix}.$$

Lanac Markova je svodljiv i ima tri klase komunikacije: $\{1\}$, $\{2,3,4,5\}$ i $\{6\}$, pri čemu su $\{1\}$ i $\{6\}$ pozitivno povratne, a $\{2,3,4,5\}$ je prolazne. Stanja 1 i 6 su apsorbujuća, tj. $p_{11} = 1$ i $p_{66} = 1$. Primetimo sad da je

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & A_n & 0 \\ 0 & T^n & 0 \\ 0 & B_n & 1 \end{bmatrix},$$

gde su $A_n = A\sum_{i=0}^{n-1} T^i$ i $B_n = B\sum_{i=0}^{n-1} T^i$ funkcije od T, A i B. Da bi mogli da izračanamo P^n, moramo prvo rešiti T^n. Znamo da je $\lim_{n\to\infty} T^n = 0$, jer T odgovara prolaznoj klasi. Da bi dobili T^n, možemo primeniti metode za izračunanje koje smo predstavili u prethodnom odeljku. Na osnovu $T^n = HC^nH^{-1}$, ili $T^n = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^n x_i y_i^T$ svojstvene vrednosti za T su: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{5})$ i $\lambda_4 = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{5})$.

Kada izračunamo T^n, možemo postaviti različita pitanja u vezi dinamike modela. Na primer, koja je razmera (proporcija) heterozigodnih alela populacije n - te generacije? Neka je

$$h_n = \frac{1}{2}p_2(n) + p_3(n) + \frac{1}{4}p_4(n)$$

proporcija heterozigodnih alela u trenutku n, gde su $p_i(n)$ proporcije populacije u stanju $i = 2,3,4$ u trenutku n. Ta tri stanja su elementi matrice T^n. Neka je dalje, $p(0) = (p_2(0), p_3(0), p_4(0), p_5(0))^T$, tada je $T^n p(0) = p(n) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^n x_i y_i^T p(0)$. Dakle,

$$p_i(n) = c_{i1}\lambda_1^n + c_{i2}\lambda_2^n + c_{i3}\lambda_3^n + c_{i4}\lambda_4^n,\ i = 2,3,4,5.$$

Ako sa koeficijentima a, b, c, d označimo kombinacije c_{ij}, onda možemo zapisati

$$h_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n + c\lambda_3^n + d\lambda_4^n.$$

Rešavanjem sistema linearnih jednačina $h_i = a\lambda_1^i + b\lambda_2^i + c\lambda_3^i + d\lambda_4^i$, $i = 0, 1, 2, 3$ dobijamo koeficijente a, b, c i d.

Ako pretpostavimo da je cela populacija genotipa $AA \times Aa$, onda su

$$p^{(0)} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$$

i

$$h_0 = 0.5.$$

Zatim,

$$Pp^{(0)} = (0.2500, 0.5000, 0.2500, 0, 0, 0)^T$$

i

$$h_1 = (\frac{1}{2})(0.5000) + (0.2500) + (\frac{1}{2})(0) = 0.5.$$

Računajući

$$P^2p^{(0)} = (0.3906, 0.3125, 0.1875, 0.0625, 0.0313, 0.0156)^T$$

i

$$P^3p^{(0)} = (0.4805, 0.2031, 0.1719, 0.0781, 0.0234, 0.0430)^T$$

dobijamo $h_2 = 0.375$ i $h_3 = 0.3125$.

Uz pomoć programskog paketa *Maple 18* možemo izračunati razmeru heterozigodnih alela populacije za bilo koje n. Na primer, za $n = 10$ dobijamo da je $h_{10} = 0.07035$, dok je za $n = 20$, $h_{20} = 0.0085$.

U slučaju da je cela populacija genotipa $Aa \times Aa$, onda su

$$p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

$$h_0 = 1,$$

$$Pp^{(0)} = (0.06250.25000.25000.25000.12500.0625)^T$$

i

$$h_1 = \frac{1}{2}(0.2500) + (0.2500) + \frac{1}{2}(0.2500) = 0.5$$

Računajući

$$P^2p^{(0)} = (0.1406, 0.1875, 0.3125, 0.1875, 0.0313, 0.1406)^T$$

i

$$P^3p^{(0)} = (0.2070, 0.1719, 0.2031, 0.1719, 0.0391, 0.2070)^T$$

dobijamo $h_2 = 0.5$ i $h_3 = 0.375$.

Na isti način možemo izračunati razmeru heterozigodnih alela populacije za bilo koje n. Na primer, za $n = 5$ dobijamo da je $h_5 = 0.25$, dok je za $n = 7$, $h_7 = 0.164$.

2.2 Markovski model rađanja i umiranja u populaciji

Stohastički modeli sa lancima Markova predstavljaju osnovu za pronalaženje optimalne kontrole strategije ekološkog upravljanja. Optimalna kontrola predstavlja strategiju protiv štetočina (uljeza) populacije, strategiju za epidemije, za kontrolu rađanja i umiranja, strategiju ribarstva i divljih životinja, i drugo.

Kako lanac Markova ima fundamentalnu ulogu u ovoj teoriji, predstavićemo model rasta populacije, koji uzima u obzir proces rađanja i umiranja. Ovi modeli oslikavaju takozvanu populacionu ekologiju.

Verovatnoća rađanja ili umiranja, zavisi od veličine populacije i samim tim nije konstantna vrednost. Neka je X_n veličina populacije, za $n = 0, 1, 2, ...$ Sa $b_i \geq 0$ ćemo označiti verovatnoću rađanja, za populaciju veličine $i = 1, 2, ...$ i sa $d_i \geq 0$ ćemo označiti verovatnoću umiranja za populaciju veličine $i = 1, 2, ...$, pri čemu obično pretpostavljamo da je $b_0 > 0$ i $d_0 = 0$. Tada je skup stanja $S = \{0, 1, 2, ...\}$. Obe verovatnoće b_i i d_i, zavise od vremenskog intervala, tj. $b_i \equiv b_i(\Delta t)$ i $d_i \equiv d_i(\Delta t)$. U toku vremenskog intervala Δt se javlja samo jedan događaj, rađanje ili umiranje.

Neka je

$$\begin{aligned} p_{ji} &= P\{X_{n+1} = j | X_n = 1\} \\ &= \begin{cases} b_i, \text{ ako je } j = i + 1, \\ d_i, \text{ ako je } j = i - 1, \\ 1 - (b_i + d_i), \text{ ako je } j = i, \\ 0, \text{ ako je } j \neq i - 1, i, i + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

za $i = 1, 2, ...$ i $p_{00} = 1$.

Neka, dalje pretpostavimo da X_n predstavlja broj ljudi koji čeka u redu za neku uslugu u trenutku n. Neka ljudi dolaze u red sa stopom λ. Tada je $b_i = \lambda$, za svako $i \in S$. Ukoliko postoji samo pojedinac koji pruža usluge drugim ljudima po stopi μ, onda je $d_i = \mu$, za svako $i = 1, 2, ..$ i $d_0 = 0$. Za $k > 1$ pojedinaca koji pružaju usluge po stopi μ, važi

$$d_i = \begin{cases} i\mu, \text{ ako je } i \leq k, \\ k\mu, \text{ ako je } i \geq k. \end{cases}$$

Teorema 2.2.1. *Lanac rađanja i umiranja je prolazan, ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k} < \infty.$$

Dokaz. Neka sa α_n, za $n = 0, 1, 2, ...$ označimo verovatnoću da se lanac nikada ne vraća u stanje 0. Tada je

$$\begin{aligned} \alpha_n &= P\{X_i = 0, \text{ za neko } i \geq 1 | X_0 = n\} \\ &= \sum_k P\{X_i = 0, \text{ za neko } i \geq 1 | X_1 = k\} P\{X_1 = k | X_0 = n\} \\ &= b_n \alpha_{n+1} + d_n \alpha_{n-1} + (1 - (b_n + d_n))\alpha_n. \end{aligned}$$

Sledi,

$$(b_n + d_n)\alpha_n = b_n \alpha_{n+1} + d_n \alpha_{n-1}.$$

Dalje, indukcijom dolazimo do

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{d_n}{b_n}(\alpha_{n-1} - \alpha_n).$$

Ponavljajući postupak iznova, dolazimo do

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{d_1 \cdots d_n}{b_1 \cdots b_n}(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$$

i konačno

$$\alpha_{n+1} = (\alpha_1 - 1) \sum_{k=1} n \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k} + 1.$$

Kako je uslov konvergencije

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k} < \infty,$$

stavljamo da je

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k}},$$

da bi

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k}} \sum_{k+1}^{\infty} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k} \to 0, \text{ kada pustimo da } n \to \infty.$$

Time smo dokazali je lanac prolazan.

Možemo zaključiti da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k,$$

i da će konvergirati ako je $\mu < \lambda$. Što znači, ako je stopa dolaska strogo veća od stope odlaska, onda je red pojedinca koji pruža usluge prolazan.

Teorema 2.2.2. *Lanac rađanja i umiranja je pozitivno povratan, ako i samo ako je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_0 \cdots b_{k-1}}{d_1 \cdots d_k} < \infty.$$

Dokaz. Neka je π stacionarna raspodela lanca, tada je

$$\pi_k = \pi_{k-1} b_{k-1} + \pi_k (1 - (b_k + d_k)) + \pi_{k+1} d_{k+1},$$

ako $k \geq 1$

$$\pi_0 = \pi_0 (1 - b_0) + \pi_1 d_1.$$

Odnosno, sređivanjem dobijamo

$$d_{k+1} \pi_{k+1} - b_k \pi_k = d_k \pi_k - d_{k-1} \pi_{k-1}$$

$$d_1 \pi_1 - b_0 \pi_0 = 0.$$

Na osnovu indukcije,

$$\pi_{k+1} = \frac{b_k}{d_{k+1}} \pi_k.$$

Ponavljajući postupak, dolazimo do

$$\pi_k = \frac{b_0 \cdots b_{k-1}}{d_1 \cdots d_k} \pi_0.$$

Kako je uslov konvergencije

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_0 \cdots b_{k-1}}{d_1 \cdots d_k} < \infty,$$

onda je

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_0 \cdots b_{k-1}}{d_1 \cdots d_k} \right)^{-1}$$

i $\pi_k > 0$, što implicira da je lanac pozitivno povratan.

Možemo zaključiti da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_0 \cdots d_{k-1}}{d_1 \cdots k_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k,$$

i da će konvergirati ako je $\lambda < \mu$. Što znači, ako je stopa dolaska strogo manja od stope odlaska, onda je red pojedinca koji pruža usluge povratan.

Matrica prelaza verovatnoća je oblika

$$P = \begin{bmatrix} 1 & d_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-(b_1+d_1) & d_2 & \cdots \\ 0 & b_1 & 1-(b_2+d_2) & \cdots \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A \\ 0 & T \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je vremenski interval dovoljno mali $\sup_i\{b_i + d_i\} \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Tada se veličina populacije povećava ili smanjuje za jedan, ili ostaje iste veličine tokom vremenskog intervala Δt.

Verovatnoća izumiranja

Neka je $b_i = 0$, za $i \geq N$ i $d_i = 0$,za $i > N$, inače $b_i, d_i > 0$. Tada je veličina populacije konačna.
Lanac Markova ima dve klase komunikacije: $\{0\}$ i $\{1, 2, ..., N\}$, pri čemu je prva klasa pozitivno povratna, a druga prolazna. Postoji jedinstvena stacionarna raspodela π, $P\pi = \pi$, tako da je $\pi_0 = 1$ i $\pi_i = 0$, a $i = 1, 2, ..., N$.

Izumiranje populacije se javlja iz bilo kog početnog stanja

$$\lim_{n\to\infty} P^n p(0) = \pi = [1, 0, 0, 0, ..., 0]^T.$$

Ukoliko bi $b_i > 0$ i $d_i > 0$, za $i = 1, 2, ...$, onda bi verovatnoća izumiranja mogla biti manja od jedan.

Očekivano vreme izumiranja

Neka je stanje u lancu rađanja i umiranja, povratno i apsorbujuće ($b_0 = 0$). Sa τ_k označimo ovčekivano vreme izumiranja, veličine populacije k. Tada je

$$\tau_k = b_k(1 + \tau_{k+1}) + d_k(1 + \tau_{k-1}) + (1 - (b_k + d_k))(1 + \tau_k).$$

Sređivanjem dobijamo

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \frac{d_k}{b_k}(\tau_k - \tau_{k-1} - \frac{1}{d_k}).$$

Kako je $\tau_0 = 0$, onda

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{d_1}{b_1}(\tau_1 - \frac{1}{d_1})$$

Ponavljajući postupak,

$$\tau_m = \tau_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k}\left(\tau_1 - \frac{1}{d_1} - \sum_{i=2}^{k} \frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 \cdots d_i}\right).$$

Zanima nas vrednost τ_1, pa ćemo modifikovati model. Neka je $b_0 = 1$ i neka T_0 predstavlja prvi trenutak vraćanja. Tada je $E(T_0) = \tau_1 + 1$. Za stacionarnu raspodelu π_0 modifikovanog modela, imamo

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_0 \cdots b_{k-1}}{d_1 \cdots d_k}}.$$

S toga, imamo

$$\begin{aligned} \tau_1 &= E(T_0) - 1 \\ &= \frac{1}{\pi_0} - 1 \\ &= \frac{1}{d_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_1 \cdots b_{k-1}}{d_1 \cdots d_k} \end{aligned}$$

Konačno,

$$\tau_m = \tau_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{d_1 \cdots d_k}{b_1 \cdots b_k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 \cdots d_i}.\right)$$

U slučaju kada je verovatnoća izumiranja jednaka jedan, onda očekivano vreme izumiranja možemo izračunati na sledeći način.
U ovom slučaju je

$$-d_k\tau_{k-1} + (b_k + d_k)\tau_k - b_k\tau_{k+1} = 1$$

i

$$-d_N\tau_{N-1} + d_N\tau_N = 1.$$

U matričnom obliku

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_1+d_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & b_2+d_2 & -d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A \\ 0 & I-T \end{bmatrix},$$

gde su $\tau = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_N)$ i $a = (0, 1, ..., 1)$. Rešenje je oblika

$$\tau G = a,$$

odnosno

$$\tau = aG^{-1}.$$

Dakle, konstruisali smo diskretni matematički model, tj. osnovni model rađanja i umiranja populacije. Sam proces rađanja i umiranja predstavlja Markovski proces sa stanjima u diskretnim vremenskim trenucima i mogućim prelazima koji se javljaju samo između $i \to i+1$ i $i \to i-1$.

2.3 Primena lanaca Markova u proučavanju dinamike bolesti

Metoda modela lanaca Markova se koristi za opisivanje dinamike bolesti na individualnom nivou, ali se može i proširiti kako bi se dobili zaključci na nivou populacije. Markovo modeliranje je privlačno, zbog relativno lakog izračunanja interesa u studijama različitih bolesti, koja su obično okarakterisana kao stanja (inficiran ili neinficiran), koja su uzorkovana u diskretnim vremenskim intervalima.

U kontekstu bolesti, razlikujemo tri diskretna stanja: podložan (stanje 0), inficiran (stanje 1) i mrtav ili uklonjen (stanje 2). Ovaj uprošten scenario ne uzima u obzir zdravstvenu istoriju, odnosno, uzimaju se u obzir individue koje su potencijalno podložne infekciji, kao i one koje su se oporavile od infekcije. Takođe, mogu se uključiti dodatna stanja zbog razlike između potencijalnih podložnih infekciji individua i onih individua koje su se oporavile od infekcija, kao i dodatni detalji od interesa. Na primer, imuno stanje, koje obuhvata individuu koja se oporavila od infekcije i nema tendenciju da se opet razboli u budućnosti. Drugi primer bi bio, ako je osoba osetljiva, odnosno podložna infekciji, ona može i dalje ostati samo osetljiva, može se inficirati ili umreti u nekom vremenskom trenutku. Kada individua jednom umre, ostaje mrtva.

Podložna i inficirana stanja su prolazna, zato što individua može ući i izaći iz tih stanja mnogo puta, dok je stanje smrti apsorbujuće stanje, jer kada jednom nastupi smrt, onda individua i ostaje u tom stanju, tj. mrtva.

Kroz prikupljanje podataka koji posmatraju stanja individua u redovnim vremenskim intervalima možemo proceniti svaku verovatnoću prelaza u jednom koraku, kao i matricu prelaza verovatnoća u jednom koraku:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Redovi sa indeksom $i = 0, 1, 2$ predstavljaju stanja procesa za datu individuu (0=podložan, 1=inficiran i 2=mrtav) u trenutku n. Kolone sa indeksom $j = 0, 1, 2$ ukazuju na stanja procesa u sledećem trenutku koraka $n+1$. Na primer, p_{01} je verovatnoća prelaza iz stanja podložnosti infekcije u inficirano stanje u jednom koraku (uslov je opstanak), poznatiji u literaturi kao sila infekcije, u diskretnom vremenu. Verovatnoće p_{02} i p_{12} izražavaju mortalitet neinficiranih i inficiranih individua, respektivno, dok p_{10} predstavlja verovatnoću oporavka. Poslednji red matrice prelaza, predstavlja verovatnoće prelaza za umrle individue. Kako je smrt apsorbujuće stanje, verovatnoće da individue postanu podložne ili inficirane su nula.

Pri utvrđivanju vremenske jedinice koraka (sat, dan, nedelja,...) treba uzeti u obzir osnovni vremenski tok bolesti kako bi se osiguralo da se tranzicija procesa odvija na biološkoj smislenoj vremenskoj skali. Tako bi, na primer, vremenski tok ptičijeg gripa bio nekoliko dana, dok bi vremenski tok hronične bolesti atrofije bio čak i nekoliko godina. Vreme koraka za verovatnoću prelaza u jednom koraku, treba da se definiše tako da je jedino moguće da se dogodi samo jedan prelaz tokom svakog vremenskog intervala. Ako je vremenski korak nerazuman za datu bolest, onda metrika izračunata korišćem modela lanaca Markova može biti netačna. Ukoliko je vreme koraka predugačko i javlja se više prelaza, onda očekivanje trajanja svakog stanja može biti precenjeno.

U bilo kom trenutku, individua mora biti u jednom od tri navedena stanja, što se reflektuje u činjenici da je suma stanja u jednom redu jednaka jedinici. Prvo ćemo ispitati verovatnoću da individua koja je podložna infekciji postaje inficirana tokom intervala između $m-1$ i m koraka. Definišemo početni korak kao n i ispitujemo intervale između $n, n+1, n+2, ..., n+m$. Verovatnoća da će podložna individua postati inficirana posle jednog koraka je p_{01}, dok je verovatnoća da ostaje podložna p_{00}. Prema tome, verovatnoća da individua podložna infekciji, postaje inficirana nakon dva koraka je verovatnoća da je ostala podložna posle jednog koraka, da bi u toku drugog koraka postala inficirana:

$$P\{X_{n+2} = 1, X_{n+1} = 0 | X_n = 0\} = p_{00}p_{01}.$$

Prateći ovu logiku, verovatnoća da individua podložna infekciji postaje inficirana po prvi put između $m-1$ - og koraka i m - tog koraka je:

$$f_{01}^{(m)} = P\{X_{n+m} = 1, X_{n+m-1}, ..., X_{n+1} = 0 | X_n = 0\} = p_{00}^{m-1}p_{01},\ 1 \leq m \leq \infty.$$

Konkretno, $f_{01}^{(m)}$ je definisana kao verovatnoća da je individua podložna infekciji (u 0 stanju) postala prvi put inficirana (pomera se u stanje 1) u tačno m koraka, za sve moguće vrednosti m. Na isti način računamo verovatnoću da se inficirana osoba prvi put oporavila između $m-1$ - og koraka i m - tog:

$$f_{10}^{(m)} = P\{X_{n+m} = 0, X_{n+m-1} = 1, ..., X_{n+1} = 1 | X_n = 1\} = p_{11}^{m-1}p_{10}.$$

Kako se m povećava ($m \to \infty$), verovatnoća početne infekcije ili oporavka se približava nuli, što implicira da se ukupna verovatnoća infekcije ili oporavka približava limitu (vrednosti između 0% i 100%). Ovo nam dozvoljava da izračunamo ukupnu verovatnoću da individua podložna infekciji postaje inficirana ili da se inficirana individua oporavi tokom vremenskog perioda studije i brzine kojom se proces odvija.

U našem modelu sa tri stanja, ukupnu verovatnoću da individua prelazi iz i - tog stanja u j - to stanje, dok $m \to \infty$ ima jednostavno zatvoreno rešenje

$$P\{i \to \infty\} = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}.$$

Sada možemo koristiti i raspodelu verovatnoće da bismo odredili očekivano vreme prve infekcije i očekivano vreme oporavka. Očekivano vreme da individua u datom stanju u trenutku n prvi put ulazi u neko drugo stanje, u oznaci $E[\tau_{ij}^{(1)}]$ je dato sa:

$$E[\tau_{ij}^{(1)}] = \frac{\sum m f_{ij}^{(m)}}{P\{i \to j\}}.$$

Dakle, ovo je očekivano vreme da se prvi put ($\tau^{(1)}$) individua pomeri iz stanja i u stanje j, gde je suma $mf_{ij}^{(m)}$ za svaku moguću vrednost m podeljena sa verovatnoćom životnog veka prelaska iz i - tog u j - to stanje. U našem modelu očekivano vreme do stanja j infekcije ili oporavka ima zatvoreno rešenje

$$E[\tau_{ij}^{(1)}] = \frac{1}{1 - p_{ii}}.$$

Model lanca Markova nam takođe, obezbeđuje i pristup za računanje očekivanja života za individue podložne infekciji i inficiranim individuama. U kontekstu lanca Markova, definisaćemo životni vek, kao očekivano vreme smrti individue u sadašnjem vremenu n. Nije nužno da je očekivan životni vek ekvivalentan očekivanju životnog veka od rođenja, osim ako tako nije naznačano.

Dakle, mi računamo očekivano vreme apsorpcije za svako stanje (apsorpcije u stanje smrti), u oznaci W_i, za $i = 0, 1$. Uvodimo i matricu Q koja sadrži samo verovatnoće prelaza za prolazna stanja. U ovom modelu, definisali smo dva prolazna stanja, 0 i 1 (podložan i inficiran) i jedno apsorbujuće stanje 2 (mrtav), te je matrica Q oblika

$$Q = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}.$$

Očekivanje životnog veka za individuu je

$$W = [I - Q]^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gde je

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W je vektor koji sadrži očekivano vreme do smrti za individue koje počinju kao individue podložne infekciji (prvi element vektora) i inficirane (drugi element vektora). Očekivani životni vek inkorporira verovatnoće više prelazaka od stanja podložog do stanja infekcije, i obratno. Dakle, W predstavlja sumu očekivanog broja vremenskog perioda u svakom prolaznom stanju uslovljeno početnim stanjem.

Model lanaca Markova je korisno sredstvo za studiranje dinamike bolesti, koji omogućava bolje razumevanje infekcijskih bolesti i strategiju optimalne kontrole. Korisno je za istraživače da odrede konačnu verovatnoću infekcija i oporavka, kao i ovčekivano vreme infekcije prilikom ocenjivanja virulentnosti bolesti. Ovakve analize na nivou individua može koristiti za razvijanje modela populacije.

3

Primena stohastičkih diferencijalnih jednačina u biologiji i ekologiji

Biološki sistemi su oduvek izloženi različitim uticajima, koji nisu uvek jasno određeni. Ukoliko bismo ignorisali te uticaje, analiza ispitivanih bioloških sistema ne bi bila pouzdana, te ne bismo mogli da dobijemo eksplicitan model.
Odatle i potiče potreba da se prošire deterministički modeli na modele koji uzimaju u obzir složenije varijacije u dinamici, odnosno koji uključuju stohastičke uticaje ili šum. Time upravo dolazimo do stohastičkih diferencijalnih jednačina, čiji su parametri slučajni ili uzimamo u obzir šum u samoj jednači sistema. Dakle, modeli bioloških sistema treba da uključe različite uticaje, zato što u realnosti ne bismo mogli da ih izolujemo i ne uključimo njihov uticaj na model.

Primeri uticaja čije ponašanje ne bismo mogli da predvidimo i kontrolišemo su ćeliski metabolizam, aktivnost nerava, geni, hormonalne oscilacije i drugo, i spoljašnjih uticaja kao što su temperatura, procedura eksperimenta, i slično.

Ekološki modeli su ranije tradicionalno koristili obične diferencijalne jednačine za modeliranje. Međutim, ekolozi su primetili da su procesi koje izučavaju vrlo promenljive prirode. Pod procesima podrazumevamo ekološke faktore kao što su fotosinteza, isparenja, vlažnost zemljišta i drugo, koji deluju na živa bića na onom mestu gde žive. Uzimajući u obzir uticaje koji dovode do promena, navode nas na primenu stohastičkih diferencijalnih jednačina u modeliranju.

Adekvatan su model za razvoj populacije, interakciju predator - plen, epidemije, prirodne katastrofe i drugo.

Treba uzeti u obzir moguće greške i izvore, kako bismo dobili model kojim možemo da predvidimo i vrednosti parametara koje možemo da protumačimo.

Od suštinske važnosti je da razumemo i istražimo uticaj šuma u dinamici, kako bi modeli bili što realniji.

3.1 Itôv proces u biologiji

3.1.1 Geometrijsko Braunovo kretanje i metabolički proces leka

Zamislimo lek koji se daje kao bolus injekcija[1], i da se prosečan metabolički proces leka može opisati eksponencijalnim opadanjem pomoću determinističke jednačine $x' = -ax$, pri čemu x označava koncentraciju leka u plazmi i a stopu opadanja. Pretpostavimo sada da stopa opadanja varira zbog kompleksnog rada enzima koji su potrebni za razlaganje leka. To možemo opisati kao $a = \mu + \sigma\xi(t)$, gde je $\xi(t)$ Gausov beli šum. Tada se $\xi(t)$ može pisati kao diferencijal Braunovog kretanja $dW(t)$. Što dovodi do modela

$$dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW(t).$$

Formalni zapis procesa navedenog iznad, u integralnom obliku je

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu X(S)\, ds + \int_0^t \sigma X(s)\, dW(s).$$

Da bismo dobili rešenje stohastičke diferencijalne jednačine, treba da primenimo Itôvu formulu za stohastičko diferenciranje. Dakle, treba da primenimo Itôvu formulu na $\log X(t)$.

Eksplicitno rešenje je oblika

$$X(t) = X(0)e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))}.$$

Proces uzima samo pozitivne vrednosti i $X(t)$ uslovljava da $X(0)$ prati log - normalnu raspodelu sa parametrima $log(X(0)) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ i $\sigma^2 t$.

[1]Brzom (bolus) injekcijom se postiže visoka koncentracija leka.

3.1.2 Procesi membranskog potenicijala neurona

Ornstein - Uhlenbeck proces

Zamislimo neki proces koji obnavlja snagu, tj. proces koji dostiže neki konstantan nivo, ali je stalno remećen od strane šuma. Uzmimo za primer da membranski potencijal[2] neurona remete električni impulsi okolnih mreža i da u isto vreme privlači ravnotežne vrednosti u zavisnosti od mirovanja potencijala za različite jone[3], koji se nalaze u ćelijama i u intersticijumu[4]. To nas dovodi do sledećeg modela

$$dX(t) = -\left(\frac{X(t)-\alpha}{\tau}\right) dt + \sigma\, dW(t),$$

gde su $\tau, \sigma > 0$. U ovom slučaju τ je jedinica vremena, i vremenska konstanta sistema. Autokorelacija je data kao $(X(t), X(t+s)) = e^{-\frac{s}{\tau}}$, i autokorelacija je umanjena sa faktorom $\frac{1}{e}$ posle τ jedinica vremena. Rešenje modela se dobija kada se primeni Itôva formula na $e^{\frac{t}{\tau}}X(t)$ i oblika je

$$X(t) = X(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \alpha(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{s}{\tau}} \sigma\, dW(s).$$

Kada $X(0)$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem μ i varijansom $\frac{\sigma^2\tau}{2}$, nezavisno od $W(t)$ i kada je $\frac{1}{\tau} > 0$, onda je $X(t)$ stacionarno rešenje Ornstein - Uhlenbeck-ovog procesa.

Vinerov proces sa driftom

Zamislimo čestice u vodi, koje su bombardovane vodenim molekulima. Temperatura vode će uticati na snagu bombardovanja, i neka parametar σ karakteriše ovaj uticaj. Vodena struja pokreće čestice u određenom pravcu, te ćemo pretpostaviti da parametar μ karakteriše drift. Da bismo objasnili kretanje čestice, Vinerov proces će generisati proces

$$dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW$$

koje ima rešenje

$$X(t) = X(0) + \mu t + \sigma W.$$

[2]Membranski potencijal postoji na ćelijskoj membrani gotovo svih ćelija. Nastaje usled različite koncentracije jona sa obe strane ćelijske membrane, kao i različite propustljivosti ove membrane za jone.

[3]Jon je naelektrisani atom ili grupa atoma.

[4]Intersticijum je prostor između nefrona, tubula, krvnih i limfnih sudova i nerava.

Dakle, proces ima normalnu raspodelu sa očekivanjem $X(0)+\mu t$ i varijansom $\sigma^2 t$, što ispunjava uslove Vinerovog procesa.

Ovaj proces je uprošten model za evoluciju membranskg potencijala u neuronu. Da bismo konstruisali model, treba da pretpostavimo da je neuronski membanski potencijal subjekat niza inhibitornih i ekcitatornih postsinaptičkih potencijala, koji je karakterisan konstantnom veličinom ϵ zavisan od stopa:

$$\alpha_i(t) = \frac{A_i(t)}{\epsilon} + \frac{\sigma^2}{2\epsilon^2}$$

i

$$\alpha_e(t) = \frac{A_e(t)}{\epsilon} + \frac{\sigma^2}{2}\epsilon^2,$$

gde su $A_t(t)$ i $A_e(t)$ pozitivne funkcije vremena i $\sigma^2 > 0$. Može se dokazati da je membranski potencijal u neuronu difuzni proces $\{X(t), t \geq 0\}$ definisan na $\mathbb{R}$, čiji su infinitezimalni momenti povezani sa stopama. Drift i infinitezimalna varijansa od $X(t)$ su dati

$$A_1(x,t) = \frac{-x}{\theta} + \mu(t),$$

gde je $\theta > 0$ vremenska konstanta i

$$A_2 = \sigma^2,$$

respektivno, sa

$$\mu(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon[\alpha_e(t) - \alpha_i(t)] = \mu + m(t)$$

i

$$\sigma^2 = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2[\alpha_e(t) - \alpha_i(t)].$$

Primetimo da kada θ divergira, $X(t)$ se svodi na Vinerov proces sa driftom $\mu(t)$. Naša studija nas navodi na model koji je karakterisan generičkom funkcijom $m(t)$. Štaviše, da bi dobili kvantitativne informacije o evoluciji membranskog potencijala, treba da se fokusiramo na slučaj kada je $m(t) = A\sin t$. Ovaj slučaj reflektuje neke oscilatorne efekte okoline (životne sredine) na neuron.

U opštem slučaju $X(t)$ je rešenje sledeće stohastičke jednačine

$$dX(t) = \left[\frac{-X(t)}{\theta} + \mu + m(t)\right]dt + \sigma dB(t),$$

gde je $B(t)$ standardni Vinerov proces. Data jednačina opisuje evoluciju membranskog potencijala.

Proces kvadratnog korena

Na primer, hiperpolarizacija[5] prouzrokovana inhibicijom promene potencijala membrane u neuronu je manja ako je membranski potencijal bliži inhibiciji promene potencijala. Zbog jednostavnosti pretpostavićemo da je donja granica kvadratnog korena jednaka 0, što nas dovodi do modela

$$dX(t) = -\left(\frac{X(t) - \alpha}{\tau}\right) dt + \sigma \sqrt{X(t)}\, dW(t).$$

U finansijskoj literaturi ovaj proces se naziva "Cox - Ingersoll - Ross" proces, dok se u neuronalnoj naziva Felerov proces, jer se može koristiti kao model za rast populacije.

3.2 Stohastički model praćenja ćelija tumora

U ovom odeljku ćemo prikazati primer, koji su realizovali *Benjamin Favetto, Adeline Samson, Daniel Balvay, Isabelle Thomassin, Valentine Genon - Catalot, Charles - André Cuenod and Yves Rozenholc*. Primer je preuzet iz [5].

Poslednjih godina savremena naučna istraživanja u oblasti biologije i medicine su uglavnom okupirana nalaženjem adekvatne terapije za izlečenje ćelije raka (kancera).

U antikancer terapiji bitno je proceniti agresivnost tumora i pratiti efekte tretmana *in vivo*[6]. To se može postići primenom dinamičkog kontrasta poboljšanja slike (DKPS), čime se obezbeđuje bolji nadzor terapeutske strategije. DKPS eksperiment podrazumeva ubrizgavanje kontrastnih sredstva[7] pacijentu i snimanje niza medicinskih slika, koje mere evoluciju koncentracije kontrastnih sredstava duž vremena.

U ovom modelu, kontrastno sredstvo u okviru voksela[8] tkiva je ili u plazmi, ili unutar intersticijalnog prostora tkiva. Pretpostavimo da su izmene unutar voksela:

(1) iz arterija (ulaz) u krvnu plazmu,

[5]Hiperpolarizacija predstavlja povećanje ili smanjenje membranskog potencijala.

[6]In vivo se odnosi na rad koji se sprovodi na živim organizmima u njihovom normalnom, netaknutom stanju.

[7]Kontrastna sredstva (kontrastna boja), je supstanca, nerastvorljiva ili rastvorljiva u vodi, koja se primenjuje u invazivnoj ili neinvazivnoj radiološkoj dijagnostici.

[8]Voksel je podela digitalnih podataka u trodimenzionalnom prostoru na najmanju jedinicu voksela, za trodimenzionalne slike, medicinskie podatake i medicinske slike.

(2) iz krvne plazme u vene (izlaz),

(3) i između krvne plazme i intersticijalnog prostora.

Količine kontrastnog sredstva u jednoj jedinici voksela u vremenu t su označene sa $AIF(t)$, $Q_p(t)$ i $Q_1(t)$ za arteriju, plazmu i intersicijalni prostor. Biološki parametri i ograničenja su:

- $F_T \geq 0$, je perfuzija tkiva, tj. protok krvi po jedinici zapremine tkiva,
- $V_b \geq 0$, je deo cele zapremine krvi u procentima,
- $V_e \geq 0$, je deo ekstravaskularnog vanćelijskog prostora zapremiskog udela u procentima,
- $PS \geq 0$, je permeabilnost površine proizvoda po jedinici zapremine tkiva.

Neka je $V_b + V_e < 100$, i neka hematokrit $h = 0.4$ predstavlja procenat krvi koji čine crvena krvna zrnca. Neka sa δ označimo kašnjenje sa kojom kontrastno sredstvo stiže iz arterija u plazmu, pri čemu se i t i δ mere u sekundama.

Kinetika kontrastnog sredstva se može modelirati pomoću modela običnih diferencijalnih jednačina na sledeći način:

$$\frac{dQ_p(t)}{dt} = \frac{F_T}{1-h}AIF(t-\delta) - \frac{PS}{V_b(1-h)}Q_p(t) + \frac{PS}{V_e}Q_1(t) - \frac{F_T}{V_b(1-h)}Q_p(t),$$

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = \frac{PS}{V_b(1-h)}Q_p(t) - \frac{PS}{V_e}Q_1(t).$$

Pretpostavimo da kontrastno sredstvo ne postoji unutar tela pre akvizicije i da su dodatni ulovi:

$$Q_p(t_0) = Q_1(t_0) = AIF(t_0) = 0.$$

Primetimo da je $AIF(t)$ data funkcija za svako t, koju kontološe eksperimentalista.

Međutim, ovaj deterministički model ne uzima u obzir slučajne fluktuacije tokom vremena. Odnosno, ne uzima u obzir slučajne fluktuacije tokom vremena u plazmi ili intersticijalnoj permeabilnosti, doziranje kontrastnog sredstva, greške uzimanja uzoraka i slično. Ove varijacije su nepredvidljive, te nam treba neki realniji stohastički pristup. Predstavljamo model stohastičkih diferencijalnih jednačina, dodavanjem slučajnih komponenti:

$$\begin{aligned}
dQ_p(t) &= \left(\frac{F_T}{1-h}AIF(t-\delta) - \frac{PS}{V_b(1-h)}Q_p(t) + \frac{PS}{V_e}Q_1(t) - \frac{F_T}{V_b(1-h)}Q_p(t)\right)dt \\
&+ \sigma_1\, dW_t^1,
\end{aligned}$$

$$dQ_1(t) = \left(\frac{PS}{V_b(1-h)}Q_p(t) - \frac{PS}{V_e}Q_1(t)\right)dt + \sigma_2\, dW_t^2,$$

gde su W_t^1, i W_t^2 dva nezavisna Braunova kretanja, i σ_1, σ_2 standardne devijacije slučajnih uticaja. Ovaj Itôv proces je Ornstein - Uhlenbeck proces.

U biološkom kontekstu, samo suma $S(t) = Q_p(t) + Q_1(t)$ može biti merljiva. Šum i diskretna merenja $(y_i, i = 0, ..., N)$ od $S(t)$ se vrše u $t_0 = 0 < t_1 \cdots < t_N = T$. Posmatrani model je

$$y_i = S(t_i) + \gamma\varepsilon_i,$$

gde ε_i ima normalnu $N(0,1)$ raspodelu i gde su $\varepsilon_i, i = 0, ..., N$ međusobno nezavisni, a γ je nepoznata standardna devijacija Gausovog belog šuma.

Parametri modela su označeni sa $\Theta^{ODJ} = (F_T, V_b, PS, V_e, \delta, \gamma^2)$ i $\Theta^{SDJ} = (F_T, V_b, PS, V_e, \delta, \sigma_1, \sigma_2, \gamma^2)$ za modele običnih diferencijalnih jednačina i stohastičkih diferencijalnih jednačina, respektivno.

Modeli običnih diferencijalnih jednačina i stohastičkih diferencijalnih jednačina se primenjuju na dva signala da bi procenili parametre $\hat{\Theta}^{ODJ}$ i $\hat{\Theta}^{SDJ}$, njihove standardne devijacije i predviđanja $\hat{Q}_p$, $\hat{Q}_1$ i $\hat{S}$. Reziduali običnih i stohastičkih diferencijalnih jednačina su izračunati kao razlika između zapažanja $y_{0:N}$ i predviđanja $\hat{S}$ odgovarajućeg modela.

Signal 1: za modele običnih i stohastičkih diferencijalnih jednačina, procene i predviđanja količine kontrastnog sredstva su ekvivalentna, što se može videti u Tabeli 3.1.

Signal 2: za modele običnih i stohastičkih diferencijalnih jednačina procene se razlilkuju. Kod SDJ predviđanja količina kontrastnog sredstva u intersticijalnom prostoru je $\hat{Q}_1(t) = 0$ za svako t, dok kod ODJ to nije slučaj. ODJ model je detektovao promene unutar voksela između dva prostora i reziduali su korelisani. U SDJ modelu procena $\hat{V}_b$ zapremine (volumena) krvi je veća nego kod ODJ modela, dok je SDJ procena $\hat{PS}$ permeabilnosti površine znatno manje nego kod ODJ procene. Podaci su prikazani u Tabeli 3.2. Kako je $\hat{V}_b^{ODJ} + \hat{V}_e^{ODJ} = 100$, ODJ procena je zaustavljena na granici domena optimizacije, što nam sugeriše da treba pažljivije da ispitamo. Ukoliko bi uklonili poslednja dva vremena posmatranja, SDJ procene bi ostale stabilne, dok bi te promene uticale na stabilnost ODJ procena. Ovaj slučaj dovodi do inverzije u predviđanju količine kontrastnog sredstva u 2 prostora.

Parametri	**ODJ model**	**SDJ model**
F_T	48.7	48.7
V_b	40.5	40.5
PS	13.3	13.3
V_e	29.4	29.4
δ	6.0	6.0
γ	8.02	7.86
σ_1	–	$< 10^{-3}$
σ_2	–	$< 10^{-3}$

Tabela 3.1: Procena parametra u biologiji za signal 1 podataka koristeći ODJ i SDJ modele

Parametri	**ODJ model**	**SDJ model**
F_T	24.6	20.0
V_b	41.3	53.5
PS	2.96	0.81
V_e	58.7	0.04
δ	10.5	9.68
γ	7.55	6.51
σ_1	–	1.22
σ_2	–	0.02

Tabela 3.2: Procena parametra u biologiji za signal 1 podataka koristeći ODJ i SDJ modele

Dakle, zaključak je, da primenom modela stohastičkih diferencijalnih jednačina izbegavamo nestabilnost posmatranog eksperimenta. Stohastički pristup nam obezbeđuje bolje procene parametara, i time nam obezbeđuje pouzdanije modele.

3.3 Logistički model rasta populacije

Ekologija je naučna disciplina, koja analizira i proučava interakciju između organizama i njihovo okruženje. Jedan od bitnijih aspekata ekologije, jeste populacija[9]. Interesovanje ekologa za populaciju je vezano za širenje populacije, fluktuacije u veličini populacije i različitih interakcija u jednoj ili između više populacija. Otuda, i potreba za razvojem stohastičkih modela rasta populacije.

Dinamika populacije upravo ispituje takve promene u vremenu i koristi deterministički eksponencijalni model da ga opiše.

3.3.1 Deterministički model

Model pretpostavlja da je stopa promene veličine populacije ekvivalentna veličini te populacije, i to opisujemo sistemom:

$$dx(t) = r(t)x(t)\,dt,$$

gde je $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ i x_i predstavlja veličinu i - te populacije u trenutku t, a $r(t) = (r_1(t), ..., r_n(t))$, i r_i predstavlja koeficijent priraštaja, tj. stopu rasta i - te populacije. Rešenje sistema u eksponencijalnom obliku je:

$$x(t) = x(0)e^{r(t)t},$$

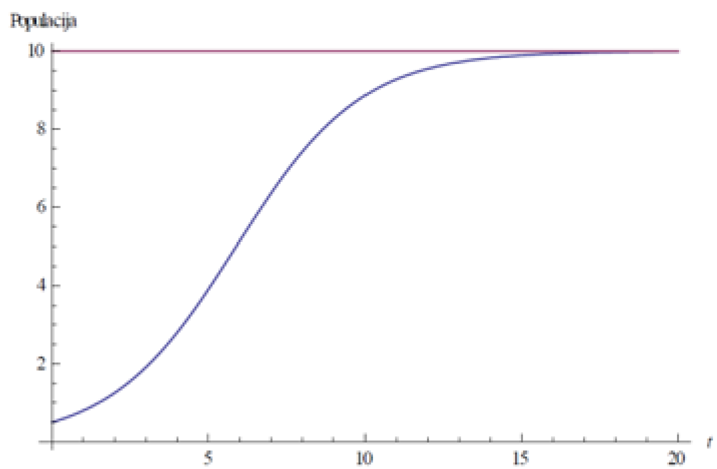
gde $x(0)$ predstavlja početni broj jedinki u posmatranim populacijama, $x(0) = (x_1(0), ..., x_d(0))$.

Kada je $r_i > 0$, $i = 1, ..., n$ dolazi do eksplozije veličine populacije, tj. $lim_{t\to\infty} x_i(t) = \infty$. Dok za $r_i < 0$, $i = 1, ..., n$ dolazi do istrebljenja i - te populacije, tj. $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$. Zaključujemo da eksponencijalni model ubrzano raste, i da nema granica (u smislu prostora, izvora vode, izvore hrane i sl.). Dakle, ovo nije realan prikaz u prirodi, samim tim ni u ekologiji. Veličina populacije će ubrzano rasti kada su početne vrednosti niže. Međutim, kada se početne vrednosti povećavaju, očekujemo da će veličina populacije varirati. Zato uvodimo novi model, takozvani Logistički model, koji sadrži neku granicu K preko koje veličina populacije ne može preći. Logistički model je oblika:

$$(1)\;\; dx(t) = r(t)x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) dt,$$

[9] Pod populacijom podrazumevamo skup jedinki iste vrste, koje žive na određenoj teritoriji u određenom vremenskom periodu. To može biti populacija ljudi, životinja ili bilo kojih organizama.

gde je K_i, $i = 1, ..., n$ kapacitet sredine[10] i - te populacije na određenom prostoru, $K = (K_1, ..., K_n)$. U odnosu na eksponencijalni model, ovde imamo dve fiksne tačke $x(t) = 0$ i $x(t) = K$. U slučaju kada je $x(t) \ll K$, logistički model se svodi na eksponencijalni.

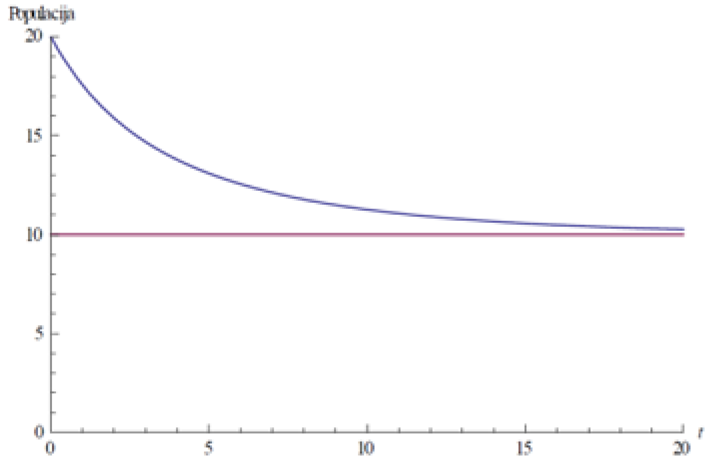


Slika 3.1: Odnos veličine populacije i vremena

Slika 3.1. prikazuje grafikon logističke funkcije, kada je stopa rasta $r = 0.5$, početna veličina populacije $x(0) = 0.5$ i kapacitet $K = 10$. Populacija eksponencijalno raste, do skoro polovine vrednosti kapaciteta, onda se rast usporava dok ne dostigne kapacitet K. Ako bismo zadali veću vrednost početne veličine populacije, kriva bi vremenski brže opadala, u smislu brzine rasta u posmatranom trenutku, u odnosu na populaciju sa manjom početnom veličinom. Ukoliko bismo povećali vrednost stope rasta, populacija bi u kraćem vremenskom periodu dosegla maksimum.

Slika 3.2. prikazuje grafik logističke funkcije, kada je stopa rasta (u ovom slučaju pada) $r = 0.15$, početna veličina populacije $x(0) = 20$ i kapacitet $K = 15$. Broj populacije se smanjuje, kada je početna veličina populacije veća od kapaciteta. Kada bismo smanjivali vrednost početne veličine populacije, onda bi kriva opadala do kapaciteta. Ako bismo povećali stopu pada, populacija bi najbrže padala ka vrednosti kapaciteta, i obratno za smanjenu vrednosti stope pada.

[10] Kapacitet sredine je maksimalna gustina populacije koja može da opstane u datoj sredini.



Slika 3.2: Odnos veličine populacije i vremena kada je kapacitet manji od početne populacije

Rešenje modela (1) je oblika

$$x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + (K - x(0))e^{-\int_0^t r(t)\,dt}}.$$

Ako pretpostavimo da je r konstanta, rešenje možemo zapisati kao

$$(*)\ \ x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + (K - x(0))e^{-rt}}.$$

3.3.2 Stohastički model

Uzmimo u obzir, da su modeli populacije izloženi slučajnim uticajima sredine, što znači da treba da uvedemo stohastički model. Stohastički model nastaje iz determinističkih, pertubacijom nekog od parametra modela. Obično se $r(t)$ - stopa rasta populacije pertubuje sa $r(t) + \xi(t)dW(t)$, gde je $W(t)$ jednodimenzionalno Braunovo kretanje, a $\xi(t)$ predstavlja ne slučajnu funkciju koja prikazuje slabost i intezitet šuma u trenutku t.

Stohastički logistički model, je oblika:

$$(2)\ \ dx(t) = x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)(r(t)\,dt + \xi(t)\,dW(t)),\ t \geq 0,$$

gde je $W = \{W(t), t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Braunovo kretanje definisano na prostoru verovatnoće $\{\Omega, U, \{U_t\}_{t\geq 0}, \mathrm{P}\}$, sa filtracijom $\{U_t\}_{t\geq 0}$, $x(0)$ je slučajna promenljiva nezavisna od W, takva da $0 < x(0) < K$ i $x(t)$ je nepoznat stohastički proces, koji predstavlja rešenje jednačine (2) zadovoljavajući početno stanje $x(0)$. Kako logistički model zahteva pozitivno rešenje $x(t)$, onda treba da ispitamo pod kojim uslovima takvo jedinstveno rešenje postoji.

3.3.3 Egzistencija i jedinstvenost pozitivnog rešenja

Očigledno je da su $x(t) = 0$ i $x(t) = K$ rešenja jednakosti (2). Pretpostavimo da je ipak $x(t) \neq 0$ i $x(t) \neq K$. Primenjujući Itôvu formulu, opažamo da je

$$\begin{aligned}
d\ln\left|\frac{K-x(t)}{x(t)}\right| &= d\ln|K-x(t)| - d\ln|x(t)| \\
&= -\frac{dx(t)}{K-x(t)} - \frac{(dx(t))^2}{2(K-x(t))^2} - \frac{dx(t)}{x(t)} + \frac{(dx(t))^2}{2x^2(t)} \\
&= -\Bigg(\Big(r(t) - \frac{\xi^2(t)}{2} + \frac{\xi^2(t)}{2}\left(\frac{x(t)}{K}\right)^2 \\
&+ \xi^2(t)\frac{x(t)}{K}\Big)dt + \xi(t)dW(t)\Bigg).
\end{aligned}$$

Tada je

$$(3)\quad \frac{K-x(t)}{x(t)} = Cexp[A(t)],$$

gde je $C = \frac{K-x(0)}{x(0)}$ i $A(t) = -\int_0^t \big(r(s) - \frac{1}{2}\xi^2(s) + \xi^2(s)\frac{x(t)}{K}\big)ds + \xi(s)dW(s)$.

U zavisnosti od veličine populacije $x(0)$, razlikujemo dva slučaja:

(i) Neka je $0 < x(0) < K$. Tada je $C = \frac{K-x(0)}{x(0)} > 0$ pa je i

$$(4)\quad 0 < x(t) < K,\ t \geq 0.$$

Otuda zaključujemo na osnovu (3) da je

$$(5)\quad x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + (K-x(0))exp[A(t)]}.$$

(ii) Neka je $0 < K < x(0)$. Tada je $C = \frac{K-x(0)}{x(0)} < 0$ pa je i

$$(6)\quad 0 < K < x(t),\ t \geq 0.$$

Otuda zaključujemo na osnovu (3) da je

$$(7)\ \ x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) - (K - x(0))exp[A(t)]}.$$

U specijalnom slučaju kada su r i ξ konstantne vrednosti, tj. $r(t) = r$ i $\xi(t) = \xi$, onda je

$$(8)\ \ x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) \pm (K - x(0))exp[\psi(t)]},$$

gde je

$$\psi(t) = -\big((rt - \frac{\xi^2}{2}t + \frac{\xi^2}{K}\int_0^t x(s))ds + \xi W(t)\big).$$

U slučaju da je $\xi = 0$, imamo $(*)$.

U sledećem segmentu ćemo formulisati teoremu egzistencije i jedinstvenosti pozitivnog rešenja $x(t)$ jednačine (2). Štaviše, dokazaćemo uniformnu neprekidnost od $x(t)$ u smislu da je neprekidna i da je skoro svaka trajektorija uniformno neprekidna za $t > 0$. Da bi dokazali uniformnu neprekidnost pozitivnog rešenja pozvaćemo se na Kolmogorov - Čentsov teoremu.

Teorema 3.3.1. (Kolmogorov - Čentsov) *Neka je $\{X_t\}_{t\in T}$ stohastički proces, čiji je indeksni skup T prebrojiv skup tačaka t u kompaktnom skupu $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Pretpostavimo da postoje pozitivne konstante α, β, γ i C takve da*

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{d+\beta}, \textit{za svako}\, t, s \in T.$$

Tada se $\{X_t\}_{t\in T}$ može proširiti na $\{X_t\}_{t\in K}$ sa indeksnim skupom K i sa verovatnoćom jedan $t \to \tilde{X}_t$ je neprekidan. Štaviše, trajektorije proširenja su Holder neprekidne, što znači da

$$\max_{s\neq t\in K} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} < \infty,$$

skoro sigurno.

Teorema 3.3.2. *Za svaku početnu vrednost $x(0)$, takvu da zadovoljava $0 < x(0) < K$, postoji jedinstveno, uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednačine (2).*

Dokaz. Neka je $0 < x(0) < K$. Na osnovu (4), definišemo stohastički proces $\{y(t), t \geq 0\}$ kao

$$y(t) := \ln \frac{K - x(t)}{x(t)}.$$

Ukoliko primenimo Itôvu formulu, dobijamo $dy(t) = f(y(t))dt + g(y(t))dW(t)$, $t \geq 0$, gde je

$$f(y(t)) = \left(r(t) + \xi^2(t) \frac{(1 - e^y)}{2(1 + e^y)} \right)$$

i

$$g(y(t)) = -\xi(t),$$

za svako $t > 0$ i $y(0) := \ln \frac{K - x(0)}{x(0)}$. Funkcije f i g su ograničene, neprekidne, zadovoljavaju Lipšicov uslov i uslov linearnog rasta. Stoga jednačina (7) ima jedinstveno neprekidno rešenje $y(t)$, $t > 0$ koje zadovoljava početni uslov $y(0)$. Kako je $x(t) = \frac{K}{1 + e^{y(t)}}$, dokazaćemo da je $x(t)$ rešenje jednakosti (7). Zaista,

$$\begin{aligned}
dx(t) &= d\left(\frac{K}{1 + e^{y(t)}} \right) \\
&= \frac{-Ke^{y(t)}}{(1 + e^{y(t)})^2} \left(dy(t) + \frac{1 - e^{y(t)}}{2(1 + e^{y(t)})} dy(t)dy(t) \right) \\
&= \frac{K}{1 + e^{y(t)}} \frac{e^{y(t)}}{1 + e^{y(t)}} (r(t)dt + \xi(t)dW(t)) \\
&= x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) (r(t)dt + \xi(t)dW(t)).
\end{aligned}$$

Sada, pretpostavimo da su $r(t) = r$ i $\xi(t) = \xi$. U cilju dokaza da je skoro svaka trajektorija uniformno neprekidna za $t \geq 0$, uzećemo u obzir jednačinu (2) u formi integrala:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s))ds + \int_0^t g(x(s))dW(s), \ t \geq 0,$$

gde je $0 < x(0) < K$ i gde su

$$f(x(s)) = rx(s)\left(1 - \frac{x(s)}{K} \right)$$

i

$$g(x(s)) = \xi x(s)\left(1 - \frac{x(s)}{K} \right).$$

Neka je dalje, $0 < u < v < \infty$, $v - u \leq 1$ i $p > 2$. Koristeći Holderovu nejednakost, možemo zapisati

$$\begin{aligned} E|x(t)-x(s)|^p &\leq 2^{p-1}(v-u)^{p-1}\int_0^t E[f(x(s))]^p ds \\ &+ 2^{p-1}\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}}(v-u)^{\frac{p}{2}-1}\int_u^v E[g(x(s))]^p ds. \end{aligned}$$

Kako je

$$E|f(x(s))|^p \leq (rK)^p$$

i

$$E|g(x(s))|^p \leq (\xi K)^p,$$

zaključujemo na osnovu (8) da

$$E|x(t)-x(s)|^p \leq A(v-u)^{\frac{p}{2}},$$

gde je

$$A = 2^{p-1}K^p\left(r^p(s) + \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\xi^2(s)\right).$$

Primena Kolmogoreve - Čentsove teoreme implicira da je skoro svaka trajektorija od $x(t)$ lokalna, ali uniformno Holder - neprekidna sa eksponentom $\gamma \in \left(0, \frac{p-2}{2p}\right)$ pa je i uniformno neprekidna na $t \geq 0$.

Ostalo je još da pokažemo jedinstvenost pozitivnog rešenja i to kontradikcijom. Pretpostavimo da su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dva pozitivna rešenja jednačine (2) sa istom početnom vrednošću $x(0)$, gde je $0 < x(0) < K$. Tada je

$$d(x_2(t)-x_1(t)) = (x_2(t)-x_1(t))\left(1-\frac{x_2(t)-x_1(t)}{K}\right)(rdt+\xi dW(t)).$$

Označimo sa $J(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Tada je

$$J(t) = \int_0^t J(s)\left(1-\frac{x_2(s)-x_1(s)}{K}\right)(rds+\xi dW(s)).$$

Koristeći nejednakost $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, Holderovu nejednakost, Itôvu izometriju ($E[(\int_S^T f(t,w)dW(t)(\omega))^2] = E[\int_S^T f^2(t,\omega)dt]$) i činjenicu da je $0 < x_i(t) < K$, $i = 1, 2$, sledi iz (4) da je

$$\begin{aligned} E(J(t))^2 &\leq 2(r^2t+\xi^2)E\int_0^t J^2(s)\left(1-\frac{x_2(s)-x_1(s)}{K}\right)^2 ds \\ &\leq 2(r^2t+\xi^2)E\int_0^t J^2(s)ds. \end{aligned}$$

Na kraju, na osnovu Gronvalove leme sledi da je $E(J(t))^2 = 0$ pa je

$$E(x_2(t) - x_1(t))^2 = 0.$$

Prema Čebiševoj nejednakosti, za proizvoljno $\epsilon > 0$

$$P\{|x_2(t) - x_1(t)| \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon^2} E|x_2(t) - x_1(t)|^2 = 0.$$

Kako je $x_2(t) = x_1(t)$, za svako $t \geq 1$, ovaj dokaz je kompletan.

3.3.4 Stabilnost pozitivnog rešenja

Pošto rešenje jednačine (2) nije eksplicitno rešivo, bitno je da istražimo ponašanje pozitivnog rešenja tokom nekog dužeg perioda. Da bismo to postigli, treba da primenimo sledeću nejednakost nekoliko puta

$$\frac{1}{a} \leq \frac{\ln a - \ln b}{a - b} \leq \frac{1}{b}, \quad 0 < b < a.$$

Lema 3.3.1. *Neka je $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ integrabilna i uniformno neprekidna funkcija. Tada*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0.$$

Teorema 3.3.3. *Neka je $x(t)$ uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednakosti (2) sa početnom vrednošću $x(0)$, pri čemu je $0 < x(0) < K$. Tada:*

(i) ako je $r > \xi^2$, onda $\lim_{t\to\infty} E(K - x(t))^2 = 0$;

(ii) ako je $r < -\xi^2$, onda je $\lim_{t\to\infty} E(x(t))^2 = 0$.

Dokaz. Na osnovu (4) znamo da je $0 < x(t) < K$, za $t \geq 0$, kada je $0 < x(0) < K$.

(i) Primenjujući Itôvu formulu na $V^2(t)$, gde je

$$V(t) = \ln K - \ln x(t), \quad t \geq 0$$

Ljapunova funkcija, implicira da

$$\begin{aligned} dV^2(t) &= 2V(t)dV(t) + (dV(t))^2 \\ &= -2(\ln K - \ln x(t))\left(\frac{K - x(t)}{K}\right) \\ &\quad \left(\left(r - \frac{K - x(t)}{2K}\xi^2\right)dt + \xi dW(t)\right) \\ &+ \frac{(K - x(t))^2}{K^2}\xi^2 dt, \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}
EV^2(t) &= EV^2(0) \\
&+ E\int_0^t [-2(\ln K - \ln x(s))\Big(\frac{K - x(s)}{K}\Big)\Big(\Big(r - \frac{K - x(s)}{2K}\xi^2\Big) \\
&+ \frac{(K - x(s))^2}{K^2}\xi^2]ds.
\end{aligned}$$

Koristeći pretpostavku da je $r > \xi^2$ dolazimo do

$$\begin{aligned}
\frac{dEV^2(t)}{dt} &< -\frac{2}{K}E\Big[\Big(\frac{(K - x(t))^2}{x(t)}\Big)\Big(\Big(r - \frac{K - x(t)}{2K}\xi^2\Big) \\
&- \frac{(K - x(t))^2}{2K}\xi^2]\Big)\Big] \\
&= -\frac{2}{K^2}E\Big[(K - x(t))^2\Big(r - \frac{K - x(t)}{2K}\xi^2 - \frac{\xi^2}{2}\Big)\Big] \\
&< -RE[(K - x(t))^2],
\end{aligned}$$

gde je $R = \frac{2}{K^2}(r - \xi^2)$ pozitivna konstanta. Prema tome, $EV^2(t)$ se smanjuje i stoga,

$$EV^2(t) < EV^2(0) - R\int_0^t E(K - x(s))^2 ds.$$

Kako je $EV^2(0) = E(\ln K - \ln x(0))^2 < \infty$, onda sledi da je

$$EV^2(0) + R\int_0^t E(K - x(s))^2 ds < EV^2(0) < \infty,$$

što implicira da je $E(K - x(t))^2 \in L^1[0, \infty]$. Primenom teoreme egzistencije i jedinstvenosti pozitivnog rešenja zaključujemo da je $E(K - x(t))^2$ uniformno neprekidna na $[0, \infty]$ i da na osnovu prethodne leme važi

$$\lim_{t\to\infty} E(K - x(t))^2 = 0.$$

(ii) Analogno prvom delu dokaza pod (i), primenjujemo Itôvu formulu na $V^2(t)$, gde je

$$V(t) = \ln K - \ln(K - x(t)),$$

Ljapunova funkcija, vidimo da je

$$\begin{aligned} dV^2(t) &= -2(\ln K - \ln(K - x(t)))\frac{x(t)}{K}\bigg(\bigg(- r - \frac{x(t)}{2k}\xi^2\bigg)dt \\ &+ \xi\frac{x(t)}{K}dW(t)\bigg) + \frac{x^2(t)}{K^2}\xi^2 dt. \end{aligned}$$

Na sličan način kao i u prethodnoj diskusiji, zaključujemo

$$\frac{dEV^2(t)}{dt} < -DE(x(t))^2,$$

gde je $D = -\frac{2}{K}(r + \xi^2)$ konstanta i otuda $EV^2(t)$ opada. Dakle,

$$EV^2(t) + D\int_0^t E(x(s)^2)ds < EV^2(0) < \infty,$$

gde je $EV^2(0) = E(\ln K - \ln(K - x(0)))^2 < \infty$. Stoga, $E(x(t))^2 \in L^1[0, \infty]$. Prema teoremi egzistencije i jedinstvenosti pozitivnog rešenja i prethodne leme sledi

$$\lim_{t\to\infty} E(x(t))^2 = 0,$$

čime je dokaz upotpunjen.

Teorema 3.3.4. *Neka je $x(t)$ uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednakosti (2) sa početnom vrednošću $x(0)$, pri čemu je $0 < x(0) < K$. Tada:*

(i) ako je $r > \frac{\xi^2}{2}$, onda je $\lim_{t\to\infty} E(x(t)) = K$;

(ii) ako je $r < -\frac{\xi^2}{2}$, onda je $\lim_{t\to\infty} E(x(t)) = 0$

Dokaz. Neka je $0 < x(t) < K$, $t \geq 0$.

(i) Koristićemo Ljapunovu funkciju

$$V(t) = \ln K - \ln x(t), \;\; t \geq 0$$

i primenićemo Itôvu formulu. Time dobijamo

$$\begin{aligned}
dV(t) &= -\frac{dx(t)}{x(t)} + \frac{dx(t)^2}{2x(t)^2} \\
&= -\frac{K - x(t)}{K}(rdt + \xi dW(t)) \\
&+ \frac{\alpha^2}{2K^2}(K - x(t))^2 dt \\
&= -\frac{K - x(t)}{K}\left(\left(r - \frac{K - x(t)}{2K}\xi^2\right)dt + \xi dW(t)\right).
\end{aligned}$$

Tada je

$$EV(t) = EV(0) - E\int_0^t \frac{K - x(t)}{K}\left(r - \frac{K - x(t)}{2K}\xi^2\right)ds.$$

Kako je $r > \frac{\xi^2}{2}$, onda

$$\frac{dEV(t)}{dt} < -\frac{1}{2K}(2r - \xi^2)E(K - x(t)) = -PE(K - x(t)),$$

gde je $P = \frac{1}{2K}(2r - \xi^2)$ pozitivna konstanta. Na isti način, kako je $EV(t)$ opadajuća i $EV(0) = E(\ln K - \ln(x(0))) < \infty$, onda

$$EV(t) + P\int_0^t E(K - x(s))ds < EV(0) < \infty,$$

pa je $E(K - x(t)) \in L^1[0, \infty]$ što dovodi do zaključka da je

$$\lim_{t\to\infty} E(K - x(t)) = 0.$$

(ii) Koristimo uslov $r < -\frac{\xi^2}{2}$ i Ljapunovu funkciju

$$V(t) = \ln K - \ln(K - x(t)),\ \ t \geq 0.$$

Primenjujući Itôvu formulu dolazimo do

$$\begin{aligned}
dV(t) &= \frac{dx(t)}{K - x(t)} + \frac{(dx(t))^2}{2(K - x(t))^2} \\
&= \frac{x(t)}{K}(rdt + \xi dW(t)) + \frac{(x(t))^2}{2K^2}\xi^2 dt.
\end{aligned}$$

Ponavljajući prethodnu proceduru uviđamo da je

$$EV(t) = EV(0) - E\int_0^t \frac{x(s)}{K}\Big(-r - \frac{x(s)}{2K}\xi^2\Big)ds,$$

pa je

$$\frac{dEV(t)}{dt} < -E(x(t))\frac{1}{K}(-r - \frac{\xi^2}{2}) = -RE(x(t)),$$

gde je $R = -\frac{1}{2K}(2r + \xi^2) > 0$ je konstanta. Analogno prethodnom dokazu pod (i) zaključujemo da je

$$\lim_{t\to} E(x(t)) = 0.$$

Prethodna teorema pokazuje da pod određenim uslovima, deterministički logistički populacioni model (1) i odgovarajuća stohastička diferencijalna jednačina (2) imaju sličnu osobinu globalne stabilnosti pozitivnog i ograničenog rešenja.

Modeliranje sistema determinističkim diferencijalnim jednačinama obično zahteva da su svi parametri poznati. Međutim, u nekim slučajevima njihova vrednost zavisi od fluktuacija zbog nekog spoljašnjeg ili unutrašnjeg šuma. Ovde smo definisali stohastički logistički model rasta populacije, čiji parametar, stopa rasta populacije nije poptpuno određen i zavisi od nekih slučajnih efekata na životnu sredinu.

4

Stohastički model predator - plen

4.1 Klasičan Lotka - Voltera predator - plen model

Stohastički pristup studije predator - plen sistema je jedna od glavnih tematika u oblasti ekologije. Ponašanje sistema je nepredvidljivo, jer posmatrajući prirodu, jedna vrsta životinja (organizama) ne može da opstane sama. Vrste se međusobno nadmeću za teritoriju i predatorstvo. Pod predatorstvom podrazumevamo odnos ishrane između predatora i plena, pri čemu je taj odnos recipročan. Uglavnom predatori imaju pozitivno dejstvo, dok plen ima negativno.

Kako bismo uspeli da predvidimo ponašanje ovakvih sistema, treba da primenimo neki od matematičkih modela. Tokom godina, predstavljeni su različiti modeli, u cilju razmatranja različitih aspekata prirode, uključujući procese rađanja i umiranja (koji smo obradili), evolucije, izumiranja i drugo. Navedeni procesi predstavljaju prirodna stohastička uopštenja determinističkih modela populacije. Takvi modeli se odnose na rast populacije jedne vrste koja nastanjuje neku sredinu u kojoj se količina resursa ne menja i broj drugih vrsta je fiksan.

U ovoj glavi ćemo predstaviti klasičan predator - plen model. Predator - plen model je originalno predstavljen od strane Alfreda Lotke i Vita Voltera 1920. godine.

Deterministički model

Klasičan model uzima u obzir interakciju dve populacije u trenutku t, gde ćemo sa $f(t)$ označiti predatorsku vrstu, a sa $r(t)$ vrstu plena. U odsustvu predatora, vrsta plena prati eksponencijalni rast:

$$\frac{dt(t)}{dt} = \alpha r(t),$$

pri čemu je $r(t) > 0$, za svako t i α predstavlja stopu rađanja plena. Pretpostavljamo da uvek ima dovoljno hrane za plen. Slično, ako izostavimo vrstu plena, umiranje predatorske vrste je eksponencijalno:

$$\frac{df(t)}{dt} = -\delta f(t),$$

gde je $f(t) > 0$, za svako t i $\delta > 0$ predstavlja stopu umiranja predatora. Možemo da pretpostavimo da ima i neki drugi izvor hrane za predatore, ali nije dovoljna za održavanje cele populacije.

U slučaju kada su obe vrste prisutne, interakcija tih vrsta se može mo - delirati kao proizvod veličina njihovih populacija, tj. $r(t)f(t)$. U klasičnom modelu sa $\beta r(t)f(t)$, za $\beta > 0$ označavamo stopu umiranja plena kao rezultat interakcije populacije predatora i populacije plena. Kako je pretpostavka da je plen glavni izvor hrane za predatore, onda sa $\gamma r(t)f(t)$, za $\gamma > 0$ označavamo stopu rađanja predatora. Ove pretpostavke daju sledeći sistem jednačina:

$$\frac{dr(t)}{dt} = \alpha r(t) - \beta r(t)f(t)$$

(1)

$$\frac{df(t)}{dt} = \gamma r(t)f(t) - \delta f(t),$$

za α, β, γ, i $\delta > 0$.

Stohastički model

U stohastičkoj formulaciji ovog modela ćemo sa $R(t)$ označiti veličinu populacije plena u trenutku t, a sa $F(t)$ veličinu populacije predatora u trenutku t, pri čemu su obe slučajne promenljive vremenski zavisne. Pretpostavimo da umesto determinističkih stopa rađanja i umiranja populacija predatora i plena postoje verovatnoće rađanja i umiranja populacija predatora i plena.

Verovatnoće rađanja i umiranja predatora i plena

Verovatnoća da ima r vrsta plena i f vrsta predatora u trenutku t je dato sa

$$P_{r,f} = P\big(R(t) = r, F(t) = f\big), \text{za } r = 0, 1, 2, ... \text{ i } f = 0, 1, 2, ...$$

Pretpostavimo da je infinitezimalna verovatnoća rađanja pojedinačnog plena tokom nekog kratkog vremenskog intervala Δt predstavljena kao $\alpha r \Delta t + o(\Delta t)$, gde je $\alpha > 0$ stopa rađanja plena. Takođe, da je infinitezimalna verovatnoća umiranja pojedinačnih predatora tokom nekog kratkog vremenskog intervala Δt predstavljena kao $\delta f \Delta t + o(\Delta t)$, gde je $\delta > 0$.

Da bi podražavali deterministički model, pretpostavićemo da je infinitezimalna verovatnoća umiranja plena tokom Δt data sa $\beta r f \Delta t + o(\Delta t)$, gde je $\beta > 0$ stopa umiranja plena. Slično, pretpostavljamo da je infinitezimalna verovatnoća rađanja predatora tokom Δt data sa $\gamma r f(\Delta t) + o(\Delta t)$, gde je $\gamma > 0$ stopa rađanja predatora. Ovakav predator - plen proces možemo opisati prelazima i stopama u Tabeli 4.1.

Prelazi		**Stope**
$r \to r+1$	$f \to f$	αr
$r \to r-1$	$f \to f$	$\beta r f$
$r \to r$	$f \to f+1$	$\gamma r f$
$r \to r$	$f \to f-1$	δf

Tabela 4.1: Mogući prelazi i odgovarajuće stope u predator - plen procesu

Koristićemo Kolmogorove jednačine za dobijanje verovatnoće $P_{r,f}(t)$, uzimajući u obzir verovanoću $P_{r,f}(t + \Delta t)$. Ova verovatnoća se dobija kao suma verovatnoća sledećih međusobno isključivih događaja:

(1) Postoji r plena i f predatora u trenutku t i nema ni rađanja ni umiranja ove vrste u $(t, t + \Delta t)$.

(2) Postoji $r - 1$ plen i f predatora u trenutku t i rađanje plena se dešava u $(t, t + \Delta t)$.

(3) Postoji $r + 1$ plen i f predatora u trenutku t i umiranje jednog plena se dešava u $(t, t + \Delta t)$.

(4) Postoji r plena i $f + 1$ predator i umiranje jednog predatora se dešava u $(t, t + \Delta t)$.

Pretpostavka je da je Δt dovoljno malo da bi garantovalo da se samo jedan od ovih događaja realizuje u $(t, t+\Delta t)$. Dakle, dolazimo do

$$
\begin{aligned}
(2)\ P_{r,f}(t+\Delta t) &= (1-\beta rf+\delta f+r\alpha+rf\gamma+o(\Delta t))\Delta t P_{r,f}(t)\\
&+ (\alpha(r-1)+o(\Delta t))\Delta t P_{r-1,f}(t)\\
&+ (\gamma(f-1)r+o(\Delta t))\Delta t P_{r,f-1}(t)\\
&+ (\beta(r+1)f+o(\Delta t))\Delta t P_{r+1,f}(t)\\
&+ (\delta(f+1)+o(\Delta t))\Delta t P_{r,f+1}(t),
\end{aligned}
$$

za $r = 0, 1, 2, ...$ i $f = 0, 1, 2, ...$

Sređivanjem prethodne jednakosti i puštanjem $\Delta t \to 0$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
(3)\ P'_{r,f}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{r,f}(t+\Delta t)-P_{r,f}(t)}{\Delta t}\\
&= -(\beta rf+\delta f+r\alpha+rf\gamma)P_{r,f}(t)+\alpha(r-1)P_{r-1,f}(t)\\
&+ \gamma(f-1)rP_{r,f-1}(t)+\beta(r+1)fP_{r+1,f}(t)\\
&+ \delta(f+1)P_{r,f+1}(t),
\end{aligned}
$$

za $r = 0, 1, 2, ...$ i $f = 0, 1, 2, ...$

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina iznad je komplikovano i predstavlja otvoren problem za dobijanje rešenja u zatvorenoj formi. Jedna od metoda za dobijanje numeričkog rešenja sistema rađanja i umiranja je randomizacija, koja se može koristiti i u našem modelu. Međutim, ovom metodom se nećemo baviti u radu. Umesto toga predstavićemo funkciju izvodnice.

Funkcija izvodnica

Definicija 4.1.1. *Ako je X diskretna slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz $\{0, 1, 2, ...\}$, onda je funkcija izvodnica promenljive X definisana sa*

$$G(z) = E(z^X) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x)z^x.$$

Definicija 4.1.2. *Ako je $X = (X_1, ..., X_d)$ diskretna slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz $\{0, 1, 2, ...\}^d$, onda je funkcija izvodnica promenljive X definisana sa*

$$G(z) = G(z_1, ..., z_d) = E(z_1^{X_1}, ..., z_d^{X_d}) = \sum_{x_1,...,x_d=0}^{\infty} p(x_1, ..., x_d)z_1^{x_1}\cdots z_d^{x_d}.$$

Dakle, sistem možemo proučavati posmatrajući

$$(4)\ \phi(z_1, z_2, t) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} P_{r,f}(t) z_1^r z_2^f$$

kao funkciju izvodnicu našeg sistema. Tada se $\phi(z_1, z_2, t)$ može izraziti kao parcijalna diferencijalna jednačina.

Na osnovu (3) i (4) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
(5)\ \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} P'_{r,f}(t) z_1^r z_2^f \quad = \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}(-(\beta r f + \delta f + r\alpha + r f \gamma) P_{r,f}(t) z_1^r z_2^f \\
+ \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}(\alpha(r-1) P_{r-1,f}(t)) z_1^r z_2^f \\
+ \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}(\gamma(f-1) r P_{r,f-1}(t)) z_1^r z_2^f \\
+ \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}(\beta(r+1) f P_{r+1,f}(t)) z_1^r z_2^f \\
+ \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}(\delta(f+1) P_{r,f+1}(t)) z_1^r z_2^f.
\end{aligned}
$$

Odnosno,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(z_1, z_2, t)}{\partial t} \quad = \quad & -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} r f \gamma P_{r,f}(t) z_1^r z_2^f \\
- \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} f \alpha P_{r,f}(t) z_1^r z_2^f \\
- \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty} \delta r f P_{r,f}(t) z_1^r z_2^f \\
+ \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}(\beta(r+1) f P_{r+1,f}(t)) z_1^r z_2^f \\
+ \quad & \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{f=0}^{\infty}(\delta(f+1) P_{r,f+1}(t)) z_1^r z_2^f.
\end{aligned}
$$

Posmatrajući parcijalni izvod od (4), uviđamo da je

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi(z_1,z_2,t)}{\partial t} &= \beta\Big(z_2(1-z_1)-\gamma z_1z_2(1-z_2)\Big)\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_2\partial z_1}\\ &+ \delta(1-z_2)\frac{\partial\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_2}\\ &- \alpha z_1(1-z_1)\frac{\partial\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1}\end{aligned}$$

kao parcijalna diferencijalna jednačina za funkciju izvodnicu sistema (3).

Funkcija izvodnica (4) se može koristiti za izračunavanje očekivanja veličine populacije. Diferenciranjem u odnosu na z_1 dobijamo izraz očekivane veličine populacije plena

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial\phi(z_1,z_2,t)}{\partial t} &= (2z_1-1)\alpha\frac{\partial\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1}\\ &+ z_1(z_1-1)\alpha\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1^2}\\ &+ (1-z_2)\delta\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1\partial z_2}\\ &+ (-z_2\beta+(z_2^2-z_2)\gamma)\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1\partial z_2}\\ &+ (z_2(1-z_1)\beta+z_1z_2(z_2-1)\gamma)\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1\partial z_2^2}.\end{aligned}$$

Zamenom $z_1 = z_2 = 1$ dolazimo do

$$(6)\quad \frac{\partial}{\partial t}E(R(t)) = \alpha E(R(t)) - \beta E(R(t)F(t)).$$

Analogno, očekivanje veličine populacije predatora dobijamo diferenciranjem u odnosu na z_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial \phi(z_1,z_2,t)}{\partial t} &= z_1(z_1-1)\alpha\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_1 \partial z_2}\\
&- \delta\frac{\partial \phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_2}\\
&+ (1-z_2)\delta\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_2}\\
&+ ((1-z_1)\beta+(2z_1z_2-z_1)\gamma)\frac{\partial^2\phi(z_1,z_2,t)}{\partial z_2 \partial z_1}\\
&+ ((z_2(1-z_1)\beta)+z_1z_2(z_2-1)\gamma)\frac{\partial^3\phi(z_1,z_2,t)}{\partial^2 z_2 \partial z_1}.
\end{aligned}$$

Zamenom $z_1 = z_2 = 1$ dolazimo do

$$(7)\ \frac{\partial}{\partial t}E(F(t)) = \gamma E(R(t)F(t)) - \delta E(F(t)).$$

U ovom kontekstu, (6) i (7) predstavljaju model predator - plen dobijen u (1).

Klasičan predator - plen model je fundamentalan model u ekologiji. Pretpostavlja da nema spoljašnjih uticaja u vidu zagađenja, bolesti, epidemija i slično na populaciju predatora i populaciju plena. Naravno, model se može proširiti dodavanjem promenljivih u ovom smislu, što model čini mnogo kompleksnijim. Sa više promenljivih, jednačine zahtevaju više matematičke analize i numeričke stimulacije.

4.2 Opšti model dve populacije u interakciji

Postoje i drugi načini za razvijanje modela stohastičkih diferencijalnih jednačina, osim pomenute procedure u prethodnom modelu. Jedna od hipoteza za dati stohastički dinamički sistem je da su drift i koeficijent difuzije u modelu stohastičkih diferencijalnih jednačina linearna funkcija rešenja. Tada, uz pretpostavku da su podaci dostupni, metod statističke procene može dati vrednosti nepoznatih parametara. Time ćemo se voditi u ovom modelu.

Pristup datog modela se može primenjivati na populacije iste vrste ili na populacije različitih vrsta. Populacije dve iste vrste se mogu razlikovati, na primer, po geografskoj lokaciji ili po statusu u epidemiji. U takvom slučaju, na primer, dve populacije mogu doći u interakciju migracijom. Populacije dve različite vrste dolaze do interakcije u slučaju nadmetanja i u slučaju predatora i plena.

Neka sa $x_1(t)$ i $x_2(t)$ označimo veličine dve populacije u trenutku t. Parametri koji su bitni za ove dve populacije su označeni sa $b_1, d_1, b_2, d_2, m_{12}$ i m_{21}. Parametri b_i i d_i su stope rađanja i umiranja *per capita*, respektivno, za populaciju i i m_{ij} je stopa da se populacija i transformiše u populaciju j. Odnosno, u slučaju geografske izolacije populacija, m_{ij} bi označavalo stopu migracije populacije i ka populaciji j. U smislu epidemije, m_{12} bi označavalo stopu podložnosti infekcije, a m_{21} stopu oporavljenih od epidemije, tj. infekcije. Svaki parametar može zavisiti od veličine populacije x_1 i x_2 i vremenskog trenutka t, tj. $b_i = b_i(t, x_1, x_2)$, $d_i = d_i(t, x_1, x_2)$ i $m_{ij} = m_{ij}(t, x_1, x_2)$, gde se pretpostavlja da je svaki parametar glatka funkcija od x_1, x_2 i t. Zbog jednostavnosti notacije, zavisnost parametara od x_1, x_2 i t, nećemo ekspliitno označavati.

U kratkom intervalu Δt postoji sedam verovatnoća promene populacije Δ_X, zanemarujući višestruka rađanja, umiranja ili transformacije u trenutku Δt, koje imaju verovatnoće reda $(\Delta t)^2$. Ove verovatnoće su prikazane u Tabeli 4.2, zajedno sa njihovim odgovarajućim verovatnoćama. Na primer, $\Delta_{X_2} = [-1, 1]^T$ predstavlja kretanje jedne individue iz populacije x_1 u populaciju x_2 tokom vremenskog intervala Δt i verovatnoća ovog događaja je proporcionalna veličini populacije x_1 u vremenskom intervalu Δt, što je dato kao $p_2 = m_{12} x_1 \Delta t$. Dok, na primer $\Delta_{X_4} = [0, 1]^T$ predstavlja rađanje u populaciji x_2 sa verovatnoćom $p_4 = b_2 x_2 \Delta t$. Pretpostavlja se da je $\Delta t > 0$ dovoljno malo da je $p_7 > 0$. Primetimo da je $\sum_{i=1}^{7} p_i = 1$.

Promene	**Verovatnoće**
$\Delta_{X_1} = [-1, 0]^T$	$p_1 = d_1 x_1 \Delta t$
$\Delta_{X_2} = [-1, 1]^T$	$p_2 = m_{12} x_1 \Delta t$
$\Delta_{X_3} = [0, -1]^T$	$p_3 = d_2 x_2 \Delta t$
$\Delta_{X_4} = [0, 1]^T$	$p_4 = b_2 x_2 \Delta t$
$\Delta_{X_5} = [1, -1]^T$	$p_5 = m_{21} x_2 \Delta t$
$\Delta_{X_6} = [1, 0]^T$	$p_6 = b_1 x_1 \Delta t$
$\Delta_{X_7} = [0, 0]^T$	$p_7 = 1 - \sum_{i=1}^{6} p_i$

Tabela 4.2: Moguće promene u sistemu dve populacije sa odgovarajućim verovatnoćama

Sledeće što treba da uradimo, jeste da nađemo očekivanje promene $E(\Delta_X)$

i kovarijansu matrice $E(\Delta_X(\Delta_X)^T)$ za vremenski interval Δt. Ne uzimajući u obzir $(\Delta t)^2$,

$$\begin{aligned} E(\Delta_X) &= \sum_{j=1}^{7} p_j \Delta_{X_j} \\ &= \begin{bmatrix} b_1x_1 - d_1x_1 - m_{12}x_1 + m_{21}x_2 \\ b_2x_2 - d_2x_2 - m_{21}x_2 + m_{12}x_1 \end{bmatrix} \Delta t \end{aligned}$$

i

$$E(\Delta_X(\Delta_X)^T) = \sum_{j=1}^{7} p_j \Delta_{X_j}(\Delta_{X_j})^T$$

$$= \begin{bmatrix} b_1x_1 + d_1x_1 + m_{12}x_1 + m_{21}x_2 & -m_{12}x_1 - m_{21}x_2 \\ -m_{12}x_1 - m_{21}x_2 & b_2x_2 + d_2x_2 + m_{12}x_1 + m_{21}x_2 \end{bmatrix} \Delta t.$$

Kako je proizvod $E(\Delta_X)(E(\Delta_X))^T$ reda $(\Delta t)^2$, matrica kovarijanse V je jednaka $\frac{E(\Delta_X(\Delta_X)^T)}{\Delta t}$. Jednostavno je pokazati da je matrica V pozitivno definitna, jer ima pozitivno definitan kvadratni koren $B = V^{\frac{1}{2}}$. Vektor μ je definisan kao

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E(\Delta_X)}{\Delta t} \\ &= \begin{bmatrix} b_1x_1 - d_1x_1 - m_{12}x_1 + m_{21}x_2 \\ b_2x_2 - d_2x_2 - m_{21}x_2 + m_{12}x_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dok je matrica V definisana kao

$$V = \begin{bmatrix} b_1x_1 + d_1x_1 + m_{12}x_1 + m_{21}x_2 & -m_{12}x_1 - m_{21}x_2 \\ -m_{12}x_1 - m_{21}x_2 & b_2x_2 + d_2x_2 + m_{12}x_1 + m_{21}x_2 \end{bmatrix}.$$

Za ovaj dvodimenzionalni sistem, $B = V^{\frac{1}{2}}$ se može dobiti i na sledeći način. Neka je

$$B = V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} a+\omega & b \\ b & c+\omega \end{bmatrix},$$

gde je $\omega = \sqrt{ac - b^2}$ i $d = \sqrt{a + c + 2\omega}$, pri čemu su $a = d_1x_1 + m_{12}x_1 + m_{21}x_2 + b_1x_1$, $b = -m_{12}x_1 - m_{21}x_2$ i $c = m_{12}x_1 + d_2x_2 + b_2x_2 + m_{21}x_2$.

Model stohastičke diferencijalne jednačine dinamike interakcije između dve populacije je predstavljena sledećom formom:

$$(1)\ \ d_X = \mu(t, x_1, x_2)dt + B(t, x_1, x_2)dW(t),$$

gde je $X(0) =_{X_0}$ i $W(t)$ predstavlja dvodimenzionalni Vinerov proces. Data jednačina opisuje dinamiku populacije. Primetimo da, ako je matrica B jednaka nuli, onda se jednačina (1) svodi na deterministički model dinamike populacije. Dakle, stohastički model za jednu populaciju bi izgledao kao

$$dx_1 = (b_1x_1 - d_1x_1)dt + \sqrt{b_1x_1 + d_1x_1}dW_1(t).$$

Takođe, primetimo da je ovo oblik stohastičkog modela predator - plen, i to ili Lotka - Volter model ili Lotka - Volter model sa logističkim rastom.

Numeričko rešenje ovog modela se dobija primenom Ojlerove metode i oblika je

$$x_{1,k+1} = (b_{1,k} - d_{1,k})x_{1,k}h + \sqrt{(b_1, k + d_k)x_{1,k}h}\eta_{1,k}, \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

4.3 Model koji uključuje varijabilnost okoline

U prethodnom modelu dinamike populacije, slučajnosti rađanja, umiranja i interakcije među populacijama predstavljeni su nenula uslovima u matrici kovarijanse. Međutim, i okolina predstavlja još jednu moguću varijaciju koja može da utiče na populaciju, u smislu padavina, populacije predatora, dostupnost hrane i slično. Uključujući dodatne promenljive, komplikuje se osnovni model.

Deterministički model

Uzmimo u obzir deterministički model rasta jedne populacije veličine $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = b(t)y - d(t)y.$$

U različitim okruženjima, *per capita* stope rađanja i umiranja, respektivno, $b(t)$ i $d(t)$, bi bile funkcije naknadnih promenljivih iz okoline i to u formi $b(t, v_1, v_2, ..., v_n)$ i $d(t, v_1, v_2, ..., v_n)$, respektivno, gde $v_1, v_2, ..., v_n$ predstavlja n različitih promenljivih okoline. Kako promenljive $v_1, v_2, ..., v_n$ variraju, odnosno kako se menjaju, tako se menjaju i stope *per capita* rađanja i umiranja. Ovo sugeriše na to da bi aproksimacijom koja uključuje varijabilnost okoline, bez modeliranja dodatnih faktora okoline, stope *per capita* rađanja i umiranja varirale na slučajan način.

Stohastički model

Promene u okolini proizvode slučajne promene u stopama populacija *per capita* rađanja i umiranja i nezavisne su od promena u demografskim[1] varijabilnostima. Ova hipoteza može dati samo grubu aproksimaciju realnih situacija u biologiji ili ekologiji. Međutim, prihvatanje ove hipoteze dovodi do matematičkih modela koji mogu da nam pruže uvid u efekte varijabilnosti okruženja dinamike populacije.

Neka su $y(t), b(t)$ i $d(t)$ veličine populacija u trenutku t. Promene u ove tri promenljive u trenutku t se mogu posmatrati kao nezavisne u datoj hipotezi. Moguće promene Δy, Δb i Δd su prikazane u Tabeli 4.3. Pretpostavlja se poseban oblik verovatnoća stopa *per capita* rađanja i umiranja. Uzmimo u obzir da se stopa *per capita* rađanja i stopa *per capita* umiranja mogu posmatrati na isti način. Pretpostavljeno je da $q_b\Delta t$ predstavlja verovatnoću povezanu sa slučajnom difuzijom stope *per capita* rađanja. Tada $\pm\beta_b(b_e - b)$ predstavlja verovatnoću povezanu sa driftom prema srednjoj vrednosti b_e. Kada je $b(t) \neq b_e$, gde je b_e prosečna stopa *per capita* rađanja u okolini, onda je verovatnoća približavanja ka b_e veća od verovatnoće pomeranja dalje od b_e. Ovako, nerealne vrednosti za stope *per capita* rađanja i umiranja se izbegavaju.

Promene	**Verovatnoće**
$\Delta y_1 = -1$	$p_1 = dy\Delta t$
$\Delta y_2 = 1$	$p_2 = by\Delta t$
$\Delta y_3 = 0$	$p_3 = 1 - (by + dy)\Delta t$
$\Delta b_1 = -\alpha_b$	$p_4 = (q_b - \beta_b(b_e - b))\Delta t$
$\Delta b_2 = \alpha_b$	$p_5 = (q_b + \beta_b(b_e - b))\Delta t$
$\Delta b_3 = 0$	$p_6 = 1 - 2q_b\Delta t$
$\Delta d_1 = -\alpha_d$	$p_7 = (q_d - \beta_d(d_e - d))\Delta t$
$\Delta d_2 = \alpha_d$	$p_8 = (q_d + \beta_d(d_e - d))\Delta t$
$\Delta d_3 = 0$	$p_9 = 1 - 2q_d\Delta t$

Tabela 4.3: Moguće promene u veličini populacije i stopama *per capita* rađanja i umiranja i njihove odgovarajuće verovatnoće

[1] Demografija je nauka o stanovništvu. Demografija istražuje i proučava zakonitosti i pravilnosti u kretanju stanovništva, ustanovljuje kakve su vrste te zakonitosti, njihovo kvalitativno i kvantitativno delovanje i utvrđuje međusobne odnose kretanja stanovništva sa drugim društvenim pojavama.

Sledeći korak je da nađemo očekivanje promena i matricu kovarijanse tih promena. Uzimajući u obzir red $(\Delta t)^2$, očekivana vrednost zadovoljava sledeće

$$\begin{aligned}
E(\Delta y) &= (b(t) - d(t))y(t)\Delta t \\
E((\Delta y)^2) &= (b(t) + d(t))y(t)\Delta t \\
E(\Delta b) &= 2\alpha_b\beta_b(b_e - b(t))\Delta t \\
E((\Delta b)^2) &= 2\alpha_b^2 q_b\Delta t \\
E(\Delta d) &= 2\alpha_d\beta_d(d_e - d(t))\Delta t \\
E((\Delta d)^2) &= 2\alpha_d^2 q_d\Delta t.
\end{aligned}$$

Definišimo sada $\beta_1 = 2\alpha_b\beta_b$, $\beta_2 = 2\alpha_d\beta_d$, $\alpha_1^2 = 2\alpha_b^2 q_b$ i $\alpha_2^2 = 2\alpha_d^2 q_d$.

Kako je matrica kovarijanse dijagonalna za ovaj model, dobijen je sledeći sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}
dy(t) &= (b(t)y(t) - d(t)y(t))dt + \sqrt{(b(t)y(t) + d(t)y(t))}dW_1(t) \\
db(t) &= \beta_1(b_e - b(t))dt + \alpha_1 dW_2(t) \\
dd(t) &= \beta_2(d_e - d(t))dt + \alpha_2 dW_3(t),
\end{aligned}$$

za $(y(t), b(t), d(t)) \in [0, \infty] \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, i gde su $W_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ nezavisni standardni Vinerovi procesi. Dati sistem predstavlja stohastički model jedne populacije koja doživljava varijabilnost okruženja.

Rešenje stohastičke diferencijalne jednačine za $b(t)$ je

$$b(t) = b_e + exp(-\beta_1 t)\left(b_e + b(0) + \int_0^t \alpha_1 exp(\beta_1 s)dW_2(s)\right).$$

Rešenje implicira da je za duži trenutak t, stopa *per capita* rađanja $b(t)$ približno normalno distribuirana sa očekivanjem b_e i varijansom $\frac{\alpha_1^2}{2\beta_1}$. Ovo, inherentno pretpostavlja da u ovom stohastičkom modelu slučajne promenljive iz okruženja utiču na stopu *per capita* rađanja da varira normalno oko srednje vrednosti b_e. Analogno zaključujemo i za *per capita* umiranje.

Rešenje stohastičke diferencijalne jednačine za $d(t)$ je

$$d(t) = d_e + exp(-\beta_2 t)\left(d_e + d(0) + \int_0^t \alpha_2 exp(\beta_2 s)dW_3(s)\right).$$

Analiza rešenja ove jednačine je analogna analizi za $b(t)$.

5

Dodatak za kodove

5.1 Kodovi za grafike u *Mathematica 9*

5.1.1 Kodovi za sliku 2.1.

```
r:=0.5
K:=10
x0:=0.5
resenje:=Evaluate[x[t]/ .DSolve[ {x'[t] == r*x[t]*(1-x[t]/K),x[0]==x0},
x[t],t ]]
resenje
Plot[{resenje,K},{t, 0, 20}, AxesLabel → {t,Populacija}]
```

5.1.2 Kodovi za sliku 2.2.

```
r:=0.15
K:=10
x0:=20
resenje:=Evaluate[x[t]/ .DSolve[ {x'[t] == r*x[t]*(1-x[t]/K),x[0]==x0},
x[t],t ]]
resenje
Plot[{resenje,K},{t, 0, 20}, AxesLabel → {t,Populacija}, AxesOrigin →
{0,0}, PlotRange → {{0, 20}, {0, 20}}]
```

5.2 Kodovi za *Maple 18*

Kodovi, u slučaju kada je cela populacija genotipa $AA \times Aa$:

```
> with(linalg):
> P:=(6,6,[1,1/4,1/16,0,0,0,0,1/2,1/4,0,0,0,0,1/4,1/4,
1/4,1,0,0,0,1/4,1/2,0,0,0,0,1/8,0,0,0,0,0,1/16,1/4,0,1]):
> T:=matrix(4,4,[1/2,1/4,0,0,1/4,1/4,1,0,0,1/4,1/2,0,0,1/8,0,0]):
> p0:=vector([0,1,0,0,0,0]):
> h0:=vector(1/2*p0[2]+p0[3]+1/2*p0[4]):
> p:=n → evalm(P^n& *p0):
> h:=n → 1/2*p(n)[2]+p(n)[3]+1/2*p(n)[4]:
> evalm(p0);h0;
```

[0,1,0,0,0,0]
0.5

```
> evalm(p(1));h(1);
```

[0.2500,0.500,0.2500,0,0,0]
0.5

```
> evalm(p(2));h(2);
```

[0.3906, 0.3125,0.1875,0.0625,0.0313,0.0156]
0.375

```
> K:=[eigenvals(P)];
```

$[1/2,1/4,1/4+1/4\sqrt{5},1/4\text{-}1/4\sqrt{5},1,1]$

> f:=n → a*$K[1]^n$+b*$K[2]^n$+c*$K[3]^n$+d*$K[4]^n$:
> solve({f(0)=g0,f(1)=q(1),f(2)=q(2),f(3)=g(3)},{a,b,c,d});

$\{$a=0, b=0, c=1/4+3/20$\sqrt{5}$, d=1/4-3/20$\sqrt{5}\}$

> f(10):=evalf(subs({a=0, b=0, c=1/4+3/20$\sqrt{5}$, d=1/4-3/20$\sqrt{5}$}),f(10));

f(10):=0.0703

> f(20):=evalf(subs({a=0, b=0, c=1/4+3/20$\sqrt{5}$, d=1/4-3/20$\sqrt{5}$}),f(0));

f(20):=0.0084

```
> evalf(h(10));
```

0.07035

```
>evalf(h(20));
```

0.0085

Zaključak

Stohastički procesi su na neki način kvantifikacija dinamičkog odnosa niza slučajnih događaja. Stohastički modeli imaju veliku ulogu u različitim oblastima prirodnih i tehničkih nauka. Koristili smo ih u ovom radu za analizu varijabilnosti kompleksnih bioloških i ekoloških sistema.

Uveli smo teoriju stohastičkih diferencijalnih jednačina i Markovskih procesa, kao i njihovu primenu u biološkom i ekološkom modeliranju.

Razmatrani su osnovni modeli populacije, kao što su logistički model, model rađanja i umiranja u populaciji i predator - plen sistem. Činjenica da broj jedinki neke populacije predstavlja rešenje posmatranih sistema i jednačina, uslovljava da rešenje mora biti pozitivno. Stoga smo naveli i dokaz egzistencije i jedinstvenosti pozitivnog rešenja. U nekim od populacionih modela smo odredili i uslove pod kojima će populacija opstati u opisanom okruženju i uslove pod kojima dolazi do istrebljenja populacije. Uzeli smo u obzir i modele koji proučavaju različite interakcije među dve iste populacije i varijabilnost okoline.

Takođe, predstavljeni su i kompleksniji modeli i to model praćenja ćelija tumora i model u genetici. Konstrukcija modela je prikazana kroz realne primere iz života. Dakle, modeli su gruba aproksimacija realnih situacija, odnosno aproksimacija stohastičkog ponašanja u prirodi.

Cilj ovog rada je predstavljanje koncepta i metode stohastičkog modeliranja i ilustracija različitih primena stohastičkih procesa u naukama.

Literatura

[1] Linda J. S. Allen, *Applications of Discrete Time Markov Chain*, Texas Tech University Lubbock, Texas U.S.A., 2011.

[2] Linda J. S. Allen, *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*, Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, December 2, 2010.

[3] L. Allen, *Discrete time Stochastic models, SDEs and numerical methods*, University of Tennessee, Knoxville, March, 2001.

[4] David F. Anderson, *Introduction to Stochastic Processes with Applications in the Biosciences*, University of Wisconsin at Madison, 2013.

[5] Susanne Ditlevsen and Adeline Samson, *Stochastic Biomathematical Models with Applications to Neuronal Modeling*, 2013.

[6] Lawrence C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations, Version 1.2*, University of California, Berkeley, CA, 2013.

[7] Kemeny J. G. and J. L. Snell, *Finite Markov hains*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

[8] T.Gard, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, New York, 1988.

[9] Morteza Khodabin and Neda Kiaee, *Stochastic dynamical Logistic Population Growth Model*, Department of Mathematics Kiraj Branch Islamic Azad University, Iran, 2011.

[10] J. Lamperty, *A simple construction of certain diffusion processes*, J. Math. Kyôto, 1964.

[11] Zhong Li, *Introduction to Discrete Time Birth Death Models*, March, 2013.

[12] Paul - André Mayer, *History of Probability and Statistics*, Université Louis Pasteur Strasbourg, 2009

[13] Taylor, H.M. and S.Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling, 3rd ed.*, Academic Press, New York, 1998.

[14] R.Paley, N. Wiener and A. Zygmund, *Notes on random functions*, Math. Z., 1959.

[15] Danijela Rajter - Ćirić, *Verovatnoća*, Novi Sad, 2009.

[16] Hengeveld R., *Dynamics of Biological Invasions*, Chapman and Hall, London and New York, 1989.

[17] Norris, J. R., *Markov chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[18] Gantmacher F. R., *The Theory of Matrices, Vol. II*, Chelsea Pub. Co., New York, 1964.

[19] Randall J. Swift, *A Stochastic Predator - Prey model*, Irish Mathematical Society, 2002.

[20] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Aplications, Vol 1. 3rd ed.* , John Wiley and Sons, New York, 1968.

[21] Stewart,W.J., *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1994.

[22] Elise F. Zipkin, Christopher S. Jennelle and Evan G. Cooch, *Methods in Ecology and Evolution*, Department of Natural Resources, Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA and Department of Forestry and Wildlife Ecology, University of Wisconsin, Madison, WI 53706, USA, 2010.

Biografija

Tamara Bandulaja je rođena 07.11.1988. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu: "Prva vojvođanska brigada" u Novom Sadu. Potom je upisala Tehničku školu "Jovan Vukanović", koju završava kao nosilac Vukove diplome 2008. godine u Novom Sadu.

Zbog sklonosti ka prirodnim naukama, upisuje iste godine osnovne akademske studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Primenjena matematika. Nakon završenih osnovnih studija, u oktobru 2012. upisuje master studije na istom fakultetu, smer Primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, čime je stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *Master rad*
VR

Autor: *Tamara Bandulaja*
AU

Mentor: *dr Danijela Rajter Ćirić, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
MN

Naslov rada: *Primena stohastičkih modela u biologiji i ekologiji*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*
JI

Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2015*
GO

Izdavač: *Autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: *(5/95/0/5/0/2/0)*
(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO

Naučna oblast: *Matematika*
NO

Naučna disciplina: *Stohastička analiza*
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: *Stohastičke diferencijalne jednačine, Lanci Markova, Stohastički procesi, Modeliranje u biologiji, Modeliranje u ekologiji, Uslovno očekivanje, Martingali, Braunovo kretanje, Beli šum, Stohastička integracija, Itôv proces u biologiji, Stohastički modeli, Logistički model rasta populacije, Markovski modeli*
PO

UDK:

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*
ČU

Važna napomena: *nema*
VN

Izvod: *Tema ovog rada je teorija stohastičke analize i primena ove teorije u modeliranju u biološkim i ekološkim naukama.*
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *30.05.2014.*
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: *dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: *dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Mentor: *dr Danijela Rajter - Ćirić, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *Monograph type*
DT

Type of record: *Printed text*
TR

Contents Code: *Master's thesis*
CC

Author: *Tamara Bandulaja*
AU

Mentor: *Dr. Danijela Rajter - Ćirić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*
MN

Title: *Application of stochastic models in biology an ecology*
TI

Language of text: *Serbian*
LT

Language of abstract: *Serbian/English*
LA

Country of publication: *Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodina*
LP

Publication year: *2015*
PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publication place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP

Physical description: *(5/95/0/5/0/2/0)*
PD

Scientific field: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Stochastic analysis*
SD

Subject/Key words: *Stochastic differential equations, Markov chain, Stochastic processes, Modeling in biology, Modeling in ecology, Conditional expectation, Martingales, Brownian motion, White noise, Stochastic integration, Itô process in biology, Stochastic models, Logistic model of population growth, Markov models*
SKW

UC:

Holding data: *In library of Department of Mathematics and Informatics*
HD

Note: *none*
N

Abstract: *Subject of this master's thesis is the theory of stochastic analysis and application of this theory in modeling of biological and ecological sciences.*
AB

Accepted by Scientific Board on: *30.05.2014.*
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: *Dr. Sanja Rapajić, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*
Member: *Dr. Dora Selei, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*
Mentor: *Dr. Danijela Rajter - Ćirić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*