UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Milica Bjeloglav

Problem planiranja proizvodnje uz ograničenja

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2011

Sadržaj

Predgovor

Planiranje proizvodnje ima ogroman uticaj na poslovanje svakog proizvodnog preduzeća. S jedne strane dobro planiranje proizvodnje bitno utiče na optimizaciju troška proizvodnje i na optimalno iskorišćenje proizvodnih kapaciteta i opreme, a s druge strane utiče na nivo zaliha. Loše planiranje proizvodnje je odgovorno kako za prevelike zalihe, tako i za nepravovremenu nabavku materijala i za kašnjenja pri isporuci krajnjih proizvoda. U ovom radu se bavimo problemom ekonomisanja koji se može posmatrati kao primena matematičkog problema optimizacije. Svako preduzeće želi da ostvari maksimalne rezultate uz minimalne troškove. Ovaj rad se bavi izborom posebnog obima proizvodnje (uz zadata ograničenja) koji će dati minimalnu vrednost funkcije troška.

U uvodnom poglavlju ovog rada su predstavljeni osnovni pojmovi i definicije koji su neophodni za dalje izlaganje i razumevanje problema. Drugo poglavlje se bavi neophodnim uslovom za ekstrem. Nakon formulisanja Gatoove varijacije, objašnjena je njena primena na funkciju troška, kao i na izbor optimalnog obima proizvodnje koji minimizira funkciju troška. U trećem poglavlju su uvedene teoreme Ojler-Lagranžovih množitelja kako za jedno, tako i za više ograničenja. Četvrto poglavlje je posvećeno tipovima ograničenja kod varijacionog računa i konačno, peto poglavlje se bavi problemom planiranja proizvodnje uz zadata ograničenja. Tu ćemo definisati kombinovani obim proizvodnje i na kraju izvesti račun gde ćemo pokazati da kombinovani obim proizvodnje zapravo minimizira funkciju troška. U dodatku smo naveli kratke biografije Gatoa, Ojlera i Lagranža.

Zahvaljujem se mentoru dr Nenadu Teofanovu na korisnim sugestijama, savetima i pomoći pruženoj prilikom izrade ovog rada, kao i na zanimljivim predavanjima tokom studiranja. Posebno, želim da se zahvalim roditeljima Vladimiru i Marici, kao i bratu Ljubomiru koji su me uvek podržavali.

Milica Bjeloglav

1

Uvod

U uvodnom delu ćemo se podsetiti nekih osnovnih pojmova i definicija koji su nam potrebni za razumevanje problematike ovog rada. To su vektorski prostori, normirani prostori, neprekidnost i linearnost funkcija.

1.1 Vektorski prostor

Posmatramo realnu funkciju f definisanu na nekom skupu D koji je podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. U ovom slučaju D se naziva **domen** funkcije f i ponekad se piše $D = D(f)$ što pokazuje njegovu vezu sa funkcijom f. Ako je x neki element skupa D onda $f(x)$ označava numeričku vrednost funkcije f u tački x.

Iako su funkcije f čiji je domen $D(f)$ podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, dovoljne za rešavanje problema u osnovnom računu, mi ćemo u ovom radu razmatrati funkcije definisane na nekom skupu objekata koji nisu brojevi.

Uopšteno, naše funkcije će biti definisane na podskupu **vektorskih prostora**. Najčešći vektorski prostor je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Definicija 1.1.1 (**Vektorski prostor**). ***Vektorski prostor*** *(nad skupom realnih brojeva) je skup $\mathcal{X}$ koji sadrži elemente $x, y, z...$ koji se nazivaju* ***vektori****, za koje je operacija sabiranja vektora i množenja vektora realnim brojevima $a, b, c...$ definisana na sledeći način:*

(1) zbir $x + y$ je vektor iz $\mathcal{X}$ za bilo koji par vektora x i y iz $\mathcal{X}$

(2) proizvod ax je vektor iz $\mathcal{X}$ za svaki vektor $x \in \mathcal{X}$ i svaki broj $a \in \mathbb{R}$

(3) $x + y = y + x$ *za bilo koja dva vektora* x *i* y *iz* $\mathcal{X}$

(4) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *za bilo koje vektore* x*,* y *i* z *iz* $\mathcal{X}$

(5) $\mathcal{X}$ *sadrži element 0, koji se naziva nula vektor tako da je* $x + 0 = x$*, za svaki vektor* $x \in \mathcal{X}$

(6) skup $\mathcal{X}$*, za svaki vektor* x*, sadrži vektor* $-x$*, tako da je* $x + (-x) = 0$

(7) $a(bx) = (ab)x$*, za svako* a, b *iz* $\mathbb{R}$ *i svako* $x \in \mathcal{X}$

(8) $a(x + y) = ax + ay$*, za svako* $a \in \mathbb{R}$ *i svako* x*,* y *iz* $\mathcal{X}$

(9) $(a + b)x = ax + bx$*, za svako* a*,* b *iz* $\mathbb{R}$ *i svako* $x \in \mathcal{X}$

(10) $1x = x$*, za svako* $x \in \mathcal{X}$*.*

Jasno je da je $\mathbb{R}$ vektorski prostor sa uobičajenim definicijama sabiranja i množenja. Slično, n-dimenzioni Euklidov prostor $\mathbb{R}^n$ koji sadrži sve uređene n-torke realnih brojeva $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ je vektorski prostor sa sabiranjem definisanim kao

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

za svako $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ i množenjem brojevima definisanim kao

$$a(x_1, x_2, ..., x_n) = (ax_1, ax_2, ..., ax_n),$$

za bilo koji vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i bilo koji broj a.

Drugi primer vektorskog prostora je skup $\mathcal{X}$, skup svih realnih funkcija definisanih na nekom unapred određenom intervalu I. Za bilo koje dve takve funkcije ϕ i ψ definišemo njihov zbir sa

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x), \tag{1.1.1}$$

za svako $x \in I$, dok za bilo koji broj a definišemo proizvod $a\phi$ sa

$$(a\phi)(x) = a\phi(x), \tag{1.1.2}$$

za svako $x \in I$. Zbir $\phi(x) + \psi(x)$ i proizvod $a\phi(x)$ koji se pojavljuju sa desnih strana formula (1.1.1) i (1.1.2) su uobičajeno sabiranje i množenje realnim brojem. Jasno je da su suma $\phi + \psi$ i proizvod $a\phi$ tako definisane, realne funkcije na I (prema tome to su vektoru u $\mathcal{X}$) za bilo koji vektor ϕ i ψ iz $\mathcal{X}$ i za bilo koji broj a. Nula vektor je nula funkcija i ima vrednost 0 u I.

Ako je $\mathcal{X}$ neki fiksirani vektorski prostor i ako je $\mathcal{Y}$ podskup od $\mathcal{X}$ tako da su $x+y$ i ax u $\mathcal{Y}$ za svako x i y iz $\mathcal{X}$ i bilo koji broj a, onda je jasno da je $\mathcal{Y}$ vektorski prostor sa restrikcijama operacija sabiranja i množenja brojem u $\mathcal{X}$. U ovom slučaju se kaže da je $\mathcal{Y}$ **potprostor** od $\mathcal{X}$.

Na primer, skup svih n-torki $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ sa $x_1=0$ je potprostor od n-dimenzinog Euklidovog prostora $\mathbb{R}^n$. Važan potprostor vektorskog prostora svih realnih funkcija na nekom fiksiranom intervalu I je skup svih funkcija koje imaju neprekidne izvode do reda k, gde k može biti bilo koji ceo nenegativan broj i takav prostor se označava sa $C^k(I)$ ili $C^k[a,b]$, ako je osnovni interval $I=[a,b]$. Često se vektori unutar $C^k(I)$ nazivaju **funkcije klase C^k na I**. Vektorski prostor funkcija koje imaju neprekidne izvode proizvoljnog reda na I se označava sa $C^\infty(I)$.

U $\mathbb{R}^n$ dva vektora $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ i $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ su jednaka kad god su njihove koordinate x_i i y_i jednake za svako i. Kad kažemo da su dva vektora ϕ i ψ u $C^k(I)$ jednaka, to znači da su vrednosti ove dve funkcije ϕ i ψ jednake za svako $x \in I$, odnosno da su ϕ i ψ identički jednake.

1.2 Normirani vektorski prostori

Definicija 1.2.1 (Normirani vektorski prostor). *Neka je $\mathcal{X}$ vektorski prostor i neka je $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ preslikavanje za koje važe sledeći uslovi:*

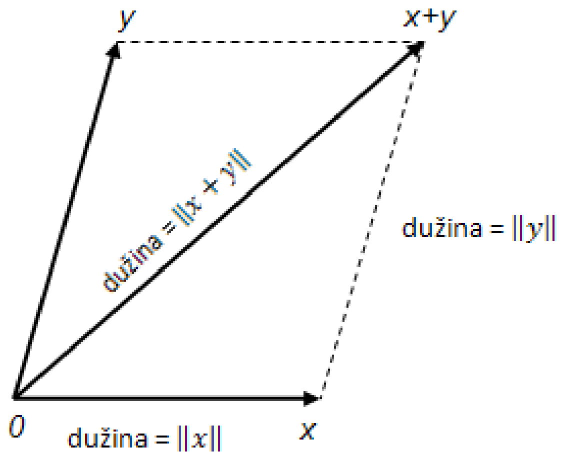
(1) $\|x\| \geq 0$ za svako $x \in \mathcal{X}$ i $\|x\| = 0$ ako i samo ako je x nula vektor u $\mathcal{X}$

(2) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ za svako $x \in \mathcal{X}$ i svako $a \in \mathbb{R}$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za bilo koji par vektora x i y iz $\mathcal{X}$.

*Tada kažemo da je preslikavanje $\|\cdot\|$ **norma** nad $\mathcal{X}$, a uređeni par $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ je **normirani vektorski prostor**.*

Prvi uslov ovde jednostavno kaže da ja dužina ili norma svakog vektora iz $\mathcal{X}$ pozitivna osim za nula vektor čija je dužina nula. Drugi uslov između ostalog obezbeđuje da je dužina vektora $-x$ ista kao dužina vektora x, a poslednji uslov tvrdi da norma zbira $x+y$ nikad nije veća od zbira normi x i y i naziva se nejednakost trougla (dužina jedne stranice trougla je uvek manja ili jednaka od zbira dužina ostale dve stranice, pogledajte Sliku 1).



Slika 1

Sada ćemo definisati restojanje između bilo koja dva vektora x i y normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ kao normu (dužinu) njihovih razlika:

$$\text{rastojanje između } x \text{ i } y = \|x - y\| \,. \tag{1.2.1}$$

Na ovaj način $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ postaje metrički prostor, a funkcija rastojanja se zove metrika i često se označava sa d.

Lako se proverava da važi

(1) $d(x, y) \geq 0$ za svako x, y iz $\mathcal{X}$ i $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ za svako x, y iz $\mathcal{X}$

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za svako x, y i z iz $\mathcal{X}$.

Štaviše, prostor $(\mathcal{X}, d)$ u kojem preslikavanje d ispunjava gore navedene uslove je metrički prostor koji u opštem slučaju ne mora da bude vektorski prostor, pa samim tim ni normiran.

Lako se proverava da je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ normiran vektorski prostor sa normom koja je apsolutna vrednost broja;

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako } x \geq 0, \\ -x & \text{ako } x \leq 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

tj. $\|x\| = |x|$ za neki broj x, dok je rastojanje između bilo koja dva broja x i y dato kao apsolutna vrednost njihovih razlika:

$$\text{rastojanje između } x \text{ i } y = |x - y| \,. \tag{1.2.3}$$

Slično, n-dimenzioni Euklidov prostor $\mathbb{R}^n$ je normiran vektorski prostor sa normom definisanom na sledeći način:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \tag{1.2.4}$$

za bilo koji vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ iz $\mathbb{R}^n$. U ovom slučaju nejednakost trougla sledi iz **Košijeve nejednakosti**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right), \tag{1.2.5}$$

koja važi za svako $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$.

Može se dokazati i da preslikavanje

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p \leq \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

definiše normu na $\mathbb{R}^n$ ($\|x\|_\infty = max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$).

Vektorski prostor $C^k(I)$ za $k = 0$, koga ćemo označavati sa $C(I)$, sadrži sve neprekidne realne funkcije ϕ definisane na nekom intervalu $I = [a, b]$ sa operacijama sabiranja i množenja brojem, koje su definisane formulama (1.1.1) i (1.1.2) je normirani vektorski prostor sa normom definisanom na sledeći način:

$$\|\phi\| = \sqrt{\int_a^b |\phi(x)|^2 \, dx}, \tag{1.2.6}$$

za bilo koji vektor $\phi \in C(I)$. Jednakost trougla može biti dokazana koristeći **Švarcovu nejednakost**:

$$\left(\int_a^b \phi(x)\psi(x) \, dx\right)^2 \leq \int_a^b \phi(x)^2 \, dx \int_a^b \psi(x)^2 \, dx. \tag{1.2.7}$$

Na istom prostoru norma može biti definisana na sledeći način:

$$\|\phi\| = \max_{a \leq x \leq b} |\phi(x)|, \tag{1.2.8}$$

za bilo koje ϕ.

Norma na vektorskom prostoru $C^k(I)$, $I = [a, b]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, je data sa:

$$\|\phi\| = \max_{\forall x \in I} |\phi(x)| + \max_{\forall x \in I} |\phi'(x)| + ... + \max_{\forall x \in I} \left|\phi^{(k)}(x)\right|, \tag{1.2.9}$$

za neku funkciju ϕ iz klase $C^k(I)$ gde je $\phi'(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$ i $\phi^{(i)}(x) = \frac{d^i\phi(x)}{dx^i}$, $i = 2, 3, ...k$.

Primetimo da je potprostor $\mathcal{Y}$ normiranog vektorskog prostora $\mathcal{X}$ i sam normirani vektorski prostor sa istom normom kao i $\mathcal{X}$.

Konačno definisaćemo pojam (otvorene) lopte, kao i pojam otvorenog skupa u normiranom vektorskom prostoru.

Definicija 1.2.2 (**Otvorena lopta**). *Ako je* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normirani vektorski prostor, definišemo (otvorenu)* ***loptu*** $L_\rho(x)$ $(\rho > 0, x \in \mathcal{X})$ *sa centrom u* x *i poluprečnikom* ρ *na sledeći način:*

$$L_\rho(x) = \{y \in \mathcal{X},\ \|y - x\| < \rho\}.$$

Definicija 1.2.3 (**Otvoren skup**). *Neka je* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *normirani vektorski prostor. Za skup* $D \subset \mathcal{X}$ *se kaže da je* ***otvoren*** *u* $\mathcal{X}$ *ako za svaki elemenat* $x \in D$ *postoji* $\rho > 0$ *tako da važi* $L_\rho(x) \subset D$.

1.3 Neprekidne i linearne funkcije

Definicija 1.3.1 (**Granična vrednost**). *Neka je* D *otvoren skup u datom normiranom vektorskom prostoru* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *i neka je* J *funkcija definisana na skupu* D*. Kažemo da je* b ***granična vrednost (limes)*** *funkcije* J *u tački* x *ako za svaki pozitivan broj* ε *postoji lopta* $L_\rho(x)$ *sadržana u* D *tako da važi*

$$|b - J(y)| < \varepsilon, \tag{1.3.1}$$

za sve vektore y (izuzimajući x) iz $L_\rho(x)$. Simbolično pišemo

$$\lim_{y \to x} J(y) = b, \tag{1.3.2}$$

kad god J ima graničnu vrednost b u tački x.

Definicija 1.3.2 (**Neprekidnost funkcije u tački**). *Neka je D otvoren skup u datom normiranom vektorskom prostoru $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ i neka je J funkcija definisana na skupu D. Funkcija J je neprekidna u tački $x \in D$ ako J ima graničnu vrednost $J(x)$ u tački x, što pišemo:*

$$\lim_{y \to x} J(y) = J(x). \tag{1.3.3}$$

Definicija 1.3.3 (**Neprekidnost funkcije na skupu**). *Funkcija J je neprekidna na skupu D ako je J neprekidna u svakom vektoru skupa D.*

Definicija 1.3.4 (**Linearnost funkcije**). *Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ vektorski prostori. Za funkciju $J : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ kažemo da je linearna, ako zadovoljava linearnu relaciju*

$$J(ax + by) = aJ(x) + bJ(y), \tag{1.3.4}$$

za bilo koje brojeve a i b iz $\mathbb{R}$ i sve vektore x i y iz $\mathcal{X}$.

Na primer, funkcija $K = K(f)$ definisana na vektorskom prostoru $C[0, 1]$ na sledeći način:

$$K(f) = \int_0^1 f(t)\, dt,$$

za svaku neprekidnu funkciju $f = f(x)$, zadovoljava uslov

$$K(af + bg) = aK(f) + bK(g)$$

za bilo koje brojeve a i b i za bilo koje neprekidne funkcije f i g na intervalu $[0, 1]$. Dakle, funkcija K je linearna.

Funkcija čiji je kodomen podskup skupa $\mathbb{R}$ se naziva **funkcionela**.

2

Neophodni uslov za ekstrem

U ovom poglavlju ćemo predstaviti Gatoovu varijaciju funkcionele. Objasnićemo neka svojstva Gatoove varijacije, a kao glavni primer Gatoove varijacije navodimo i definišemo funkciju troška. Tu ćemo se pre svega upoznati sa pojmovima: obim prodaje, obim proizvodnje, nivo zaliha gotovih proizvoda, željeni nivo zaliha i željeni nivo proizvodnje. Videćemo da varijacija mora biti jednaka nuli u lokalnom miminumu ili maksimumu i pokazaćemo kako da koristimo ovaj rezultat za rešavanje problema u planiranju proizvodnje tj. izbor takvog obima proizvodnje koji će minimizirati funkciju troška. U ovom poglavlju je korišćena literatura Smith [1].

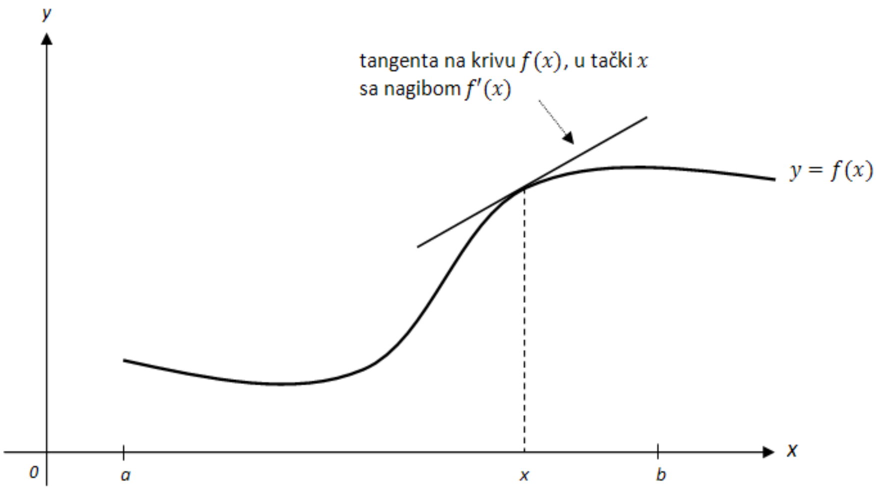
2.1 Definicija nagiba tangente u nekoj tački

U ovom paragrafu dajemo geometrijsku interpretaciju neophodnog uslova za ekstrem kao motivaciju za uvođenje Gatoove varijacije.

Definicija 2.1.1 (Nagib tangente). *Neka je f zadata funkcija realnih vrednosti, sa domenom $D = (a, b)$ i neka je f diferencijabilna na D, tako da grafik funkcije f ima dobro definisanu tangentu u svakoj tački, kao što je prikazano na Slici 2.* ***Nagib tangente*** *u bilo kojoj tački x je dat kao limes*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = f'(x), \tag{2.1.1}$$

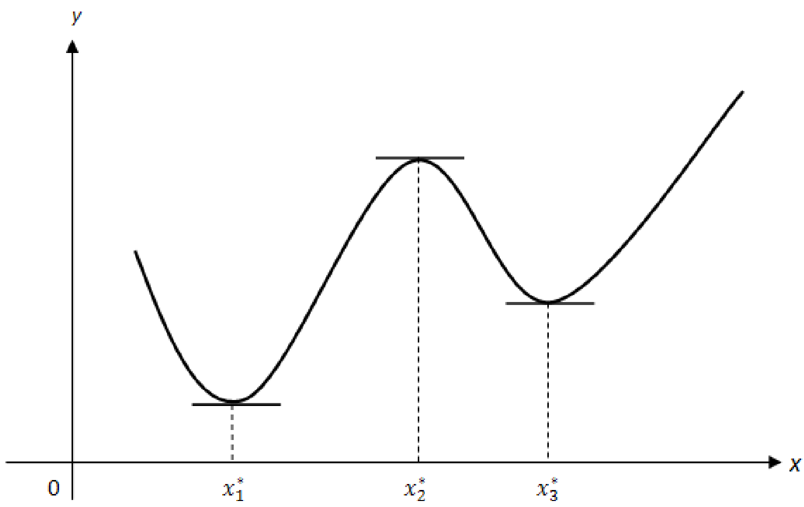
koji je takođe vrednost izvoda funkcije f u tački x.



Slika 2

Ako diferencijabilna funkcija f ima lokalni minimum ili maksimum u tački $x^* \in D$ tada će tangenta na grafiku funkcije f biti horizontalna u x^* sa nagibom jednakim nuli, kao što je prikazano na Slici 3, tj.

$$f'(x^*) = 0. \tag{2.1.2}$$



Slika 3

Dakle, sa (2.1.2) je naveden neophodan uslov za ekstrem funkcionele. Dokaz ove činjenice direktno sledi iz teoreme Ferma koja je data u literaturi Hadžić, Takači [7][1].

Sada želimo da uopštimo ovaj poznati pristup kako bi se dobio sličan metod koji se može koristiti za rešavanje problema optimizacije i ekstremnih problema koji će se razmatrati u ovom radu.

2.2 Neophodan uslov za ekstrem

Neka je D neprazan podskup normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ i neka je J funkcionela definisana na skupu D. Za vektor x^* se kaže da je **maksimalni vektor** u skupu D za funkcionelu J ako važi $J(x) \leq J(x^*)$ za svako $x \in D$. Vektor $x^* \in D$ je *lokalni maksimum* u D funkcionele J ako postoji lopta $L_\rho(x^*)$ u prostoru $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ sa centrom u x^* tako da važi $J(x) \leq J(x^*)$ za svako $x \in D \cap L_\rho(x^*)$. Ako je D otvoren podskup u $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ zahtevamo da je lopta $L_\rho(x^*)$ sadržana u D. *Lokalni minimum* u skupu D funkcionele J se slično definiše koristeći nejednakost $J(x) \geq J(x^*)$ za svako $x \in D \cap L_\rho(x^*)$. Sada možemo reći da je x^* *lokalni ekstrem* u skupu D za funkcionelu J ako je x^* njen lokalni minimum ili lokalni maksimum. Tada je $J(x^*)$ lokalna ekstremna vrednost funkcionele J u podskupu D.

Razmatramo sada slučaj kada je funkcionela J definisana na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Ako je x^* lokalni minimum funkcionele J na D i ako je h proizvoljan vektor iz prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ tada nejednakost

$$J(x^* + \varepsilon h) - J(x^*) \geq 0$$

važi za dovoljno malo ε, pri čemu $x^* + \varepsilon h$ pripada domenu D funkcionele J za dovoljno malo ε sve dok je x^* vektor u otvorenom skupu D. Otuda

$$\frac{J(x^* + \varepsilon h) - J(x^*)}{\varepsilon} \geq 0, \tag{2.2.1}$$

za dovoljno malo $\varepsilon > 0$, dok za dovoljno malo $\varepsilon < 0$ važi:

$$\frac{J(x^* + \varepsilon h) - J(x^*)}{\varepsilon} \leq 0. \tag{2.2.2}$$

[1] O. Hadžić, Đ. Takači - Matematičke metode, Teorema Ferma, 177 str.

Ukoliko dozvolimo da ε teži nuli u (2.2.1) dobijamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0} \frac{J(x^* + \varepsilon h) - J(x^*)}{\varepsilon} \geq 0$$

i slično za (2.2.2), dobijamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\ \varepsilon < 0} \frac{J(x^* + \varepsilon h) - J(x^*)}{\varepsilon} \leq 0$$

naravno, pod uslovom da ove granične vrednosti (limesi) postoje. Sada, iz ovih poslednjih razmatranja, možemo zaključiti da uslov

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x^* + \varepsilon h) - J(x^*)}{\varepsilon} = 0, \tag{2.2.3}$$

mora važiti u svakom lokalnom minimumu $x^* \in D$ funkcionele J, pod uslovom da ovaj limes postoji. Jasno je da ovaj uslov (2.2.3) mora važiti i u svakom lokalnom maksimumu $x^* \in D$.

Videćemo da je uslov (2.2.3) uopštenje poznatog uslova (2.1.2).

Definicija 2.2.1 (**Gatoova varijacija**). *Za funkcionelu J, definisanu na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, se kaže da ima* ***Gatoovu varijaciju*** *u $x \in D$ ako postoji funkcionela $\delta J(x; h)$ definisana za svako $h \in \mathcal{X}$ tako da važi:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x + \varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon} = \delta J(x; h), \qquad \forall h \in \mathcal{X}.$$

Funkcionela $\delta J(x; h)$ se naziva *Gatoova varijacija* funkcionele J u tački x ili jednostavnije samo varijacija funkcionele J u tački x.

Ova jednakost i jednakost (2.2.3) se u sledećoj teoremi pojavljuju kao objedinjene.

Teorema 2.2.1. *Ako funkcionela J, definisana na otvorenom skupu $D \subset \mathcal{X}$, ima lokalni ekstrem u $x^* \in D$ i ako J ima varijaciju u x^*, tada varijacija funkcionele J u x^* mora biti jednaka nuli tj.*

$$\delta J(x^*, h) = 0, \qquad \forall h \in \mathcal{X}. \tag{2.2.4}$$

Dokaz
Dokaz ćemo izvesti kontradikcijom. Pretpostavljamo suprotno, da je x^* lokalni ekstrem funkcionele J i da važi:

$$\delta J(x^*, h) \neq 0, \quad \text{za svako } h \in \mathcal{X}.$$

Neka je $\delta J(x^*, h) > 0$, za svako $h \in \mathcal{X}$. Pošto za varijaciju δJ važi relacija:

$$\delta J(x^*, ah) = a\delta J(x^*, h), \quad \text{za svaki broj } a$$

(što je kasnije pokazano), onda za $a > 0$ važi:

$$\delta J(x^*, -ah) = -a\delta J(x^*, h) < 0.$$

Ako označimo $\eta = -ah$, tada važi:

$$\delta J(x^*, \eta) < 0, \quad \text{za svako } \eta \in \mathcal{X},$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom. □

Dakle, uslov da varijacija bude jednaka nuli je neophodan uslov koji mora da važi u svakom lokalnom ekstremu x^*. Videćemo da ovaj uslov možemo koristiti za rešavanje reznovrsnih ekstremnih problema. U praksi se često eliminiše proizvoljan vektor h iz jednačine (2.2.4) kako bismo dobili jednostavniju jednačinu koja uključuje samo x^* i koja se dalje može rešiti za dobijanje željenog ekstrema.

Moramo obratiti pažnju da, čak i kad nađemo vektor x^* u skupu D koji zadovoljava uslov (2.2.4) moramo proveriti da li je $J(x^*)$ zaista lokalni ekstrem funkcionele J u D. Zaista, jednačina (2.2.4) važi i kada tačka x^* nije ekstremna, kao što je *sedlasta tačka* i *prevojna tačka* funkcionele J.

Naredni primeri su preuzeti iz literature Smith [1].

PRIMER 1. *Neka je J realna funkcija sa domenom $D = (a, b)$ i pretpostavljamo da je J diferencijabilna u x. Pokazaćemo da J ima varijaciju u x datu sa $\delta J(x; h) = J'(x)h$ za svako $h \in \mathbb{R}$, gde je $J'(x)$ izvod funkcije J u tački x.*

Iz definicije 2.2.1 važi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x + \varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon} = \delta J(x; h), \quad \text{za svako } h \in \mathcal{X}.$$

Množenjem sa $\frac{1}{h}$ i levu i desnu stranu jednakosti dobijamo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x + \varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon h} = \frac{1}{h} \delta J(x; h).$$

Kako je leva strana jednakosti izvod funkcije J u tački x, množenjem obe strane sa h dobijamo:

$$J'(x)h = \delta J(x; h),$$

što smo i hteli da pokažemo.

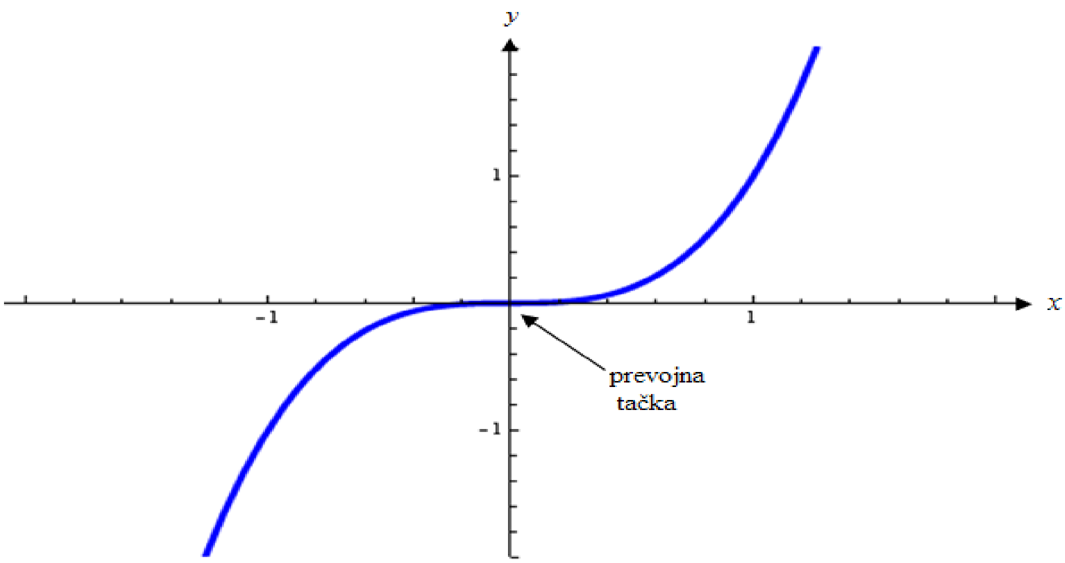
PRIMER 2. *Funkcija J je definisana na skupu realnih brojeva $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ i data je sa:*

$$J(x) = x^3 \quad \textit{za svako } x \in \mathbb{R}.$$

Iz prethodnog primera smo videli da važi:

$$\delta J(x; h) = J'(x)h.$$

Kako je $J'(x) = 3x^2$, izvod funkcije J je jednak nuli u tački $x = 0$ (Slika 4.), tako de je varijacija funkcije takođe jednaka nuli u tački $x^* = 0$. Međutim, tačka $x^* = 0$ nije lokalni ekstrem funkcije J u skupu D, ali jeste prevojna tačka, odnosno J je konkavna na $x \leq x^*$, a konveksna na $x \geq x^*$.

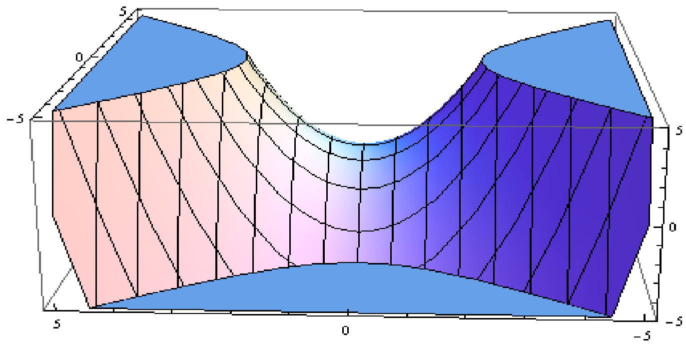


Slika 4

Primer 3. *Data je funkcija K definisana na skupu $\mathbb{R}^2$*

$$K(x) = x_2^2 - x_1^2$$

za svaku tačku $x = (x_1, x_2)$ iz $\mathbb{R}^2$.



Slika 5

Ova funkcija ima varijaciju datu sa:

$$\delta K(x; h) = \sum_{i=1}^{2} K_{x_i}(x) h_i \qquad tj.$$

$$\delta K(x; h) = \frac{\partial K(x)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial K(x)}{\partial x_2} h_2 = -2x_1 h_1 + 2x_2 h_2$$

za svako $x \in \mathbb{R}^2$ i ova varijacija je jasno jednaka nuli u $x^* = (0, 0)$, međutim ona nije lokalni ekstrem, ali jeste sadlasta tačka funkcije K, tj. važi:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} < 0.$$

Dakle, možemo zaključiti da je uslov (2.2.4) potreban, ali ne i dovoljan uslov da tačka x^* bude lokalni ekstrem funkcionele J.

2.3 Neke napomene u vezi Gatoove varijacije

U prethodnom poglavlju smo definisali varijaciju funkcionele J u tački $x \in D$. Ponovimo, za funkcionelu na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, se kaže da ima varijaciju u $x \in D$ kad god sledeća granična vrednost postoji za svako $h \in \mathcal{X}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x+\varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon} = \delta J(x; h). \tag{2.3.1}$$

Ovde je ε broj. Ukoliko granična vrednost postoji, ona je jedinstvena, tako da iz (2.3.1) sledi da funkcionela može imati najviše jednu varijaciju u tački x.

Vrednost varijacije $\delta J(x; h)$ je *usmereni izvod* funkcionele J u tački x u *pravcu vektora h*. Međutim ako uporedimo jednačinu (2.3.1) sa jednačinom (2.1.1) ustanovićemo da je vrednost varijacije samo običan izvod funkcije $J(x+\varepsilon h)$ koja je posmatrana kao funkcija realne promenljive ε u tački $\varepsilon = 0$, tj.

$$\delta J(x; h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{2.3.2}$$

Otuda, sledi teorema 2.2.1. Činjenica da je varijacija funkcije J jednaka nuli u lokalnom ekstremu x^* je zapravo direktna posledica odgovarajućih rezultata po kome izvod funkcije $f(\varepsilon) = J(x^* + \varepsilon h)$ mora biti jednak nuli u $\varepsilon = 0$ ako je broj 0 lokalni minimum ili lokalni maksimum funkcije $f(\varepsilon)$.

Činjenica da je varijacija jednaka nuli u x^*, nezavisna je od date norme u vetkorskom prostoru $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Striktno govoreći, zahtevamo da svi vektori oblika $x^* + \varepsilon h$ budu u domenu D za svaki vektor $h \in \mathcal{X}$ i za dovoljno malo ε tako da tačka $\varepsilon = 0$ bude lokalni ekstrem funkcije $J(x^* + \varepsilon h)$ posmatrana kao funkcija od ε. Naravno, ovo je automatski ispunjeno u slučaju da je D otvoren skup u $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ u nekoj normi i ako je x^* lokalni ekstrem u D funkcije J u toj istoj normi.

Ako funkcija J ima varijaciju u x, tada je $\delta J(x; 0) = 0$. Štaviše, varijacija mora da zadovoljava homogenu relaciju

$$\delta J(x; ah) = a\delta J(x; h), \tag{2.3.3}$$

za svaki broj a, jer

$$\delta J(x; ah) = \frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon a h)\Big|_{\varepsilon=0} = a\frac{d}{d\sigma} J(x+\sigma h)\Big|_{\sigma=0} = a\delta J(x; h),$$

gde je $\sigma = \varepsilon a$ i $\dfrac{dJ}{d\varepsilon} = a\dfrac{dJ}{d\sigma}$.

Napomenimo da ćemo često koristiti simbol Δx umesto h za označavanje drugog argumenta u varijaciji $\delta J(x; \Delta x)$ i u tom slučaju imamo

$$\delta J(x; \Delta x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x + \varepsilon \Delta x) - J(x)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(x + \varepsilon \Delta x)\bigg|_{\varepsilon=0}, \qquad (2.3.4)$$

za svako $x \in D$ i za svako $\Delta x \in \mathcal{X}$.

Primer 4 (**Opšti primer Gatoove varijacije**). *Široka klasa funkcionela ima oblik:*

$$J(Y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, Y(x), Y'(x))\ dx, \qquad (2.3.5)$$

gde je u nekom posebnom slučaju funkcija $F = F(x, y, z)$ definisana za svako (x, y, z) iz nekog otvorenog skupa u 3-dimenzionom Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^3$. U našem slučaju je $y = Y(x)$, $z = Y'(x)$, za $x \in [x_0, x_1]$, gde $Y(x)$ može biti proizvoljna funkcija klase C^1 na intervalu $[x_0, x_1]$. Možemo koristiti neku proizvoljnu normu na $C^1[x_0, x_1]$, kao na primer normu datu formulom (1.2.9) za $k = 1$,

$$\|Y\| = \max_{x_0 \le x \le x_1} |Y(x)| + \max_{x_0 \le x \le x_1} |Y'(x)|,$$

za neki vektor Y iz $C^1[x_0, x_1]$. Pretpostavljamo da je funkcionela J definisana sa (2.3.5) za svaki vektor Y iz nekog otvorenog podskupa D normiranog vektorskog prostora $C^1[x_0, x_1]$.

U cilju izračunavanja varijacije funkcionele J u nekom fiksnom vektoru Y iz domena D koristimo (2.3.5) i dobijamo:

$$J(Y + \varepsilon \Delta Y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, Y(x) + \varepsilon \Delta Y(x), Y'(x) + \varepsilon \Delta Y'(x))\ dx,$$

za neki vektor ΔY iz $C^1[x_0, x_1]$ i za neki mali broj ε. Pretpostavićemo da je funkcija $F = F(x, y, z)$ neprekidna u svakoj tački i ima neprekidan parcijalni izvod u tačkama y i z. Koristeći:

$$\delta J(Y; \Delta Y) = \frac{d}{d\varepsilon} J(Y + \varepsilon \Delta Y)\bigg|_{\varepsilon=0},$$

dobijamo:

$$\delta J(Y;\Delta Y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big(F_Y(x,Y(x),Y'(x))\Delta Y+F_{Y'}(x,Y(x),Y'(x))\Delta Y'\Big)\,dx, \tag{2.3.6}$$

gde je $F_Y=\dfrac{\partial F}{\partial Y}$ *i* $F_{Y'}=\dfrac{\partial F}{\partial Y'}$ *za neki vektor* $Y=Y(x)$ *iz skupa* D *i za neki vektor* $\Delta Y=\Delta Y(x)$ *iz vektorskog prostora* $C^1[x_0,x_1]$.

Ukoliko, na primer, posmatramo funkciju:

$$J(Y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}(Y(x)^2+Y'(x)^2-2Y(x)\sin(x))\,dx,$$

vidimo da je:

$$F=(Y(x)^2+Y'(x)^2-2Y(x)\sin(x)).$$

Kako je:

$$\delta J(Y;\Delta Y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big(F_Y(x,Y(x),Y'(x))\Delta Y+F_{Y'}(x,Y(x),Y'(x))\Delta Y'\Big)\,dx,$$

$$\begin{aligned} F_Y&=2Y(x)-2\sin(x) \qquad i\\ F_{Y'}&=2Y'(x), \end{aligned}$$

varijacija funkcionele J *je data sa:*

$$\delta J(Y;\Delta Y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big((2Y(x)-2\sin(x))\Delta Y(x)+(2Y'(x))\Delta Y'(x)\Big)\,dx$$

to jest:

$$\delta J(Y;\Delta Y)=2\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big((Y(x)-\sin(x))\Delta Y(x)+Y'(x)\Delta Y'(x)\Big)\,dx.$$

2.4 Funkcija troška i varijacija funkcije troška

U ovom delu ćemo se upoznati sa funkcijom troška $\mathbf{C}$ kao i nekim njenim svojstvima, a na kraju ćemo izračunati njenu varijaciju.

Razmotrićemo problem planiranja proizvodnje nekog preduzeća koji proizvodi i prodaje izvesne proizvode i pretpostavićemo da postoji dugoročna porudžbina tako da sa sigurnošću možemo predvideti budući *obim prodaje* $\mathcal{S}$ u nekom zadatom vremenskom periodu. U ovom slučaju obim prodaje $\mathcal{S}$ je dat funkcijom koja zavisi od vremena:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(t). \tag{2.4.1}$$

Ukoliko je proizvod dugotrajan, prirodno je pretpostaviti da su *obim proizvodnje* $P(t)$ i *nivo zaliha* gotovih proizvoda $I(t)$ povezani diferencijalnom jednačinom

$$I'(t) = P(t) - \mathcal{S}(t),$$

koja jednostavno pokazuje da je promena količine robe na zalihama ($I'(t) = \frac{dI}{dt}$) jednaka razlici obima proizvodnje i obima prodaje. S obzirom da postoji mogućnost da se među zalihama može pronaći i neki neispravan proizvod, umesto prethodne jednačine razmatraćemo

$$I'(t) = P(t) - (\mathcal{S}(t) + \alpha I(t)), \tag{2.4.2}$$

gde ćemo radi jednostavnosti pretpostaviti da je *nivo proporcionalnosti gubitka* α unapred poznata konstanta. Iz (2.4.2) sledi

$$P(t) = I'(t) + \mathcal{S}(t) + \alpha I(t).$$

Dalje ćemo pretpostaviti da je na osnovu poznatog obima prodaje $\mathcal{S}$ preduzeće odredilo *željeni nivo zaliha* $\mathcal{J}(t)$ i na osnovu toga *željeni obim proizvodnje* $\mathcal{P}(t)$ je dat sa:

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{J}'(t) + \mathcal{S}(t) + \alpha \mathcal{J}(t). \tag{2.4.3}$$

Na primer, preduzeće može da izabere da je $\mathcal{J}(t) = 0$ pa je $\mathcal{P} = \mathcal{S}$ tj. željeni obim proizvodnje je jednak obimu prodaje.

Sada pretpostavimo da se nivo zaliha (ali ne i obim prodaje $\mathcal{S}$) znatno razlikuje od željenog nivoa zaliha $\mathcal{J}$ (na primer zbog nekog kvara u proizvodnji) i mi tražimo *novi obim proizvodnje* $P = P(t)$ koji će nivo zaliha dovesti do željenog nivoa u određenom vremenskom periodu T i tako minimizirati funkciju troška $\mathbf{C}$, koja bi mogla zavisiti od odstupanja nivoa zaliha I i obima proizvodnje P od njihovih željenih nivoa $\mathcal{J}$ i $\mathcal{P}$. Radi jednostavnosti definisaćemo funkciju troška na sledeći način:

$$\mathbf{C} = \int_0^T \Big(\beta^2(I(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt, \tag{2.4.4}$$

gde je β fiksirana konstanta koja opisuje relativnu težinu neželjenog odstupanja nivoa zaliha.

Primetimo da je minimalan trošak po formuli (2.4.4) $\mathbf{C} = 0$, koji se dobija ako je $I = \mathcal{J}$ i $P = \mathcal{P}$. Kako smo već pretpostavili da se nivo zaliha znatno razlikuje od željenog nivoa zaliha, u početnom trenutku $t = 0$ imamo

$$I(0) = I_0, \tag{2.4.5}$$

za neku konstantu I_0, tako da je:

$$I_0 \neq \mathcal{J}_0 = \mathcal{J}(0).$$

Razlika $I_0 - \mathcal{J}_0$ predstavlja pokazatelj odstupanja od željenog stanja u trenutku $t = 0$. U ovakvoj situaciji svaki novi dopustivi obim proizvodnje $P = P(t)$ uz jednačine (2.4.2) i (2.4.5) dovodi do *pozitivnog* troška $\mathbf{C}$ koji je dat formulom (2.4.4) i koji preduzeće želi da minimizira. Zapravo jednačina (2.4.2) sa početnim uslovom (2.4.5) predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu i njeno rešenje je:

$$I(t) = e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int_0^t e^{\alpha\tau}(P(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\, d\tau\Big).$$

Kako nivo zaliha $I = I(t)$ zavisi samo od obima proizvodnje $P = P(t)$, možemo u tom slučaju pisati $I = I_P$, upravo da bi naznačili zavisnost I od P, pa sada imamo:

$$I_P(t) = e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int_0^t e^{\alpha\tau}(P(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\, d\tau\Big). \tag{2.4.6}$$

Funkciju troška $\mathbf{C}$ datu formulom (2.4.4) sada možemo posmatrati kao funkciju po obimu proizvodnje, koju označavamo sa $\mathbf{C} = \mathbf{C}(P)$ tako da važi

$$\mathbf{C}(P) = \int_0^T \Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt, \tag{2.4.7}$$

gde je I_P dato formulom (2.4.6).

Domen funkcije $\mathbf{C} = \mathbf{C}(P)$ može biti uzet kao vektorski prostor $C[0,T]$ koji sadrži sve neprekidne funkcije $P = P(t)$ na intervalu $[0,T]$ ili nekom sprecifičnom podskupu od $C[0,T]$ ako želimo da isključimo određene obime proizvodnje.

Dakle, preduzeće želi da izabere poseban obim proizvodnje koji će minimizirati funkciju troška.

Teorema 2.4.1 (Neprekidnost funkcije troška). *Funkcija troška $\boldsymbol{C}$ je neprekidna u proizvoljnoj tački $P \in C[0,T]$.*

Dokaz
Za dokaz ovog tvrđenja koristićemo normu koju smo definisali formulom (1.2.8):

$$\|\phi\| = \max_{a \le x \le b} |\phi(x)|, \quad \text{ukoliko} \;\; \phi \in C(I) = C[a,b].$$

Neka je dat vektor $P \in C[0,T]$ i $\varepsilon > 0$. Treba da odredimo $\rho > 0$ tako da

$$|\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q)| < \varepsilon \tag{2.4.8}$$

važi za sve vektore $Q \in C[0,T]$ za koje važi

$$0 \le \|P - Q\| < \rho, \tag{2.4.9}$$

gde je:

$$\|P - Q\| = \max_{0 \le t \le T} |P(t) - Q(t)|\,. \tag{2.4.10}$$

Vrednost funkcionele $\mathbf{C}(Q)$ nalazimo iz formule (2.4.7):

$$\mathbf{C}(Q) = \int_0^T \Big(\beta^2 (I_Q(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (Q(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt, \tag{2.4.11}$$

za bilo koji vektor $Q \in C[0,T]$ gde je nivo zaliha I_Q u zavisnosti od Q dat po formuli (2.4.6):

$$I_Q(t) = e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int\limits_0^t e^{\alpha\tau}(Q(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\, d\tau\Big). \tag{2.4.12}$$

Ako koristimo (2.4.7) i (2.4.11) nalazimo da je

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q) &= \int\limits_0^T \Big(\beta^2(I_P(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt \\ &\quad - \int\limits_0^T \Big(\beta^2(I_Q(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (Q(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt,\end{aligned}$$

pa dalje važi:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q) &= \beta^2 \int\limits_0^T (I_P(t)^2 - I_Q(t)^2 - 2I_P(t)\mathcal{J}(t) + 2I_Q(t)\mathcal{J}(t))\, dt \\ &\quad + \int\limits_0^T (P(t)^2 - Q(t)^2 - 2P(t)\mathcal{P}(t) + 2Q(t)\mathcal{P}(t))\, dt,\end{aligned}$$

i na kraju dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q) &= \beta^2 \int\limits_0^T (I_P(t) - I_Q(t))(I_P(t) + I_Q(t) - 2\mathcal{J}(t))\, dt \\ &\quad + \int\limits_0^T (P(t) - Q(t))\ (P(t) + Q(t) - 2\mathcal{P}(t))\, dt.\end{aligned}$$

Uzimajući apsolutne vrednosti obe strane i koristeći nejednakost trougla dobijamo

$$\begin{aligned}|\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q)| &\le \beta^2 \left| \int\limits_0^T (I_P - I_Q)\ (I_P + I_Q - 2\mathcal{J})\, dt \right| \\ &\quad + \left| \int\limits_0^T (P - Q)\ (P + Q - 2\mathcal{P})\, dt \right|,\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

gde je radi skraćivanja izraza izostavljen argument t sa desne strane nejednakosti.

Pošto važi

$$\left| \int\limits_0^T f(t)\ dt \right| \leq \int\limits_0^T |f(t)|\ dt, \tag{2.4.14}$$

za bilo koju neprekidnu funkciju f na $[0,T]$, dobijamo da je:

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q)| \leq \beta^2 \int\limits_0^T |I_P - I_Q|\ |I_P + I_Q - 2\mathcal{J}|\ dt \\ + \int\limits_0^T |P - Q|\ |P + Q - 2\mathcal{P}|\ dt. \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Iz nejednakosti trougla sledi

$$\begin{aligned} |I_P + I_Q - 2\mathcal{J}| &= |2(I_P - \mathcal{J}) + (I_Q - I_P)| \\ &\leq 2\,|I_P - \mathcal{J}| + |I_Q - I_P| \end{aligned}$$

kao i

$$|P + Q - 2\mathcal{P}| \leq 2\,|P - \mathcal{P}| + |P - Q|\,,$$

tako da iz (2.4.15) sledi:

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q)| \leq \beta^2 \int\limits_0^T |I_P(t) - I_Q(t)|\ \left(2\,|I_P(t) - \mathcal{J}(t)| + |I_P(t) - I_Q(t)|\right) dt \\ + \int\limits_0^T |P(t) - Q(t)|\ \left(2\,|P(t) - \mathcal{P}(t)| + |P(t) - Q(t)|\right) dt. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Na osnovu (2.4.10) sledi:

$$|P(t) - Q(t)| \leq \|P - Q\|\,, \tag{2.4.17}$$

za svako $t \in [0,T]$ i slično

$$|P(t) - \mathcal{P}(t)| \leq \|P - \mathcal{P}\|\,,$$

i sledi da drugi integral sa desne strane nejednakosti (2.4.16) može biti napisan u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T |P(t) - Q(t)| \ \left(2\,|P(t) - \mathcal{P}(t)| + |P(t) - Q(t)|\right)\, dt \\
&\quad \leq \int\limits_0^T \|P - Q\| \left(2\,\|P - \mathcal{P}\| + \|P - Q\|\right)\, dt \\
&\quad = \|P - Q\| \left(2\,\|P - \mathcal{P}\| + \|P - Q\|\right) T. \qquad (2.4.18)
\end{aligned}$$

Sličan proračun se može izvesti i za prvi integral sa desne strane nejednakosti (2.4.16). Koristeći formule (2.4.6) i (2.4.12) sledi:

$$I_P(t) - I_Q(t) = e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha \tau} (P(\tau) - Q(\tau))\, d\tau,$$

pa važi:

$$|I_P(t) - I_Q(t)| \leq e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha \tau}\, |P(\tau) - Q(\tau)| \ d\tau \qquad (2.4.19)$$

gde smo koristili (2.4.14) i činjenicu da je eksponencijalna funkcija pozitivna.

Nejednakost (2.4.17) i nejednakost

$$e^{\alpha \tau} \leq e^{\alpha t},$$

koja važi za $\tau \leq t$, zajedno sa (2.4.19) daju

$$|I_P(t) - I_Q(t)| \leq \|P - Q\|\, T,$$

za svako $t \in [0, T]$. Dakle, prvi integral sa desne strane nejednakosti (2.4.16) se može napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&\beta^2 \int\limits_0^T |I_P(t) - I_Q(t)| \ \left(2\,|I_P(t) - \mathcal{J}(t)| + |I_P(t) - I_Q(t)|\right)\, dt \\
&\quad \leq \beta^2\, \|P - Q\|\, T (2\,\|I_P - \mathcal{J}\| + \|P - Q\|\, T) T, \qquad (2.4.20)
\end{aligned}$$

gde smo takođe koristili nejednakost

$$|I_P(t) - \mathcal{J}(t)| \leq \|I_P - \mathcal{J}\|,$$

koja direktno sledi iz (1.2.8).

Sada možemo koristiti nejednakosti (2.4.18) i (2.4.20) da izračunamo desnu stranu nejednakosti (2.4.16) i na kraju dobijamo:

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q)| \leq \|P - Q\| \, T\Big(&\beta^2 T(2\|I_P - \mathcal{J}\| + \|P - Q\| \, T) \\ &+ 2\|P - \mathcal{P}\| + \|P - Q\|\Big), \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

za bilo koji vektor $Q \in C[0,T]$.

Sada ćemo posmatrati samo one vektore Q koji su sadržani u lopti $L_1(P)$, tj. ako je $\|P - Q\| < 1$ onda je desna strana (2.4.21) manja od

$$\|P - Q\| \, T\Big(\beta^2 T(2\|I_P - \mathcal{J}\| + T) + 2\|P - \mathcal{P}\| + 1\Big).$$

Označimo izraz u zagradi sa M tj.

$$M = \beta^2 T(2\|I_P - \mathcal{J}\| + T) + 2\|P - \mathcal{P}\| + 1.$$

Ako za zadato $\varepsilon > 0$ izaberemo

$$\rho = \frac{1}{2} \min\Big\{\frac{\varepsilon}{MT}, 1\Big\},$$

onda je $\|P - Q\| \leq \rho$, pa sledi

$$|\mathbf{C}(P) - \mathbf{C}(Q)| \leq \|P - Q\| \, TM \leq \frac{\varepsilon}{2MT} MT = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Primetimo da ovaj izbor za ρ zavisi samo od ε i P i od poznatih vrednosti $\mathcal{J}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}$, I_0, β i T koji su uključeni u definiciju funkcije troška $\mathbf{C}$, ali *ne zavisi* od Q. Mi smo stoga pokazali da je funkcija troška $\mathbf{C}$ neprekidna u P na normiranom vektorskom prostoru $C[0,T]$, što zapisujemo:

$$\lim_{Q \to P \in C[0,T]} \mathbf{C}(Q) = \mathbf{C}(P).$$

Štaviše, pošto je ovo tačno za bilo koje P, mi smo zapravo pokazali da je funkcija $\mathbf{C}$ neprekidna na $C[0,T]$. □

Sa druge strane, funkcija troška $\mathbf{C}$ nije linearna, jer zahtevana linearna relacija $\mathbf{C}(aP + bQ) = a\mathbf{C}(P) + b\mathbf{C}(Q)$ na važi za sve brojeve a i b i za sve vektore P i Q na vektorskom prostoru $C[0, T]$. Ovo je lako proverava koristeći formule (2.4.6) i (2.4.7). Takve funkcionele koje nisu linearne, nazivaju se nelinearne.

U nastavku ćemo izračunati varijaciju funkcije troška $\mathbf{C}$.

Dakle, razmatramo funkciju troška $\mathbf{C}$ definisanu sa (2.4.6) i (2.4.7) na vektorskom prostoru $C[0, T]$ koji sa sastoji od svih funkcija (obima proizvodnji) P klase C na intervalu $[0, T]$. Iz (2.4.7) dobijamo

$$\mathbf{C}(P + \varepsilon\ \Delta P) = \int_0^T \Big(\beta^2 (I_{P+\varepsilon\Delta P}(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P(t) + \varepsilon\ \Delta P(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\ dt, \tag{2.4.23}$$

za neki broj ε i bilo koje vektore P i ΔP iz vektorskog prostora $C[0, T]$, gde je $I_{P+\varepsilon\Delta P}$ određeno sa (2.4.6):

$$\begin{aligned} I_{P+\varepsilon\Delta P} &= e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int_0^t e^{\alpha\tau}(P(\tau) + \varepsilon\ \Delta P(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\ d\tau\Big) \\ &= I_P(t) + \varepsilon e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} \Delta P(\tau)\ d\tau. \end{aligned}$$

Kada ubacimo ovaj poslednji rezultat u jednačinu (2.4.23), posle sređivanja i pojednostavljivanja imamo da važi:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P + \varepsilon\ \Delta P) = \mathbf{C}(P) + 2\varepsilon \int_0^T &\Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t)) e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} \Delta P(\tau)\ d\tau \\ &+ (P(t) - \mathcal{P}(t))\Delta P(t)\Big)\ dt \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^T \Big(\beta^2 (e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} \Delta P(\tau)\ d\tau)^2 + (\Delta P(t))^2\Big)\ dt. \end{aligned}$$

Ako ovu jednačinu diferenciramo po ε, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}\mathbf{C}(P+\varepsilon\Delta P) = 2\int\limits_0^T \Big(&\beta^2(I_P(t)-\mathcal{J}(t))e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{\alpha\tau}\Delta P(\tau)\,d\tau \\
&+(P(t)-\mathcal{P}(t))\Delta P(t)\Big)\,dt \\
&+2\varepsilon\int\limits_0^T \Big(\beta^2(e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{\alpha\tau}\Delta P(\tau)\,d\tau)^2+(\Delta P(t))^2\Big)\,dt,
\end{aligned}
$$

i ako sada stavimo da je $\varepsilon = 0$ i iskoristimo formulu (2.3.4) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{C}(P;\Delta P) = 2\int\limits_0^T \Big(&\beta^2(I_P(t)-\mathcal{J}(t))e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{\alpha\tau}\Delta P(\tau)\,d\tau \\
&+(P(t)-\mathcal{P}(t))\Delta P(t)\Big)\,dt, \qquad (2.4.24)
\end{aligned}
$$

za svaki vektor ΔP iz vektorskog prostora $C[0,T]$. Dakle, funkcija troška $\mathbf{C}$ ima varijaciju u svakom vektoru $P \in C[0,T]$ i ta varijacija je data formulom (2.4.24).

2.5 Problem optimizacije u planiranju proizvodnje

U ovom odeljku ćemo rešiti problem optimizacije za funkciju troška. Kao što smo već naveli, funkcija $\mathbf{C}$ je definisana na vektorskom prostoru $C[0,T]$ koji se sastoji od svih neprekidnih funkcija (obima proizvodnji) P na fiksnom intervalu $[0,T]$.

Naš zadatak je na nađemo ekstremnu vrednost P^* iz prostora $C[0,T]$ koja će zapravo dati *minimalnu* vrednost funkcije troška $\mathbf{C}$.

Pokazali smo da funkcija troška $\mathbf{C}$ ima varijaciju u svakom vektoru iz $C[0,T]$. Otuda, ako je P^* željeni ekstrem, na osnovu jednačine (2.2.4) zaključujemo da je

$$\delta\mathbf{C}(P^*;\Delta P) = 0,$$

za svako $\Delta P \in C[0,T]$. Na osnovu (2.4.24) sledi

$$\int\limits_0^T \Big(\beta^2 (I_{P^*}(t) - \mathcal{J}(t)) e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} \Delta P(\tau)\ d\tau + (P^*(t) - \mathcal{P}(t)) \Delta P(t)\Big)\ dt = 0, \tag{2.5.1}$$

koja važi za *svaku* neprekidnu funkciju ΔP ako je P^* željeni minimalni vektor.

Nastojimo da eliminišemo proizvoljan vektor ΔP iz prethodne jednačine tako da dobijemo jednostavniju jednačinu u kojoj će nepoznata vrednost biti samo vektor P^* i koja može biti rešena tako da na kraju daje željeni ekstremni vektor. U tu svrhu koristimo činjenicu da redosled integrala u prethodnoj jednačini može biti zamenjen:

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T (I_{P^*}(t) - \mathcal{J}(t)) e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} \Delta P(\tau)\ d\tau\ dt \\ &\quad = \int\limits_0^T e^{\alpha t} \Delta P(t) \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau} (I_{P^*}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau\ dt, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

tako da je jednačina (2.5.1) ekvivalentna sa

$$\int\limits_0^T \Big(P^*(t) - \mathcal{P}(t) + \beta^2 e^{\alpha t} \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau} (I_{P^*}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau\Big) \Delta P(t)\ dt = 0,$$

koja i dalje važi za svaku neprekidnu funkciju ΔP iz $C[0,T]$. Kao što smo već rekli, želimo iz jednačine da eliminišemo ΔP, tako da specijalno možemo uzeti

$$\Delta P(t) = P^*(t) - \mathcal{P}(t) + \beta^2 e^{\alpha t} \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau} (I_{P^*}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau \qquad \text{za } 0 \le t \le T,$$

i tada imamo

$$\int\limits_0^T \Big(P^*(t) - \mathcal{P}(t) + \beta^2 e^{\alpha t} \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau} (I_{P^*}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau\Big)^2\ dt = 0$$

tj, važi:

$$P^*(t) - \mathcal{P}(t) + \beta^2 e^{\alpha t} \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau}(I_{P^*}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\, d\tau = 0 \qquad \text{za } 0 \le t \le T. \tag{2.5.3}$$

Konačno, dobili smo jednačinu koja sadrži samo nepoznatu P^*.

Da bi rešili ovu jednačinu po P^*, najlakši način je da diferenciramo obe strane po t i iskoristimo činjenicu:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_t^T h(\tau)\, d\tau = -h(t) \qquad \text{za svaku neprekidnu funkciju } h,$$

tako da sada imamo

$$\frac{d}{dt}(P^*(t) - \mathcal{P}(t)) = \alpha(P^*(t) - \mathcal{P}(t)) + \beta^2(I_{P^*}(t) - \mathcal{J}(t)), \tag{2.5.4}$$

koja mora važiti za svako t iz intervala $[0, T]$. Ako sada diferenciramo po t jednačinu (2.5.4), nakon uprošćavanja dobijamo da važi

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(P^*(t) - \mathcal{P}(t)) &= \alpha^2(P^*(t) - \mathcal{P}(t)) \\ &\quad + \beta^2\Big(\frac{d}{dt}(I_{P^*}(t) - \mathcal{J}(t)) + \alpha(I_{P^*}(t) - \mathcal{J}(t))\Big),\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

za svako t. S druge strane, na osnovu (2.4.2) i (2.4.3) imamo

$$\frac{d}{dt}(I_{P^*}(t) - \mathcal{J}(t)) + \alpha(I_{P^*}(t) - \mathcal{J}(t)) = P^*(t) - \mathcal{P}(t), \tag{2.5.6}$$

pa tako diferencijalna jednačina (2.5.5) može biti napisana još jednostavnije kao

$$\frac{d^2}{dt^2}(P^*(t) - \mathcal{P}(t)) = (\alpha^2 + \beta^2)(P^*(t) - \mathcal{P}(t)), \tag{2.5.7}$$

koja mora *važiti za ekstremni obim proizvodnje* $P^* = P^*(t)$ *za svako* t *iz intervala* $[0, T]$.

Tada najopštije rešenje jednačine (2.5.7) ima oblik

$$P^*(t) - \mathcal{P}(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{2.5.8}$$

za proizvoljne konstante A i B koje mogu da se izaberu tako da P^* zadovoljava uslov (2.5.3). Na primer, ako je $t = T$ u jednačini (2.5.3), nalazimo neophodan uslov

$$P^*(t) - \mathcal{P}(t) = 0 \qquad \text{za } t = T, \tag{2.5.9}$$

a ako je $t = 0$ u jednačini (2.5.4), dobijamo uslov

$$\frac{d}{dt}(P^*(t) - \mathcal{P}(t)) - \alpha(P^*(t) - \mathcal{P}(t)) = \beta^2(I_0 - \mathcal{J}_0) \quad \text{za } t = 0, \tag{2.5.10}$$

gde su $I_0 = I_{P^*}(0)$ i $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}(0)$ poznate konstante. Ako sada zahtevamo da funkcija P^* data jednačinom (2.5.8) mora zadovoljavati uslove (2.5.9) i (2.5.10), nalazimo da konstante A i B imaju vrednosti:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta^2(I_0 - \mathcal{J}_0)e^{-\gamma T}}{(\gamma+\alpha)e^{\gamma T} + (\gamma-\alpha)e^{-\gamma T}} \\ B &= \frac{-\beta^2(I_0 - \mathcal{J}_0)e^{\gamma T}}{(\gamma+\alpha)e^{\gamma T} + (\gamma-\alpha)e^{-\gamma T}} \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

tako da je ekstremna funkcija P^* sada

$$P^*(t) = \mathcal{P}(t) + \beta^2(\mathcal{J}_0 - I_0)\frac{e^{\gamma(T-t)} - e^{-\gamma(T-t)}}{(\gamma+\alpha)e^{\gamma T} + (\gamma-\alpha)e^{-\gamma T}}, \tag{2.5.12}$$

za svako t iz intervala $[0, T]$ gde je $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Ako rezultat jednačine (2.5.12) ubacimo u (2.5.4), tada nalazimo da je optimalan nivo zaliha I_{P^*} dat sa:

$$I_{P^*}(t) = \mathcal{J}(t) + (I_0 - \mathcal{J}_0)\frac{(\gamma+\alpha)e^{\gamma(T-t)} + (\gamma-\alpha)e^{-\gamma(T-t)}}{(\gamma+\alpha)e^{\gamma T} + (\gamma-\alpha)e^{-\gamma T}}. \tag{2.5.13}$$

Lako se proverava da obim proizvodnje P^* dat jednačinom (2.5.12) i nivo zaliha I_{P^*} dat jednačinom (2.5.13) zadovoljavaju integralnu jednačinu (2.5.3) za $0 \leq t \leq T$. Štaviše, proračun kojim smo došli do (2.5.12) nam pokazuje da je *funkcija P^* jedina funkcija za koju* (2.5.3) *važi*, tj. (2.5.12) daje jedinu funkciju P^* iz klase $C[0,T]$ koja zadovoljava neophodan uslov (2.5.1). Ovaj uslov mora važiti za svaki ekstrem funkcije troška $\mathbf{C}$.

Dalje, *treba da proverimo da li je P^* minimalna ili maksimalna vrednost funkcije troška* $\mathbf{C}$, *ili je P^* možda sedlasta tačka ili prevojna tačka za* $\mathbf{C}$. Zapravo, lako se pokazuje u ovom slučaju da je P^* *minimalna* vrednost funkcije troška $\mathbf{C}$. Znamo da važi

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(P+\varepsilon\Delta P) = \mathbf{C}(P) + 2\varepsilon \int_0^T \Big(\beta^2(I_P(t)-\mathcal{J}(t))e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\Delta P(\tau)\,d\tau \\ + (P(t)-\mathcal{P}(t))\Delta P(t)\Big)\,dt \\ + \varepsilon^2\int_0^T \Big(\beta^2(e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\Delta P(\tau)\,d\tau)^2 + (\Delta P(t))^2\Big)\,dt,\end{aligned}$$

što smo već videli, tako da sada imamo

$$\mathbf{C}(P^*+Q)-\mathbf{C}(P^*) = \int_0^T \Big(\beta^2(e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}Q(\tau)\,d\tau)^2 + Q(t)^2\Big)\,dt, \quad (2.5.14)$$

za svaku funkciju Q iz klase $C[0,T]$. Desna strana ove jednačine je uvek *nenegativna* za svako Q, pa iz toga sledi

$$\mathbf{C}(P^*+Q)-\mathbf{C}(P^*) \geq 0$$

za svako Q iz vektorskog prostora $C[0,T]$, što dokazuje da je P^* *minimalna* vrednost funkcije troška $\mathbf{C}$. Minimalnu vrednost funkcije troška $\mathbf{C}$ možemo dobiti i na drugačiji način, ako jednačine (2.5.12) i (2.5.13) ubacimo u formulu (2.4.7) i tada dobijamo

$$\mathbf{C}(P^*) = \mathbf{C}_{\min} = \beta^2(I_0-\mathcal{J}_0)^2\frac{e^{\gamma T}-e^{-\gamma T}}{(\gamma+\alpha)e^{\gamma T}+(\gamma-\alpha)e^{-\gamma T}}, \quad (2.5.15)$$

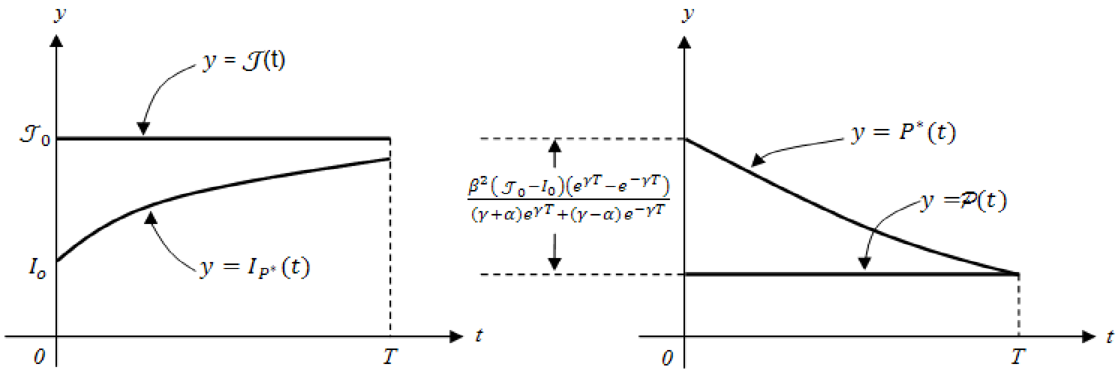
čija je vrednost pozitivna za $\beta^2(I_0-\mathcal{J}_0)^2 > 0$.

Formule (2.5.12) i (2.5.13) pokazuju da optimalan obim proizvodnje P^* daje odgovarajuća odstupanja $P^* - \mathcal{P}$ i $I_{P^*} - \mathcal{J}$ koja linearno zavise od početnog odstupanja $I_0 - \mathcal{J}_0$. Štaviše, ova odstupanja će biti mala, ako je početno odstupanje malo. Na primer, ako koristimo normu (1.2.8) nalazimo da važi:

$$\|P^* - \mathcal{P}\| = \beta^2 \left| I_0 - \mathcal{J}_0 \right| \frac{e^{\gamma T} - e^{-\gamma T}}{(\gamma + \alpha)e^{\gamma T} + (\gamma - \alpha)e^{-\gamma T}}$$

$$\|I_{P^*} - \mathcal{J}\| = \left| I_0 - \mathcal{J}_0 \right|.$$

Ako je početno odstupanje *negativno* tj. $I_0 - \mathcal{J}_0 < 0$ (kao što je slučaj kod mehaničkog kvara, nakon kojeg se privremeno zaustavlja proizvodnja), tada će novi optimalan obim proizvodnje P^* *nadmašiti* željeni obim proizvodnje $\mathcal{P}$, dok će odgovarajući nivo zaliha I_{P^*} biti niži od željenog nivoa zaliha $\mathcal{J}$, kao što je prikazano na Slici 6.



Slika 6

Napomenimo da, ako preduzeće želi da *smanji* β^2 u formuli funkcije troška (2.4.4) tako da daje *veći značaj* minimizaciji rezlike $P - \mathcal{P}$ u poređenju sa $I - \mathcal{J}$, tada formula (2.5.12) pokazuje da će optimalan obim proizvodnje P^* zaista biti bliži željenom obimu proizvodnje $\mathcal{P}$, dok formula (2.5.13) pokazuje da će odgovarajući nivo zaliha I_{P^*} biti dalji od željenog željenog nivoa zaliha $\mathcal{J}$ za $t > 0$.

Konačno, napomenimo da se u svakom slučaju optimalan obim proizvodnje $P^* = P^*(t)$ iz (2.5.12) slaže sa željenim obimom proizvodnje $\mathcal{P}$ u trenutku $t = T$

$$P^*(T) = \mathcal{P}(T). \tag{2.5.16}$$

Ovo je uslov dat jednačinom (2.5.9) koji nastaje na osnovu izračunavanja jednačine (2.5.3) u trenutku $t = T$. Ovaj granični uslov (2.5.16) ima nešto drugačiju prirodu od uslova

$$I(0) = I_0,$$

koji je određen u vremenu $t = 0$. Zaista, uslov (2.5.16) *nije eksplicitno zadat* u tvrđenju problema; radije se pojavljuje automatski ili *prirodno* u rešenju problema optimizacije kao posledica toga da je varijacija jednaka nuli u svakom ekstremu. Ovakvi uslovi su poznati kao **prirodni granični uslovi** nasuprot *zadatim* graničnim uslovima kao $I(0) = I_0$.

Na kraju, moramo još napomenuti da ovakvi problemi minimuma kod funkcije troška **C** mogu biti nerealni jer proizvodnja preduzeća u nekim slučajevima nema odgovarajuću radnu snagu i kapitalne resurse koji su mu potrebni radi povećanja proizvodnje do nivoa optimuma P^* koji je dat formulom (2.5.12). U tom slučaju problem planiranja proizvodnje mora uključiti u razmatranje i svaki važan uslov proizvodnje.

3

Neophodni uslovi za ekstrem uz ograničenja

U ovom poglavlju ćemo uvesti Ojler-Lagranžove množitelje i pokazati kako se koriste za rešavanje ekstremnih problema koji uključuju neke tipove ograničenja tipa jednakosti. Ovde su korišćene literature Smith [1] i Chachuat [9].

3.1 Slaba neprekidnost varijacije

Ako je J funkcionela koja ima varijaciju na otvorenom skupu D koji je sadržan u normiranom vektorskom prostoru $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ i ako za neki vektor $x \in D$ važi

$$\lim_{y \to x \in \mathcal{X}} \delta J(y; \Delta x) = \delta J(x; \Delta x) \tag{3.1.1}$$

za sve vektore $\Delta x \in \mathcal{X}$, tada kažemo da je *varijacija* funkcionele J **slabo neprekidna** u x. Alternativno, pozivajući se na definiciju 1.3.2 neprekidnih funkcija možemo da kažemo da je varijacija funkcionele J slabo neprekidna u $x \in D$ kad god je, za svaki vektor $\Delta x \in \mathcal{X}$ varijacija $\delta J(y; \Delta x)$, posmatrana kao funkcionela od y, neprekidna u $y = x$. Potrebno je samo da pokažemo da za svaki dati vektor Δx, razlika

$$\delta J(y; \Delta x) - \delta J(x; \Delta x)$$

može biti proizvoljno mala za svaki vektor y koji je dovoljno *blizu* vektoru x, to jest za svaki vektor y u nekoj lopti $L_\rho(x)$ sa centrom u x.

Kao primer, razmotrićemo funkciju troška, koju smo definisali sa

$$\mathbf{C}(P) = \int\limits_0^T \Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt,$$

a njena varijacija je data sa

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{C}(P; \Delta P) = 2 \int\limits_0^T \Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t)) e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} \Delta P(\tau)\, d\tau \\ + (P(t) - \mathcal{P}(t))\Delta P(t)\Big)\, dt.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{C}(Q; \Delta P) - \delta\mathbf{C}(P; \Delta P) =& 2\beta^2 \int\limits_0^T (I_Q(t) - I_P(t)) e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} \Delta P(\tau)\, d\tau\, dt \\ &+ 2 \int\limits_0^T (Q(t) - P(t))\Delta P(t)\, dt\end{aligned}$$

za bilo koje vektore Q, P i ΔP iz vektorskog prostora $C[0, T]$. S obzirom da je

$$I_P(t) = e^{-\alpha t}(I_0 + \int\limits_0^t e^{\alpha\tau}(P(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\, d\tau),$$

sledi:

$$I_Q(t) - I_P(t) = e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\tau}(Q(\tau) - P(\tau))\, d\tau.$$

Lako se sada dokazuje da razlika

$$\delta\mathbf{C}(Q; \Delta P) - \delta\mathbf{C}(P; \Delta P)$$

može biti proizvoljno mala ako zahtevamo da je $\|Q - P\|$ malo, gde smo mogli, na primer, koristiti normu

$$\|Q - P\| = \max_{0 \le t \le T} |Q(t) - P(t)|\,.$$

Zaključujemo u ovom slučaju da je varijacija $\delta\mathbf{C}(P)$ slabo neprekidna u P za svaki vektor P iz vektorskog prostora $C[0, T]$.

3.2 Teorema Ojler-Lagranžovih množitelja za jedno ograničenje

Neka je $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normirani vektorski prostor, neka je D otvoren podskup u $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ i neka su J i K dve funkcionele na D. Razmotrićemo problem pronalaženja ekstrema x^* funkcionele J među svim vektorima $x \in D$ koji zadovoljavaju ograničenje

$$K(x) = k_0 \tag{3.2.1}$$

gde je k_0 unapred zadat broj.

Koristićemo simbol $D[K = k_0]$ da predstavimo podskup od D koji sadrži sve vektore $x \in D$ koji zadovoljavaju ograničenje $K(x) = k_0$. Pretpostavićemo da skup $D[K = k_0]$ nije prazan, tj. da postoji barem jedan vektor $x \in D$ koji zadovoljava ograničenje (3.2.1).

Teorema 3.2.1 (**Teorema Ojler - Lagranžovih množitelja**). *Neka su J i K funkcionele koje su definisane i koje imaju varijaciju na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ i neka je x^* lokalni ekstrem u skupu $D[K = k_0]$ za funkcionelu J, gde je k_0 unapred zadat broj za koji skup $D[K = k_0]$ nije prazan. Pretpostavljamo da su varijacije funkcionele J i funkcionele K slabo neprekidne u x^* i pretpostavljamo da važi $\delta K(x^*; \Delta x) \neq 0$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da važi:*

$$\delta J(x^*; \Delta x) = \lambda \, \delta K(x^*; \Delta x), \tag{3.2.2}$$

za svaki vektor $\Delta x \in \mathcal{X}$.

Pre nego što dokažemo ovu teoremu, daćemo formulaciju teoremo o inverznim funkcijama i takođe ćemo formulisati i dokazati lemu koja nam je potrebna za dokaz teoreme 3.2.1.

Teorema 3.2.2 (**Teorema o inverznim funkcijama**). *Neka je $x_0 \in \mathcal{X}$ i $\rho > 0$. Ako funkcija $\phi : L_\rho(x_0) \to \mathcal{X}$ ima neprekidan parcijalni izvod u svakoj tački i ako je Jakobijeva determinanta različita od nule u x_0, tada ϕ obezbeđuje neprekidno invertibilno preslikavanje iz $L_\rho(x_0)$ u okolinu od $\phi(x_0)$.*

Lema 3.2.1. *Neka su J i K funkcionele definisane u okolini x^* na otvorenom skupu $D \subset \mathcal{X}$ i neka je $K(x^*) = k_0$. Pretpostavljamo da postoje vektori*

$\Delta x, \Delta y \in \mathcal{X}$ tako da varijacije od J i K zadovoljavaju uslov da je Jakobijeva determinanta različita od nule

$$det \begin{vmatrix} \delta J(x^*;\Delta x) & \delta J(x^*;\Delta y) \\ \delta K(x^*;\Delta x) & \delta K(x^*;\Delta y) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.2.3}$$

i da su varijacije od J i K neprekidne u okolini x^* (u svakom vektoru Δx, Δy). Tada x^* nije lokalni ekstrem za funkcionelu J na skupu $D[K = k_0]$.

Dokaz
Razmatramo pomoćne funkcije:

$$\begin{aligned} j(\alpha,\beta) &= J(x^* + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) \qquad \text{i} \\ k(\alpha,\beta) &= K(x^* + \alpha\Delta x + \beta\Delta y). \end{aligned}$$

Obe funkcije i j i k su definisane u okolini $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, jer su J i K po pretpostavci definisane u okolini x^*. Pored toga, varijacije od J i K su neprekidne u vektorima Δx i Δy u okolini x^*, pa parcijalni izvodi $\dfrac{\partial j}{\partial \alpha}$, $\dfrac{\partial j}{\partial \beta}$, $\dfrac{\partial k}{\partial \alpha}$, $\dfrac{\partial k}{\partial \beta}$:

$$\begin{aligned} j_\alpha(\alpha,\beta) &= \delta J(x^* + \alpha\Delta x + \beta\Delta y; \Delta x), \quad & j_\beta(\alpha,\beta) &= \delta J(x^* + \alpha\Delta x + \beta\Delta y; \Delta y), \\ k_\alpha(\alpha,\beta) &= \delta K(x^* + \alpha\Delta x + \beta\Delta y; \Delta x), \quad & k_\beta(\alpha,\beta) &= \delta K(x^* + \alpha\Delta x + \beta\Delta y; \Delta y), \end{aligned}$$

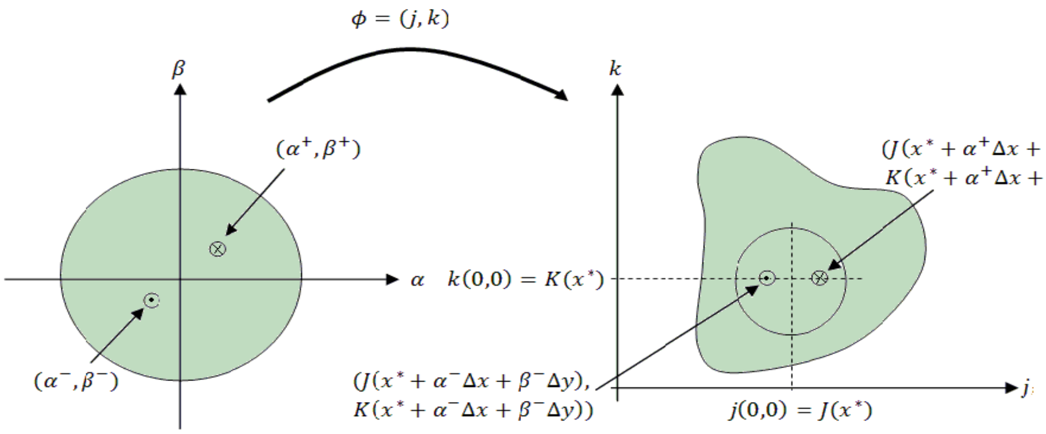
postoje i neprekidni su u okolini $(0,0)$. Vidimo takođe da je pretpostavka (3.2.3) (da je Jakobijeva determinanta različita od nule) ekvivalentna sa uslovom:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial j}{\partial \alpha} & \frac{\partial j}{\partial \beta} \\ \frac{\partial k}{\partial \alpha} & \frac{\partial k}{\partial \beta} \end{vmatrix}_{\alpha=\beta=0} \neq 0.$$

Sada primenjujemo teoremu 3.2.2 (teoremu o inverznim funkcijama), tj. funkcija $\phi = (j,k)$ preslikava okolinu od $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ u okolinu od $(J(x^*), K(x^*))$ odnosno, mogu se pronaći tačke (α^-, β^-) i (α^+, β^+) tako da važi:

$$\begin{aligned} J(x^* + \alpha^-\Delta x + \beta^-\Delta y) &< J(x^*) < J(x^* + \alpha^+\Delta x + \beta^+\Delta y) \\ K(x^* + \alpha^-\Delta x + \beta^-\Delta y) &= K(x^*) = K(x^* + \alpha^+\Delta x + \beta^+\Delta y), \end{aligned}$$

kao što je prikazano na Slici 7. Ovim smo pokazali da x^* ne može biti lokalni ekstrem za J. □



Slika 7

Sada ćemo dokazati teoremu 3.2.1 (teoremu Ojler - Lagranžovih množitelja).

Dokaz
Kako je x^* (lokalni) ekstrem u skupu $D[K = k_0]$ za funkcionelu J iz leme 3.2.1 vidimo da važi:

$$\det \begin{vmatrix} \delta J(x^*; \Delta x) & \delta J(x^*; \Delta y) \\ \delta K(x^*; \Delta x) & \delta K(x^*; \Delta y) \end{vmatrix} = 0,$$

za svako $\Delta x, \Delta y \in \mathcal{X}$. Ukoliko stavimo da je

$$\lambda = \frac{\delta J(x^*; \Delta x)}{\delta K(x^*; \Delta x)},$$

dobijamo $\delta J(x^*; \Delta x) = \lambda\ \delta K(x^*; \Delta x)$, za svako $\Delta x \in \mathcal{X}$. $\square$

Parametar λ iz teoreme 3.2.1 se naziva **Ojler - Lagranžov množitelj**.

Napomenimo još da Ojler - Lagranžov uslov može biti napisan u obliku:

$$\delta(J - \lambda K)(x^*, \cdot) = 0. \qquad (3.2.4)$$

Naredni primer je preuzet iz literature Smith [1].

Primer 5. *Neka su funkcije J i K definisane na $\mathbb{R}$:*

$$J(x) = x^2$$

$$K(x) = x^2 + 2x + \frac{3}{4}.$$

Treba naći ekstrem u $D[K = 0]$ za funkcionelu J gde je $D = \mathbb{R}$.

Koristići (2.3.4) dobijamo

$$\delta J(x; \Delta x) = 2x\Delta x$$

$$\delta K(x; \Delta x) = 2(x + 1)\Delta x$$

za bilo koji broj Δx.

Sada primenjujemo Ojler-Lagranžovu teoremu 3.2.1, tj. važi

$$2x^*\Delta x = \lambda 2(x^* + 1)\Delta x$$

ili

$$(2x^* - \lambda 2(x^* + 1))\Delta x = 0,$$

za neko λ i za svako Δx ako je x^* lokalni ekstrem u $D[K = 0]$. Uzećemo $\Delta x = 1$ i tada važi

$$2(x^* - \lambda(x^* + 1)) = 0,$$

za neku konstantu λ. Ova jednačina ima rešenje koje zavisi od λ:

$$x^* = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Ukoliko ovu vrednost ubacimo u ograničenje $K(x^*) = 0$ dobijamo jednačinu po λ

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

koja ima rešenja $\lambda = -1$ i $\lambda = 3$. Kada uvrstimo ove dve vrednosti u $x^* = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ dobijamo rešenja $x^* = -\frac{1}{2}$ i $x^* = -\frac{3}{2}$. Očigledno, $x^* = -\frac{1}{2}$ daje minimum funkcije J u $D[K = 0]$, dok $x^* = -\frac{3}{2}$ daje maksimum u $D[K = 0]$.

3.3 Teorema Ojler-Lagranžovih množitelja za više ograničenja

Sada ćemo razmotriti ekstremni problem koji uključuje konačan broj ograničenja tipa $K(x) = k$. Neka su K_1, K_2,...,K_m funkcionele koje su definisane i koje imaju varijaciju na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ i neka sa $D[K_i = k_i,\ \text{za } i = 1, 2, ..., m]$ označimo podskup od D koji sadrži sve vektore $x \in D$ koji istovremeno zadovoljavaju sledeća ograničenja:

$$K_1(x) = k_1,\ K_2(x) = k_2,\ \ldots,\ K_m(x) = k_m. \tag{3.3.1}$$

Ovde su k_1, k_2,...,k_m unapred zadati brojevi i uvek pretpostavljamo da postoji najmanje jedan vektor u D koji zadovoljava sva ograničenja (3.3.1) tako da skup $D[K_i = k_i,\ \text{za } i = 1, 2, ..., m]$ nije prazan.

Teorema 3.3.1. *Neka su J, K_1, K_2,...,K_m funkcionele koje su definisane i koje imaju varijaciju na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ i neka je x^* lokalni ekstrem u skupu*

$$D[K_i = k_i,\ \text{za } i = 1, 2, ..., m]$$

za funkcionelu J, gde su k_1, k_2,...,k_m unapred zadati brojevi za koje skup $D[K_i = k_i,\ \text{za } i = 1, 2, ..., m]$ nije prazan. Pretpostavljamo da su varijacije funkcionele J i varijacije svake od K_i (za $i = 1, 2, ..., m$) slabo neprekidne u x^* i pretpostavljamo da važi:

$$det \begin{vmatrix} \delta K_1(x^*; \Delta x_1) & \delta K_1(x^*; \Delta x_2) & \ldots & \delta K_1(x^*; \Delta x_m) \\ \delta K_2(x^*; \Delta x_1) & \delta K_2(x^*; \Delta x_2) & \ldots & \delta K_2(x^*; \Delta x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta K_m(x^*; \Delta x_1) & \delta K_m(x^*; \Delta x_2) & \ldots & \delta K_m(x^*; \Delta x_m) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.3.2}$$

za sve vektore Δx_1, Δx_2,...,Δx_m iz $\mathcal{X}$. Tada postoje konstante λ_1, λ_2,...,λ_m takve da važi

$$\delta J(x^*; \Delta x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ \delta K_i(x^*; \Delta x), \tag{3.3.3}$$

za svaki vektor $\Delta x \in \mathcal{X}$.

Primer 6. *Razmatramo problem minimizacije ili maksimizacije funkcionele*

$$J(Y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, Y(x), Y'(x))\, dx, \tag{3.3.5}$$

gde je F poznata funkcija, $Y = Y(x)$ je funkcija klase $C^1[x_0, x_1]$ i imamo granične uslove

$$Y(x_0) = y_0, \qquad Y(x_1) = y_1, \tag{3.3.6}$$

gde su y_0 i y_1 unapred zadate konstante. Ako definišemo funkcionele K_0 i K_1 na sledeći način:

$$K_0(Y) = Y(x_0), \qquad K_1(Y) = Y(x_1), \tag{3.3.7}$$

za neku funkciju $Y = Y(x)$ u vektorskom prostoru $C^1[x_0, x_1]$, onda je problem pronaći ekstrem u skupu $D[K_0 = y_0, K_1 = y_1]$ za funkcionelu J definisanu sa (3.3.5). Otvoren skup D se smatra da je čitav normirani vektorski prostor $C^1[x_0, x_1]$ sa nekom odgovarajućom normom.

Koristeći (3.3.7) i definiciju varijacije (2.3.4) dobijamo:

$$\delta K_0(Y; \Delta Y) = \Delta Y(x_0), \qquad \delta K_1(Y; \Delta Y) = \Delta Y(x_1), \tag{3.3.8}$$

za neku funkciju ΔY iz $C^1[x_0, x_1]$.

Varijacija funkcionele J je data sa (pogledati primer 4):

$$\delta J(Y; \Delta Y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_Y(x, Y(x), Y'(x)) \Delta Y(x) + F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)) \Delta Y'(x) \Big)\, dx, \tag{3.3.9}$$

za neku neprekidno diferencijabilnu funkciju $\Delta Y = \Delta Y(x)$ na $[x_0, x_1]$.

Sada možemo da primenimo teoremu 3.3.1. Ako je $Y = Y(x)$ lokalni ekstrem u $D[K_0 = y_0, K_1 = y_1]$ za J, tada postoje konstante λ_0 i λ_1 tako da važi:

$$\delta J(Y; \Delta Y) = \lambda_0\ \delta K_0(Y; \Delta Y) + \lambda_1\ \delta K_1(Y; \Delta Y),$$

za sve vektore ΔY iz $C^1[x_0, x_1]$. Ako koristimo (3.3.8) i (3.3.9) dobijamo:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_Y(x, Y(x), Y'(x)) \Delta Y(x) + F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)) \Delta Y'(x) \Big)\, dx$$
$$= \lambda_0\ \Delta Y(x_0) + \lambda_1\ \Delta Y(x_1), \tag{3.3.10}$$

za svaku neprekidno diferencijabilnu funkciju $\Delta Y = \Delta Y(x)$.

Želimo da eliminišemo proizvoljni vektor $\Delta Y(x)$ *i izvod* $\Delta Y'(x)$ *iz (3.3.10) pod uslovom da je:*

$$F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)) \tag{3.3.11}$$

neprekidno diferencijabilna u x. *Znamo da važi:*

$$\frac{d}{dx}\Big(F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y(x)\Big) = F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y'(x) + \Big(\frac{d}{dx}F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Big)\Delta Y(x).$$

Ukoliko integralimo ovu jednačinu dobijamo:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\Big(F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y(x)\Big)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y'(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{d}{dx}F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Big)\Delta Y(x)\, dx.$$

Kako važi

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\Big(F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y(x)\Big)\, dx = F_{Y'}(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\Delta Y(x_1) - F_{Y'}(x_0, Y(x_0), Y'(x_0))\Delta Y(x_0),$$

dobijamo:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big(F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y'(x)\Big)\, dx = F_{Y'}(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\Delta Y(x_1) - F_{Y'}(x_0, Y(x_0), Y'(x_0))\Delta Y(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{d}{dx}F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Big)\Delta Y(x)\, dx.$$

Koristimo ovaj rezultat da eliminišemo $\Delta Y'$ *iz (3.3.10) i dobijamo:*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big(F_{Y}(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx}F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Big)\Delta Y(x)\, dx = \Big(\lambda_0 + F_{Y'}(x_0, y_0, Y'(x_0))\Big)\Delta Y(x_0) + \Big(\lambda_1 - F_{Y'}(x_1, y_1, Y'(x_1))\Big)\Delta Y(x_1), \tag{3.3.12}$$

za sve vektore ΔY *iz vektorskog prostora* $C^1[x_0, x_1]$. *U (3.3.12) smo koristili ograničenja:*

$$Y(x_0) = y_0, \qquad Y(x_1) = y_1.$$

Kako je funkcija ΔY *jednaka nuli u tačkama* $x = x_0$ *i* $x = x_1$, *iz (3.3.12) dobijamo:*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_Y(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)) \Big) \Delta Y(x) \, dx = 0, \quad (3.3.13)$$

za sve vektore ΔY *iz klase* $C^1[x_0, x_1]$ *koje zadovoljavaju dodatne uslove* $\Delta Y(x_0) = 0$ *i* $\Delta Y(x_1) = 0$. *Pošto je funkcija*

$$F_Y(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))$$

neprekidna u x *(pod uslovom da je funkcija (3.3.11) neprekidno diferencijabilna) iz (3.3.13) sledi da ekstrem* $Y(x)$ *mora zadovoljavati diferencijalnu jednačinu:*

$$F_Y(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)) = 0, \quad (3.3.14)$$

za svako $x \in [x_0, x_1]$. *Konačno imamo pojednostavljenu jednačinu što smo i hteli.*

Jednačina (3.3.14) se naziva ***Ojler-Lagranžova jednačina****.*

4

Varijacioni problemi sa ograničenjima

U varijacionom računu funkcije su često među sobom vezane izvesnim, unapred zadatim ograničenjima, koja, kao što ćemo videti u narednim izlaganjima, mogu biti zadate u vidu integralnih ograničenja, algebarskih i diferencijalnih jednačina. U ovom poglavlju su korišćene literature Teofanov, Gajić [2] i Vujanović, Spasić [3].

4.1 Izoperimetrijski problem

U ovom delu ćemo razmatrati problem određivanja ekstremnih vrednosti funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')\, dt \tag{4.1.1}$$

u prisustvu ograničenja u obliku integrala

$$K(x) = \int_a^b g(t, x, x')\, dt = l, \tag{4.1.2}$$

pri čemu rešenje $x = x(t)$, $t \in [a, b]$ ispunjava uslove $x(a) = A$, $x(b) = B$, gde je l unapred zadat broj. Ovako formulisani problemi sa nazivaju izoperimetrijski problemi, a ograničenja (4.1.2) izoperimetrijska ograničenja. Ovakvi problemi mogu da se reše primenom teoreme 3.2.1 (Ojler-Lagranžovih množitelja), a naredna teorema je njen specijalan slučaj.

Teorema 4.1.1. *Ako kriva $x = x(t)$, $t \in [a, b]$ saopštava ekstremnu vrednost integrala*

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')\ dt$$

koja ispinjava uslove

$$K(x) = \int_a^b g(t, x, x')\ dt = l, \qquad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

i ako ona nije ekstrem integrala K, tj. $\delta K \neq 0$, onda postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je ta kriva x ekstrem funkcionele $\int_a^b (f - \lambda g)\ dt$, odnosno primenjujemo uslov (3.2.2) teoreme 3.2.1, $\delta J = \lambda\ \delta K$.

Kao glavni rezultat dokaza (kojim se nećemo baviti u ovom radu) je potreban uslov za ekstrem, dat sa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda\Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial x'}\Big) = 0. \tag{4.1.3}$$

Međutim, ukoliko razmatramo problem određivanja eksremnih vrednosti funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')\ dt$$

gde je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, uz ograničenja

$$x_i(a) = A_i, \qquad x_i(b) = B_i, \qquad i = 1, 2, ..., n \quad \text{i}$$

$$\int_a^b g_j(t, x, x')\ dt = l_j, \qquad j = 1, 2, ..., k$$

gde je takođe $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, potreban uslov za ekstrem sledi iz uslova (3.3.3) teoreme 3.3.1 i dat je sistemom od n jednačina

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i'}(f - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j)\Big) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{4.1.4}$$

Primer 7. *Odrediti ekstremalu integrala*

$$J(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2)\ dt, \tag{4.1.5}$$

uz ograničenje

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(t)\ dt = 1 \tag{4.1.6}$$

koja zadovoljava granične uslove

$$x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0. \tag{4.1.7}$$

U ovom slučaju važi:

$$f = x'^2 - x^2$$
$$g = x\sin(t)$$

Kada primenimo formulu (4.1.3) dobijamo:

$$x'' + x = -\frac{\lambda}{2}\sin(t). \tag{4.1.8}$$

Rešenje ove nehomogene jednačine potražiće se kao zbir rešenja odgovarajuće homogene jednačine $x_h = C\cos(t) + D\sin(t)$ *i partikularnog dela*

$$x_p = t(A\cos(t) + B\sin(t)).$$

Neposrednom zamenom određuju se konstante $A = \frac{\lambda}{4}$ *i* $B = 0$, *tako da je rešenje jednačine (4.1.8) dato sa:*

$$x = C\cos(t) + D\sin(t) + \frac{\lambda t}{4}\cos(t). \tag{4.1.9}$$

Konstante C *i* D *su, sa obzirom na granične uslove (4.1.7), jednake nuli. Poslednja konstanta koji treba odrediti je* λ. *Uvrštavanjem (4.1.9) u (4.1.8) dobijamo*

$$\lambda = \frac{4}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)\sin(t)\ dt} = \frac{32}{\pi},$$

pa je ekstremala $x = \frac{8t}{\pi}\cos(t)$.

4.2 Problem sa ograničenjima u vidu algebarskih jednačina

Sada ćemo razmotriti potrebne uslove optimalnosti funkcionele

$$\int_a^b f(t,x,x')\ dt \tag{4.2.1}$$

gde je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, uz ograničenja

$$x_i(a) = A_i, \qquad x_i(b) = B_i, \qquad i = 1,2,...,n \tag{4.2.2}$$

i

$$g_j(t,x) = 0, \qquad j = 1,2,...,k, \tag{4.2.3}$$

gde je $k < n$. Za razliku od izoperimetrijskog problema, gde broj ograničenja ne zavisi od broja nepoznatih funkcija, kada su u pitanju algebarska ograničenja, broj ograničenja mora biti manji od broja nepoznatih funkcija. Dakle, posmatraju se samo one krive koje ispunjavaju uslov (4.2.2) i leže na mnogostrukosti dimenzije $n-k$, koja je definisana jednačinama (4.2.3). Naredna teorema precizira rešavanje jednog posebnog slučaja ovog problema i ova teorema je specijalan slučaj teoreme 3.3.1.

Teorema 4.2.1. *Ako je kriva data sa*

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{4.2.4}$$

tačka minimuma ili maksimuma funkcionele

$$J = \int_a^b f(t,x,x',y,y')\ dt \tag{4.2.5}$$

u klasi krivih koje pripadaju površi $g(t,x,y) = 0$, pri čemu ni u jednoj tački na krivoj parcijalni izvodi $\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial g}{\partial y}$ nisu istovremeno jednaki nuli, onda postoji funkcija $\lambda(t)$ takva da je kriva (4.2.4) ekstrem funkcionele

$$\int_a^b (f - \lambda g)\ dt \tag{4.2.6}$$

tj. važi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \tag{4.2.7}$$

Dakle, potreban uslov za ekstrem je dat sa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} - \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

4.3 Problem sa ograničenjima u vidu diferencijalnih jednačina

U ovom delu razmotrićemo problem pronalaženja potrebnih uslova za ekstrem određenog integrala

$$\int_a^b f(t, x, x')\, dt \tag{4.3.1}$$

gde je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, uz ograničenja

$$x_i(a) = A_i, \qquad x_i(b) = B_i, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{4.3.2}$$

i

$$g_j(t, x, x') = 0, \qquad j = 1, 2, ..., k \tag{4.3.3}$$

gde je takođe $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i gde je $k < n$.

Pošto je na n funkcija $x_i(t),\ i = 1, 2, ..., n$ nametnuto k diferencijalnih ograničenja (4.3.3), to će samo $n-k$ funkcija x_i, biti nezavisno, a preostalih k će biti određeno iz diferencijalnih jednačina (4.3.3). Slično kao i u prethodnom delu, odgovarajuća teorema kaže da postoji k funkcija $\lambda_j(t),\quad j = 1, 2, ..., k,\quad t \in [a, b]$ takvih da je kriva $x(t), t \in [a, b]$ ekstrem funkcionele

$$\int_a^b \Big(f(t, x, x') - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) g_j(t, x, x') \Big)\, dt.$$

Tako da je potredan uslov za ekstrem dat sa:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i'} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i'}\Big) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{4.3.4}$$

Ove jednačine obrazuju sistem od $n + k$ jednačina za određivanje $n + k$ nepoznatih

$$x_1(t), ..., x_n(t), \lambda_1(t), ..., \lambda_k(t), \qquad t \in [a, b].$$

Primer 8. *Odrediti ekstremalu integrala*

$$J(x) = \int_0^1 x_2'^2 \, dt, \tag{4.3.5}$$

uz uslove

$$x_1(0) = 1, \qquad x_1(1) = 0, \qquad x_2(0) = 1, \qquad x_2(1) = 0, \tag{4.3.6}$$

i ograničenje

$$x_2 - x_1' = 0. \tag{4.3.7}$$

U ovom slučaju važi:

$$\begin{aligned} f &= x_2'^2, \\ g &= x_2 - x_1'. \end{aligned}$$

Kad primenimo (4.3.4) dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1'} - \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial x_1'}\Big) &= -\frac{d}{dt}(\lambda(t)) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2'} - \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial x_2'}\Big) &= -\lambda(t) - \frac{d}{dt}(2x_2') = 0 \end{aligned}$$

i tako dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} -\lambda'(t) &= 0 \\ -\lambda(t) &= 2x_2''(t). \end{aligned}$$

Kao rešenje ovog sistema dobijamo:

$$x_2(t) = a\frac{t^2}{2} + bt + c,$$

a kako je $x_1'(t) = x_2(t)$, *što sledi iz (4.3.7), dobijamo:*

$$x_1(t) = a\frac{t^3}{6} + b\frac{t^2}{2} + ct + d.$$

Kada primenimo uslove (4.3.6) na $x_1(t)$ *i* $x_2(t)$, *dobijamo vrednosti za* a, b, c *i* d:

$$a = 18, \qquad b = -10, \qquad c = 1, \qquad d = 1,$$

tako da je rešenje dato sa:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3t^3 - 5t^2 + t + 1 \\ x_2(t) &= 9t^2 - 10t + 1, \end{aligned}$$

pa je ekstremala $x = (x_1(t), x_2(t))$.

5

Problem planiranja proizvodnje uz ograničenja

Pre nego što razmotrimo problem planiranja proizvodnje uz ograničenja, upoznaćemo se sa problemom minimizacije ili maksimizacije funkcionele J oblika

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y(x), Y'(x))\, dx \tag{5.0.1}$$

među svim krivim γ datim kao

$$\gamma : \quad y = Y(x) \qquad x_0 \leq x \leq x_1, \tag{5.0.2}$$

koje zadovoljavaju ograničenje tipa nejednakosti

$$Y(x) \geq \varphi(x) \qquad \text{za} \;\; x_0 \leq x \leq x_1, \tag{5.0.3}$$

kao i određene granične uslove. Pretpostavljamo da je funkcija φ koje se pojavljuje u (5.0.3) kao ograničenje neprekidno diferencijabilna i pretpostavljamo da su svi granični uslovi kompatibilni sa uslovom (5.0.3). Na primer, ako imamo granični uslov $Y(x_0) = y_0$, pretpostavljamo da zadati broj y_0 zadovoljava $y_0 \geq \varphi(x_0)$.

U nekim slučajevima možemo očekivati da kriva γ, koja saopštava minimalnu ili maksimalnu vrednost funkcionele J uz ograničenje (5.0.3), bude kombinovana kriva koja sadrži jedan ili više lukova duž kojih je $Y(x)$ jednaka sa ograničenjem ($Y = \varphi$), na primer Slika 8. Svaka takva kombinovana kriva γ treba biti neprekidno diferencijabilna osim možda na konačnom broju tačaka gde se različiti lukovi spajaju i gde γ može da ima uglove (ćoškove). U ovom slučaju možemo reći da je odgovarajuća funkcija $Y = Y(x)$ **po delovima neprekidno diferencijabilna** na intervalu $[x_0, x_1]$. Podrazumevaćemo da je *$Y(x)$ neprekidna na celom intervalu $[x_0, x_1]$ i neprekidno diferencijabilna sa mogućim izuzetkom u najviše konačnom broju tačaka, gde izvod Y' ima dobro definisane granične vrednosti i sa leve i sa desne strane.* Sa $\mathcal{P}C^1[x_0, x_1]$ ćemo označiti skup svih funkcija koje su po delovima neprekidno diferencijabilne na intervalu $[x_0, x_1]$. Napomenimo da je $\mathcal{P}C^1[x_0, x_1]$ podskup vektorskog prostora $C[x_0, x_1]$, ali nije podskup od $C^1[x_0, x_1]$. Opremićemo vektorski prostor $\mathcal{P}C^1[x_0, x_1]$ sa normom od $C^1[x_0, x_1]$:

$$\|\phi\| = \max_{\forall x \in [x_0, x_1]} |\phi(x)| + \max_{\forall x \in [x_0, x_1]} |\phi'(x)| \,.$$

Neka ja D podskup od $\mathcal{P}C^1[x_0, x_1]$ koji se sastoji od svih funkcija Y koje su po delovima neprekidno diferencijabilne i koje zadovoljavaju ograničenje tipa nejednakosti (5.0.3) na intervalu $[x_0, x_1]$. Treba da odredimo ekstremni vektor za funkcionelu J u skupu D pod određenim graničnim uslovima.

Prirodno je pokušati koristiti teoremu 3.3.1 (teoremu Ojler-Lagranžovih množitelja za više ograničenja) da se pronađe željeni ekstrem za funkcionelu J. Međutim, ta teorema ne važi ukoliko skup D nije otvoren u datom vektorskom prostoru $\mathcal{X} = \mathcal{P}C^1[x_0, x_1]$. U ovom slučaju pretpostavljamo da je funkcija $Y = Y(x)$ jednaka sa $\varphi = \varphi(x)$ u nekoj tački $x \in [x_0, x_1]$:

$$Y(x) = \varphi(x). \tag{5.0.4}$$

Možemo izabrati funkcije $Y + \Delta Y$ koje su proizvoljno blizu Y, a koje narušavaju uslov (5.0.3) i koje s toga nisu u skupu D. Zaista, ukoliko je $\Delta Y = \Delta Y(x)$ negativno i važi (5.0.4), funkcija $Y + \Delta Y$ će narušiti uslov (5.0.3) jer tada važi:

$$Y + \Delta Y = \varphi + \Delta Y < \varphi.$$

Dakle, teorema 3.3.1 se ne može primeniti u ovom slučaju.

Sada se vraćamo na problem planiranja proizvodnje o kome smo već diskutovali. Svaki dopustivi obim proizvodnje $P = P(t)$ mora biti *nenegativan*, kao i *ograničen sa gornje strane sa $P_m = P_m(t)$*, koji predstavlja maksimalan mogući obim proizvodnje koji preduzeće može da ostvari. Prema tome, važe ograničenja tipa nejednakosti:

$$0 \leq P(t) \tag{5.0.5}$$

i

$$P(t) \leq P_m(t), \tag{5.0.6}$$

za svako t u intervalu $[0, T]$.

Pretpostavljamo da je željeni obim proizvodnje $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$ dat sa

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{J}'(t) + \mathcal{S}(t) + \alpha\mathcal{J}(t)$$

i da zadovoljava ograničenja (5.0.5) i (5.0.6) tj.

$$0 \leq \mathcal{P}(t) \leq P_m(t), \quad t \in [0, T]. \tag{5.0.7}$$

Sada ćemo razmotriti vezu sa početnim nivoom zaliha I_0. Ako je dati početni nivo zaliha I_0 *jednak* željenom početnom nivou $\mathcal{J}_0$, tj. $I_0 = \mathcal{J}_0$, tada *nema počethih poremećaja* i novi optimalan obim proizvodnje će biti jednak željenom obimu $\mathcal{P}(t)$, tj

$$P(t) = \mathcal{P}(t) \qquad \text{za} \;\; 0 \leq t \leq T,$$

pa samo treba razmotriti dva preostala slučaja:

$$I_0 > \mathcal{J}_0 \tag{5.0.8}$$

i

$$I_0 < \mathcal{J}_0 \tag{5.0.9}$$

Ako (5.0.8) važi, tada je početni nivo zaliha I_0 *veći* od željenog početnog nivoa $\mathcal{J}_0$, i preduzeće će nastojati da *smanji* nivo zaliha izborom novog obima proizvodnje $P = P(t)$ koji će biti nešto *niži* nego željeni obim $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$ kako bi se minimizirala funkcija troška , koju smo ranije definisali:

$$\mathbf{C}(P) = \int_0^T \Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt.$$

Svaki takav novi obim proizvodnje (koji je niži od $\mathcal{P}$) će automatski zadovoljavati ograničenje (5.0.6), tako da je taj uslov (5.0.6) *neaktivan* u ovom slučaju i nema nikakvu ulogu u rešavanju problema optimizacije. S druge strane, ukoliko važi (5.0.9) tj. da je početni nivo zaliha I_0 *manji* nego željeni nivo $\mathcal{J}_0$, tada će preduzeće želeti da *poveća* svoje zalihe izborom novog obima proizvodnje $P = P(t)$ koji će biti nešto *viši* od obima $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$. U ovom slučaju donje ograničenje nema nikakvu ulogu.

Razmotrićemo samo slučaj u kome važi (5.0.9), a to će biti dovoljno da se utvrdi da se iste metode mogu koristiti i za razmatranje drugog slučaja (5.0.8). Dakle, pretpostavljamo da važi (5.0.9), tj. da je dati početni nivo zaliha I_0 *manji* u odnosu na $\mathcal{J}_0$. Treba nam samo gornje ograničenje (5.0.6) u ovom slučaju, dok je drugo ograničenje (5.0.5) neaktivno. Razmatraćemo slučaj gde je *početni poremećaj* (kao razlika $\mathcal{J}_0 - I_0$) *dovoljno velik* tako da važi:

$$\frac{\beta^2(e^{\gamma T} - e^{-\gamma T})(\mathcal{J}_0 - I_0)}{(\gamma + \alpha)e^{\gamma T} + (\gamma - \alpha)e^{-\gamma T}} > P_m(0) - \mathcal{P}(0). \tag{5.0.10}$$

Ako ovaj uslov važi, prethodni optimalan obim proizvodnje P^*:

$$P^*(t) = \mathcal{P}(t) + \beta^2(\mathcal{J}_0 - I_0)\frac{e^{\gamma(T-t)} - e^{-\gamma(T-t)}}{(\gamma + \alpha)e^{\gamma T} + (\gamma - \alpha)e^{-\gamma T}},$$

će biti *isključen* pošto će P^* u početku biti veći od gornjeg ograničenja P_m i zato se P^* u ovom slučaju ne može ostvariti u praksi. Napomenimo da (5.0.9) važi automatski kao posledica od (5.0.10) i (5.0.7).

Dakle, mi pretpostavljamo da (5.0.10) važi, i onda *tražimo novi obim proizvodnje $P = P(t)$ koji će minimizirati funkciju troška $\mathbf{C} = \mathbf{C}(P)$ uz ograničenje tipa nejednakosti* (5.0.6)

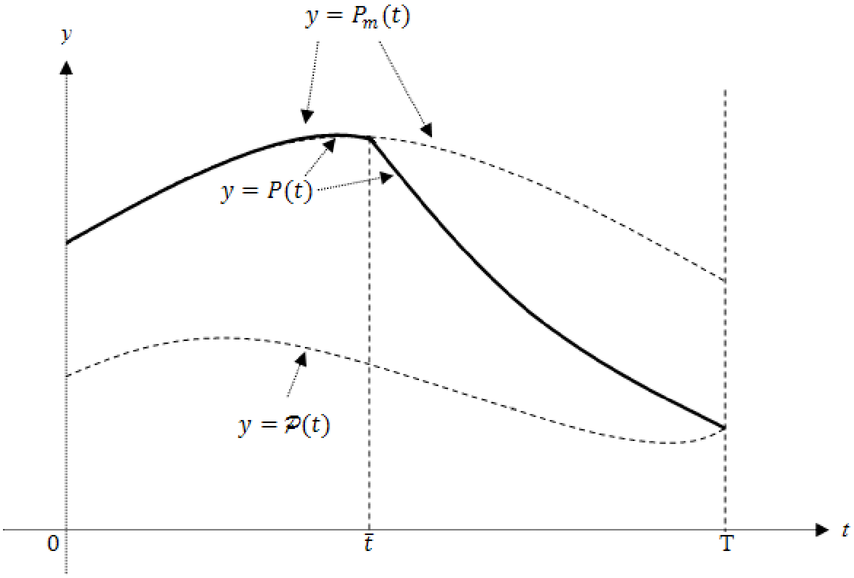
$$P(t) \leq P_m(t).$$

Kako (5.0.10) podrazumeva da je početni nivo zaliha I_0 znatno niži nego željeni početni nivo zaliha $\mathcal{J}_0$, prirodno je očekivati da preduzeće treba da izabere novi obim proizvodnje $P = P(t)$ koji će u početku biti *što veći mogući*, pod uslovom da važi ograničenje (5.0.6). Dakle, možemo očekivati u ovom slučaju da novi optimalni obim proizvodnje bude *kombinovani obim* koji će prvo biti jednak maksimalnom dozvoljenom obimu $P_m = P_m(t)$ kako bi se povećao nivo zaliha, i koji zatim opada do svoje krajnje vrednosti na takav način da minimizira ukupan trošak $\mathbf{C} = \mathbf{C}(P)$.

Prirodno je uzeti u obzir kombinovani obim proizvodnje $P = P(t)$ kao što je prikazano na Slici 8, tj.

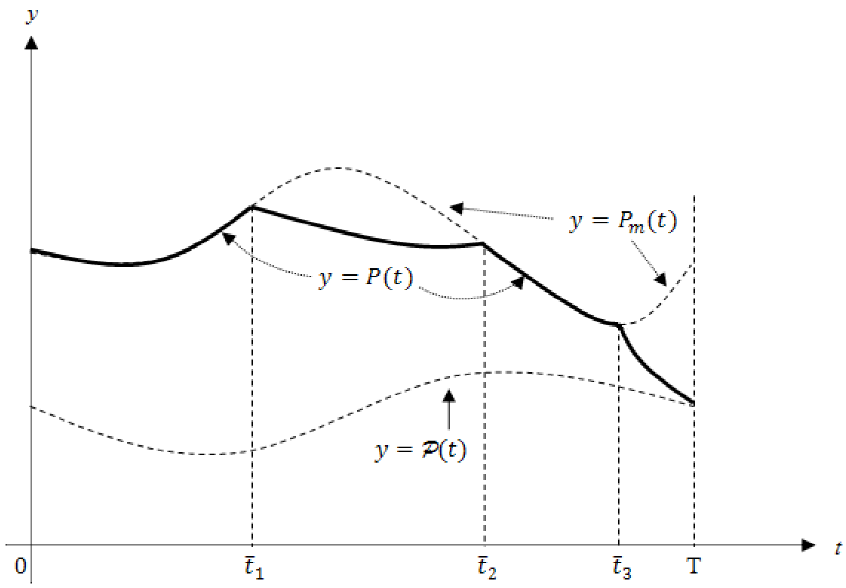
$$P(t) = \begin{cases} P_m & \text{za } 0 \leq t \leq \bar{t}, \\ p(t) & \text{za } \bar{t} \leq t \leq T, \end{cases} \tag{5.0.11}$$

za neko odovarajuće vreme $\bar{t}$ i neku odgovarajuću funkciju $p(t)$.



Slika 8

Može postojati *nekoliko* vremenskih intervala tokom kojih je kombinovani obim proizvodnje $P(t)$ jednak poznatom maksimalnom obimu, kao što je, na primer, prikazano na Slici 9.



Slika 9

U ovom slučaju $p(t)$ koja se javlja u (5.0.11) će biti jednaka sa $P_m(t)$ nad određenim vremenskim intervalima.

Radi jednostavnosti, *pretpostavićemo da poznate funkcije* P_m i $\mathcal{P}$ *zadovoljavaju uslov*

$$\frac{d}{dt}(P_m(t) - \mathcal{P}(t)) \geq 0 \quad \text{za} \;\; 0 \leq t \leq T \tag{5.0.12}$$

(tj. razlika $P_m - \mathcal{P}$ *nikad ne opada*), u kom slučaju se može pokazati da će novi optimalan obim proizvodnje $P(t)$ biti jednak $P_m(t)$ samo za $0 \leq t \leq \bar{t}$ za neko odgovarajuće $\bar{t}$, kao što ćemo videti u nastavku. Biće jasno da se iste metode mogu koristiti u situacijama gde (5.0.12) ne važi, kao što je na primer, pokazano na Slici 9.

5.1 Preformulisanje problema

U ovom delu ćemo izračunati funkciju troška $\mathbf{C} = \mathbf{C}(P)$ za kombinovani obim proizvodnje koji je dat formulom (5.0.11).

Koristićemo formulu za funkciju troška (2.4.7), koju smo već videli u odeljku 2.4 i primenjujući kombinovani obim proizvodnje, nalazimo da važi

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P) = & \int_0^{\bar{t}} \Big(\beta^2 (I_{P_m}(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P_m(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt \\ & + \int_{\bar{t}}^{T} \Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (p(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\, dt, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

gde je P dato sa (5.0.11). Funkcija I_{P_m} koja se pojavljuje u ovoj formuli je poznata i koristeći (2.4.6) dobijamo da je

$$I_{P_m}(t) = e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int_0^t e^{\alpha\tau}(P_m(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\, d\tau\Big), \tag{5.1.2}$$

za $0 \leq t \leq \bar{t}$. Slično tome iz (2.4.3) nalazimo željeni nivo zaliha

$$\mathcal{J}(t) = e^{-\alpha t}\Big(\mathcal{J}_0 + \int\limits_0^t e^{\alpha\tau}(\mathcal{P}(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\ d\tau\Big), \tag{5.1.3}$$

koji je poznat.

Pošto je P kombinovani obim proizvodnje dat formulom (5.0.11), iz (2.4.6) važi da će I_P zavisiti eksplicitno od broja $\bar{t}$ i od funkcije $p = p(t)$. Promenićemo oznaku u ovom slučaju i pišemo:

$$I_P(t) = I(\bar{t}, p; t),$$

gde je P dato sa (5.0.11). Koristeći ovu oznaku, iz (2.4.6) nalazimo da važi:

$$\begin{aligned} I_P(t) = I(\bar{t}, p; t) = e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int\limits_0^{\bar{t}} e^{\alpha\tau}(P_m(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\ d\tau \\ + \int\limits_{\bar{t}}^{t} e^{\alpha\tau}(p(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\ d\tau\Big), \quad \text{za}\ \ \bar{t} \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

gde je P dato sa (5.0.11). Konačno, ubacivanjem svih ovih rezultata u (5.1.1) nalazimo da važi

$$\mathbf{C}(P) = \int\limits_0^{\bar{t}} f(t)\ dt + \int\limits_{\bar{t}}^{T} \Big(\beta^2(I(\bar{t}, p; t) - \mathcal{J}(t))^2 + (p(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\ dt,$$

kad god je P dato sa (5.0.11), gde je $I(\bar{t}, p; t)$ data sa (5.1.4) i gde je funkcija $f = f(t)$ definisana sa:

$$f(t) = \beta^2(I_{P_m}(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P_m(t) - \mathcal{P}(t))^2. \tag{5.1.5}$$

Razmortićemo funkciju $\mathbf{C}(P)$ kao funkciju dve promenljive $\bar{t}$ i p, i tako definišemo novu funkciju $\mathbf{C}_0$:

$$\mathbf{C}_0(\bar{t}, p) = \int\limits_0^{\bar{t}} f(t)\ dt + \int\limits_{\bar{t}}^{T} \Big(\beta^2(I(\bar{t}, p; t) - \mathcal{J}(t))^2 + (p(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\ dt, \tag{5.1.6}$$

za bilo koji broj $\bar{t}$ iz intervala $[0, T]$ i za bilo koju neprekindu funkciju $p = p(t)$. Naravno, znamo da je $\mathbf{C}_0(\bar{t}, p) = \mathbf{C}(P)$ kad god je P dat sa (5.0.11).

Prirodno je da je naš osnovni vektorski prostor $\mathcal{X}$ za funkciju $\mathbf{C}_0$, skup svih parova $(\bar{t}, p) = (\bar{t}, p(t))$ gde $\bar{t}$ može biti proizvoljan broj iz $\mathbb{R}$ i gde $p = p(t)$ može biti bilo koja neprekidna funkcija definisana na fiksnom intervalu $[0, T]$. Za domen funkcije $\mathbf{C}_0$ uzimamo otvoren skup D koji je podskup vektorskog prostora $\mathcal{X}$ i koji se sastoji od svih vektora $(\bar{t}, p)$ iz $\mathcal{X}$ za koje važi $0 < \bar{t} < T$.

Koristićemo teoremu 2.2.1, koja kaže da je varijacija funkcionele u lokalnom ekstremu jednaka nuli, da pronađemo vektor $(\bar{t}, p)$ iz D koji minimizira funkcionelu $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(\bar{t}, p)$ (datu sa (5.1.6)) u domenu D, što ćemo videti u narednom delu.

Aktivno ograničenje tipa nejednakosti (5.0.6) više se ne pojavljuje u saopštenju ovog problema. Sada imamo preformulisani problem optimizacije u smislu odgovarajućeg kombinovanog obima proizvodnje kako bi se izbegla potreba za daljim razmatranjem ograničenja tipa nejednakosti u preformulisanom problemu. Kada imamo željeni eksremn $(\bar{t}, p)$ za preformulisani problem, biće lako pokazati da obim proizvodnje dat formulom (5.0.11) minimizira funkciju troška datu formulom (2.4.7) među svim obimima proizvodnje koji zadovoljavaju ograničenja tipa nejednakosti (5.0.5) i (5.0.6).

5.2 Varijacija funkcionele $\mathbf{C}_0$

Računamo varijaciju funkcionele $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(\bar{t}, p)$ za proizvoljni vektor $(\bar{t}, p)$ iz domena D. Iz (5.1.6) nalazimo da važi

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_0(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}, p + \varepsilon\ \Delta p) = & \int\limits_0^{\bar{t}+\varepsilon\Delta\bar{t}} f(t)\ dt \\ & + \int\limits_{\bar{t}+\varepsilon\Delta\bar{t}}^{T} \Big(\beta^2 (I(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}, p + \varepsilon\ \Delta p; t) - \mathcal{J}(t))^2 \\ & + (p(t) + \varepsilon\ \Delta p(t) - \mathcal{P}(t))^2\Big)\ dt,\end{aligned}$$

za bilo koji vektor $(\Delta\bar{t}, \Delta p)$ iz vektorskog prostora $\mathcal{X}$ i za bilo koji mali broj ε. Sada ćemo koristiti:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int\limits_{x_0}^{\xi(\varepsilon)} f(x;\varepsilon)\ dx = f(\xi(\varepsilon);\varepsilon)\xi'(\varepsilon) + \int\limits_{x_0}^{\xi(\varepsilon)} \frac{\partial f(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\ dx,$$

pa iz prethodne jednačine dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon}\mathbf{C}_0(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}, p + \varepsilon\ \Delta p)\\
&\quad = \Delta\bar{t} f(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}) - \Delta\bar{t}\Big(\beta^2 (I(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}, p + \varepsilon\ \Delta p; \bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}) - \mathcal{J}(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}))^2\\
&\quad + (p(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}) + \varepsilon\ \Delta p(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}))^2\Big)\\
&\quad + 2\int\limits_{\bar{t}+\varepsilon\Delta\bar{t}}^{T} \Big(\beta^2 (I(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}, p + \varepsilon\ \Delta p; t) - \mathcal{J}(t))\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\\
&\quad + (p(t) + \varepsilon\ \Delta p(t) - \mathcal{P}(t))\Delta p(t)\Big)\ dt,
\end{aligned}$$

gde se $\dfrac{\partial I}{\partial \varepsilon} = \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}, p + \varepsilon\ \Delta p; t)$ nalazi iz formule (5.1.4), tako da imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \varepsilon} =& e^{-\alpha t}\Big(\Delta\bar{t} e^{\alpha(\bar{t}+\varepsilon\Delta\bar{t})}(P_m(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}) - \mathcal{S}(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}))\\
&- \Delta\bar{t} e^{\alpha(\bar{t}+\varepsilon\Delta\bar{t})}(p(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}) + \varepsilon\Delta p(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}) - \mathcal{S}(\bar{t} + \varepsilon\ \Delta\bar{t}))\\
&+ \int\limits_{\bar{t}+\varepsilon\Delta\bar{t}}^{t} e^{\alpha\tau}\Delta p(\tau)\ d\tau\Big).
\end{aligned}$$

Sada, ovu jednačinu ocenjujemo u tački $\varepsilon = 0$, koristimo (2.3.4) i nalazimo varijaciju od $\mathbf{C}_0$:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{C}_0(\bar{t},p;\Delta\bar{t},\Delta p) =& \Delta\bar{t}\Big(f(\bar{t}) - \beta^2(I(\bar{t},p;\bar{t}) - \mathcal{J}(\bar{t}))^2 - (p(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t}))^2 \\ &+ 2\beta^2 e^{\alpha\bar{t}}(P_m(\bar{t}) - p(\bar{t}))\int\limits_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha t}(I(\bar{t},p;t) - \mathcal{J}(t))\ dt\Big) \\ &+ 2\int\limits_{\bar{t}}^{T}\Big(\beta^2(I(\bar{t},p;t) - \mathcal{J}(t))e^{-\alpha t}\int\limits_{\bar{t}}^{t} e^{\alpha\tau}\Delta p(\tau)d\tau \\ &+ (p(t) - \mathcal{P}(t))\Delta p(t)\Big)\ dt.\end{aligned}$$

Konačno, ako koristimo (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4) i (5.1.5) sa poslednjim rezultatom, posle kratkog proračuna dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{C}_0(\bar{t},p;\Delta\bar{t},\Delta p) =& \Delta\bar{t}(P_m(\bar{t}) - p(\bar{t}))\Big(P_m(\bar{t}) + p(\bar{t}) - 2\mathcal{P}(\bar{t}) \\ &+ 2\beta^2 e^{\alpha\bar{t}}\int\limits_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha t}(I(\bar{t},p;t) - \mathcal{J}(t))\ dt\Big) \\ &+ 2\int\limits_{\bar{t}}^{T}\Big(\beta^2 e^{-\alpha t}(I(\bar{t},p;t) - \mathcal{J}(t))\int\limits_{\bar{t}}^{t} e^{\alpha\tau}\Delta p(\tau)d\tau \\ &+ (p(t) - \mathcal{P}(t))\Delta p(t)\Big)\ dt. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Poslednji intregral u jednačini se može drugačije napisati što će nam u znatnoj meri olakšati račun:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha t}(I(\bar{t},p;t) - \mathcal{J}(t))\int\limits_{\bar{t}}^{t} e^{\alpha\tau}\Delta p(\tau)d\tau\ dt \\ &\quad= \int\limits_{\bar{t}}^{T}\Delta p(t)e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{T} e^{-\alpha t}(I(\bar{t},p;\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau\ dt,\end{aligned}$$

a ovo je slično ranijoj formi (2.5.2). Koristeći ovu jednakost u formuli (5.2.1) konačno imamo:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{C}_0(\bar{t},p;\Delta\bar{t},\Delta p) =& \Delta\bar{t}(P_m(\bar{t})-p(\bar{t}))\Big(P_m(\bar{t})+p(\bar{t})-2\mathcal{P}(\bar{t})\\
&+2\beta^2 e^{\alpha\bar{t}}\int\limits_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha t}(I(\bar{t},p;t)-\mathcal{J}(t))\,dt\Big)\\
&+2\int\limits_{\bar{t}}^{T}\Delta p(t)\Big(p(t)-\mathcal{P}(t)\\
&+\beta^2 e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{T} e^{-\alpha\tau}(I(\bar{t},p;\tau)-\mathcal{J}(\tau))\,d\tau\Big)\,dt,
\end{aligned}
\tag{5.2.2}
$$

za bilo koji vektor $(\bar{t},p)$ iz domena D i za bilo koji vektor $(\Delta\bar{t},\Delta p)$ iz vektorskog prostora $\mathcal{X}$.

Dakle, funkcionela $\mathbf{C}_0=\mathbf{C}_0(\bar{t},p)$ ima varijaciju u proizvoljnom vektor $(\bar{t},p)$ iz domena D.

5.3 Neophodni uslov za ekstrem

Videli smo da funkcionela $\mathbf{C}_0$ ima varijaciju u svakom vektoru $(\bar{t},p)$ na otvorenom skupu D i ta varijacija je data formulom (5.2.2) kao što smo videli u prethodnom delu. Iz teoreme 2.2.1 sledi da

$$\delta\mathbf{C}_0(\bar{t},p;\Delta\bar{t},\Delta p)=0,$$

mora da važi u svakom minimalnom vektoru $(\bar{t},p)$ iz skupa D i za bilo koje vektore $(\Delta\bar{t},\Delta p)$ iz vektorskog prostora $\mathcal{X}$. Možemo koristiti formulu (5.2.2) da napišemo poslednji uslov kao

$$
\begin{aligned}
&\Delta\bar{t}(P_m(\bar{t})-p(\bar{t}))\Big(P_m(\bar{t})+p(\bar{t})-2\mathcal{P}(\bar{t})+2\beta^2 e^{\alpha\bar{t}}\int\limits_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha t}(I(\bar{t},p;t)-\mathcal{J}(t))\,dt\Big)\\
&+2\int\limits_{\bar{t}}^{T}\Delta p(t)\Big(p(t)-\mathcal{P}(t)+\beta^2 e^{\alpha t}\int\limits_{t}^{T} e^{-\alpha\tau}(I(\bar{t},p;\tau)-\mathcal{J}(\tau))\,d\tau\Big)\,dt=0,
\end{aligned}
\tag{5.3.1}
$$

koji mora da važi za *sve brojeve* $\Delta\bar{t}$ i za *sve neprekidne funkcije* Δp ako je $(\bar{t}, p)$ lokalni ekstrem u skupu D za funkcionelu $\mathbf{C}_0$. Iz (5.3.1) sledi da *svaki takav lokalni ekstrem* $(\bar{t}, p)$ *mora zadovoljavati neophodne uslove*

$$(P_m(\bar{t}) - p(\bar{t}))\Big(P_m(\bar{t}) + p(\bar{t}) - 2\mathcal{P}(\bar{t}) + 2\beta^2 e^{\alpha\bar{t}} \int_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha t}(I(\bar{t}, p; t) - \mathcal{J}(t))\, dt\Big) = 0 \tag{5.3.2}$$

i

$$p(t) - \mathcal{P}(t) + \beta^2 e^{\alpha t} \int_{t}^{T} e^{-\alpha\tau}(I(\bar{t}, p; \tau) - \mathcal{J}(\tau))\, d\tau = 0, \qquad \text{za } \ \bar{t} \leq t \leq T. \tag{5.3.3}$$

5.4 Optimalan obim proizvodnje

Sada ćemo koristiti uslove (5.3.2) i (5.3.3) iz prethodnog dela da odredimo željeni minimalni vektor za funkcionelu $\mathbf{C}_0$. Kao prvo, ukoliko jednačinu (5.3.3) ocenimo u tački $t = \bar{t}$ dobijamo:

$$p(\bar{t}) = \mathcal{P}(\bar{t}) - \beta^2 e^{\alpha\bar{t}} \int_{\bar{t}}^{T} e^{-\alpha\tau}(I(\bar{t}, p; \tau) - \mathcal{J}(\tau))\, d\tau,$$

i ako ovu vrednost uvrstimo u (5.3.2) dobijamo:

$$(P_m(\bar{t}) - p(\bar{t}))(P_m(\bar{t}) - p(\bar{t})) = 0,$$

i dobili smo *prirodan uslov*

$$p(t) = P_m(t) \qquad\qquad \text{u} \quad t = \bar{t}, \tag{5.4.1}$$

koji mora biti zadovoljen od strane ekstremnog vektora $(\bar{t}, p)$. Iako smo dozvolili da kombinovani obim proizvodnje P, koga smo definisali sa (5.0.11) ima prekid u $t = \bar{t}$, sada iz (5.4.1) sledi da će *optimalan* obim proizvodnje automatski biti neprekidan. Takođe, primetimo da uslov (5.3.2) ne treba dalje razmatrati ako nametnemo uslov (5.4.1). Konačno, možemo dobiti drugi prirodan uslov ukoliko jednačinu (5.3.3) ocenimo u tački $t = T$ i tada važi:

$$p(t) = \mathcal{P}(t) \qquad \text{u} \quad t = T. \tag{5.4.2}$$

Sada ćemo se vratiti na jednačinu (5.3.3):

$$p(t) - \mathcal{P}(t) + \beta^2 e^{\alpha t} \int_t^T e^{-\alpha\tau}(I(\bar{t}, p; \tau) - \mathcal{J}(\tau))\, d\tau = 0, \qquad \text{za } \bar{t} \le t \le T.$$

Ukoliko koristimo iste metode koje smo koristili u odeljku 2.5 kada smo od jednačine (2.5.3) došli do (2.5.8), sada u ovom slučaju možemo dobiti

$$p(t) - \mathcal{P}(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t} \qquad \text{za } \bar{t} \le t \le T, \qquad \text{gde je } \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{5.4.3}$$

i ovo važi za neke odgovarajuće konstante A i B. Ako zahtevamo da (5.4.3) zadovoljava oba prirodna uslova i (5.4.1) i (5.4.2), nalazimo da konstante A i B imaju sledeće vrednosti

$$A = -\frac{(P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t}))e^{-\gamma T}}{e^{\gamma(T-\bar{t})} - e^{-\gamma(T-\bar{t})}}, \qquad B = \frac{(P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t}))e^{\gamma T}}{e^{\gamma(T-\bar{t})} - e^{-\gamma(T-\bar{t})}},$$

tako da, kada to uvrstimo u (5.4.3), dobijamo

$$p(t) - \mathcal{P}(t) = \frac{(P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t}))(e^{\gamma(T-t)} - e^{-\gamma(T-t)})}{e^{\gamma(T-\bar{t})} - e^{-\gamma(T-\bar{t})}} \qquad \text{za } \bar{t} \le t \le T \tag{5.4.4}$$

gde je vrednost $\bar{t}$ koja se ovde pojavljuje još uvek nepoznata. Konačno, $\bar{t}$ se može odrediti ukoliko jednačinu (5.4.4) uvrstimu u (5.3.3) i ocenimo rezultat jednačine u $t = \bar{t}$. Tako se dobija uslov:

$$\begin{aligned}\beta^2 e^{\alpha\bar{t}}(\mathcal{J}_0 - I_0) &= \beta^2 e^{\alpha\bar{t}} \int_o^{\bar{t}} e^{\alpha\tau}(P_m(\tau) - \mathcal{P}(\tau))\, d\tau \\ &\quad + (P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t}))\Big(\gamma + \alpha + \frac{2\gamma e^{-\gamma(T-\bar{t})}}{e^{\gamma(T-\bar{t})} - e^{-\gamma(T-\bar{t})}}\Big).\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Primetimo da su ovde sve vrednosti poznate, osim naravno za $\bar{t}$. Poslednja jednačina (5.4.5) može na drugi način da se dobije pomoću (5.4.4) iz sledećeg uslova, koji sledi iz (5.3.3):

$$\frac{d}{dt}(p(t) - \mathcal{P}(t)) = \alpha(p(t) - \mathcal{P}(t)) + \beta^2(I(\bar{t}, p; t) - \mathcal{J}(t)) \qquad \text{u } t = \bar{t}.$$

Ostaje još samo da pokažemo da jednačina (5.4.5) ima jedinstveno rešenje $\bar{t}$ u intervalu $[0, T]$. Videćemo da jedinstvenost sledi kao direktna posledica nejednakosti (5.0.10) i (5.0.12). Zaista, ukoliko obe strane jednačine (5.4.5) ocenimo u tački $\bar{t} = 0$, iz (5.0.10) sledi da važi:

$$\text{leva strana od (5.4.5)} \quad > \quad \text{desna strana od (5.4.5)} \qquad \text{u} \;\; \bar{t} = 0.$$

S druge strane, desna strana od (5.4.5) postaje neograničena tj. teži beskonačnosti u $\bar{t} = T$, i tada važi:

$$\text{leva strana od (5.4.5)} \quad < \quad \text{desna strana od (5.4.5),} \qquad \text{kad} \;\; \bar{t} \text{ teži } T.$$

Kako su obe strane od (5.4.5) neprekidne funkcije u $\bar{t}$ na intervalu $[0, T]$, sledi da će grafik funkcije leve strane od (5.4.5) seći grafik funkcije desne strane jednakosti u najmanje jednoj tački, tako da *jednačina* (5.4.5) *ima najmanje jedno rešenje* $\bar{t}$ *na intervalu* $[0, T]$.

Kao posledica nejednakosti (5.0.12) sledi da jednačina (5.4.5) ima *tačno jedno rešenje*, jer vidimo da je desna strana jednakosti (5.4.5) *rastuća* funkcija po $\bar{t}$, dok je jasno da je leva strana jednakosti *opadajuća* funkcija po $\bar{t}$. Ova zapažanja dokazuju da jednačina (5.4.5) ima tačno jedno rešenje za $\bar{t}$.

5.5 Verifikacija optimalnog obima proizvodnje

Pokazali smo da je jedini mogući kandidat za optimalan obim proizvodnje, kombinovani obim proizvodnje, koga smo definisali formulom (5.0.11), gde je funkcija $p = p(t)$ data formulom (5.4.4) i broj $\bar{t}$ kao jedinstveno rešenje jednačine (5.4.5). Sada možemo pokazati da ovaj kombinovani obim proizvodnje zapravo minimzira funkciju troška

$$\mathbf{C}(P) = \int_0^T \Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t))^2 + (P(t) - \mathcal{P}(t))^2 \Big) \, dt,$$

među svim mogućim obimima proizvodnje koji zadovoljavaju ograničenja (5.0.5) i (5.0.6).

Zaista, ukoliko je $P = P(t)$ određen sa (5.0.11), (5.4.4) i (5.4.5) i ako je

$P + \Delta P = P(t) + \Delta P(t)$ neki drugi dopustivi obim proizvodnje koji zadovoljava ograničenje (5.0.6) tj. ako

$$P(t) + \Delta P(t) \leq P_m(t)$$

tada važi:

$$\Delta P(t) \leq 0 \qquad \text{za} \;\; 0 \leq t \leq \bar{t}. \tag{5.5.1}$$

S druge strane, proračun (2.4.23) iz odeljka 2.4 podrazumeva da važi

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P + \Delta P) - \mathbf{C}(P) =& 2\int_0^T \Big(\beta^2 (I_P(t) - \mathcal{J}(t))\Delta I(t) + (P(t) - \mathcal{P}(t))\Delta P(t)\Big)\, dt \\ &+ \int_0^T \Big(\beta^2 \Delta I(t)^2 + \Delta P(t)^2\Big)\, dt, \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

gde je $I_P(t)$ definisano sa

$$I_P(t) = e^{-\alpha t}\Big(I_0 + \int_0^t e^{\alpha\tau}(P(\tau) - \mathcal{S}(\tau))\, d\tau\Big)$$

i gde smo $\Delta I(t)$ definisali kao:

$$\Delta I(t) = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\Delta P(\tau)\, d\tau. \tag{5.5.3}$$

Ukoliko vrednost od $\Delta I(t)$ uvrstimo u prvi član na desnoj strani jednakosti (5.5.2) dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(P + \Delta P) - \mathbf{C}(P) =& 2\int_0^T \Big(P(t) - \mathcal{P}(t) \\ &\qquad + \beta^2 e^{\alpha t}\int_t^T e^{-\alpha\tau}(I_P(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\, d\tau\Big)\Delta P(t)\, dt \\ &+ \int_0^T \Big(\beta^2\; \Delta I(t)^2 + \Delta P(t)^2\Big)\, dt. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Sada, za $\bar{t} \le t \le T$ imamo

$$P(t) - \mathcal{P}(t) + \beta^2 e^{\alpha t} \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau}(I_P(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau = 0, \tag{5.5.5}$$

tako da (5.5.4) postaje:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(P + \Delta P) - \mathbf{C}(P) =& 2\int\limits_0^{\bar{t}} \Big(P_m(t) - \mathcal{P}(t) \\ &+ \beta^2 e^{\alpha t} \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau}(I_P(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau\Big) \Delta P(t)\ dt \\ &+ \int\limits_0^T \Big(\beta^2\ \Delta I(t)^2 + \Delta P(t)^2\Big)\ dt,\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

pošto je $P(t) = P_m(t)$ za $0 \le t \le \bar{t}$. S druge strane, ako jednačinu (5.5.5) ocenimo u tački $t = \bar{t}$ dobijamo:

$$\beta^2 e^{\alpha\bar{t}} \int\limits_{\bar{t}}^T e^{-\alpha\tau}(I_P(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau = -P_m(\bar{t}) + \mathcal{P}(\bar{t}),$$

tako da, za $0 \le t \le \bar{t}$ imamo:

$$\begin{aligned}\beta^2 \int\limits_t^T e^{-\alpha\tau}(I_P(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau =& \beta^2 \int\limits_t^{\bar{t}} e^{-\alpha\tau}(I_{P_m}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau \\ &- e^{-\alpha\bar{t}}(P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t})).\end{aligned}$$

Stoga, jednakost (5.5.6) može biti napisana kao:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(P + \Delta P) - \mathbf{C}(P) =& 2\int\limits_0^{\bar{t}} e^{\alpha t}\Big(e^{-\alpha t}(P_m(t) - \mathcal{P}(t)) - e^{-\alpha\bar{t}}(P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t})) \\ &+ \beta^2 \int\limits_t^{\bar{t}} e^{-\alpha\tau}(I_{P_m}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\ d\tau\Big) \Delta P(t)\ dt \\ &+ \int\limits_0^T \Big(\beta^2\ \Delta I(t)^2 + \Delta P(t)^2\Big)\ dt.\end{aligned}$$

Kako je $\Delta P(t) \leq 0$ za $0 \leq t \leq \bar{t}$, *možemo da zaključimo da iz poslednje jednačine dobijamo željeni rezultat*

$$\mathbf{C}(P + \Delta P) - \mathbf{C}(P) \geq 0, \tag{5.5.7}$$

pod uslovom da važi:

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha t}(P_m(t) - \mathcal{P}(t)) + \beta^2 \int\limits_t^{\bar{t}} e^{-\alpha\tau}(I_{P_m}(\tau) - \mathcal{J}(\tau))\, d\tau \\ & \leq e^{-\alpha\bar{t}}(P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t})) \qquad \text{za} \ \ 0 \leq t \leq \bar{t}. \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Dakle, ostaje nam još da dokažemo poslednju nejednakost.

Iz (5.1.2) i (5.1.3) sledi:

$$I_{P_m}(\tau) - \mathcal{J}(\tau) = e^{-\alpha\tau}\Big(I_0 - \mathcal{J}_0 + \int\limits_0^{\tau} e^{\alpha\sigma}(P_m(\sigma) - \mathcal{P}(\sigma))\, d\sigma\Big)$$

za $0 \leq \tau \leq \bar{t}$, tako da (5.5.8) važi ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha t}(P_m(t) - \mathcal{P}(t)) + \beta^2 \int\limits_t^{\bar{t}} e^{-2\alpha\tau} \int\limits_0^{\tau} e^{\alpha\sigma}(P_m(\sigma) - \mathcal{P}(\sigma))\, d\sigma\, d\tau \\ & \leq \ \beta^2 \int\limits_t^{\bar{t}} e^{-2\alpha\tau}(\mathcal{J}_0 - I_0)\, d\tau + e^{-\alpha\bar{t}}(P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t})), \qquad \text{za} \ \ 0 \leq t \leq \bar{t}. \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Sa druge strane, izbor za $\bar{t}$ podrazumeva iz (5.4.5) da je

$$\begin{aligned} & \beta^2 e^{-\alpha\bar{t}} \int\limits_0^{\bar{t}} e^{\alpha\sigma}(P_m(\sigma) - \mathcal{P}(\sigma))\, d\sigma \\ & = \beta^2 e^{-\alpha\bar{t}}(\mathcal{J}_0 - I_0) - (P_m(\bar{t}) - \mathcal{P}(\bar{t}))\Big(\gamma + \alpha + 2\gamma \frac{e^{-\gamma(T-\bar{t})}}{e^{\gamma(T-\bar{t})} - e^{-\gamma(T-\bar{t})}}\Big), \end{aligned}$$

dok je $\int\limits_0^{\tau} = \int\limits_0^{\bar t} - \int\limits_{\tau}^{\bar t}$, tako da (5.5.9) važi ako i samo ako je:

$$
\begin{aligned}
&e^{-\alpha t}(P_m(t) - \mathcal{P}(t)) \\
&\quad \le \beta^2 \int\limits_t^{\bar t} e^{-2\alpha\tau} \int\limits_{\tau}^{\bar t} e^{\alpha\sigma}(P_m(\sigma) - \mathcal{P}(\sigma))\, d\sigma\, d\tau \\
&\quad + e^{-\alpha\bar t}(P_m(\bar t) - \mathcal{P}(\bar t))\Big(1 + \frac{e^{2\alpha(\bar t - t)} - 1}{2\alpha}(\gamma + \alpha + \frac{2\gamma e^{-\gamma(T-\bar t)}}{e^{\gamma(T-\bar t)} - e^{-\gamma(T-\bar t)}})\Big).
\end{aligned}
$$

Konačno, kako je

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_t^{\bar t} e^{-2\alpha\tau} \int\limits_{\tau}^{\bar t} e^{\alpha\sigma}(P_m(\sigma) - \mathcal{P}(\sigma))\, d\sigma\, d\tau \\
&\quad = \int\limits_t^{\bar t} e^{\alpha\sigma}(P_m(\sigma) - \mathcal{P}(\sigma))\, d\sigma \int\limits_t^{\sigma} e^{-2\alpha\tau}\, d\tau \\
&\quad = e^{-\alpha t} \int\limits_t^{\bar t} (P_m(\sigma) - \mathcal{P}(\sigma))\Big(\frac{e^{\alpha(\sigma - t)} - e^{-\alpha(\sigma - t)}}{2\alpha}\Big)\, d\sigma,
\end{aligned}
$$

možemo prethodnu nejednakost napisati kao:

$$
\begin{aligned}
P_m(t) - \mathcal{P}(t) \le \beta^2 &\int\limits_t^{\bar t} \frac{e^{\alpha(\tau - t)} - e^{-\alpha(\tau - t)}}{2\alpha}(P_m(\tau) - P(\tau))\, d\tau \\
&+ \frac{(P_m(\bar t) - \mathcal{P}(\bar t))}{2\alpha}\Big(2\alpha e^{-\alpha(\bar t - t)} + (e^{\alpha(\bar t - t)} - e^{-\alpha(\bar t - t)})(\gamma + \alpha \\
&+ \frac{2\gamma e^{-\gamma(T-\bar t)}}{e^{\gamma(T-\bar t)} - e^{-\gamma(T-\bar t)}})\Big) \qquad \text{za } 0 \le t \le \bar t. \qquad (5.5.10)
\end{aligned}
$$

Leva strana ove nejednakosti *raste* kada t raste, što je posledica pretpostavke (5.0.12), dok desna strana *opada*. Stoga, željena nejednakost će važiti za svako t iz intervala $[0, \bar t]$. Ovo je dokaz nejednakosti $\mathbf{C}(P + \Delta P) - \mathbf{C}(P) \ge 0$ i pokazuje da *obim proizvodnje* $P = P(t)$ *definisan sa* (5.0.11),(5.4.4) i (5.4.5) *zaista daje minimalnu vrednost funkcije troška* $\mathbf{C}$ *među svim mogućim konkurentnim obimima proizvodnje koji zadovoljavaju ograničenja tipa nejednakosti* (5.0.5) i (5.0.6).

Zaključak

Svako preduzeće nastoji da ima minimalne troškove. Cilj ovog rada je bio da pronađemo ekstremnu vrednost tj. optimalan obim proizvodnje koji će zapravo dati minimalnu vrednost funkcije troška. Primenom Gatoove varijacije smo videli da funkcija troška ima varijaciju u svakom vektoru P (obimu proizvodnje) na posmatranom vektorskom prostoru. U odeljku "Problem optimizacije u planiranju proizvodnje", detaljno je izveden račun koji daje optimalan obim proizvodnje koji minimizira funkciju troška.

U poslednjem poglavlju "Problem planiranja proizvodnje uz ograničenja", razmatrali smo ograničenje koje se odnosi na obim proizvodnje, tj. on mora biti pozitivan kao i manji od maksimalnog mogućeg obima koje preduzeće može da ostvari. Tu smo izvršili preformulaciju problema optimizacije definisanjem kombinovanog obima proizvodnje kako ne bi dalje razmatrali navedena ograničenja. Takođe, tu je detaljno objašnjen postupak i izveden proračun kojim se pokazuje da taj kombinovani obim proizvodnje minimizira funkciju troška.

Dodatak

Rene Ožen Gato (5. maj 1889 - 3. oktobar 1914) je bio francuski matematičar. Rođen je u Vitri, 200 km istočno od Pariza.

Njegov otac Henri Ožen Gato je rođen 1860. godine. Radio je u malom preduzeću koje se nalazilo u predgrađu Vitre, a majka Marija Aleksandrija Roblin je bila krojačica. Par je imao dvoje dece, Rene je bio stariji, a njegov brat Žorž je rođen četiri godine nakon njega, 27. avgusta 1893. godine. Njihov otac je umro mlad, u 44. godini, 28. jula 1905. godine. Ta situacija je uticala na Renea i kao dečak imao je veću motivaciju u svojim studijama.

24. februara 1906. godine, Gato je napisao pismo Ministarstvu obrazovanja, sa molbom da mu se dozvoli da prisustvuje ispitu za upis na "Ecole Normale Superieure" (visoko obrazovna ustanova), iako nije imao 18 godina. U oktobru 1907. godine, Gato je upisao ovu školu, koja je tada bila centar intelektualnog života u Francuskoj.

Postoji zapis, napisan 1919. godine, od strane njegova dva druga, koji su napisali:

"*On je bio jedan od dobrih drugova, sa kojima je svako voleo da komunicira. Njegova dobrota i apsolutna iskrenost su se odmah osetili; on je bio među onima koji su znali da saslušaju i da sagledaju tuđa mišljenja. Možda su drugi imali više samopouzdanja i želje da dokažu originalnost duha i karaktera. Gatoova ličnost je tiho procvetala, sledio je da bude najbolji i njegova ličnost je neprestano jačala. Imao je svežinu duha. Kada je stigao na Ecole, tiho je otvorio dušu novim predmetima sa sigurnošću i inteligencijom... Ubrzo je postao jedan od najboljih matematičara u našoj grupi, ozbiljno orijentisan i brzo se fokusirao na stvari od suštinske važnosti. Voleo je da se bavi filozofskim i opštim pitanjima.*"

1910. godine, Gato je polozio ispit "Agregacija matematičkih nauka", a 8. jula 1912. godine, imenovan je kao profesor matematike u gradu Bar le Dik-u, nedaleko od Vitre. Međutim, pre stupanja na mesto profesora, morao je da ispuni svoju vojnu obavezu. 17. septembra 1911. proglašen je od strane predsednika republike potporučnikom u rezervi. 4. oktobra 1912. godine, oslobođen je aktivne vojske i počeo je da predaje, a u međuvremenu počeo je da priprema disertaciju iz matematike, na temu koja je usko vezana za funkcionalnu analizu.

Krajem oktobra 1913. godine dolazi u Rim. Prvi rad u Rimu objavljuje u decembru 1913. godine, a nakon ovog rada objavljuje još tri rada. 14. februara 1914. godine održao je predavanja na seminaru u Rimu. Njegove beleške sa predavanja se čuvaju među njegovim radovima. Njegova glavna istraživanja su vazana za diferencijal funkcije, proučavao je vezu između funkcionele i njenog izvoda kao i neke druge probleme matematike i fizike. U junu 1914. godine se vratio u Francusku i na početku rata u julu 1914. je mobilisan kao poručnik pešadijskog puka i ubrzo nakon toga, 9. oktobra 1914. godine je poginuo.

Leonard Ojler (15. april 1707. - 18. septembar 1783.) je bio švajcarski matematičar. Rođen je u Bazelu, kao prvo dete Paula Ojlera, sveštenika Reformatorske crkve i Margarite Bruker, koja je takođe porekla iz svešteničke porodice. Imao je dve mlađe sestre, Anu Mariju i Mariju Magdalenu. Ubrzo po Ojlerovom rođenju, porodica se iz Bazela preselila u Rein, gde će Leonard provesti veći deo svog detinjstva. Paul Ojler je bio prijatelj sa porodicom Bernuli, što je omogućilo da Johan Bernuli, koji je u svoje vreme smatran za najvažnijeg evropskog matematičara, izvrši značajan uticaj na mladog Ojlera.

Ojlerovo rano formalno obrazovanje je započelo u Bazelu. Sa trinaest godina se upisao na Univerzit u Bazelu, a 1723. godine je diplomirao sa radom u kome je upoređivao filozofiju Dekarta sa filozofijom Isaka Njutna. U isto vreme je subotom popodne išao na časove kod Johana Bernulija, koji je ubrzo tvrdio da njegov novi učenik ima neverovatan talenat za matematiku. U to vreme Ojler je izučavao teologiju, grčki i hebrejski jezik, da bi na insistiranje svoga oca postao sveštenik. Međutim, Johan Bernuli je ubedio Paula Ojlera da je njegov sin predodređen da postane veliki matematičar. Ojler je 1726. godine završio svoju doktorsku tezu o širenju zvuka, pod nazivom "O zvuku".

Ojler dolazi u Sankt Peterburg 17. maja 1727. godine i dobija posao u matematičkom odseku. Stanovao je sa Danijelom Bernulijem, Johanovim sinom, sa kojim je često blisko sarađivao. Temeljno je savladao ruski i našao je sebi dodatni posao, zaposlivši se kao lekar u ruskoj mornarici.

Ojler je brzo napredovao, postavljen je za profesora fizike 1731. godine, a dve godine kasnije je postao rukovodilac odseka za matematiku.

Oženio se Katarinom Gsel, kćerkom slikara. Mladi bračni par je živeo u kući na obali reke Neve. Imali su trinaestoro dece, od kojih je osmoro umrlo u detinjstvu.

Zbog nemira u Rusiji, prihvatio je poziv Fridriha Velikog da pređe na Berlinsku akademiju. Napustio je Sankt Peterburg 19. jula 1741. godine i sledećih dvadeset pet godina živeo je u Berlinu. Kao šef odseka za matematiku, bavio se rešavanjem najrazličitijih problema. Kao član upravnog odbora Akademije vodio je računa o biblioteci i objavljivanju naučnih radova, a pored toga bio je i državni savetnik za igre na sreću, osiguranje i penzione fondove. Pored svega toga, napisao je preko 380 matematičkih radova, a između ostalog, objavio je svoja najpoznatija dela "Uvod u analizu beskonačnih veličina" i "Diferencijalni račun".

Ojlerov vid se pogoršavao godinama, 1735. godine skoro potpuno je oslepeo na desno oko, a tri decenije kasnije 1766. godine, levo oko mu je obolelo od katarakte što ga je dovelo do potpunog slepila. Čak ni to nije umanjilo njegovu produktivnost, pošto je svoje slepilo prevazišao fotografskim pamćenjem i izvanrednom sposobnošću mentalnog računanja.

1766. godine prihvatio je poziv da se vrati na Peterburšku akademiju. Njegov drugi boravak u Rusiji bio je obeležen sa nekoliko tragedija. U požaru 1771. godine izgorela je Ojlerova kuća, a pet godina kasnije, posle više od četiri decenije braka umrla je Ojlerova žena. Već sledeće godine, ponovo se oženio, ovog puta sa Katarininom polusestrom Salome Abigal Gsel.

Ojler je umro 18. septembra 1783. godine u Sankt Peterburgu nakon što je doživeo moždani udar.

Ojlerovi doprinosi su bili u skoro svim oblastima matematike: geometriji, analizi, trigonometriji , algebri, teoriji brojeva, kao i fizici kontinuma, lunarnoj teoriji i drugim oblastima fizike. Bio je jedan on najvećih matematičara i njegovo ime je povezano sa velikim brojem matematičkih pojmova.

Lagranž Žosef Luj (25. januar 1736. - 10. april 1813. godine) je bio italijanski matematičar i astronom. Rođen je u Torinu.

Lagranžov otac, Đuzepe Frančesko Ludoviko Lagranž je bio blagajnik Kancelarije za javne radove i utvrđenja u Torinu, dok je njegova majka Tereza Groso bila kćerka lekara. Lagranž je bio najstariji od njihovih jedanaestoro dece od kojih je devetoro umrlo u detinjstvu.

Lagranž je studirao na koledžu u Torinu i njegov omiljeni predmet je bio latinski. U početku nije bio zainteresovan za matematiku. Lagranžovo interesovanje za matematiku je počelo kada je pročitao rad Edmunda Halejsa o korišćenju algebre u optici. Takođe se zainterersovao i za fiziku.

Sa 19 godina Lagranž je postavljen za profesora matematike u Kraljevskoj Atriljerijskoj školi u Torinu. Tu objavljuje svoje prve naučne radove o diferencijalnim jednačinama i varijacionom računu. 1757. godine pripada grupi osnivača Akademije nauka u Torinu.

U oktobru 1766. godine Lagranž dolazi u Berlin, a 6. novembra 1766. godine, Lagranž je nasledio Ojlera na mestu direktora za matematiku na Akademiji nauka u Berlinu. Objavio je radove iz teorije brojeva, varijacionog računa, teorije parcijalnih jednačina, nebeske mehanike, sferne astronomije.

Po prelasku u Pariz 1787. godine objavljuje klasično delo "Analitička mehanika". 1793. godine počinje vreme rata u Francuskoj gde većina stranaca biva prognano. Lagranž uspeva da ostane zahvaljujući posebnoj dozvoli. Od 1795. godine predaje dve godine na "Ecole Normale Superieure", a od 1797. godine predaje na "Ecole Polytechnique" gde objavljuje kurs "Teorija analitičkih funkcija I-II". Njegova sabrana dela iz matematike, astronomije i mehanike objavljena su u 14 tomova.

Mnoga Lagranžova otkrića nose njegovo ime: Formula za ostatak Tejlorovog reda, teorema o srednjoj vrednosti, interpolacioni polinom, metode multiplikatora, varijacije konstanta, rešavanje parcijalnih jednačina, uslovi varijacionog problema i drugo.

Pod Napoleonom biva proglašen grofom i senatorom u Francuskoj.
Posmrtni ostaci Lagranža se čuvaju u Panteonu.
Lagranž je jedna od 72 ličnosti čija su imena upisana na Ajfelovom tornju.

Literatura

[1] D. Smith, *Variotional methods in optimization*, University of California, San Diego, 1998.

[2] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Univerzitet u Novom Sadu, 2006

[3] B. Vujanović, D. Spasić, *Metodi optimizacije*, Univerzitet u Novom Sadu, 1997.

[4] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, 1996.

[5] Z. Stojaković, D. Herceg, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Univerzitet u Novom Sadu, 2005.

[6] Z. Travica, *Gatoova varijacija i primene* - diplomski rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2008.

[7] O. Hadžić, Đ. Takači, *Matematičke metode*, Univerzitet u Novom Sadu, 2000.

[8] A.D. Ioffe, V.M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, North-Holland publishing company, Amsterdam, New York, Oxford, 1974.

[9] B. Chachuat, *Nonlinear and dynamic optimization*, Automatic Control Laboratory, EPFL, Switzerland, 2007.

Biografija

Milica Bjeloglav je rođena 15. januara 1988. godine u Bačkoj Palanci. Završila je Osnovnu školu "Veselin Masleša" i gimnaziju "20 Oktobar" u Bačkoj Palanci. 2006. godine je upisala osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Studije je završila u junu 2010. godine sa prosečnom ocenom 9,16. Iste godine je upisala master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, na istom fakultetu. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine, položila je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9,57.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Milica Bjeloglav
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Problem planiranja proizvodnje uz ograničenja
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2011
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/84/0/0/0/9/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Optimizacija
ND

Ključne reči: ekstrem, Gatoova varijacija, funkcija troška, obim proizvodnje, problem planiranja proizvodnje
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Uviverzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi određivanjem optimalnog obima proizvodnje koji minimizirati funkciju troška. Razmatran je problem planiranja proizvodnje kako bez ograničenja, tako i sa ograničenjem.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 06.09.2011.
DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Sanja Konjik, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Milica Bjeloglav
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: A Problem in Production Planning with Constraints
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2011
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (5/84/0/0/0/9/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Optimization
SD

Subject/Key words: extremum, Gateaux variation, cost function, production rate, problem in production planning
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis is about determination optimum production rate which provides a minimum value to the cost function. We have considered a problem in production planning without and with constraints.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 06.09.2011.
ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Sanja Rapajić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Sanja Konjik, docent at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad