UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milana Stanković

Pontrjaginov princip maksimuma i primeri

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2016

Sadržaj

Predgovor

Osnovni cilj rada je da se izlože osnovne ideje teorije optimalnog upravljanja ilustrovane primerima, sa posebnim naglaskom na objašnjenje pojma Pontrjaginovog principa maksimuma. U tu svrhu usvajamo pristup problematici koristeći se pojmom i idejama varijacionog računa. Rad je organizovan na sledeci nacin.

U uvodnom delu rada biće predstavljena motivacija za uvođenje varijacionog računa kroz primere koji se modeliraju varijacionom formulacijom, kao što su Fermaov princip i putanja prelaska reke. Uvode se osnovni pojmovi među kojima su Lagranžovi množitelji, adjungovani i samoadjungovani diferencijalni operatori, a koji se koriste u izvođenjima.

Drugi deo rada posvećen je proučavanju ekstremnih i kritičnih tačaka funkcio- nela u okviru varijacionog računa. Izvode se i dokazuju osnovne leme varijacionog računa, Ojler-Lagranžova jednačina i navode se njeni specijalni slučajevi. Definišu se prirodni granični uslovi. Uvodi se funkcionela sa dve nezavisne promenljive da bi se dobila Ojler-Lagranžova jednačina sa parcijalnim izvodima. Prikazuje se postupak rešavanja varijacionog problema sa ograničenjem.

U trećem delu rada bavimo se optimalnim upravljanjem. Osnovni zadatak optimalnog upravljanja je ispunjavanje određenog kriterijuma optimalnosti za dati sistem. Navode se primeri optimizacije i upravljanja kao što su optimizacija oblika, finansijska optimizacija i prigušen harmonijski oscilator. Posebno se navodi Rikatijeva jednačina za linearno kvadratni problem.

Četvrti deo rada je posvećen Pontrjaginovom principu maksimuma. Najpre se diskutuje ideja u pozadini ovog principa i navodi se kratak istorijat problematike kao i primena pri matematičkom modeliranju. Teorijska razmatranja će se ilustrovati primerima reinvestiranja profita, prigušenog harmonijskog oscilatora i sletanja sonde na površinu Marsa.

⋆ ⋆ ⋆

Zahvaljujem se mentoru dr Nenadu Teofanovu na svim sugestijama i stručnom usmeravanju pri izradi rada. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Milici Žigić, kao i svim ostalim profesorima, sa kojima sam sarađivala tokom osnovnih i master akademskih studija.

Posebnu i najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima na beskrajnoj podršci i razumevanju u toku školovanja i života.

Milana Stanković

1

Uvod

U ovoj glavi definišemo pojmove koji će biti potrebni za razumevanje rada. Kao motivaciju rada sa varijacionim računom navodimo Fermaov princip prelamanja svetlosti i problem određivanja najkraće trajektorije broda. Navodimo potreban uslov za ekstrem funkcije i uvodimo pojmove sa adjungovanog i samoadjungovanog diferencijalnog operatora.
Korišćena je literatura [1], [7].

1.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navedena je teorija o ekstremu algebarske funkcije uz dato ograničenje, a sličnu priču primenićemo i na varijacioni problem sa ograničenjem, u poglavljima (2.7) i (2.9).

Definicija 1.1.1. *Neka je data funkcija $f : A \to R$, $A \subset R$.* ***Prvi izvod*** *funkcije f u tački $x_0 \in R$ je*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{1.1}$$

ako limes postoji. Kada limes postoji kažemo da je f diferencijabilna u tački x_0.

Kada želimo naglasiti da se izvod uzima u tački $x_0 \in A$ koriste se sledeće oznake

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \textit{ili} \qquad f'(x_0) = \dot{f}(x_0).$$

Najvažnija interpretacija izvoda funkcije je ta da on pokazuje stopu promene funkcije u nekoj tački. Dakle, prvi izvod pokazuje koliko će se vrednost funkcije promeniti u odnosu na (malu) promenu argumenta.

Definicija 1.1.2. *Funkcija $f : A \to R$, $A \subset R$, ima* ***lokalni minimum (maksimum)*** *u tački $x_0 \in A$, ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da za sve $x \in A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ važi da je*

$$f(x_0) \le f(x) \qquad (f(x) \le f(x_0)).$$

U tom slučaju $f(x_0)$ je lokalna ekstremna vrednost funkcije f na skupu A.

Teorema 1.1.1. ***(Potreban uslov za ekstrem).*** *Ako funkcija $f : A \to R$ ima ekstremnu vrednost u tački $x_0 \in A$ tada ili je $f'(x_0) = 0$ ili u toj tački funkcija f nije diferencijabilna.*

Skup tačaka za koje je $f'(x_0) = 0$ naziva se skup **stacionarnih tačaka**.

Posmatrajmo sada funkciju $f : R^n \to R^m$. Izvod funkcije f po vektorima e_i, $i = 1, 2, ..., n$, standardne baze prostora R^n, u tački $x \in R^m$ naziva se i-ti parcijalni izvod funkcije f u tački x i označava se sa $\partial_i f(x)$:

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h},$$

gde je $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Funkcija $f : R^n \to R^m$ je **glatka** ako ima neprekidne parcijalne izvode.

Posmatrajmo funkcije $p(x)$ i $q(x)$ koje su diferencijabilne i čiji izvodi su neprekidne funkcije. Izvod proizvoda ove dve funkcije je

$$\frac{d}{dx}(pq)(x) = p(x)\frac{dq}{dx}(x) + q(x)\frac{dp}{dx}(x).$$

Integralimo po x i koristimo da je $\int \frac{d}{dx}(pq)(x) = pq(x)$, pa je

$$pq \;=\; \int p\frac{dq}{dx}dx + \int q\frac{dp}{dx}dx,$$

odnosno

$$pq \;=\; \int pdq + \int qdp.$$

Dolazimo do formule za parcijalnu integraciju

$$\int pdq = pq - \int qdp.$$

Za određeni integral u granicama $[x_0, x_1]$ formula za parcijalnu integraciju postaje

$$\int_{x_0}^{x_1} pdq = pq(x_1) - pq(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} qdp = pq\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} qdp.$$

Neka je funkcija $f(x, y, z) : R^3 \to R$ diferencijabilna u nekoj okolini tačke (x_0, y_0, z_0). Potreban uslov za ekstrem funkcije $f(x, y, z)$ bez ograničenja je dat sa

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0, \tag{1.2}$$

gde je $f_x = \partial_1 f$, $f_y = \partial_2 f$ i $f_z = \partial_3 f$. Pošto su x, y, z nezavise promenljive, stacionarna tačka funkcije f dobije se rešavanjem sledećeg sistema

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = 0.$$

Neka je dato ograničenje $g(x, y, z) = c = const$. Tada je totalni diferencijal funkcije $g(x, y, z)$

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0. \tag{1.3}$$

Kako su jednačine (1.2) i (1.3) jednake nuli, možemo da zapišemo

$$df + \lambda dg = (f_x + \lambda g_x)dx + (f_y + \lambda g_y)dy + (f_z + \lambda g_z)dz = 0, \tag{1.4}$$

gde je λ proizvoljna konstanta koju zovemo Lagranžov množitelj. Kako je $g(x, y, z) = c$, promenljive x, y, z više nisu nezavisne. Pošto imamo jedno ograničenje, samo dve od tri promenljive mogu biti nezavisne, pa ne može da se primeni isti princip kao u (1.2). Pretpostavimo da je npr. $g_z \neq 0$ u (x_0, y_0, z_0), pa poslednji sabirak u jednačini (1.4) može da se eliminiše ako je $\lambda = -\frac{f_z}{g_z}$, a jednakost (1.4) postaje

$$(f_x + \lambda g_x)dx + (f_y + \lambda g_y)dy = 0.$$

Promenljive, x i y, sada možemo uzeti kao nezavisne i koeficijenti uz dx i dy moraju biti 0. Znači, imamo 4 jednačine sa 4 nepoznate x_0, y_0, z_0 i λ:

$$f_x + \lambda g_x = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 0, \quad f_z + \lambda g_z = 0, \quad g = c.$$

Zaključak: Traženje stacionarne tačke funkcije $f(x, y, z)$ sa ograničenjem $g(x, y, z) = c$ ekvivalentno je traženju stacionarne tačke Lagranžove pomoćne funkcije

$$\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

bez ograničenja. Stacionarna tačka (x_0, y_0, z_0), dobije se rešavanjem sistema $\tilde{f}_x = \tilde{f}_y = \tilde{f}_z = 0$.

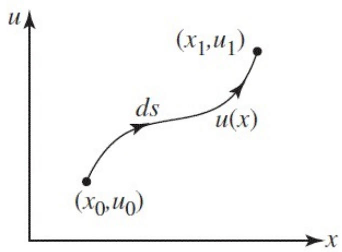
1.2 Motivacija za uvođenje varijacionog računa

Osnovni zadatak varijacionog računa je pronalaženje funkcija koje saopštavaju ekstremnu vrednost zadatom određenom integralu. Te funkcije su najčešće glatke i prolaze kroz zadate tačke. U sledećim primerima ilustruje se formulacija problema u okviru varijacionog računa.

Fermaov princip kaže da od svih mogućih puteva koje svetlo može preći, svetlo uzima put koji ima najkraće vreme. Naš zadatak je da minimiziramo vreme putovanja svetlosti $T[u(x)]$, po svim mogućim putanjama $u(x)$, koje svetlo može preći u datoj sredini između tačaka x_0 i x_1 u momentima t_0 i t_1, respektivno:

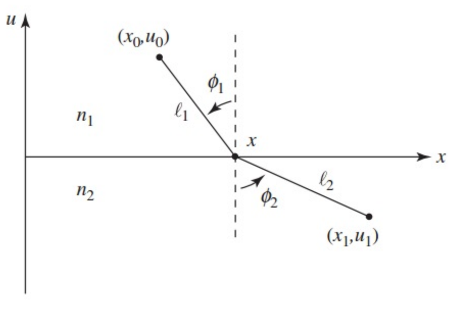
$$T[u(x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v(x,u)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x,u)}{c} ds, \tag{1.5}$$

gde je $v(x,u)$ brzina svetlosti u datoj sredini, c brzina svetlosti u vakumu, $n(x,u)$ indeks prelamanja svetlosti u datoj sredini, ds diferencijalni element po putanji $u(x)$, slika 1.1.



Slika 1.1

Pretpostavimo da imamo dve homogene sredine sa konstantnim indeksima prelamanja svetlosti n_1 i n_2 i da je x osa granica između ove dve sredine, slika 1.2.



Slika 1.2

U homogenoj sredini svetlost se prostire pravolinijski i konstantnom brzinom, a to znači da putanja koja ima najkraće vreme putovanja ima i najmanju dužinu. Treba da nađemo vrednost x, tj. mesto gde svetlosni zrak prelazi iz jedne sredine u drugu. Za fiksirane tačke (x_0, u_0) i (x_1, u_1) i konstantne indekse prelamanja svetlosti, vreme putovanja svetlosti na osnovu (1.5) je:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{c}\left[n_1 \int_{x_0}^{x} ds + n_2 \int_{x}^{x_1} ds\right] \\ &= \frac{1}{c}\left[n_1 l_1 + n_2 l_2\right] \\ &= \frac{1}{c}\left[n_1\sqrt{(x-x_0)^2+u_0^2} + n_2\sqrt{(x_1-x)^2+u_1^2}\right]. \end{aligned}$$

Kako je $T(x)$ algebarska funkcija po x, koristimo diferencijalni račun za minimizaciju:

$$\frac{dT}{dx} = 0,$$

ako i samo ako je

$$\frac{1}{2}n_1\left[(x-x_0)^2+u_0^2\right]^{-1/2}[2(x-x_0)] + \frac{1}{2}n_2\left[(x_1-x)^2+u_1^2\right]^{-1/2}[-2(x_1-x)] = 0.$$

Kako je

$$\sin(\Phi_1) = \tfrac{x-x_0}{l_1} \quad \text{i} \quad \sin(\Phi_2) = \tfrac{x_1-x}{l_2},$$

zamenom u prethodnu jednačinu dobija se

$$\frac{n_1}{l_1}(l_1\sin(\Phi_1)) = \frac{n_2}{l_2}(l_2\sin(\Phi_2)).$$

Prema tome

$$n_1\sin(\Phi_1) = n_2\sin(\Phi_2),$$

što se naziva Snelov zakon za dve homogene sredine.
U opštem slučaju, kada je indeks prelamanja svetlosti $n(x, u)$ promenljiva, (1.5) je

$$T[u(x)] = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} n(x, u)ds.$$

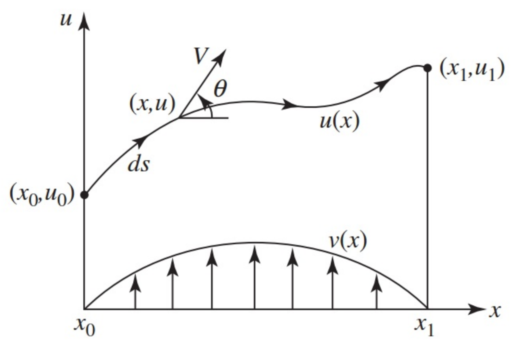
Kako je $ds = \sqrt{dx^2 + du^2}$ i $u = u(x)$, totalni diferencijal od $u(x)$ je $du = \frac{du}{dx}dx$ i prethodna jednačina postaje

$$T[u(x)] = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} n(x, u)\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}dx$$

Znači, treba da minimiziramo funkcionelu[1] $T[u(x)]$, koja je definisana preko određenog integrala sa nepoznatom funkcijom $u(x)$. Za rešavanje ovog problema uvodimo pojam varijacionog računa, koji će biti opisan u sledećem poglavlju.

Sledeći primer koji motiviše potrebu za varijacionim računom je **trajektorija(putanja) broda**.

Treba da nađemo putanju $u(x)$, gde bi vreme prelaska broda od tačke (x_0, u_0) do tačke (x_1, u_1) bilo što kraće. Neka je $v(x)$ brzina strujanja reke, V konstantna brzina kretanja broda koja je relativna u odnosu na strujanje reke, $\theta(x)$ ugao koji je relativan u odnosu na fiksiran koordinatni sistem, kao što je prikazano na slici 1.3.



Slika 1.3

Slično kao kod Fermaovog principa, želimo da minimiziramo funkcionelu

$$T[u(x), \theta(x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{(x_0,u_0)}^{(x_1,u_1)} \frac{ds}{v_B(x,u)}, \tag{1.6}$$

gde je $v_B(x)$ relativna brzina broda u odnosu na fiksiran koordinatni sistem. Vektor brzine broda $\mathbf{v}_B(x, u)$ predstavlja kombinaciju brzine strujanja reke $v(x)$ i relativne brzine broda V. Komponente vektora brzine broda su

$$\dot{x} = V\cos(\theta(x)), \qquad \dot{u} = v(x) + V\sin(\theta(x)), \tag{1.7}$$

pa je vektor brzine broda $\mathbf{v}_B = \dot{x}\mathbf{e_1} + \dot{u}\mathbf{e_2}$, a brzina broda je

$$\begin{aligned} v_B(x,u) &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{u}^2} \\ &= \sqrt{V^2\cos^2\theta + v^2 + 2vV\sin\theta + V^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{V^2 + v^2 + 2vV\sin\theta} \end{aligned}$$

[1]Funkcija koja je denisana na proizvoljnom skupu i uzima vrednost u skupu realnih brojeva naziva se funkcionela.

Znamo da je $ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = \sqrt{1 + [u'(x)]^2}dx$, odakle se zamenom u (1.6) dobija

$$T[u(x), \theta(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + [u'(x)]^2}}{\sqrt{V^2 + v^2 + 2vV \sin\theta}} dx, \tag{1.8}$$

Sada treba da minimiziramo funkcionelu koja je data preko određenog integrala sa dve nepoznate funkcije $u(x)$ i $\theta(x)$. Može se izraziti veza između putanje $u(x)$ i ugla $\theta(x)$ i time će se broj nepoznatih u funkcioneli smanjiti na jednu. Nagib trajektorije dat je odnosom komponenata brzine broda

$$\frac{du}{dx} = \frac{\dot{u}}{\dot{x}},$$

a iz (1.7) sledi

$$\frac{du}{dx} = \frac{v(x) + V \sin(\theta(x))}{V \cos(\theta(x))}. \tag{1.9}$$

Ako izraz (1.9) zamenimo u funkcionelu (1.8) dobije se funkcionela koja zavisi samo od $\theta(x)$:

$$T[\theta(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{V \cos(\theta(x))} dx.$$

Kao i kod Fermaovog principa, opet smo dobili funkcionelu koju treba da minimiziramo, a za to će nam koristiti varijacioni račun.

1.3 Adjungovan i samoadjungovan diferencijalni operator

Posmatramo matricu $\mathbf{A}$ dimenzije $n \times n$ i proizvoljne vektore $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ dimenzija $n \times 1$. Matrica $\mathbf{A}_{n\times n}$ je linearno preslikananje iz R^n u R^n. Pomnožimo matricu $\mathbf{A}$ vektorom $\mathbf{v}^T$ sa leve strane i vektorom $\mathbf{u}$ sa desne strane i transponujmo

$$(\mathbf{v}^T \mathbf{A}\mathbf{u})^T = \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{v}.$$

$\mathbf{v}^T \mathbf{A}\mathbf{u}$ je skalar, pa možemo da uklonimo transponovanje i zapišemo u obliku unutrašnjeg proizvoda[2]

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}^\mathbf{T} \mathbf{v} \rangle.$$

Ovo predstavlja motivaciju za sledeće. Diferencijalni operator α ima adjungovan operator α^* koji zadovoljava

$$\langle v, \alpha u \rangle = \langle u, \alpha^* v \rangle, \tag{1.10}$$

[2]Unutrašnji proizvod definisan je kao $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$

gde su $u(x)$ i $v(x)$ proizvoljne funkcije sa homogenim graničnim uslovima, tj. $u(x) = 0$ i $v(x) = 0$. Da bi ilustrovali pristup za određivanje adjungovanog operatora, posmatrajmo linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa promenljivim koeficijentima

$$\alpha u = \frac{1}{r(x)}[a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u] = 0, a \leq x \leq b, \tag{1.11}$$

gde je $r(x)$ težinska funkcija. Unutrašnji proizvod[3] αu sa proizvoljnom funkcijom $v(x)$ je sada definisan kao

$$\langle v, \alpha u\rangle = \int_a^b r(x)v(x)\left\{\frac{1}{r(x)}[a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u]\right\}dx, \tag{1.12}$$

u odnosu na funkciju $r(x)$, a to je leva strana jednačine (1.10). Ideja je da pomoću parcijalne integracije zamenimo uloge $u(x)$ i $v(x)$ u unutrašnjem proizvodu. Na prvi sabirak iz jednačine (1.12) primenimo parcijalnu integraciju dva puta

$$\int_a^b a_0 v u'' dx \overset{(1)}{=} a_0 v u'\Big|_a^b - \int_a^b u'(a_0 v)' dx \overset{(2)}{=} \Big(a_0 v u' - (a_0 v)' u\Big)\Big|_a^b + \int_a^b u(a_0 v)'' dx,$$

(1)

$$\begin{aligned} p &= va_0, \qquad q = u', \\ dp &= (va_0)'dx, \quad dq = u''dx, \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} p &= (va_0)', \qquad q = u \\ dp &= (va_0)''dx, \quad dq = u'dx. \end{aligned}$$

Na drugi sabirak iz jednačine (1.12), takođe primenimo parcijalnu integraciju

$$\int_a^b a_1 v u' dx \overset{(3)}{=} a_1 v u\Big|_a^b - \int_a^b u(a_1 v)' dx,$$

[3]Unutrašnji proizvod funkcija u odnosu na težinsku funkciju $r(x)$ definisan je na sledeći način:$\langle p, q\rangle = \int_a^b r(x)p(x)q(x)dx$. Ako je $r(x) = 1$, imamo $\langle p, q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$.

(3)

$$\begin{aligned} p &= va_1, \qquad q = u, \\ dp &= (va_1)'dx, \quad dq = u'dx. \end{aligned}$$

Zamenom u (1.12) dobije se

$$\langle v, \alpha u\rangle = \big(a_0vu' - (a_0v)'u + a_1vu\big)\Big|_a^b + \int_a^b r(x)u(x)\Big\{\frac{1}{r(x)}[(a_0v)'' - (a_1v)' + a_2v]\Big\}dx,$$

gde je izraz u {} α^*v, a ceo integral je $\langle u, \alpha^*v\rangle$. Jedino ako su granični uslovi na $u(x)$ i $v(x)$ homogeni, tada je

$$\langle v, \alpha u\rangle = \langle u, \alpha^*v\rangle.$$

Znači, uz pretpostavku da su granični uslovi na $u(x)$ i $v(x)$ homogeni, adjungovan operator α^* diferencijalnog operatora α je

$$\alpha^*v = \frac{1}{r(x)}\{[a_0(x)v]'' - [a_1(x)v]' + a_2(x)v\}.$$

Kada su diferencijalni operator α i njegov adjungovan α^* jednaki, onda je α samoadjungovan ili Hermitski. Pretpostavimo da je $\alpha = \alpha^*$ i neka su $u(x)$ i $v(x)$ dve karakteristične funkcije diferencijalnog operatora, tj $\alpha u = \lambda_1 u$ i $\alpha v = \lambda_2 v$, čijom zamenom u (1.10) dobijemo

$$\langle v, \lambda_1 u\rangle = \langle u, \lambda_2 v\rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u, v\rangle = 0.$$

Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ onda odgovarajuće karakteristične funkcije moraju biti ortogonalne da bi njihov unutrašnji proizvod bio 0.

Zaključak: Ako je α samoadjungovan operator, tada različite karakteristične vrednosti daju ortogonalne karakteristične funkcije.
Međutim, nemaju sve jednačine oblika (1.11) samoadjungovan diferencijalni operator. Mi ćemo posmatrati jednačine oblika (1.11) koje imaju samoadjungovan operator. Kako je

$$\alpha^*v = \frac{1}{r(x)}\{[a_0(x)v]'' - [a_1(x)v]' + a_2(x)v\}, \tag{1.13}$$

primenom izvoda proizvoda funkcija (1.13) postaje

$$\alpha^* v = \frac{1}{r(x)}\{a_0(x)v'' + [2a_0'(x) - a_1(x)]v' + [a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x)]v\}. \quad (1.14)$$

Pošto smo pretpostavili da je α samoadjungovan operator, onda α i α^* u jednačinama (1.11) i (1.14) moraju biti isti, tj.

$$a_1(x) = 2a_0'(x) - a_1(x)$$

ili

$$a_1(x) = a_0'(x) \quad (1.15)$$

i

$$a_2(x) = a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x).$$

Zamenjujući (1.15) u (1.11) dobijemo

$$\alpha u = \frac{1}{r(x)}\{a_0(x)v'' + a_0'(x)u' + a_2(x)u\} = 0.$$

Diferencijalni operator može biti zapisan u Strum-Liouvillovom obliku

$$\alpha = \frac{1}{r(x)}\left\{\frac{d}{dx}[a_0(x)\frac{d}{dx}] + a_2(x)\right\}.$$

Zaključak: Linearni diferencijalni operator drugog reda je samoadjungovan ako i samo ako se može zapisati u Sturm-Liouvillovoj formi.

2

Varijacioni račun

U ovom delu rada objasnićemo pojam varijacije, izvesti Ojlerovu jednačinu koja predstavlja potreban uslov za ekstrem funkcionele. Navode se i dva specijalna slučaja Ojlerove jednačine. Osim prirodnih graničnih uslova, u varijacionom računu ograničenja mogu biti izražena u vidu određenih integrala, algebarskih i diferencijalnih jednačina, o čemu će takođe biti dat komentar.
Korišćena je literatura [1], [2], [5].

2.1 Pojam varijacije

Neka je $C^1([x_0, x_1])$ skup svih glatkih funkcija definisanih na zatvorenom intervalu $[x_0, x_1]$. Osnovni zadatak varijacionog računa svodi se na određivanje funkcije $u = u(x) \in C^1$ tako da funkcionela

$$I[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, u(x), u'(x)]dx \tag{2.1}$$

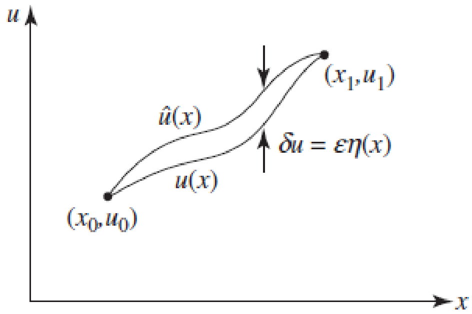
sa graničnim uslovima

$$u(x_0) = u_0, \qquad u(x_1) = u_1, \tag{2.2}$$

ima minimalnu ili maksimalnu vrednost. Znači, tražimo funkciju $u(x)$ koja je stacionarna funkcija funkcionele $I[u(x)]$. Definišimo novu funkciju

$$\hat{u}(x) = u(x) + \eta(x)\epsilon, \tag{2.3}$$

gde je $\eta(x) \in C^1[a, b]$ tako da je $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, a ϵ mali parametar, slika 2.1.



Slika 2.1.

Sada definišemo varijaciju funkcije u kao

$$\delta u = \hat{u}(x) - u(x) = \eta(x)\epsilon,$$

gde se δ naziva varijacija.
Napomena: Diferenciranje je proces kojim se meri promena funkcije prilikom promene nezavisno promenljive x, dok se prilikom variranja vrši promena funkcije, bez promene argumenta x. Pošto se prilikom variranja vrši samo promena funkcije, bez promene argumenta, onda je

$$\delta x = 0.$$

Pokazaćemo da je izvod varijacije jednak varijaciji izvoda.
Izvod varijacije je

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\eta(x)\epsilon) = \epsilon\frac{d\eta}{dx}, \tag{2.4}$$

a varijacija izvoda

$$\delta\Big(\frac{du}{dx}\Big) = \frac{d\hat{u}}{dx} - \frac{du}{dx} = \frac{d[\hat{u}(x) - u(x)]}{dx} = \epsilon\frac{d\eta}{dx}. \tag{2.5}$$

Na osnovu (2.4) i (2.5) sledi da je

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \delta\Big(\frac{du}{dx}\Big), \tag{2.6}$$

što znači da su operacije diferenciranja i varijacije komutativne. Pokazaćemo i da je varijacija integrala jednaka integralu varijacije.

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} u(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}\hat{u}(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} u(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}[\hat{u}(x) - u(x)]dx = \int_{x_0}^{x_1}\delta u dx,$$

pa sledi

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} u(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta u dx.$$

2.2 Izvod funkcionele

Uvrstimo izraz (2.3) u funkcionelu (2.1) koja postaje

$$I[\hat{u}] = I[u(x) + \epsilon\eta(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, u(x) + \epsilon\eta(x), u'(x) + \epsilon\eta'(x)]dx. \tag{2.7}$$

Za fiksiranu funkciju η, funkcionela (2.7) postaje funkcionela po ϵ. Primetimo da jednačinu (2.3) možemo zapisati kao

$$u(x) = \hat{u}(x)|_{\epsilon=0} = (u(x) + \epsilon\eta(x))|_{\epsilon=0}.$$

Zanima nas šta je $\frac{d}{d\epsilon}I[\hat{u}]|_{\epsilon=0}$, što će se nazivati izvod funkcionele. Kako je

$$\frac{d}{d\epsilon}I[\hat{u}] = \frac{d}{d\epsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, \hat{u}, \hat{u}')dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\epsilon}F(x, \hat{u}, \hat{u}')dx. \tag{2.8}$$

Posmatrajući $x, \hat{u}, \hat{u}'$ kao nezavisne promenljive

$$\frac{dF}{d\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \hat{u}}\frac{d\hat{u}}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \hat{u}'}\frac{d\hat{u}'}{d\epsilon}.$$

Pošto x ne zavisi od ϵ i $\hat{u}(x) = u(x) + \epsilon\eta(x)$

$$\frac{dx}{d\epsilon} = 0, \qquad \frac{d\hat{u}}{d\epsilon} = \eta(x), \qquad \frac{d\hat{u}'}{d\epsilon} = \eta'(x),$$

odakle sledi da jednačina (2.8) postaje

$$\frac{dI}{d\epsilon}[\hat{u}] = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial F}{\partial \hat{u}}(x, \hat{u}, \hat{u}')\eta + \frac{\partial F}{\partial \hat{u}'}(x, \hat{u}, \hat{u}')\eta'\Big)dx.$$

Sada je

$$\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial F}{\partial u}(x, u, u')\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}(x, u, u')\eta'\Big)dx. \tag{2.9}$$

Primenom parcijalne integracije na drugi član

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial u'}, \qquad q = \eta, \\ dp &= \Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)' dx, \quad dq = \eta' dx, \end{aligned}$$

dobije se

$$\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \Big[\eta \frac{\partial F}{\partial u'}\Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\Big]\eta dx.$$

Prvi sabirak nestane, jer je $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Sada je,

$$\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\Big]\eta dx. \tag{2.10}$$

2.3 Izvođenje Ojlerove jednačine

Ojlerova jednačina je u tesnoj vezi sa potrebnim uslovom za ekstrem funkcionele. Najpre ćemo navesti lemu koja će nam biti od velikog značaja za ostatak rada, a njen dokaz biće prikazan u dodatku.

Lema 2.3.1. ***(Fundamentalna lema varijacionog računa)*** *Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $x_0 \le x \le x_1$, i ako je*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx = 0,$$

gde je $g(x)$ proizvoljna funkcija na istom intervalu i $g(x_0) = g(x_1) = 0$, tada je $f(x) = 0$ u svakoj tački intervala $x_0 \le x \le x_1$.

Primenom fundamentalne leme varijacionog računa na (2.10) sledi da je

$$\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = 0,$$

ako je

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) = 0. \tag{2.11}$$

Jednačinu (2.11) zovemo Ojlerovom ili Ojler-Lagranžovom jednačinom, a to je potreban ali ne i dovoljan uslov za ekstrem funkcionele $I[u(x)]$. Rešenje $u(x)$ jednačine (2.11) je stacionarna funkcija funkcionele $I[u(x)]$.

Napomena: Razlika između d (ili ∂) predstavlja promenu funkcije od tačke do tačke, dok δ predstavlja promenu od funkcije do funkcije, a to znači da δu predstavlja razliku između stacionarne funkcije i njoj bliske funkcije.
Na primer, totalni diferencijal funkcije $f(x, y, z)$ je

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

što predstavlja promenu funkcije $f(x, y, z)$ po krivoj od tačke do tačke, a totalni diferencijal funkcije $F(x, u(x), u'(x))$ je

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial u'}du'.$$

Varijacija funkcije $F(x, u(x), u'(x))$ je

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'. \tag{2.12}$$

Kako je x nezavisna promenljiva, $\delta x = 0$, pa je

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u',$$

što predstavlja varijaciju F od funkcije do funkcije.
Stacionarna tačka funkcije $f(x, y, z)$ je tačka (x, y, z) u kojoj je $df = 0$, a stacionarna funkcija funkcionele $I[u]$ je funkcija $u(x)$ u kojoj je $\delta I = 0$.
Prikazaćemo još jedan postupak izvođenja Ojlerove jednačine.
Uzmimo varijaciju funkcionele (2.1) i izjednačimo je sa nulom

$$\delta I = \delta \int_{x_0}^{x_1} F[x, u, u']dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta F[x, u, u']dx = 0.$$

Primenom (2.12) sledi

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'\Big)dx = 0. \tag{2.13}$$

Kako je x nezavisna promenljiva, znamo da je $\delta u = 0$. Na osnovu (2.6)

$$\delta u' = \delta\Big(\frac{du}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}(\delta u).$$

Jednačina (2.13) postaje

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}(\delta u)'\Big)dx = 0.$$

Primenom parcijalne integracije na drugi sabirak

$$\delta I = \Big[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\Big]\delta u dx = 0.$$

Pošto su dati fiksni granični uslovi na početku i kraju intervala $[x_0, x_1]$, to znači da sve funkcije $u(x)$ koje su kandidati za ekstrem funkcionele I, moraju prolaziti kroz ove dve tačke, pa je varijacija funkcije $u(x)$ u tim tačkama jednaka nuli, odnosno

$$\delta u(x_0) = \delta u(x_1) = 0.$$

Sada je

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\Big]\delta u dx = 0. \tag{2.14}$$

Kako je varijacija funkcije δu na intervalu $[x_0, x_1]$ proizvoljna, da bi jednačina (2.14) bila jednaka nuli mora da

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) = 0,$$

a to je Ojlerova jednačina.

2.4 Specijalni slučajevi Ojlerove jednačine

Kako bismo lakše rešili Ojlerovu jednačinu, navodimo neke specijalne slučajeve koje ćemo koristiti u nastavku rada.
Posmatrajmo Ojlerovu jednačinu oblika

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) = 0. \tag{2.15}$$

1. Ako funkcija $F(x, u(x), u'(x))$ ne zavisi eksplicitno od $u(x)$, to jest $F = F(x, u'(x))$, tada je $\partial F/\partial u = 0$, pa jednačina (2.15) postaje

   $$-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0,$$

   pa se integracijom po x dobija

   $$\frac{\partial F}{\partial u'} = c,$$

   gde je c konstanta.

2. Ako funkcija $F(x, u(x), u'(x))$ ne zavisi eksplicitno od nezavisne promenljive x, to jest $F = F(u(x), u'(x))$, tada možemo zameniti uloge zavisne i nezavisne promenljive

$$\begin{aligned} I[u(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} F(u, u')dx \\ &= \int_{u_0}^{u_1} F\Big[u, \Big(\frac{dx}{du}\Big)^{-1}\Big]\frac{dx}{du}du \\ &= \int_{u_0}^{u_1} F[u, (x')^{-1}]x'du \\ &= \int_{u_0}^{u_1} \tilde{F}(u, x')du, \end{aligned}$$

gde je $\tilde{F}(u, x') = x'F[u, (x')^{-1}]$. Ovo se svodi na specijalni slučaj 1, jer funkcija ne zavisi od $x(u)$, pa je Ojlerova jednačina

$$-\frac{d}{du}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x'}\Big) = 0,$$

pa se integracijom po u dobija

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x'} = c.$$

Intuitivno znamo da je najkraća udaljenost između dve tačke prava linija, što ćemo pokazati kroz sledeći primer.

Primer 1. *Od svih glatkih krivih u ravni koje spajaju tačke* (x_0, u_0) *i* (x_1, u_1)*, odrediti onu koja ima najkraću dužinu.*

Želimo da pronađemo krivu koja je prikazana na slici 1.1, gde je $u(x_0) = u_0$ i $u(x_1) = u_1$, za koju je dužina najmanja. Dužina luka krive $u = u(x)$ je data sa

$$I[u] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (u')^2}dx.$$

Kako je podintegralna funkcija

$$F(u') = \sqrt{1 + (u')^2},$$

dolazimo do specijalnog slučaja 1, što znači da je

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (u')^2}(2u').$$

Zamenom u Ojlerovu jednačinu

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) = 0,$$

dolazimo do

$$-\frac{d}{dx}\Big\{u'\big[1+(u')^2\big]^{-1/2}\Big\} = 0.$$

Rešavanjem prethodne jednačine dolazimo do

$$\begin{aligned} u'\big[1+(u')^2\big]^{-1/2} &= \tilde{c} \\ u' &= \tilde{c}\big[1+(u')^2\big]^{1/2} \\ (u')^2 &= \tilde{c}^2\big[1+(u')^2\big] \\ (1-\tilde{c}^2)(u')^2 &= \tilde{c}^2 \\ (u')^2 &= \hat{c} \\ u' &= c_1, \end{aligned}$$

što znači da je rešenje oblika

$$u(x) = c_1 x + c_2. \tag{2.16}$$

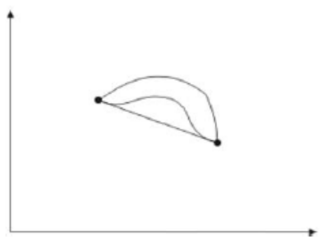
Konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih uslova

$$\begin{aligned} u(x_0) &= c_1 x_0 + c_2 = u_0, \\ u(x_1) &= c_1 x_1 + c_2 = u_1, \end{aligned}$$

rešavanjem ovog sistema jednačina (2.16) postaje

$$u(x) = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + u_0,$$

što je prava linija, kako smo i očekivali, slika 2.2.



Slika 2.2.

2.5 Prirodni granični uslovi

U dosadašnjim razmatranjima varijacioni zadatak pronalaženje funkcije $u(x)$, koja je stacionarna funkcija funkcionele (2.1), rešavan je uz pretpostavku da su unapred zadati granični uslovi (2.2). U ovom delu biće prikazana činjenica da će nas, ako funkcija koju tražimo nije određena na granici, sama varijaciona formulacija navesti na granične uslove koji se "prirodno" nameću, a ti uslovi se zovu prirodni granični uslovi.
Kao što smo već rekli, uslov stacionarnosti dat je sa $\delta I = 0$, odnosno

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\Big)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\Big]\delta u dx = 0. \tag{2.17}$$

Do sada su $u(x_0)$ i $u(x_1)$ bili fiksirani na krajevima intervala, pa funkcija $u(x)$ nije varirala u x_0 i x_1 i $\delta u\big|_{x_0}^{x_1} = 0$, i time bi prvi sabirak u jednačini (2.17) nestao. Međutim, ako sada nije data vrednost u krajnjim tačkama, u tom slučaju ju $\delta u\big|_{x_0}^{x_1} \neq 0$. Da bi uslov stacionarnosti bio ispunjen, mora biti zadovoljena Ojlerova jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) = 0,$$

pa je

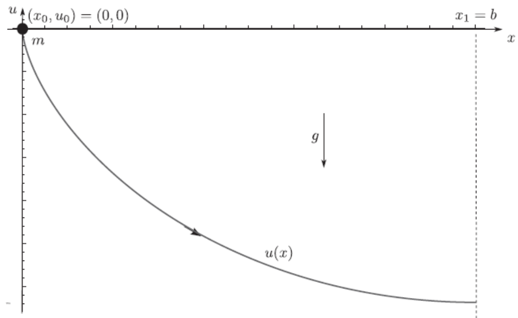
$$\delta I = \Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\Big)\Big|_{x_0}^{x_1},$$

a da bi $\delta I = 0$, uslovi koji se prirodno nameću su

$$\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_{x=x_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_{x=x_0} = 0.$$

PRIMER 2. ***Problem brahistohrone***[1]
Materijalna tačka se kreće pod dejstvom sile teže po glatkoj krivoj liniji bez otpora u vertikalnoj ravni. Po kojoj krivoj će tačka koja je krenula bez početne brzine iz tačke $(x_0, u_o) = (0,0)$ do prave $x_1 = b$ stići za najkraće vreme? Na slici je prikazana materijalna taka mase m koja klizi niz glatku vertikalnu krivu pod dejstvom sile Zemljine teže, g. Zadatak je pronaći krivu oblika $u = u(x)$, takvu da vreme bude minimalno.

[1]Na grčkom jeziku brahistos znači najkraći, a hronos znači vreme



Slika 2.3.

Neka je dt vreme potrebno da tačka pređe element luka krive ds , a v brzina kojom se tačka kreće. Očigledno, $dt = ds/v$. Ukupno vreme potrebno da tačka pređe iz tačke $(x_0, u_o) = (0,0)$ u tačku $x_1 = b$ je dato integralom

$$T[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v}.$$

Pošto nema trenja, brzina može da se nađe iz ravnoteži kinetičke energije, E_k, i potencijalne energije, E_p, kao što sledi

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgu,$$

gde je E totalna energija, koja je konstantna. Čestica je u stanju mirovanja, $v = 0$, na početku, $u = 0$, pa je totalna energija

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgu = 0,$$

rešavanjem po v,

$$v = \sqrt{-2gu},$$

gde je $u < 0$. Dužina luka data je sa $ds = \sqrt{1 + (u')^2}dx$. Kada sve uvrstimo u $T[u(x)]$, dobijemo

$$T[u(x)] = \int_0^b \left[\frac{1 + (u')^2}{-2gu}\right]^{1/2} dx.$$

Podintegralnu funkciju možemo zapisati kao

$$F(u, u') = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left[1 + (u')^2\right]^{1/2}(-u)^{-1/2},$$

koja ne zavisi od promenljive x, pa možemo da primenimo specijalni slučaj 2.
Granični uslovi su $(x_0, u_0) = (0, 0)$, a prirodni granični uslov u u $x = b$ je $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$. Zamenjujući F u prirodni granični uslov sledi

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2g}}\Big[1 + (u')^2\Big]^{-1/2}(2u')(-u)^{-1/2} = 0,$$

što sređivanjem postaje

$$\frac{u'}{\sqrt{-u}\sqrt{1 + (u')^2}} = 0 \qquad u \quad x = b.$$

pa je $u' = 0$ u $x = b$, što bi značilo da kriva mora biti normalna na $x = b$.
Vraćajući se na primenu specijalnog slučaja 2 sledi

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u, x') &= x'F\big[u, (x')^{-1}\big] \\ &= \frac{x'}{\sqrt{2g}}\big[1 + (x')^{-2}\big]^{1/2}(-u)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}}\big[(x')^2 + 1\big]^{1/2}(-u)^{-1/2},\end{aligned}$$

gde je sada u nezavisna, a x zavisna promenljiva, pa je

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x'} &= \frac{1}{2\sqrt{2g}}\Big[(x')^2 + 1\Big]^{-1/2}[2x'](-u)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{x'}{\sqrt{-u[(x')^2 + 1]}}.\end{aligned}$$

Ojlerova jednačina za ovaj specijalni slučaj je

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x'} = c,$$

pa sledi

$$\frac{x'}{\sqrt{-u[(x')^2 + 1]}} = c_1.$$

Rešavajući prethodnu jednačinu po x' dobijemo

$$x' = \frac{dx}{du} = -\sqrt{\frac{-c_1^2 u}{1 + c_1^2 u}},$$

to jest

$$x(u) = -\int \sqrt{\frac{-c_1^2 u}{1 + c_1^2 u}} du.$$

Ovu jednačinu možemo napisati u parametarskom obliku ako u izrazimo na sledeći način

$$u = -\frac{1}{c_1^2} \sin^2 \theta,$$

pa je

$$du = -\frac{2}{c_1^2} \sin\theta \cos\theta d\theta,$$

čijom zamenom je

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{c_1^2} \int \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta}} \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= \frac{2}{c_1^2} \int \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= \frac{2}{c_1^2} \int \sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{c_1^2} \int [1 - \cos(2\theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{c_1^2} \Big[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big] + c_2. \end{aligned}$$

Sada u možemo da zapišemo u obliku

$$u = -\frac{1}{2c_1^2} \Big[1 - \cos(2\theta)\Big].$$

Nakon zamene $\phi = 2\theta$

$$x = \frac{1}{2c_1^2}(\phi - \sin\phi) + c_2, \tag{2.18}$$

$$u = -\frac{1}{2c_1^2}(1 - \cos\phi). \tag{2.19}$$

Konstante c_1 i c_2 nalazimo iz graničnog uslova $(x_0, u_0) = (0, 0)$ i pripodnog graničnog uslova $u' = 0$ u $x = b$. Jednačina (2.19) sa $(x_0, u_0) = (0, 0)$ daje

$$0 = -\frac{1}{2c_1^2}(1 - \cos\phi_0),$$

koja je zadovoljena za $\phi_0 = 0$. Iz jednačine (2.18) dobijemo da je $c_2 = 0$. Diferenciramo (2.19), pa je

$$u' = -\frac{1}{2c_1^2} \sin \phi \frac{d\phi}{dx}.$$

Primenom ovog rezultata u $x_1 = b$, imamo $\sin \phi_1 = 0$, što je tačno za $\phi_1 = \pi$, pa (2.18) postaje

$$b = \frac{1}{2c_1^2} [\pi - \sin \pi],$$

ili

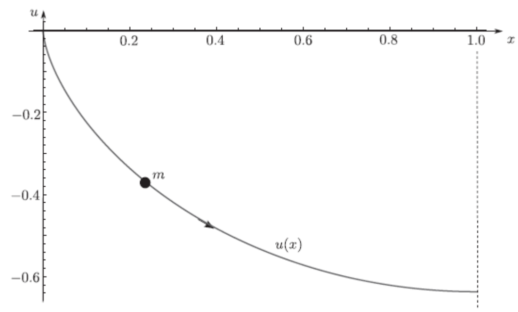
$$2c_1^2 = \frac{\pi}{b}.$$

Konačno rešenja (2.18) i (2.19) postaju

$$x = \frac{b}{\pi}(\phi - \sin \phi) \tag{2.20}$$

$$u = -\frac{b}{\pi}(1 - \cos \phi), \tag{2.21}$$

gde je $\phi_0 \leq \phi \leq \phi_1$ ili $0 \leq \phi \leq \pi$. Navedene parametarske jednačine (2.20) i (2.21) opisuju krivu koja se zove cikloida. Cikloida je kriva koja se može opisati proizvoljnom tačkom periferije kruga koji se kotrlja po pravoj bez klizanja.



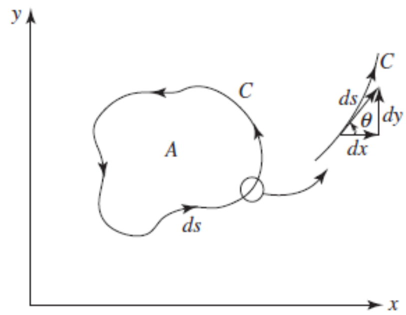
Slika 2.3. Rešenje problema brahistohrone za $b = 1$.

2.6 Funkcionela sa dve nezavise promenljive

Posmatramo funkciju $u(x, y)$ sa dve nezavisne promenljive, x i y, tada je funcionela sa dve nezavisne promenljive

$$I[u(x,y)] = \iint_A F[x, y, u, u_x, u_y] dxdy,$$

gde je A oblast u (x, y) ravni, ds diferencijalni element po krivoj C koja okružuje oblast A u suprotnom smeru od smera kazaljke na satu, slika 2.4.



Slika 2.4.

Naš cilj je da nađemo stacionarnu funkciju $u(x, y)$ funkcionele $I[u]$ u oblasti A. Varijaciju funkcionele ćemo izjednačiti sa nulom

$$\delta I[u] = \iint_A \delta F[x, y, u, u_x, u_y] dxdy = 0.$$

Primenom varijacije dobija se

$$\iint_A \Big[\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\Big] dxdy = 0.$$

Pošto su varijacije nezavisnih promenljivih jednake nuli, prva dva sabirka nestanu pa važi

$$\iint_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big] dxdy = 0.$$

Primenom komutativnosti varijacije i izvoda sledi

$$\iint_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)\Big] dxdy = 0.$$

Kada u podintegralnu funkciju dodamo i oduzmemo $\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big)\delta u$ i $\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big)\delta u$ dobijamo

$$\iint_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big)\delta u - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big)\delta u + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big)\delta u - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big)\delta u\Big] dxdy = 0. \tag{2.22}$$

Teorema 2.6.1. ***Grinova teorema*** *Neka je C pozitivno orijentisana po delovima glatka kontura u ravni, A oblast u ravni ograničena konturom C, $\partial A = C$, i $\vec{F} = (P, Q) \in C^1$. Tada važi*

$$\iint_A \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \oint_C (Pdx + Qdy)$$

Na osnovu Grinove teoreme, (2.22) postaje

$$\iint_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big)\Big]\delta u dxdy + \oint_C \Big[\frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{dx}{ds}\Big]\delta u ds = 0.$$

Dakle, za $F = F[x, y, u, u_x, u_y]$ Ojlerova jednačina je

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big) = 0,$$

što je parcijalna diferencijalna jednačina.
Zaključak: Funkcionela sa jednom nezavisnom promenljivom dovodi do diferencijalne jednačine prvog reda, a za funkcionelu sa dve nezavisne promenljive, dobijemo Ojler-Lagranžovu jednačinu sa parcijalnim izvodima.

2.7 Izoperimetrijski problem

Prema legendi ovaj problem je nastao za vreme osnivanja drevnog grada Kartagine na obali Severne Afrike. Feničanka Didona, koja posle smrti roditelja nije mogla podnositi samovolju brata Pigmaliona, je pobegla na obalu Severne Afrike. Tamo se dogovorila sa kraljem Jarbasom da od njega kupi onoliko zemljišta koliko se može obuhvatiti kožom jednog bika. Ona je izrezala kožu na tanke kaiševe, povezala im krajeve i uspela obuhvatiti zemljište na kojem je kasnije izgrađena Kartagina. U matematičkoj formulaciji Didonin problem glasi: Između svih zatvorenih krivih linija u ravni bez samopresecnih tačaka, koje imaju jednak zadat obim, naći onu koja ograničava najveću površinu.
Posmatraćemo problem određivanja ekstremnih vrednosti funkcionele

$$I[u] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')dx \tag{2.23}$$

sa oganičenjem datim u obliku određenog integrala

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, u, u')dx = K = const. \tag{2.24}$$

Ograničenje (2.24) možemo zapisati u obliku

$$\lambda\Big[\int_{x_0}^{x_1} G(x,u,u')dx - K\Big] = 0,$$

gde je λ Lagranžov množitelj. Primenom varijacije

$$\delta\Big\{\lambda\Big[\int_{x_0}^{x_1} G(x,u,u')dx - K\Big]\Big\} = 0,$$

to jest

$$\lambda\delta\int_{x_0}^{x_1} G(x,u,u')dx = 0,$$

kombinujući poslednju jednačinu sa varijacijom jednačine (2.23) , dobija se

$$\delta\Big[\int_{x_0}^{x_1} F(x,u,u')dx + \lambda\int_{x_0}^{x_1} G(x,u,u')dx\Big] = 0,$$

odnosno

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} \tilde{F}(\lambda,x,u,u')dx = 0,$$

gde je $\tilde{F} = F + \lambda G$.
Zaključak: Nalaženje stacionarne funkcije funkcionele (2.23) sa ograničenjem (2.24) je ekvivalentno nalaženju stacionarne funkcije funkcionele sa podintegralnom funkcijom $\tilde{F} = F + \lambda G$, bez ograničenja.
Napomena: Nalaženje stacionarne funkcije funkcionele (2.23) sa n ograničenja $\int_{x_0}^{x_1} G_k(x,u,u')dx = K_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, je ekvivalentno nalaženju stacionarne funkcije funkcionele sa podintegralnom funkcijom $\tilde{F} = F + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k G_k$, bez ograničenja.

Primer 3. *Didonin problem*
Rešavanje problema se svodi na određivanje zatvorene krive koja obuhvata maksimalnu površinu. Ako tu krivu obeležimo sa I sledi

$$I = \int_{x_0}^{x_1} u(x)dx,$$

pri čemu je $u(x) \geq 0$ za svako $x \in [x_0, x_1]$. Dalje, pretpostavimo da je dužina krive K data sa

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+u'^2}dx$$

i pri tome je zadovoljeno $u(x_0) = u(x_1) = 0$. Bez gubitka opštosti, ako pretpostavimo da je $x_0 = 0$, treba da odredimo x_1.

Upotrebom Lagranžovog množitelja λ formiramo funkciju

$$I + \lambda K = \int_{x_0}^{x_1} (u + \lambda\sqrt{1 + u'^2})dx.$$

Iz Ojlerove jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) = 0,$$

gde je podintegralna funkcija $F = u + \lambda\sqrt{1 + u'^2}$, dobije se

$$1 - \lambda\frac{d}{dx}\Big(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\Big) = 0,$$

što integracijom postaje

$$\lambda\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} = x + c_1,$$

gde je c_1 konstanta. Rešavanjem prethodne jednačine po u' i korišćenjem $u' = du/dx$ dobijemo

$$du = \pm\frac{(x - c_1)dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}},$$

a integracijom se dobije

$$u = \mp\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2,$$

gde je i c_2 konstanta. Kao rezultat dobijemo jednačinu

$$(x - c_1)^2 + (u - c_2)^2 = \lambda^2,$$

što je jednačina kruga sa centrom u (c_1, c_2) poluprečnika λ.

2.8 Sturm-Liouvillov problem

Tražimo stacionarnu funkciju $u(x)$ funkcionele

$$I[u] = \int_{x_0}^{x_1} [q(x)u^2 - p(x)(u')^2]dx \tag{2.25}$$

sa ograničenjem

$$\int_{x_0}^{x_1} r(x)u^2 dx = 1, \tag{2.26}$$

gde su $p(x), q(x), r(x)$ poznate funkcije. Upotrebom Lagranžovog množitelja kao u izoperimetrijskom problemu imamo

$$\tilde{F}(\lambda, x, u, u') = q(x)u^2 - p(x)(u')^2 + \lambda[r(x)u^2].$$

Parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} = 2q(x)u + 2\lambda r(x)u, \qquad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'} = -2p(x)u'.$$

Ojlerova jednačina je

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'}\right) = 0,$$

zamenom parcijalnih izvoda dobijemo

$$q(x)u + \lambda r(x)u - \frac{d}{dx}[-p(x)u'] = 0,$$

ili

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + [q(x)u + \lambda r(x)]u(x) = 0. \tag{2.27}$$

Zaključak: Stacionarna funkcija $u(x)$ funkcionele (2.25) sa ograničenjem (2.26) zadovoljava Sturm-Liouvillovu jednačinu (2.27). Ojlerova jednačina je Sturm-Liouvillova jednačina.

2.9 Algebarska i diferencijalna ograničenja

Do sada smo posmatrali sta se dešava kada imamo funkcionelu sa ograničenjem u obliku određenog integrala, međutim može se desiti i da je ograničenje algebarsko ili diferencijalno.
Tražimo stacionarnu funkciju funkcionele

$$I[u, v] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, v, u', v')dx, \tag{2.28}$$

gde su $u(x)$ i $v(x)$ dve funkcije sa algebarskim ograničenjima, a njihov odnos možemo da zapišemo

$$\phi(u, v) = 0,$$

ili kao ograničenje u formi diferencijalne jednačine

$$\phi(u, v, u', v') = 0. \tag{2.29}$$

Primetimo da su algebarska ograničenja specijalni slučaj diferencijalnih ograničenja. Varijaciju funkcionele (2.28) izjednačimo sa nulom

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, v, u', v') dx = 0,$$

što možemo da zapišemo kao

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big\{ \Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\Big] \delta u + \Big[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial v'}\Big)\Big] \delta v \Big\} dx = 0. \tag{2.30}$$

Primenimo varijaciju na ograničenja (2.29)

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \phi}{\partial v}\delta v + \frac{\partial \phi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial \phi}{\partial v'}\delta v' = 0.$$

Množimo Lagranžov množitel $\lambda(x)$ sa $\delta\phi$ i integralimo po domenu

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda(x)\Big(\frac{\partial \phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \phi}{\partial v}\delta v + \frac{\partial \phi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial \phi}{\partial v'}\delta v'\Big) dx = 0. \tag{2.31}$$

Primenimo parcijalnu integraciju na poslednja dva sabirka

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x)\frac{\partial \phi}{\partial u'}\delta u' dx &= \Big[\lambda(x)\frac{\partial \phi}{\partial u'}\delta u\Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial u'}\Big)\delta u dx \\ &= -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial u'}\Big)\delta u dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x)\frac{\partial \phi}{\partial v'}\delta v' dx &= \Big[\lambda(x)\frac{\partial \phi}{\partial v'}\delta v\Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial v'}\Big)\delta v dx \\ &= -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial v'}\Big)\delta v dx, \end{aligned}$$

jer je $\delta u(x_0) = \delta u(x_1) = 0$ i $\delta v(x_0) = \delta v(x_1) = 0$. Zamenom u prethodne dve jednačine u (2.31) i dodavanjem jednačine (2.30) dobije se

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \Big\{ \Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial u'}\Big)\Big]\delta u \\ + \Big[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial v'}\Big) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial v'}\Big)\Big]\delta v \Big\} dx = 0 \end{aligned}$$

Kako su $u(x)$ i $v(x)$ vezani kroz ograničenje (2.29), oni ne variraju nezavisno. Biramo $\lambda(x)$ tako da koeficijent uz δu nestane, ostavljajući $v(x)$ da varira i zahtevajući da koeficijent uz δv takođe nestane, pa su Ojlerove jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial u'}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial v'}\Big) + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial \phi}{\partial v'}\Big) = 0.$$

Prvu jednačinu možemo zapisati kao

$$\frac{\partial}{\partial u}[F + \lambda\phi] - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial}{\partial u'}[F + \lambda\phi]\Big) = 0,$$

ili

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'}\Big) = 0,$$

gde je $\tilde{F} = F + \lambda(x)\phi$. Isto tako i drrugu jednačinu možemo zapisati kao

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial v} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial v'}\Big) = 0.$$

Zaključak: Nalaženje stacionarne funkcije funkcionele (2.28) sa ograničenjem (2.29) ekvivalentno je nalaženju stacionarne funkcije funkcionele sa podintegralnom funkcijom $\tilde{F} = F + \lambda(x)\phi$. Dakle, u ovom slučaju Lagranžov mnozitelj nije broj nego funkcija.

Napomena: Nalaženje stacionarne funkcije funkcionele (2.28) sa n ograničenja $\phi_k(u, v, u', v') = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ekvivalentno je nalaženju stacionarne funkcije funkcionele sa podintegralnom funkcijom $\tilde{F} = F + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x)\phi_k$.

3

Optimizacija i upravljanje

Optimizacija je matematički postupak koji se primenjuje da bi se dostiglo najbolje(optimalno) stanje ili rešenje. Da bi se zadatak optimizacije pravilno postavio, neophodno je uočiti objekt optimizacije kao i cilj ili kriterijum optimizacije. U nastavku smo koristili literaturu [1], [3], [4], [6], a primeri su preuzeti iz [1], [4].
Dinamička optimizacija odnosi se na probleme definisane u nekom vremenskom intervalu. U njene tehnike spadaju varijacioni račun, koji smo prikazali u prethodnom poglavlju, dinamičko programiranje i princip maksimuma. Dinamički proces se odvija u nekom sistemu čije stanje se u svakom vremenskom trenutku opisuje nekom funkcijom stanja. Osnovni zadatak optimalnog upravljanja je ispunjavanje određenog kriterijuma optimalnosti za dati sistem.
Osnovni parametri dinamičkog sistema su: vreme, promenljive stanja, promenljive upravljanja i slučajni parametri.
Vreme t je nezavisno promenljiva veličina koja pripada određenom vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$. Početni trenutak t_0 je uvek zadat i uglavnom ćemo koristiti da je $t_0 = 0$, a terminalni (krajnji) trenutak $t_1 = t_f$ je često nepoznat.
Stanje sistema u zadatom vremenskom intervalu karakteriše n funkcija stanja

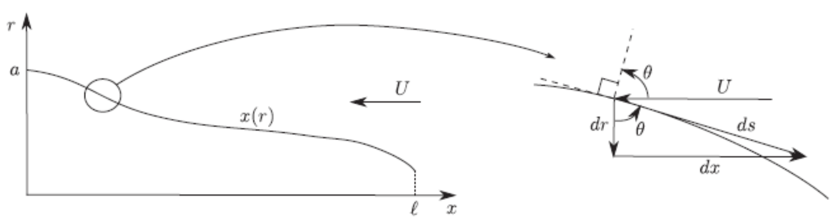
$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t),$$

$t \in [t_0, t_1]$, koje se nazivaju promenljive stanja i koje su neprekidne funkcije vremena. Vektor $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, naziva se vektor stanja.
Parametri upravljanja $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_m(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, za neko $m \in N$, su takođe funkcije vremena, kojima je moguće uticati na sistem u skladu sa određenim zahtevima. Ove funkcije mogu biti neprekidne, ali i po delovima neprekidne. Vektor upravljanja dat je sa $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$, $t \in [t_0, t_1]$.

3.1 Optimizacija oblika

Optimizacija oblika je deo oblasti teorije optimalnog upravljanja. Tipičan problem je da se pronađe oblik koji je optimalan tako da minimizira funkcionelu, dok zadovoljava data ograničenja. U nastavku će biti prikazan primer aerodinamičke optimizacije. Aerodinamika je nauka koja se bavi kretanjem vazduha u odnosu na čvrsta tela, a aerodinamički otpor je sila, sa kojom se fluid(vazduh) suprotstavlja relativnom kretanju tela kroz svoju sredinu.
Jedan od najvećih troškova poslovanja u industriji komercijalnih aviona je trošak goriva. Čak i malo smanjenje ukupnog otpora aviona, može imati značajan uticaj na ukupnu potrošnju goriva. Nas zadatak će biti da odredimo optimalni oblik nosa novog aviona kako bi se smanjio otpor, a samim tim i potrošnja goriva.

Primer 4. *Odrediti telo nastalo obrtanjem krive $x = x(r)$ oko x-ose koje proizvodi najmanju silu otpora prilikom kretanja kroz vazduh sa brzinom U kao što je prikazano na slici. Pretpostavimo da je funkcija $x(r)$ monotona, tako da ni jedan deo površine ne štiti drugi.*



Slika 3.1

Kako je $dr = \cos\theta ds$, sledi da je $\cos\theta = dr/ds$. Dužina luka je

$$ds = \sqrt{(1 + [x'(r)]^2)}dr.$$

Njutnova aproksimacija za komponentu pritiska u x-smeru je

$$p_x = -\frac{1}{2}\rho U^2 \cos^2\theta,$$

gde je ρ gustina fluida.
Da bismo dobili silu otpora, integralićemo pritisak po celoj površini rota-

cionog tela sa projektovanom oblašću koju označavamo sa dA_x.

$$\begin{aligned} F_D &= -\int_A p_x dA_x \\ &= \int \Big(\frac{1}{2}\rho U^2 cos^2\theta\Big)\big(2\pi r dr\big) \\ &= \pi\rho U^2 \int cos^2\theta(rcos\theta ds) \\ &= \pi\rho U^2 \int r\Big(\frac{dr}{ds}\Big)^3 ds \\ &= \pi\rho U^2 \int_0^a \frac{rdr}{1+x'^2}. \end{aligned}$$

Koristićemo bezdimenzionalni oblik[1] sile otpora da dobijemo koeficijent trenja C_D, gde je $\bar{r} = \frac{r}{a}$ i $\bar{x} = \frac{x}{a}$, $0 \le \bar{r} \le 1$, $0 \le \bar{x} \le \frac{l}{a}$.

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{F_D}{\rho U^2 A_x} \\ &= \Big(\frac{1}{\rho U^2 \pi a^2}\Big)\pi\rho U^2 a^2 \int_0^1 \frac{\bar{r}d\bar{r}}{1+\bar{x}'^2} \\ &= \int_0^1 \frac{\bar{r}d\bar{r}}{1+\bar{x}'^2} \end{aligned}$$

Tražimo oblik $\bar{x}(\bar{r})$ koji minimizira funkcionelu za koeficijent otpora $C_D[\bar{x}(\bar{r})]$. Kako podintegralna funkcija $F = F(\bar{r}, \bar{x}')$ ne zavisi od $\bar{x}$, problem se svodi na prvi specijalni slučaj Ojlerove jednačine koja glasi

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dr}\Big(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}'}\Big) = 0.$$

Integracijom se dobije

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}'} &= c \\ -\frac{2\bar{r}\bar{x}'}{(1+\bar{x}'^2)^2} &= c \\ \bar{r}\bar{x}' &= -c_1(1+\bar{x}'^2)^2. \end{aligned}$$

[1]Fizička veličina je bezdimenzionalna ako joj vrednost ne zavisi od izbora sistema jedinica.

Pošto se $\bar{x}$ ne pojavljuje eksplicitno, parametrizujemo rešenje sa $u = -\bar{x}' > 0$ i dobijemo

$$\bar{r}u = c_1(1+u^2)^2$$

ili

$$\frac{\bar{r}}{c_1} = \frac{(1+u^2)^2}{u}, \tag{3.1}$$

što je parametarska jednačina za $\bar{r}$ u zavisnosti od u. U cilju dobijanja parametarske jednačine za $\bar{x}$, jednačinu (3.1) zapisaćemo u obliku

$$\bar{r} = c_1\frac{1}{u}(1+2u^2+u^4) = c_1\Big(\frac{1}{u} + 2u + u^3\Big),$$

što diferenciranjem postaje

$$d\bar{r} = c_1\Big(-\frac{1}{u^2} + 2 + 3u^2\Big)du.$$

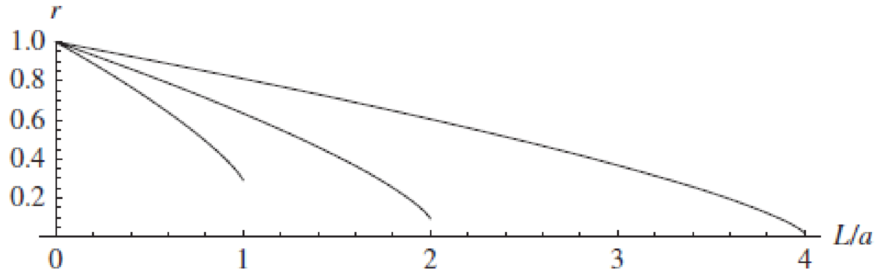
Kako je $u = -d\bar{x}/d\bar{r}$, sređivanjem ove jednačine, deljenjem sa c_1 i integracijom dobije se

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{x}}{c_1} &= -\frac{1}{c_1}\int u d\bar{r} \\
&= -\int u\Big(-\frac{1}{u^2} + 2 + 3u^2\Big)du \\
&= \int\Big(\frac{1}{u} - 2u - 3u^3\Big)du \\
&= \ln u - u^2 - \frac{3}{4}u^4 + c_2,
\end{aligned}$$

što je parametarska jednačina za $\bar{x}$ u zavisnosti od $u = -\bar{x}'$.
Sada nas zanima šta je u_{min}. Diferenciranjem jednačine (3.1) i izjednačavanjem sa nulom sledi

$$\frac{4u^2(1+u^2) - (1+u^2)^2}{u^2} = 0,$$

a rešavanjem ove jednačine dobija se da je $u_{min} = 1/\sqrt{3}$. Ovo daje granicu tela na vrhu $\bar{x} = l/a$. Konstante c_1, c_2 i u_{max} se mogu naći iz graničnih uslova i ograničenja oblika površine rotacionog tela.
Parametarske jednačine za $\bar{r}(u)$ i $\bar{x}(u)$ grafički su prikazane na slici 3.2 za $l/a = 1, 2, 4$.



Slika 3.2

Sada je koeficijent otpora

$$\begin{aligned} C_D &= \int_0^1 \frac{\bar{r}d\bar{r}}{1+\bar{x}'^2} \\ &= \int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{c_1^2(1+u^2)^2}{u(1+u^2)}\Big(-\frac{1}{u^2}+2+3u^2\Big)du \\ &= c_1^2\int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{1+u^2}{u}\Big(3u^2-\frac{1}{u^2}+2\Big)du. \end{aligned}$$

Koeficijenti otpora za slučaj prikazan na slici 3.2 su:
$C_D = 0.146$ za $l/a = 1$, $C_D = 0.076$ za $l/a = 2$ i $C_D = 0.014$ za $l/a = 4$.
Zaključak: Kako se l/a povećava, to jest kako se menja oblik nosa aviona, koeficijent otpora C_D se smanjuje, a samim tim i potrošnja goriva.

3.2 Finansijska optimizacija

Profit neke kompanije definiše kao razlika između njenog prihoda i rashoda, a cilj svake kompanije je da maksimizira svoj profit, što ćemo prikazati u ovom poglavlju.
Kompanija želi da zna koja stopa $\phi(t)$, izražena u procentima, $0 \leq \phi \leq 1$, čija je profitna stopa $u(t)$, treba da se reinvestira kako bi se maksimizirao ukupan zadržani profit J tokom određenog intervala $0 \leq t \leq t_f$. Pretpostavimo da postoji linearna zavisnost između reinvestiranog profita, $\phi(t)u(t)$, i stope promene profita

$$\dot{u} = \alpha\phi u, \tag{3.2}$$

gde je $\alpha > 0$ konstanta.
Za kratak vremenski period dt, zadržani profit je $(1-\phi)udt$. Znači da je tokom vremenskog intervala $0 \leq t \leq t_f$ ukupan zadržani profit

$$J[u(t),\phi(t)] = \int_0^{t_f} (1-\phi)udt. \tag{3.3}$$

Želimo da maksimiziramo funkcionelu (3.1) u skladu sa ograničenjima tako da diferencijalno ograničenje (3.2) i ograničenje $0 \leq \phi \leq 1$ budu zadovoljeni. Jednačinu (3.3) nazivamo cenom, ciljem, to je funkcionela koja definiše cilj problema optimizacije (maksimizira akumulirani profit), a diferencijalna jednačina (3.2) se naziva jednačinom stanja jer određuje stanje sistema, koje je u ovom slučaju saopštavanje o profitu ili gubitku kompanije. Shodno tome, $u(t)$ nazivamo promenljivom stanja, a $\phi(t)$ promenljivom upravljanja. Na osnovu poglavlja 2.9, znamo da je

$$\tilde{F}(u, \dot{u}, \phi\lambda) = [1 - \phi(t)]u(t) + \lambda(t)[\dot{u}(t) - \alpha\phi(t)u(t)],$$

gde je $\lambda(t)$ Lagranžov množitelj. Kako imamo dve zavisne promenljive, $u(t)$ i $\phi(t)$, imamo i dve Ojlerove jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{u}}\Big) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \phi} + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{\phi}}\Big) &= 0, \end{aligned}$$

što dovodi do

$$\begin{aligned} 1 - \phi(1 + \alpha\lambda) - \dot{\lambda} &= 0, \\ -u(1 + \alpha\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

U postavkama optimizacije i upravljanja, prvu jednačinu nazivamo adjungovanom diferencijalnom jednačinom, a druga je uslov optimalnosti, odnos između stanja $u(t)$ i Lagranžovog množitelja $\lambda(t)$, koji se naziva adjungovanom promenljivom.
Ako je $u(t) \neq 0$, postoji profit, onda optimalni uslov zahteva da adjungovana promenljiva bude $\lambda = -1/\alpha$. Pošto je α konstanta, onda je $\dot{\alpha} = 0$, i adjungovana jednačina dovodi do kontradikcije $1 = 0$. Ova kontradikcija sugeriše da je jedina mogućnost da profit bude nula, što nije odgovor koji kompanija želi. Kao što smo videli, klasične variacione metode koje su do sada imale veliki značaj, ne daju nam optimalno rešenje za ovaj problem. Problem u našem primeru je da ne postoji optimalno rešenje među prihvatljivim rešenjima neprekidno diferencijabilnih funkcija. U nastavku rada, koristeći Pontrjaginov princip, pokazaćemo kako ovaj problem može da se reši.

3.3 Prigušen harmonijski oscilator

Svako kretanje koje se ponavlja u jednakim vremenskim intervalima naziva se periodičnim, a ako se kretanje odvija stalno po istoj putanji, onda se naziva oscilatorno. Promene oscilatornih veličina sa vremenom opisuju se sinusnim ili kosinusnim zakonom, a takvo oscilatorno kretanje se naziva harmonijsko. Amplituda je maksimalno udaljenje od ravnotenog položaja. Prigušeno oscilovanje tela je ono kod koga se amplituda smanjuje u toku vremena. U nastavku ćemo posmatrati merenje učinka terminalnog vremena i merenje učinka prigušenog harmonijskog oscilatora.

Merenje učinka terminalnog vremena

Posmatramo kretanje prigušenog harmonijskog oscilatora koje je dato sa

$$\ddot{u} + u = 0,$$

gde je $u(t)$ promenljiva stanja i predstavlja amplitudu oscilacije. Neka su početni uslovi

$$u(0) = 1, \qquad \dot{u}(0) = 0. \tag{3.5}$$

Rešenje za slučaj u kom nema upravljanja sa ovim početnim uslovima je $u(t) = \cos(t)$. Pokušaćemo da upravljamo amplitudom oscilacije kroz neke prinudne funkcije $\phi(t)$, koje nam omogućavaju da se amplituda oscilacije vremenom smanjuje

$$\ddot{u} + u = \phi, \qquad 0 \leq t \leq t_f. \tag{3.6}$$

Promenljiva stanja $u(t)$ i promenljiva upravljanja $\phi(t)$ (prinudna funkcija) se traže tako što se funkcionela troška

$$J[u, \phi] = \frac{1}{2}\gamma^2 u(t_f)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \phi^2 dt \tag{3.7}$$

minimizira tokom vremenskog intervala $0 \leq t \leq t_f$. Cilj funkcionele troška je da minimizira veličinu amplitude u terminalnom trenutku $t = t_f$, što predstavlja prvi izraz, i da minimizira ulaz energije potrebne za upravljanje, što je drugi izraz u prethodnoj jednačini i zovemo ga kaznena funkcija. U suštini, funkcija troška treba da odredi cenu nekog proizvoda u odnosu na troškove, a naši troškovi su, u stvari, energija koja treba da se utroši na upravljanje prigušenim harmonijskim oscilatorom kako bi se kontrolisala veličina amplitude. Kada za težinski koeficijent γ^2, odaberemo $\gamma^2 = 0$, to odgovara slučaju u kom nema upravljanja. Pošto imamo ograničenje u obliku diferencijalne jednačine, u cilju da minimiziramo funkcionelu (3.7), tako da jednačina stanja (3.6) bude zadovoljena, uvodimo Lagranžov množitelj $\lambda(t)$, integralimo, uzmemo varijaciju i izjednačimo je sa nulom na sledeći način

$$\delta\tilde{J} = \delta\left\{\frac{1}{2}\gamma^2 u(t_f)^2 + \int_0^{t_f}\Big[\frac{1}{2}\phi^2 + \lambda(t)(\ddot{u} + u - \phi)\Big]dt\right\} = 0.$$

Na ovaj način tražimo promenljive stanja i upravljanja koje najbolje zadovoljavaju cilj upravljanja dok su zadovoljena ograničenja. Primenom varijacije dobije se

$$\gamma^2 u(t_f)\delta u(t_f) + \int_0^{t_f}[\phi\delta\phi + \lambda(\delta\ddot{u} + \delta u - \delta\phi)]dt = 0, \tag{3.8}$$

gde amplituda u terminalnom trenutku $u(t_f)$ varira. Na sabirak iz prethodne jednačine primenimo parcijalnu integraciju dva puta

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}\lambda\delta\ddot{u}dt &= \lambda(t_f)\delta\dot{u}(t_f) - \lambda(0)\delta\dot{u}(0) - \int_0^{t_f}\dot{\lambda}\delta\dot{u}dt \\ &= \lambda(t_f)\delta\dot{u}(t_f) - \lambda(0)\delta\dot{u}(0) - \dot{\lambda}(t_f)\delta u(t_f) + \dot{\lambda}(0)\delta u(0) + \int_0^{t_f}\ddot{\lambda}\delta u dt\end{aligned}$$

Na osnovu početnih uslova, znamo da je $\delta u(0) = \delta(\dot{u}) = 0$, pa navedeni sabirci nestaju, a jednačina (3.8) postaje

$$[\gamma^2 u(t_f) - \dot{\lambda}(t_f)]\delta u(t_f) + \lambda(t_f)\delta\dot{u}(t_f) + \int_0^{t_f}\big\{[\ddot{\lambda} + \lambda]\delta u + [\phi - \lambda]\delta\phi\big\}dt = 0.$$

Pošto $u(t)$, $\phi(t)$, $u(t_f)$ i $\dot{u}(t_f)$ variraju, dolazimo do Ojlerove jednačine i prirodnih graničnih uslova

$$\ddot{\lambda} + \lambda = 0, \tag{3.9}$$

$$\lambda = \phi, \tag{3.10}$$

$$\dot{\lambda}(t_f) = \gamma^2 u(t_f), \tag{3.11}$$

$$\lambda(t_f) = 0. \tag{3.12}$$

Jednačina (3.9) određuje Lagranžov multiplikator, koji se takođe naziva i adjungovana promenljiva. Jednačina (3.10) naziva se uslov optimalnosti. Zamenom uslova optimalnosti u jednačinu (3.9) dobija se jednačina upravljanja

$$\ddot{\phi} + \phi = 0. \tag{3.13}$$

Početni uslovi promenljive upravljanja su

$$\phi(t_f) = 0, \qquad \dot{\phi}(t_f) = \gamma^2 u(t_f). \tag{3.14}$$

Kako jednačina upravljanja ne uključuje promenljivu stanja kroz vremenski interval $0 \leq t \leq t_f$, već samo kroz terminalno vreme, možemo dobiti tačno rešenje, pa je

$$\phi(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \tag{3.15}$$

a primenom početnih uslova (3.14) dolazimo do

$$\begin{bmatrix} \cos t_f & \sin t_f \\ -\sin t_f & \cos t_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma^2 u(t_f) \end{bmatrix}.$$

Iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} c_1 \cos t_f + c_2 \sin t_f &= 0 \\ -c_1 \sin t_f + c_2 \cos t_f &= \gamma^2 u(t_f) \end{aligned}$$

dobijemo konstante c_1 i c_2

$$c_1 = -\gamma^2 u(t_f) \sin t_f, \qquad c_2 = \gamma^2 u(t_f) \cos t_f.$$

Zamenom c_1 i c_2 u (3.15) dolazimo do sledećeg rešenja za jednačinu upravljanja

$$\phi(t) = \gamma^2 u(t_f)[\cos t_f \sin t - \sin t_f \cos t],$$

ili

$$\phi(t) = \gamma^2 u(t_f) \sin(t - t_f). \tag{3.16}$$

Kao što vidimo rešenje zavisi od amplitude $u(t_f)$, koja je za sada nepoznata. Postavljanjem $\phi(t)$ na desnu stranu jednačine (3.6), homogeno rešenje jednačine je

$$u_H(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t. \tag{3.17}$$

Korišćenjem metode neodređenih koeficijenata i partikularnog rešenja

$$u_P(t) = c_5 t \cos t + c_6 t \sin t, \tag{3.18}$$

dobiju se konstante

$$c_5 = -\frac{1}{2}\gamma^2 u(t_f) \cos t_f, \qquad c_6 = -\frac{1}{2}\gamma^2 u(t_f) \sin t_f.$$

Konačno rešenje je

$$\begin{aligned} u(t) &= u_H(t) + u_P(t) \\ &= c_3 \cos t + c_4 \sin t - \frac{1}{2}\gamma^2 u(t_f) t[\cos t_f \cos t + \sin t_f \sin t]. \end{aligned}$$

Primenom početnih uslova (3.5), dobijemo konstante c_3 i c_4

$$c_3 = 1, \qquad c_4 = \frac{1}{2}\gamma^2 u(t_f)\cos t_f.$$

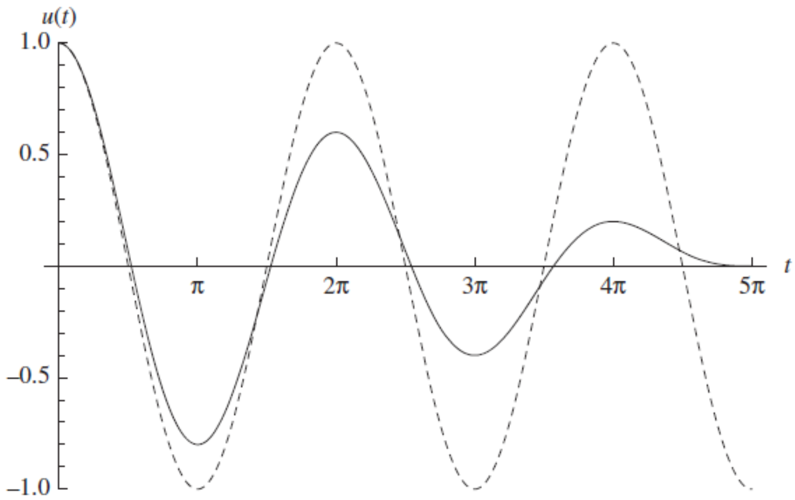
Rešenje jednačine stanja je

$$u(t) = \cos t + \frac{1}{2}\gamma^2 u(t_f)\big[\cos t_f \sin t - t(\cos t_f \cos t + \sin t_f \sin t)\big]. \tag{3.19}$$

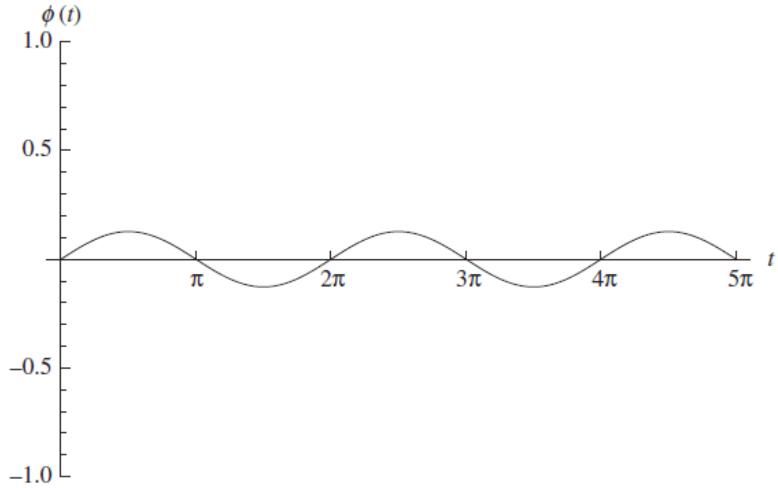
Primetimo da je rešenje u kom nema upravljanja $u(t) = \cos t$, $\phi(t) = 0$ kada je $\gamma = 0$, kao i što je očekivano. Pošto rešenje za promenljivu stanja $u(t)$ uključuje amplitudu u terminalnom trenutku t_f, uzmimo da je $t = t_f$ u jednačini (3.19) i rešimo po $u(t_f)$, što dovodi do

$$u(t_f) = \frac{\cos t_f}{1 - \frac{1}{2}\gamma^2(\cos t_f \sin t_f - t_f)}.$$

Ovaj rezultat može biti zamenjen u jednačinu (3.19) i tako dobijemo promenljivu stanja $u(t)$, i u jednačinu (3.16) kako bismo dobili promenljivu upravljanja $\phi(t)$.
Prikazaćemo rešenje kada je terminalno vreme $t_f = 5\pi$ i težinski koeficijent $\gamma = 1$, slika 3.3 i slika 3.4.



Slika 3.3 Amplituda oscilacije $u(t)$: isprekidana linija predstavlja rešenje u kom nema upravljanja, $u(t) = cos(t)$, a puna linija rešenje sa kojim je upravljano.



Slika 3.4

Merenje učinka na intervalu $[0, t_f]$
Posmatrajmo sada kontrolu istog prigušenog harmonijskog oscilatora kojim upravlja jednačina stanja (3.6) sa početnim uslovima (3.5), ali sa novom funkcionelom troška

$$J[u,\phi] = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \big(\gamma^2 u^2 + \phi^2\big) dt, \tag{3.20}$$

gde sada nastojimo da minimiziramo veličinu amplitude na celom domenu $0 \le t \le t_f$, a ne samo u terminalnom trenutku $t = t_f$ kao u prethodnom slučaju. Koristeći isti postupak, dobijamo sledeću jednačinu upravljanja

$$\ddot{\phi} + \phi = -\gamma^2 u, \tag{3.21}$$

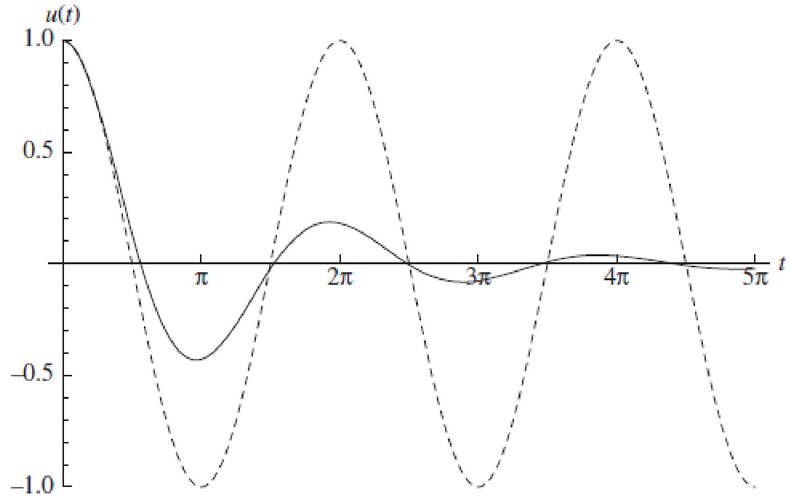
sa početnim uslovima koji se primenjuju u terinalnom trenutku

$$\phi(t_f) = 0, \qquad \dot{\phi}(t_f) = 0. \tag{3.22}$$

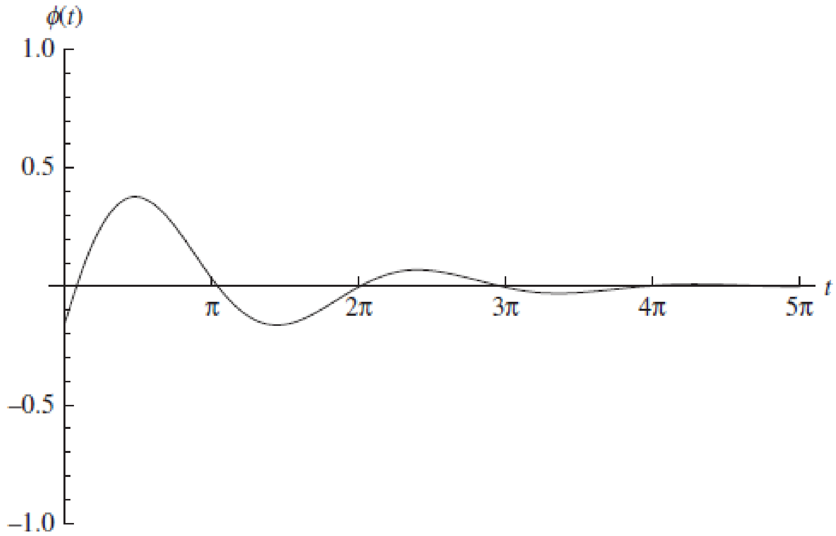
Prikazaćemo rešenja za dva slučaja, gde će terminalni trenutak $t_f = 5\pi$ biti isti.
Ako je $\gamma^2 = 1/3$, vrednost kaznene funkcije je

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_f} \phi^2 dt = 0.1308,$$

gde kaznena funkcija ukazuje na ulaz energije potrebne za upravljanje, slika 3.5 i slika 3.6.



Slika 3.5 Amplituda oscilacije $u(t)$: isprekidana linija predstavlja rešenje u kom nema upravljanja, $u(t) = \cos(t)$, a puna linija rešenje sa kojim je upravljano.

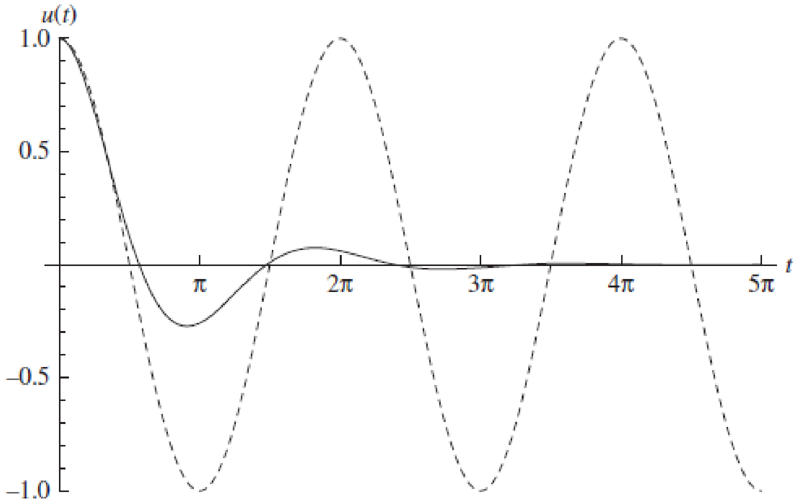


Slika 3.6

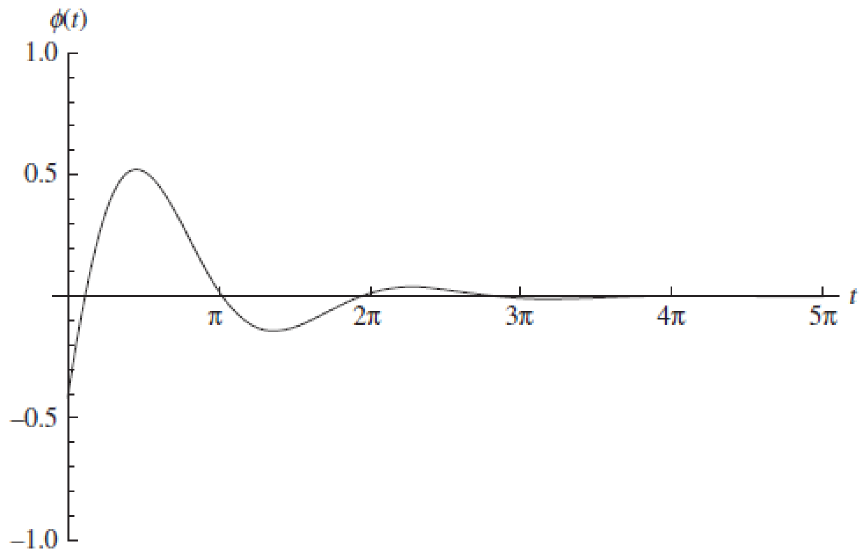
Sada posmatramo šta se dešava ako je težinski koeficijent veći, $\gamma^2 = 1$, što povećava naglasak na merenje učinka u poređenju na kaznenu funkciju, slika 3.7 i 3.8. Odgovarajuća kaznena funkcija je

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_f} \phi^2 dt = 0.2080,$$

što je za 60 posto veće nego za $\gamma = 1/3$.



Slika 3.7 Amplituda oscilacije $u(t)$: isprekidana linija predstavlja rešenje u kom nema upravljanja, $u(t) = \cos(t)$, a puna linija rešenje sa kojim je upravljano.



Slika 3.8

3.4 Rikatijeva jednačina za linearno kvadratni problem

Na linearno kvadratni problem, koji ćemo ovde definisati, primenićemo Pontrjaginov principu maksimuma, a pomoću Rakatijeve jednačine za linearno kvadratni problem, pokazaćemo još jedan postupak rešavanja problema prigušenog harmonijskog oscilatora.

Linearno kvadratni problem

Posmatramo linearni sistem diferencijalnih jednačina, koji se može zapisati u sledećem obliku

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\phi, \tag{3.23}$$

gde je $\mathbf{u}(t)$ vektor promenljive stanja dimenzije $n \times 1$, $\phi(t)$ vektor promenljive upravljanja dimenzije $m \times 1$, a $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ su matrice dimenzije $n \times n$ i $n \times m$. Ako matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nisu funkcije vremena, sistem je autonoman. Promenljive stanja podležu početnim uslovima

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad u \quad t = 0. \tag{3.24}$$

Želimo da minimiziramo funkcionelu troška

$$J[\mathbf{u}(\mathbf{t}), \phi(\mathbf{t})] = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \Big(\gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{Q}\mathbf{u} + \phi^T \mathbf{R}\phi\Big) dt, \tag{3.25}$$

gde je $\mathbf{Q}$ matrica dimenzije $n \times n$, a $\mathbf{R}$ matrica dimenzije $m \times m$. Matrice $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ su simetrične i pozitivno definitne. Samo kada je γ^2 konačno i nije nula, tada problem stanja ili upravljanja proizilazi iz sledećeg postupka optimizacije. Problemi upravljanja ove vrste nazivaju se linearno kvadratnim problemima jer uključuju linearnu jednačinu (3.23) sa kvadratnom funkcionelom troškova (3.25).

U cilju da se minimizira funkcionela troška (3.25) sa ograničenjima tako da je jednačina stanja (3.23) zadovoljena, formiramo sledeću funkcionelu

$$\tilde{J}[u, \phi, \lambda] = \int_0^{t_f} \Big\{\frac{1}{2}\big[\gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{Q}\mathbf{u} + \phi^T \mathbf{R}\phi\big] + \lambda^T(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{B}\phi)\Big\} dt$$

gde su $\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)]$ Lagranžovi množitelji. Uzmemo varijaciju i izjednačimo je sa nulom, pa je

$$\delta\tilde{J} = \int_0^{t_f} \big[\gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{Q}\delta\mathbf{u} + \phi^T \mathbf{R}\delta\phi + \lambda^T(\delta\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{A}\delta\mathbf{u} - \mathbf{B}\delta\phi)\big] dt = 0. \tag{3.26}$$

Pošto su $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ simetrične, $\mathbf{u}^T\mathbf{Q}\mathbf{u}$ i $\phi^T\mathbf{R}\phi$ su u kvadratnoj formi, pa možemo da zapišemo

$$\mathbf{u}^T\mathbf{Q}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T\mathbf{Q}\mathbf{u} &= Q_{11}u_1^2 + Q_{22}u_2^2 + \dots + Q_{nn}u_n^2 \\ &+ 2Q_{12}u_1u_2 + 2Q_{13}u_1u_3 + \dots + 2Q_{n-1,n}u_{n-1}u_n, \end{aligned}$$

gde je svaki izraz u_i kvadratni. Uzimajući varijaciju, dobijamo

$$\begin{aligned} \delta\Big(\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{Q}\mathbf{u}\Big) &= Q_{11}u_1\delta u_1 + Q_{22}u_2\delta u_2 + \dots + Q_{nn}u_n\delta u_n \\ &+ Q_{12}u_1\delta u_2 + Q_{12}u_2\delta u_1 + Q_{13}u_1\delta u_3 + Q_{13}u_3\delta u_1 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \vdots \\ \delta u_4 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T\mathbf{Q}\delta\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Slično,

$$\delta\Big(\frac{1}{2}\phi^T\mathbf{Q}\mathbf{u}\Big) = \phi^T\mathbf{Q}\delta\phi.$$

Primenom parcijalne integracije na treći sabirak u jednačini (3.26) sledi

$$\int_0^{t_f} \lambda^T\delta\dot{\mathbf{u}}dt = \lambda^T(t_f)\delta\mathbf{u}(t_f) - \lambda^T(0)\delta\mathbf{u}(0) - \int_0^{t_f} \dot{\lambda}^T\delta\mathbf{u}dt.$$

Na osnovu početnih uslova u $t = 0$, sledi da je $\delta\mathbf{u}(0) = 0$, pa nakon grupisanja jednačina (3.26) postaje

$$\lambda^T(t_f)\delta\mathbf{u}(t_f) + \int_0^{t_f} \Big[\Big(\gamma^2\mathbf{u}^T\mathbf{Q} - \dot{\lambda}^T - \lambda^T A\Big)\delta\mathbf{u} + \Big(\phi^T\mathbf{R} - \lambda^T\mathbf{B}\Big)\delta\phi\Big]dt = 0.$$

Pošto izrazi pomnoženi sa varijacijom moraju nestati, dolazimo do Ojlerovih jednačina i početnog uslova:

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T\mathbf{A} + \gamma^2\mathbf{u}^T\mathbf{Q}, \tag{3.27}$$

$$\lambda^T B = \phi^T \mathbf{R}, \tag{3.28}$$

$$\lambda(t_f) = 0. \tag{3.29}$$

Jednačina (3.27) je diferencijalna adjungovana jednačina za Lagranžove množitelje $\lambda(t)$, koja se zove adjungovana promenljiva. Transponovanjem jednačina (3.27) i (3.28) dobijemo

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{A}^T \lambda + \gamma^2 \mathbf{Q}\mathbf{u} \tag{3.30}$$

i

$$\mathbf{B}^T \lambda = \mathbf{R}\phi,$$

gde smo koristili činjenicu da su $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ simetrične, pa je $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$. Množenjem poslednje jednačine sa $\mathbf{R}^{-1}$ dovodi do uslova optimalnosti

$$\phi = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \lambda, \tag{3.31}$$

pri čemu $\mathbf{R}^{-1}$ uvek postoji jer je $\mathbf{R}$ pozitivno definitna matrica. Možemo da zamenimo jednačinu (3.31) u jednačinu stanja (3.23) da eliminišemo promenljivu upravljanja, pa nam ostaje

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \lambda. \tag{3.32}$$

Rikatijeva jednačina
Za linearni sistem jednačina (3.30), znamo da postoji rešenje za adjungovanu promenljivu $\lambda(t)$

$$\lambda = -\mathbf{P}\mathbf{u}, \tag{3.33}$$

gde je $\mathbf{P}(t)$ matrica dimenzije $n \times n$. Diferenciranje prethodne jednačine dovodi do

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{P}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{P}}\mathbf{u}.$$

Zamenom prethodne dve jednačine u jednačine (3.30) i (3.32) dobijemo

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{u} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{u} + \gamma^2 Q\mathbf{u} = 0, \tag{3.34}$$

i

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{u}. \tag{3.35}$$

Zamenom jednačine (3.35) u jednačinu (3.34) dovodi do

$$\Big(\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \gamma^2\mathbf{Q}\Big)u = 0.$$

pošto rešenje $\mathbf{u}$ nije trivijalno, njegov koeficijent mora da nestane, a to dovodi do nelinearne Rikatijeve jednačine prvog reda koja glasi

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \gamma^2\mathbf{Q}. \tag{3.36}$$

Iz jednačine (3.33), početni uslov (3.29) postaje

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{0}. \tag{3.37}$$

Može se pokazati da je matrica $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ simetrična, pa n^2 nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda iz (3.36), svodi se ne $1/2n(n+1)$. Za matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ iz jednačine stanja (3.23) i $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ iz funkcionele troškova (3.25), sistemi jednačina (3.36) i (3.37) su rešeni unazad za matricu $P(t)$. Zamenom jednačine (3.33) u jednačinu (3.31) dovodi do zakona upravljanja

$$\phi = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{u}, \tag{3.38}$$

koji direktno dovodi u vezu upravljanje sa promenljivom stanja, ukazujući kako upravljanje reaguje na promene u promenljivim stanja, i obezbeđuje zakon upravljanja koji je nezavisan od početnog uslova $\mathbf{u}_0$. Zamenom jednačine (3.38) u jednačinu (3.23) daje sistem jednačina (3.35)

$$\dot{\mathbf{u}} = \Big(\mathbf{A} - \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\Big)\mathbf{u}. \tag{3.39}$$

Rešenje Rikatijeve jednačine (3.36), sa početnim uslovima (3.37) je jednačina (3.39).

Primer 5. *U cilju da se ilustruje upotreba Rikatijeve jednačine za linearno kvadratni problem, posmatrajmo prigušeni harmonijski oscilator iz poglavlja (3.3). Jednačina stanja je*

$$\ddot{u} + u = \phi, \tag{3.40}$$

sa početnim uslovima

$$u(0) = 1, \qquad \dot{u}(0) = 0. \tag{3.41}$$

Funkcionela troška koja treba da se minimizira je

$$J[u,\phi] = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \big(\gamma^2 u^2 + \phi^2\big)dt.$$

Koristićemo da je $\gamma^2 = 1$ i $t_f = 5\pi$.

Jednačinu stanja zapišemo kao sistem linearnih jednačina prvog reda koristeći

$$u_1 = u, \qquad u_2 = \dot{u}.$$

Nakon diferenciranja, sistem jednačina prvog reda je

$$\dot{u_1} = u_2, \qquad \dot{u_2} = -u_1 + \phi.$$

U matričnoj formi jednačina stanja (3.40)postaje

$$\dot{u} = Au + B\phi,$$

gde je

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad \phi = [\phi], \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Funkcionela troška u matričnoj formi je

$$J[u, \phi] = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left(\gamma^2 u^T Q u + \phi^T R \phi\right) dt,$$

gde je

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = [1].$$

Problem upravljanja sastoji se od jednačina stanja

$$\dot{u} = Au + BR^{-1}B^T\lambda, \tag{3.42}$$

i adjungovane jednačine

$$\dot{\lambda} = -A^T\lambda + \gamma^2 Q u,$$

gde je $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]^T$. Tražimo rešenje u obliku

$$\lambda = -Pu,$$

gde matrica $P_{n\times n}(t)$ zadovoljava Rikatijevu jednačinu

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - \gamma^2 Q.$$

Uzimajući u obzir da je P simetrična matrica, sledi

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{11} & \dot{P}_{12} \\ \dot{P}_{12} & \dot{P}_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što dovodi do

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{11} & \dot{P}_{12} \\ \dot{P}_{12} & \dot{P}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2P_{12} + P_{12}^2 - \gamma^2 & -P_{11} + P_{22} + P_{12}P_{22} \\ P_{22} - P_{11} + P_{22}P_{12} & -2P_{12} + P_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

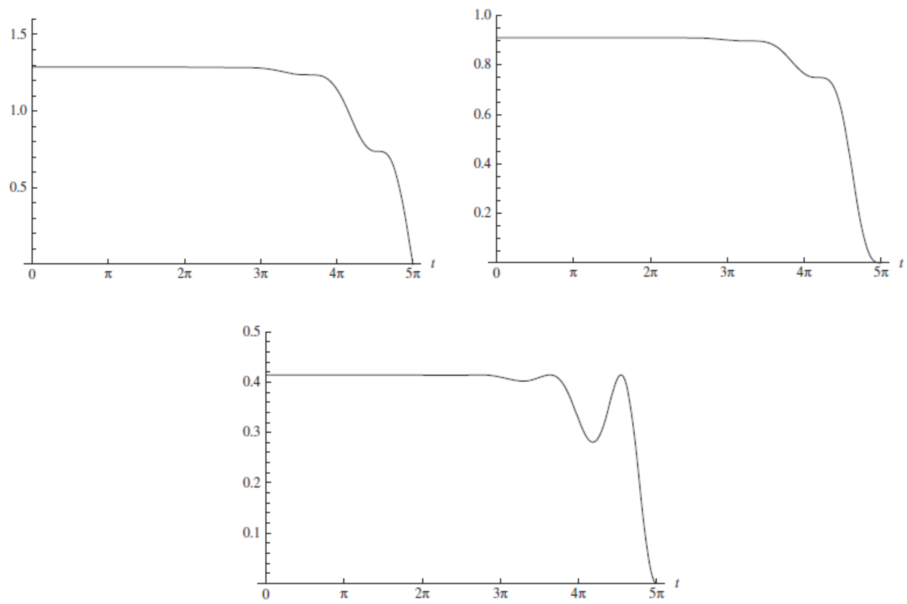
Sada treba da rešimo sledeće nelinearne diferencijalne jednačine za $P_{11}(t), P_{22}(t), P_{12}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{11} &= 2P_{12} + P_{12}^2 - \gamma^2 \\ \dot{P}_{22} &= -2P_{12} + P_{22}^2 \\ \dot{P}_{12} &= -P_{11} + P_{22} + P_{12}P_{22} \end{aligned}$$

sa početnim uslovima

$$P_{11}(t_f) = P_{22}(t_f) = P_{12}(t_f) = 0.$$

Ovi nelinearni sistemi moraju da se reše numerički, kodovi za Matlab mogu se naći u literaturi [6], a na slici 3.9 biće prikazana redom rešenja Rikatijeve jednačine $P_{11}(t), P_{22}(t)$ i $P_{12}(t)$ za prigušen harmonijski oscilator kada je $t_f = 5\pi$ i $\gamma^2 = 1$.



Slika 3.9

Kako je $P(t)$ dobijeno, jednačina stanja

$$\dot{\mathbf{u}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right)\mathbf{u},$$

može biti rešena. U našem slučaju, jednačine stanja su

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{bmatrix} &= \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[1]\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1-P_{12} & -P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= u_2\\ \dot{u}_2 &= -(1+P_{12})u_1 - P_{22}u_2.\end{aligned}$$

Iz zakona upravljana

$$\phi = -R^{-1}B^T P u,$$

za naš slučaj to postaje

$$\phi = [1]\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix},$$

ili

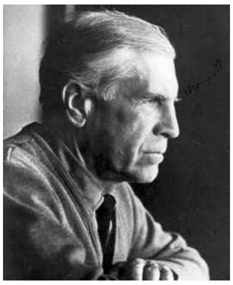
$$\phi = -P_{12}u_1 - P_{22}u_2.$$

Rešenja za promenljivu stanja $u(t)$ i promenljivu upravljanja $\phi(t)$ za $t_f = 5\pi$ i $\gamma^2 = 1$ su ista kao na slici 3.7 i 3.8.
Zaključak: Primenom Rikatijeve jednačine rešili smo problem prigušenog harmonijskog oscilatora i time pokazali da su rešenja koja smo dobili optimalna.

4

Pontrjaginov princip maksimuma i njegova primena

4.1 Biografija i rad Pontrjagina



Lav Semjonovič Pontrjagin

Lav Semjonovič Pontrjagin rođen je 3. septembra 1908. godine. Sa 14 godina izgubio je vid od eksplozije primusa. Uprkos slepilu uspeo je da postane matematičar uz pomoć svoje majke koja mu je čitala knjige. Diplomirao je na Moskovskon državnom univerzitetu 1929.godine, 1935. stekao je zvanje doktora nauka, a iste godine je izabran i za profesora na istom univerzitetu. Doneo je veliki doprinos teoriji optimalnog upravljanja objavljivanjem monografije 1961. godine. Radi se o delu četvoro autora iz bivšeg Sovjetskog Saveza, L. S. Pontrjagina i njegovih studenata: V. G. Boltjanskog, R. V. Gramkrelidzea i E. F. Miščenka. Pontrjagin je glavni rezultat te monografije, koji se danas zove Pontrjaginov princip maksimuma, izložio početkom 1950ih. Pontrjagin je imao čast izložiti o toj teoriji prvi put tokom svog predavanja 1958. godine u Edinburgu u Velikoj Britaniji, na Međunarodnom matematičkom kongresu, koji se inače održava svake četiri godine kao na-

javažniji svetski kongres matematičara.
Pontrjagin je radio i na teoriji dualnosti još kao student. U vezi sa ovim je konstruisao teoriju karaktera Lijevih grupa i zasnovao temelje apstraktne teorije Furijeove transformacije, koji se danas nazivaju dualnost po Pontrjaginu. U topologiji, Pontrjagin je postavio osnovni problem teorije kobordizma. Ovo je dovelo do uvođenja teorije karakterističnih klasa 1940-ih, koje se danas nazivaju Pontrjaginovim klasama. U teoriji operatora, posebni slučajevi Krejnovih prostora su prostori Pontrjagina.
U teoriji oscilacija, njegovi glavni rezultati odnose se na asimptotiku relaksacionih oscilacija. Kasnije u svojoj karijeri radio je na teoriji optimalne kontole u teoriji upravljanja. Pontrjaginov princip maksimuma je od temeljnog značaja za modernu teoriju optimizacije. U ovoj oblasti je uveo i ideju beng-beng principa, kako bi opisao situacije u kojima se na sistem može primeniti ili maksimalno ili nikakvo "zanošenje". Imao je i fundamentalne rezultate u teoriji diferencijalnih igara. Radovi Pontrjaginove škole imali su veliki uticaj na razvoj teorije upravljanja i varijacionog računa u celom svetu.
Počasna zvanja i nagrade:

- Počasni član Londonskog matematičkog drutva (1953)
- Počasni član Međunarodne akademije Astronautika (1966)
- Potpredsednik Međunarodne matematičke unije (1970-1974)
- Počasni član Mađarske akademije nauka (1972)
- Staljinova nagrada (1941)
- Lenjinova nagrada (1962)
- Tri ordena Lenjina
- Heroj socijalističkog rada
- Medalja Lobačevskog (1966)

4.2 Pontrjaginov princip maksimuma

Kao što smo do sada videli, opšti problem optimalnog upravljanja je da se minimizira funkcionela troška

$$J[\mathbf{u}, \phi] = \int_0^{t_f} F(t, \mathbf{u}, \phi) dt \tag{4.1}$$

podvrgnuta jednačinama stanja

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \phi) \tag{4.2}$$

i početnim uslovima

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \qquad u \qquad t = 0 \tag{4.3}$$

koji su zadovoljeni. U klasičnom principu varijacije, formirali smo novu funkcionelu troškova

$$\tilde{J}[\mathbf{u}, \phi, \lambda] = \int_0^{t_f} \big\{ F(t, \mathbf{u}, \phi) + \lambda^T(t)[\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \phi)] \big\} dt.$$

Pontrjagin je preformulisao prethodnu funkcionelu u funkcionelu oblika

$$\tilde{J}[\mathbf{u}, \phi, \lambda] = \int_0^{t_f} \big[H_P(t, \mathbf{u}, \phi, \lambda) + \lambda^T(t)\dot{\mathbf{u}} \big] dt,$$

gde je Pontrjaginov Hamiltonijan H_P dat sa

$$H_P(t, \mathbf{u}, \phi, \lambda) = F(t, \mathbf{u}, \phi) - \lambda^T(t)\mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \phi). \tag{4.4}$$

Uzimajući varijaciju dobija se

$$\delta\tilde{J} = \int_0^{t_f} \left[\frac{\partial H_P}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} + \frac{\partial H_P}{\partial \phi} \delta\phi + \lambda^T \delta\dot{\mathbf{u}} \right] dt,$$

gde $\delta\lambda$ nije uključeno jer dovodi do prvobitne jednačine stanja $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \phi)$. Primenom parcijalne integracije na poslednji sabirak dobije se

$$\delta\tilde{J} = \lambda^T(t_f)\delta\mathbf{u}(t_f) - \lambda^T(0)\delta\mathbf{u}(0) + \int_0^{t_f} \Big[\Big(\frac{\partial H_P}{\partial \mathbf{u}} - \dot{\lambda}^T \Big) \delta\mathbf{u} + \frac{\partial H_P}{\partial \phi} \delta\phi \Big] dt.$$

Iz uslova stacionarnosti, $\delta\tilde{J} = 0$, dolazimo do adjungovane jednačine, uslova optimalnosti i graničnog uslova

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T &= \frac{\partial H_P}{\partial \mathbf{u}}, \\ \frac{\partial H_P}{\partial \phi} &= \mathbf{0}, \\ \lambda(t_f) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Posmatrajmo sada m algebarskih jednačina $\partial H_P/\partial \phi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, koje možemo zapisati u sledećem obliku

$$\frac{\partial H_P}{\partial \phi_k} = \frac{\partial F}{\partial \phi_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Sistem ovih algebarskih jednačina daje potreban uslov optimalnosti Hamiltonijana sa obzirom na komponente upravljanja u_k, $k = 1, 2, \dots, m$. Ova činjenica je suština principa maksimuma (minimuma).
Princip maksimuma (minimuma) glasi: Ako je vektor upravljanja $\mathbf{u}$ optimalan, to jest obezbeđuje maksimum (minimum) kriterijumu optimalnosti J, onda je Hamiltonijan H_P maksimalan (minimalan) u odnosu na komponente vektora upravljanja ϕ.
Primenimo sada Pontrjaginov principa na problem linearnih kvadrata iz poglavlja (3.4), gde je

$$F(\mathbf{u}, \phi) = \frac{1}{2}\big(\gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} + \phi^T \mathbf{R} \phi\big), \qquad \mathbf{f}(\mathbf{u}, \phi) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\phi, \tag{4.5}$$

a Hamiltonijan H_p je

$$H_P(\mathbf{u}, \phi, \lambda) = \frac{1}{2}\big(\gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} + \phi^T \mathbf{R} \phi\big) - \lambda^T (\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\phi). \tag{4.6}$$

Sada je adjungovana jednačina, uslov optimalnosti i granični uslov

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T &= \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{Q} - \lambda^T \mathbf{A}, \\ \phi^T \mathbf{R} - \lambda^T \mathbf{B} &= \mathbf{0}, \\ \lambda(t_f) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Primetimo da su dobijene jednačine ekvivalentne jednačinama (3.27), (3.28) i (3.29) koje su izvedene klasičnim varijacionim računom.

4.3 Primeri sa primenom Pontrjaginovog principa

Primer 6. *Posmatrajmo upravljanje prigušenog harmonijskog oscilatora iz poglavlja 3.3. Neka je data funkcionela troška i* $0 \le t \le t_f$

$$J[u, \phi] = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \big(\gamma^2 u + \phi^2\big) dt. \tag{4.7}$$

Jednačina stanja je

$$\ddot{u} + u = \phi, \tag{4.8}$$

a početni uslovi

$$u(0) = a, \qquad \dot{u}(0) = b. \tag{4.9}$$

Jedina razlika je da se ograniči upravljanje u intervalu $-1 \leq \phi \leq 1$.

Jednačinu stanja zapišemo kao sistem linearnih jednačina prvog reda koristeći

$$u_1 = u, \qquad u_2 = \dot{u}.$$

Nakon diferenciranja, sistem jednačina prvog reda je

$$\dot{u_1} = u_2, \qquad \dot{u_2} = -u_1 + \phi.$$

U matričnoj formi jednačina stanja postaje

$$\dot{u} = f(u, \phi),$$

gde je

$$f(u, \phi) = Au + B\phi,$$

i

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad \phi = [\phi], \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

U odnosu na nove promenljive, početni uslovi su

$$u_1(0) = a, \qquad u_2(0) = b. \tag{4.10}$$

Pontrjaginov Hamiltonijan za ovaj slučaj je

$$H_P = F(u, \phi) - \lambda^T f(u, \phi) = \gamma^2 u_1^2 + \phi^2 - \lambda_1 u_2 - \lambda_2(-u_1 + \phi) \tag{4.11}$$

Adjungovane jednačine su

$$\dot{\lambda_1} = \frac{\partial H_P}{\partial u_1}, \qquad \dot{\lambda_2} = \frac{\partial H_P}{\partial u_2}$$

što dovodi do

$$\dot{\lambda_1} = \lambda_2 + \gamma^2 u_1, \qquad \dot{\lambda_2} = -\lambda_1. \tag{4.12}$$

Uslov optimalnosti

$$\frac{\partial H_P}{\partial \phi} = 0,$$

zahteva da važi

$$\lambda_2 = \phi. \tag{4.13}$$

Uslov optimalnosti se koristi samo kada upravljanje ostaje u svojim granicama $-1 \leq \phi \leq 1$, u kom slučaju imamo $-1 \leq \lambda_2 \leq 1$. Kada λ_2 izađe iz ovih granica, upravljanje određujemo tako da je Pontrjaginov Hamiltonijan (4.11) minimalan. Ako je $\lambda_2 \geq 1$, H_P je minimalno ako je $\phi = 1$. Slično, ako je $\lambda_2 \leq 1$, onda je H_P minimalno ako je $\phi = -1$. Prema tome,

$$\phi(t) = \begin{cases} -1, & \lambda_2 < 1 \\ \lambda_2, & -1 \leq \lambda_2 \leq 1 \\ 1, & \lambda_2 > 1 \end{cases}$$

što zauzima mesto uslova optimalnosti (4.13).

Primer 7. *U primeru reinvestiranja profita iz poglavlja 3.2, težimo da maksimiziramo funkcionelu*

$$J[u(t), \phi(t)] = \int_0^{t_f} (1-\phi)u dt, \tag{4.14}$$

sa diferencijalnim ograničenjem da je jednačina stanja

$$\dot{u} = \alpha\phi u, \qquad \alpha > 0 \tag{4.15}$$

zadovoljena sa ograničenjem $0 \leq \phi \leq 1$.

Pontrjaginov Hamiltonijan je dat sa

$$H_P = (1-\phi)u - \lambda\alpha\phi u = [1 - (1+\alpha\lambda)\phi]u. \tag{4.16}$$

Adjungovana jednačina $\dot{\lambda} = \partial H_P / \partial u$ daje

$$\dot{\lambda} = 1 - (1+\alpha\lambda)\phi, \qquad \lambda(t_f) = 0, \tag{4.17}$$

gde je adjungovana jednačina ista kao jednačini (3.4). Razlog za neuspeh klasičnog varijacionog računa proizilazi iz nametanja uslova optimalnosti. Pošto zelimo da maksimizairamo funkcionelu (4.14), maksimiziraće se i Pontrjaginov Hamiltonijan, umesto minimizirati kao pre. Setimo se da je $u \geq 0$, maksimiziranjem H_P dato u jednačini (4.16) zahteva da $(1+\alpha\lambda)\phi$ bude minimizirano. Kada je $0 \leq \phi \leq 1$, onda je ovo ispunjeno za

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & \lambda > -1/\alpha \\ 1, & \lambda < -1/\alpha \end{cases} \tag{4.18}$$

gde je $\alpha > 0$. Vidimo da Lagranžov množitelj određuje kada će promenljiva upravljanja prelaziti iz jedne krajnosti u drugu. Tako da rešenje optimalnog

upravljanja ukazuje da li treba da investiramo sav profit ($\phi = 1$) ili da ništa ne investiramo ($\phi = 0$). Ovo je poznato kao beng-beng upravljanje.
Imamo dve grupe rešenja za jednačine stanja i upravljanja. Kada je $\phi(t) = 0$, rešenje za jednačinu stanja i upravljanja je

$$u(t) = c_1, \qquad \lambda(t) = t + c_2. \tag{4.19}$$

Kada je $\phi(t) = 1$, rešenja su

$$u(t) = c_3 e^{\alpha t}, \qquad \lambda(t) = c_4 e^{-\alpha t}. \tag{4.20}$$

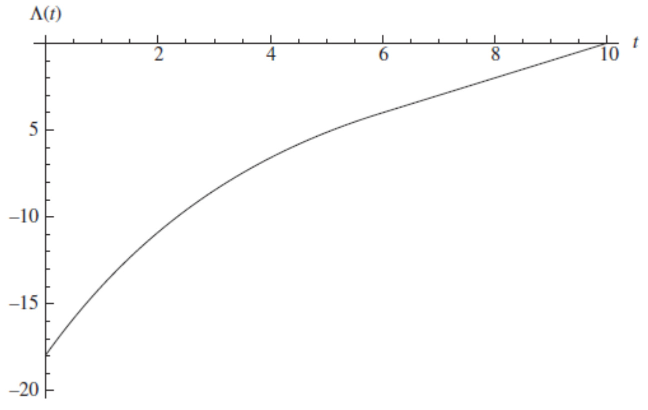
Kako je početni uslov terminalnog vremena $\lambda(t_f) = 0$, iz jednačine (4.26) imamo da je $\phi(t_f) = 0$, što znači da ne postoji reinvestiranje profita u terminalnom vremenu. Primenom početnog uslova u terminalnom vremenu na rešenje adjungovane jednačine (4.19) daje $c_2 = -t_f$ i

$$\lambda(t) = t - t_f \quad za \quad t_s \leq t \leq t_f \tag{4.21}$$

u intervalu za koji je $\phi = 0$ počinje vreme zamene t_s. Zamena u ulazu upravljanja se dešava kada je $\lambda = -1/\alpha$, što se događa pri zameni vremna $t_s = t_f - 1/\alpha$. U tom trenutku se optimalno upravljanje menja u rešenje $\phi(t) = 1$ dato jenačinom (4.20). Pošto je adjungovana promenljiva neprekidna, konstanta c_4 se može dobiti pomoću adjungovane promenljive u $t = t_f - 1/\alpha$, gde je $\lambda = -1/\alpha$. Zamenom u jednačinu (4.20) za adjungovanu promenljivu iznosi $c_4 = -1/(\alpha e^{1-\alpha t_f})$. Onda je

$$\lambda(t) = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha(t_f - t) - 1} \quad za \quad 0 \leq t \leq t_f - 1/\alpha. \tag{4.22}$$

Pošto $\lambda(t)$ ostaje manje od $-1/\lambda$ do kraja intervala, ne postoje zamene u ulazu upravljanja. Adjungovana promenljiva, koja je eksponencijalna za $0 \leq t \leq t_s = t_f - 1/\alpha$ i potom linearna prikazana je na slici 4.1.

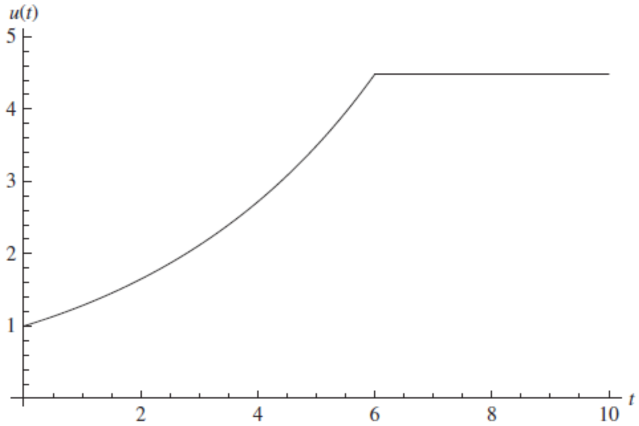


Slika 4.1 Rešenje za (4.22) kada je $u_0 = 1$, $\alpha = 1/4$, $t_f = 10$ *i* $t_s = 6$

Lagranžov množitelj se naziva i funkcija uticaja ili osećaja jer određuje koliko je funkcionela J osetljiva na promene u ulazu upravljanja. U ovom slučaju vidimo da je ukupni profit akumuliran tokom vremenskog intervala $0 \leq t \leq t_f$ najosetljiviji na promene u reinvestiranju profita na početku intervala u odnosu na kraj. Ovo ima smisla jer profit koji je investiran na početku intervala ima više vremena da utiče na budući profit.
Slično, promenljiva stanja sa početnim uslovom $u(0) = u_0$ je

$$u(t) = \begin{cases} u_0 e^{\alpha t}, & 0 \leq t \leq t_f - 1/\alpha \\ u_0 e^{\alpha t_f - 1}, & t_f - 1/\alpha \leq t \leq t_f. \end{cases} \tag{4.23}$$

što je prikazano na slici 4.2.

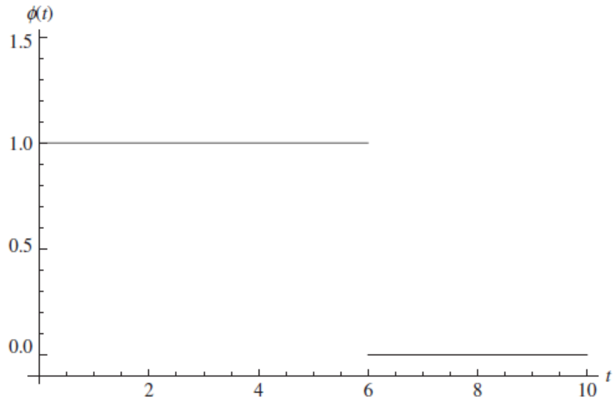


Slika 4.2 Rešenje za (4.23) kada je $u_0 = 1$, $\alpha = 1/4$, $t_f = 10$ i $t_s = 6$

Ulaz upravljanja za stopu reinvestiranog profita, (4.26) je

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_f - 1/\alpha \\ 1, & t_f - 1/\alpha \leq t \leq t_f, \end{cases} \tag{4.24}$$

što je prikazano na slici 4.3.



Slika 4.3 Rešenje za (4.24) kada je $u_0 = 1$, $\alpha = 1/4$, $t_f = 10$ i $t_s = 6$

Da bi maksimizirali ukupan profit tokom vremenskog intervala $0 \leq t \leq t_f$, optimalno rešenje je da reinvestiramo sav profit do zamene vremena $t_s = t_f - 1/\alpha$, posle čega ništa od profita ne reinvestiramo.
Kao što vidimo, uz pomoć Pontrjaginovog principa maksimuma uspeli smo da odgovorimo na pitanje kompanije koju stopu profita i kada treba da reinvestiramo.

Primer 8. *Sletanje sonde na površinu Marsa*
Pretpostavimo da sletanje sonde počinje blizu površine Marsa i da na njega utiče samo gravitaciona sila. Sonda je opremljena sistemom kočenja, koje primenjuje silu kočenja ϕ, kako bi se usporilo kretanje. Sila kočenja ne može biti veća od date maksimalne vrednosti U. Neka je $u(t)$ udaljenost sonde od površine Marsa. Neka je data Njutnova formula $m\ddot{u} = -mg - k\dot{u} + \phi$. Cilj je pronaći optimalno upravljane $\phi(t)$ tako da sonda sleti za najkraće vreme. Pretpostavićemo da je $m = 1$, $k = 1$, $U = 2$, $g = 1$ i $0 \leq \phi \leq 2$, pa sistem postaje $\ddot{u} = -1 - \dot{u} + \phi$. Početni uslovi su $u(0) = 10$ i $\dot{u}(0) = 0$.

Zapišimo jednačinu drugog reda kao sistem linearnih jednačina prvog reda koristeći

$$u_1 = u, \quad u_2 = \dot{u}.$$

Nakon diferenciranja, sistem jednačina prvog reda je

$$\dot{u_1} = u_2, \quad \dot{u_2} = -1 - u_2 + \phi. \tag{4.25}$$

Nas cilj je da minimiziramo T u odnosu na ograničenje $0 \leq \phi \leq 2$ i granične uslove $u_1(T) = 0$ i $u_2(T) = 0$. Hamiltonijan u ovom slučaju je

$$H_P(\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2, \phi) = \lambda_1 u_2 + \lambda_2(-1 - u_2 + \phi) - 1.$$

Adjungovane jednačine su

$$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial H_P}{\partial u_1}, \quad \dot{\lambda_2} = -\frac{\partial H_P}{\partial u_2},$$

što dovodi do

$$\dot{\lambda_1} = 0, \quad \dot{\lambda_2} = -\lambda_1 + \lambda_2.$$

Uslov optimalnosti

$$\frac{\partial H_P}{\partial \phi} = 0,$$

zahteva da važi

$$\lambda_2 = \phi.$$

Sada treba da se maksimizira Hamiltonijan. Kako je H_P linearna funkcija, maksimum se javlja u nekoj od krajnjih tačaka, $\phi = 0$ ili $\phi = 2$, pa je

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & \lambda_2(t) < 0 \\ 2, & \lambda_2(t) > 0 \end{cases}$$

Rešavanjem sistema adjungovanih jednačina dolazimo do

$$\lambda_1 = c_1, \quad \lambda_2 = c_1 + c_2 e^t.$$

Da bi sonda mogla da sleti sa brzinom koja je jednaka nuli u terminalnom trenutku T, moramo da krenemo od $\phi = 0$ i onda u nekom momentu, t_s, pređemo u $\phi = 2$. Sistem jednačina (4.25) u $t \in [0, t_s]$ za $\phi = 0$ je

$$\dot{u_1} = u_2, \quad \dot{u_2} = -1 - u_2,$$

rešavanjem ovog sistema dolazimo do

$$u_1(t) = 11 - t - e^{-t}, \quad u_2 = -1 + e^{-t}.$$

A sistem jednačina (4.25) u $t \in [t_s, T]$ za $\phi = 2$ je

$$\dot{u_1} = u_2, \quad \dot{u_2} = 1 - u_2,$$

rešavanjem ovog sistema dolazimo do

$$u_1(t) = -1 + t - T + e^{T-t}, \quad u_2 = 1 - e^{T-t}.$$

Sada iz sledećeg sistema

$$\begin{aligned} 11 - t - e^{-t} &= -1 + t - T + e^{T-t} \\ -1 + e^{-t} &= 1 - e^{T-t} \end{aligned}$$

možemo odrediti u kom momentu t_s treba da pređemo iz $\phi = 0$ u $\phi = 2$ i koji je terminalni trenutak T. Rešenje sistema je $t_s = 10.698$ i $T = 11.386$. Znači, da bi se postiglo optimalno rešenje sonda treba da sleće bez kočenja prvih 10.698 sekundi, a zatim sa maksimalnim kočenjem narednih 0.964 sekundi.

Dodatak

U ovoj glavi biće prikazan dokazan fundamentalne leme varijacionog računa i potrebnog uslova za ekstrem funkcionele. Korišćena je literatura [1], [2] .

Dokaz fundamentalne leme varijacionog računa

Dokaz izvodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji $\tilde{x} \in (x_0, x_1)$, tako da je $f(\tilde{x}) > 0$. Tada iz neprekidnosti funkcije $f(x)$, sledi da je na nekom intervalu $(y_0, y_1) \subset (x_0, x_1)$ koji sadrži tačku $\tilde{x}$ ispunjeno $f(\tilde{x}) > 0$, za sve $x \in (y_0, y_1)$. Kako je $g(x)$ proizvoljna funkcija, biramo je na sledeći način

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ (y_1 - x)^2 (y_2 - x)^2, & y_1 \leq x \leq y_2 \\ 0, & y_2 > b \end{cases}$$

Tada je

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) g(x) dx > 0,$$

što je u kontadikciji sa pretpostavkom leme.

Potreban uslov za ekstrem funkcionele

Neka je D neprazan podskup normiranog vektorskog prostora $(X, \|\cdot\|)$ i neka je I funkcionela definisana na skupu D. Za vektor $\hat{x}$ se kaže da je maksimalni vektor u skupu D za funkcionelu I ako važi $I(x) \leq J(\hat{x})$ za svako $x \in D$. Vektor $x \in D$ je lokalni maksimum u D funkcionele I ako postoji lopta $L_\rho(\hat{x})$ u prostoru $(X, \|\cdot\|)$ sa centrom u $\hat{x}$ tako da važi $I(x) \leq I(\hat{x})$ za svako $x \in D \cap L_\rho(\hat{x})$. Ako je D otvoren podskup u $(X, \|\cdot\|)$ zahtevamo da je lopta $L_\rho(\hat{x})$ sadržana u D. Lokalni minimum u skupu D funkcionele I se slično definiše koristeći nejednakost $I(x) \geq I(\hat{x})$ za svako $x \in D \cap L_\rho(\hat{x})$.

Sada možemo reći da je $\hat{x}$ lokalni ekstrem u skupu D za funkcionelu I ako je $\hat{x}$ njen lokalni minimum ili lokalni maksimum. Tada je $I(\hat{x})$ lokalna ekstremna vrednost funkcionele I u podskupu D.
Razmatramo sada slučaj kada je funkcionela I definisana na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora $(X, \|\cdot\|)$. Ako je $\hat{x}$ lokalni minimum funkcionele I na D i ako je h proizvoljan vektor iz prostora $(X, \|\cdot\|)$ tada nejednakost

$$I(\hat{x} + \epsilon h) - I(x) \geq 0$$

važi za dovoljno malo ϵ, pri čemu $\hat{x} + \epsilon h$ pripada domenu D funkcionele I za dovoljno malo ϵ sve dok je $\hat{x}$ vektor u otvorenom skupu D. Otuda

$$\frac{I(\hat{x} + \epsilon h) - I(x)}{\epsilon} \geq 0 \tag{4.26}$$

za dovoljno malo $\epsilon > 0$, dok za dovoljno malo $\epsilon < 0$ važi:

$$\frac{I(\hat{x} + \epsilon h) - I(x)}{\epsilon} \leq 0. \tag{4.27}$$

Ukoliko dozvolimo da ϵ teži nuli u (4.26) dobijamo

$$\lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} \frac{I(\hat{x} + \epsilon h) - I(x)}{\epsilon} \geq 0$$

i slično za (4.27), dobijamo

$$\lim_{\epsilon \to 0, \epsilon < 0} \frac{I(\hat{x} + \epsilon h) - I(x)}{\epsilon} \leq 0,$$

pod uslovom da ove granične vrednosti (limesi) postoje. Sada, iz ovih poslednjih razmatranja, možemo zaključiti da uslov

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{I(\hat{x} + \epsilon h) - I(x)}{\epsilon} = 0, \tag{4.28}$$

mora važiti u svakom lokalnom minimumu $\hat{x} \in D$ funkcionele I, pod uslovom da ovaj limes postoji. Jasno je da ovaj uslov (4.28) mora važiti i u svakom lokalnom maksimumu $\hat{x} \in D$.
Uslov (4.28) je ustvari uopštenje uslova za ekstrem funkcije.

Zaključak

Stacionarna tačka funkcije je tačka u kojoj je prvi izvod te funkcije jednak nuli, a stacionarna funkcija funkcionele je funkcija u kojoj je izvod funkcionele jednak nuli. Rešavanjem Ojlerove jednačine, dobija se odgovarajuća stacionarna funkcija, koja predstavlja neophodan uslov za ekstrem funkcionele.

Cilj svakog preduzeća je da minimizira troškove i da maksimizira profit. Naš cilj bio je da pronađemo ekstremnu vrednost (optimalan oblik) tako da odgovarajuća funkcionela bude minimalna. U tu svrhu prikazan je primer optimizacije oblika nosa aviona tako da potrošnja goriva, bude minimalna. Takođe, videli smo koju stopu profita treba da reinvestiramo kako bi maksimizirali ukupan profit. Konačno, komentarisali smo funkcionelu troška analizom takozvane kaznene funkcije.

Glavni cilj ovog rada je prikazivanje Pontrjaginov principa maksimuma. Kada se minimizira funkcionela troška onda je moguće formirati Pontrjaginov Hamiltonijan. Ako upravljanje nije ograničeno onda koristimo formulaciju koja je ekvivalentna klasičnoj varijacionoj metodi optimalne kontrole, a ako je upravljanje ograničeno primenićemo Pontrjaginov princip. Kroz primene reivestiranja profita, prigušenog harmonijskog oscilatora i sletanja sonde na površinu Marsa prikazali smo primenu Pontrjaginovog principa maksimuma.

Literatura

[1] K. W. Cassel, *Variational Methods with Applications in Science and Engineering*, University Press, Cambridge, 2013.

[2] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2006.

[3] Radu C. Cascaval, *Mathematical Modeling*, University of Colorado, lecture notes, 2015.

[4] Jason L. Speyer, David H. Jacobson, *Primer on Optimal Control Theory*, Siam, 2010.

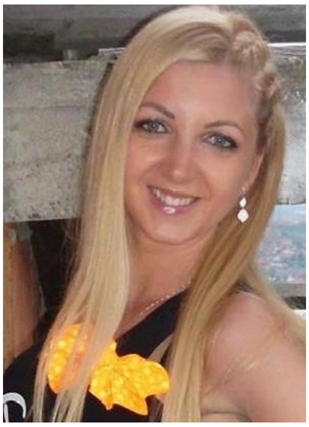
[5] B. Čekrlija, *Vremeplovom kroz matematiku*, Grafomark, 2001.

[6] Desineni Subbaram Naidu, *Optimal control systems*, USA, 2003.

[7] Lj. Gajić, *Predavanja iz analize I*, Novi Sad, 2006.

[8] A. Dudarun, Z. Vrhovski, D. Žubrinić DUDARIN, *Uvod u teoriju optimalnog upravljanja i Pontrjaginov princip maksimuma*, Zagreb, 2012.

Biografija



Milana Stanković je rođena 10. decembra 1989. godine u Karlovcu. Završila je Osnovnu školu "Jovan Dučić" u Petrovaradinu 2004. godine, nakon čega upisuje gimnaziju "Laza Kostić" u Novom Sadu, i završava je 2008. godine.

Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2013. godine položila je sve predviđene ispite i stekla zvanje Matematičar primenjene matematike.

Nakon toga, oktobra 2013. godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene planom i programom zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2015. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Milana Stanković
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Pontrjaginov princip maksimuma sa primerima
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2016
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/76/0/0/9/12/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Optimizacija
ND

Ključne reči: varijacioni račun, Pontrjaginov princip maksimuma
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Glavni cilj ovog rada je prikazivanje Pontrjaginov principa maksimuma. Kada se minimizira funkcionela troška onda je moguće formirati Pontrjaginov Hamiltonijan. Ako upravljanje nije ograničeno onda koristimo formulaciju koja je ekvivalentna klasičnoj varijacionoj metodi optimalne kontrole, a ako je upravljanja ograničen primenićemo Pontrjaginov princip. Kroz primene reivestiranja profita, prigušenog harmonijskog oscilatora i sletanja sonde na površinu Marsa prikazali smo primenu Pontrjaginovog principa maksimuma.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 17.12.2015.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Milica Žigić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Milana Stanković
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: Pontryagin's Maximum Principle with examples
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2016
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5/76/0/0/9/12/0) (chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Optimization
SD

Subject/Key words: calculus of Variations, Pontryagin's maximum principle
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The main objective of this thesis is representation Pontryagin maximum principle. When the cost functional is minimized then it is possible to form Pontryagins Hamiltonian. If control is not limited then we use formulation that is equivalent to classical calculus of variations of optimal control theory, but if control is limited we will applay Pontryagin maximum principle. Through the examples reinvested profit, undamped harmonic oscillator and landing probe on Mars we showed use Pontryagin maximum

principle.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 17.12.2015.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ljiljana Gajić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Member: dr Milica Žigić, assistant professor at Faculty of Science in Novi Sad