UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Marina Marčeta

Teoreme konvergencije u Lebegovim i Soboljevim prostorima

-master rad-

Novi Sad, 2016.

Predgovor

Teoriju zasnovanu na prostorima Soboljeva uveo je ruski matematičar Sergej Soboljev (1908-1989), koji, takođe, uvodi pojmove distribucije, pojam slabog rešenja, kao i Soboljevu nejednakost. Prostori Soboljeva, kao Banahovi prostoru, su dosta interesantni u teoriji funkcionalne analize. Međutim, pravi značaj ovih prostora kao i ostalih pojmovi koje je uveo Soboljev ogleda se u njihovoj primeni u teoriji parcijalnih difrencijalnih jednačina, matematičke fizike, diferencijalne geometrije, kao i u mnogim drugim oblastima matematičke analize.

Prostori Soboljeva definisani su pomoću Lebegovih prostora (L^p). Lebegovi prostori istovremeno imaju široku primenu u fizici, statistici, finansijama i mnogim drugim disciplinama.

Zaključi o konvergenciji i kompaktnosti u prostorima Lebega i Soboljeva su često od vitalnog značaja u određivanju postojanja rešenja nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Stoga će i uslovi kompaktnosti i konvergencije biti obrađeni u okviru ovog rada.

Master rad se sastoji od tri poglavlja.

U prvom poglavlju je data definicija i osnovne osobine Lebegovih prostora, definisani su, između ostalih, i slab izvod, slabo rešenje diferencijalne jednačine, prostor distribucija, kao i operacija konvolucije. Pre same definicije prostora osvrnuli smo se na neke od osnovnih pojmova realne i funkcionalne analize koji su neophodni za razumevanje pojma i strukture L^p prostora.

U drugom poglavlju je dat kratak pregled prostora Sobojeva, njegovog duala i njihovih osobina.

Treće poglavlje je posvećeno teoremama konvergencije, pre svega Kolmogorov-Riesz-Tamarkin teoremi kao i njihovoj primeni.

Na kraju želim da izrazim posebnu zahvalnost svom mentoru, dr Jeleni Aleksić, na celokupnom strpljenju koje je pokazala prema meni tokom izrade ovog rada, na izvanrednim savetima i uputstvima koje mi je nesebično davala od početka mog studiranja do današnjeg dana. Zahvaljujem se i dr Stevanu Pilipoviću i dr Marku Nedeljkovu, članovima komisije za odbranu ovog rada.

Novi Sad, 2016. Marina Marčeta

Sadržaj

Poglavlje 1

Lebegovi (L^p) prostori

Prostori funkcija, a posebno L^p prostori igraju centralnu ulogu u mnogim pitanjima matematičke analize. Prostor L^1 se pojavljuje već kod uvođenja Lebegove mere, kao prostor funkcija koje su Lebeg-integrabilne. Sa ovim prostorom je direktno povezan njegov dual L^∞, prostor ograničenih funkcija sa supremum normom koja je nasleđena iz nekih drugih, više poznatih prostora funkcija. Od posebnog značaja su prostori L^2 čije je poreklo blisko povezano sa osnovnim problemima Furijeove analize. Ovaj prostor, L^2, se najviše i koristi jer je jedini Lebegov prostor koji je i Hilbertov, tj. na kome se može definisati skalarni proizvod.

U ovom poglavlju ćemo se koncentrisati na osnovne osobine L^p prostora. Pre toga, podsetimo se nekih pojmova koji su nam neophodni za definisanje L^p prostora.

1.1 Uvodni pojmovi

U ovom odeljku ćemo dati kratak osvrt na osnovne pojmove funkcionalne analize.

Definicija 1.1.1 (Vektorski prostor) *Neka je X neprazan skup i* $(K, +, \cdot)$ *polje. Skup X je vektorski ili linearni prostor nad poljem skalara K ako ima sledeću strukturu:*

1) *Definisana je operacija + u skupu X (sabiranje vektora), takva da je $(X, +)$ Abelova grupa,*

2) *Definisana je operacija (množenje vektora skalarom) koja svakom vektoru $x \in X$ i svakom skalaru $\lambda \in K$ pridružuje vektor $\lambda x \in X$, pri čemu za sve $x, y \in X$ i $\alpha, \lambda \in K$ važi sledeće:*

   (1) $\lambda(\alpha x) = (\lambda\alpha)x$,

   (2) $(\lambda + \alpha)x = \lambda x + \alpha x$,

   (3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

   (4) $1x = x$.

Definicija 1.1.2 (Topološki prostor) *Neka je X proizvoljan skup, topologija na X je kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova iz X za koje važi*

1) $X \in \mathcal{O}$ *i* $\emptyset \in \mathcal{O}$,

2) *Unija svake kolekcije podskupova iz X pripada skupu X,*

3) *Presek svake konačne kolekcije podskupova iz X pripada skupu X.*

Uređeni par $(X, \mathcal{O})$ se naziva topološki prostor, dok elementi kolekcije $\mathcal{O}$ predstavljaju otvorene skupove u tom prostoru.

Otvoren skup koji sadrži $x \in X$ naziva se okolina tačke x. Komplement $X \setminus O$ proizvoljnog otvorenog skupa O naziva se zatvoren skup. Zatvaranje skupa A, u oznaci $\bar{A}$, je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A.

Definicija 1.1.3 *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je Hausdorfov, ako za svako $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje disjunktne okoline.*

Definicija 1.1.4 *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna ako njena inverzna slika $f^{-1}(O) = \{x \in X : f(x) \in O\}$ pripada $\mathcal{O}_X$ za svako $O \in \mathcal{O}_Y$.*

Jačina topologije na X je direktno proporcionalna broju neprekidnih funkcija na datom prostoru, dok je jačina topologije na Y obrnuto proporcionalna broju neprekidnih funkcija.

Definicija 1.1.5 *Topološki vektorski prostor (TVP) je Hausdorfov topološki prostor koji je istovremeno vektorski prostor kod koga su operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom neprekidne.*

Definicija 1.1.6 (Funkcionela) *Funkciju iz nekog vektorskog prostora nad određenim vektorskim poljem u to isto polje (najčešće $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) nazivamo funkcionela.*

Funkcionela *f* je neprekidna u TVP ukoliko predstavlja neprekidno preslikavanje iz X u $\mathbb{C}$, gde $\mathbb{C}$ ima uobičajenu topologiju indukovanu euklidskom metrikom.

Skup svih neprekidnih funkcionela na TVP X nazivamo dualom prostora X i obeležavamo sa X'.

Definicija 1.1.7 (Metrika) *Preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ je metrika na vektorskom prostoru X ukoliko su za svako $x, y, z \in X$ zadovoljeni sledeći uslovi:*

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*,*

(2) $d(x, y) = d(y, x)$*,*

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*.*

Uređeni par (X, d) naziva se metrički prostor. Svaki metrički prostor indukuje topološki prostor, gde je otvoren skup definisan preko otvorenih lopti $L(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$. Svaki podskup $A \subset X$ se naziva otvorenim ako za svako $x \in A$ postoji $r > 0$ takvo da je $L(x, r) \subset A$.

Za dve različite metrike na X kažemo da su ekvivalentne ukoliko indukuju istu topologiju na X.

Definicija 1.1.8 (Norma) *Preslikavanje* $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ *je norma na vektorskom prostoru* X *ukoliko važe sledeći uslovi:*

(1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*,*

(2) $f(cx) = |c|f(x)$*, za svako* $x \in X$ *i svako* $c \in \mathbb{C}$*,*

(3) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ *za svako* $x, y \in X$*.*

Normu obično obeležavamo sa $\| \cdot \|$. Vektorski prostor X na kome je definisana norma nazivamo normiranim prostorom.

Svaka norma f na skupu X indukuje metriku d na X na sledeći način: $d(x, y) = f(x - y)$, za svako $x, y \in X$.

Definicija 1.1.9 *Niz* $\{x_n\}$ *u normiranom prostoru* $(X, \| \cdot \|)$ *konvergira ka* x *ako i samo ako je* $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$.

Za skup $A \subset X$ kažemo da je gust ako je svako $x \in X$ granica niza elemenata iz A (odnosno, ukoliko je njegovo zatvaranje skup X). Norimrani prostor je separabilan ukoliko ima gust, prebrojiv podskup.

Definicija 1.1.10 *Normiran prostor X je Banahov ukoliko svaki Košijev niz u* X *konvergira u* X*.*

Svaki normirani prostor je ili Banahov ili gust podskup nekog Banahovog prostora.

Banahov prostor X za koji važi da je dual duala prostora X jednak upravo prostoru X, naziva se refleksivan metrički prostor.

Definicija 1.1.11 *Ako je X vektorski prostor, funkcionela* $(\cdot, \cdot)_X$ *definisana na* $X \times X$ *se naziva unutrašnji proizvod na* X*, ako za svako* $x, y, z \in X$ *i* $a, b \in \mathbb{C}$ *važi:*

(1) $(x, y)_X = \overline{(y, x)_X}$

(2) $(ax+by,z)_X = a(x,z)_X + b(y,z)_X$

(3) $(x,x)_X = 0$ *akko* $x = 0$.

Ukoliko imamo definisan skalarni proizvod, možemo definisati normu na sledeći način

$$\| x \| = (x,x)_X^{\frac{1}{2}}.$$

Banahov prostor na kome se može definisati unutrašnji (skalarni) proizvod naziva se Hilbertov prostor.

Definicija 1.1.12 *Homeomorfizam je neprekidna bijekcija takva da je njena inverzna funkcija takođe neprekidna.*

Homeomorfizmi očuvavaju topološke osobine prostora.

Definicija 1.1.13 *Injekcija* $f : X \to Y$ *koja je homemorfizam između* X *i* $f(X)$ *naziva se potapanje, u oznaci* $X \hookrightarrow Y$.

Definicija 1.1.14 *Neka je dat normirani prostor* $(X, \|\|)$. *Skup* $A \subset X$ *je kompaktan ukoliko svaki niz u* A *ima podniz koji konvergira u* X *ka granici iz* A.

Kompaktni skupovi su ograničeni i zatvoreni, ali nije svaki ograničen i zatvoren skup kompaktan. Za skup A kažemo da je prekompaktan ako je $\bar{A}$ kompaktan skup.

Teorema 1.1.15 *Skup* A *je prekompaktan u Banahovom prostoru* X *ako i samo ako za svaki pozitivan broj* ε *postoji konačan podskup* N_ε *elemenata iz* X *sa osobinom*

$$\bigcup_{x \in N_\varepsilon} L(x,\varepsilon) = A.$$

Definicija 1.1.16 *Neka je* $(X, \mathcal{O})$ *topološki prostor i* $A \subset X$. *Otvoreni pokrivač skupa* A *je kolekcija otvorenih skupova* $\mathcal{A}$ *čija unija sadrži skup* A. *Podpokrivač skupa* A *je podkolekcija* $\mathcal{A}_1$ *kolekcije* $\mathcal{A}$ *čija unija sadrži skup* A.

Definicija 1.1.17 *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je kompaktan ako svaki otvoren pokrivač od X ima konačan podpokrivač.*

1.2 Prostori diferencijabilnih funkcija

Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, a $\bar{\Omega}$ njegovo zatvaranje. Parcijalne izvode funkcije $u : \Omega \to \mathbb{R}$ označavamo sa:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \partial_i u(x) = u_{x_i}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \partial^2_{i,j} u(x) = u_{x_i x_j}, ...$$

Za označavanje izvoda višeg reda uvodimo pojam multiindeksa.

Multiindeks je svaka $n-$torka $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dužina multiindeksa je broj $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Kažemo još da je α multiindeks reda $|\alpha|$. Koristićemo oznaku

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1}, ..., \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Ako je $\alpha_i = 0$ za neko i, to znači da nemamo izvoda po promenjivoj x_i. Ako je $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, tada $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_q}$ označava diferencijalni operator reda $|\alpha|$.

$C^k(\Omega)$ je skup svih funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ koja ima sve neprekidne izvode na Ω, zaključno sa redom $0 \leq k \leq \infty$. Ako je $u(x) \in C(\Omega)$ ograničena i uniformno neprekidna na Ω, onda postoji jedinstveno, ograničeno i neprekidno produženje ove funkcije na $\bar{\Omega}$. Slično definišemo vektorski prostor $C^k(\bar{\Omega})$ kao prostor koji se sastoji od funkcija $u(x) \in C^k(\Omega)$ za koje je $D^\alpha u(x)$ ograničeno i uniformno neprekidno na Ω za $0 \leq |\alpha| \leq k$.

$C^k(\bar{\Omega})$ je Banahov prostor sa normom definisanom na sledeći način:

$$\| u \|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Norma na $C^k(\Omega)$ definisana je slično:

$$\| u \|_{C^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

1.3 Lebegova mera i integral

U ovom odeljku ćemo navesti neke od osnovnih pojmova teorije mere na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.3.1 *Kolekcija Σ podskupova od $\mathbb{R}^n$ naziva se sigma algebra ako važi sledeće:*

(1) $\mathbb{R}^n \in \Sigma$,

(2) Ako $A \in \Sigma$, *onda* $A^C = \mathbb{R}^n \setminus A \in \Sigma$,

(3) Za svako $A_i \in \Sigma$, *i=1,2,... važi* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Definicija 1.3.2 *Funkcija* $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ *za koju važi*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad A_i \in \Sigma, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

naziva se pozitivna mera na Σ.

Teorema 1.3.3 *Postoji* σ*-algebra* Σ *podskupova od* $\mathbb{R}^n$ *i mera* μ *na* Σ *takve da važi:*

(1) Svaki otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ *pripada* Σ,

(2) Ako je $A \subset B$, $B \in \Sigma$ *i* $\mu(B) = 0$, *tada* $A \in \Sigma$ *i* $\mu(A) = 0$,

(3) Ako je $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, ..., n\}$, *tada* $A \in \Sigma$ *i važi* $\mu(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_j - a_j)$,

(4) μ je invarijantna na translaciju, odnosno za svako $A \in \Sigma$ i svako $x_0 \in \mathbb{R}^n$ važi da je $\mu(A + x_0) = \mu(A)$, gde je $A + x_0 = \{x + x_0, x \in A\}$.

Elementi kolekcije Σ se nazivaju Lebeg merljivi podskupovi od $\mathbb{R}^n$, dok funkcija μ predstavlja Lebegovu meru na $\mathbb{R}^n$. Lebegova mera u u $\mathbb{R}^n$ je takođe rotaciono invarijantna.

Lebegova mera, takođe može da se definiše preko Lebegove spoljašnje mere na sledeći način.
Dužinu intervala $I = (a, b)$, obeležavamo sa $l(I)$ i računamo $l(I) = |b - a|$.

Definicija 1.3.4 *Za svaki skup $E \subset \mathbb{R}$ definišemo Lebegovu spojašnju meru $\mu^*(E)$ na sledeći način,*

$$\mu^*(E) = inf\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : I_k = (a_k, b_k) \wedge E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

Definicija 1.3.5 *Skup $E \subset \mathbb{R}$ je Lebeg merljiv ako za svako $A \subseteq \mathbb{R}$ važi*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C).$$

Definicija 1.3.6 *Ako je E Lebeg merljiv skup, tada je njegova Lebegova mera $\mu(E)$ jednaka Lebegovoj spoljašnjoj meri, odnosno,*

$$\mu(E) = \mu^*(E).$$

Napomena 1.3.7 *Kažemo da je skup $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebegove mere nula, u oznaci $\mu(A) = 0$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prebrojiva unija C_i paralelopipeda u $\mathbb{R}^n$ takva da je mera skupa $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ manja od ε.*

Lebegova mera predstavlja prirodno proširenje pojma zapremine u $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^n$.

Neka je $\mathcal{B}$ presek svih σ-algebri koje sadrže otvoren skup. $\mathcal{B}$ je tada, takođe, σ-algebra i naziva se Borelova σ-algebra. $\mathcal{B}$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene skupove. Familija $\mathcal{M}$ svih Lebeg merljivih skupova u $\mathbb{R}^n$ je takođe σ-algebra. Svi skupovi u Borelovoj algebri su merljivi, ali nisu svi merljivi skupovi Borelovi. Takođe, postoji veliki broj podskupova od $\mathbb{R}^n$ koji nisu merljivi. Ako sa $\mathcal{M}$ obeležimo familiju svih Lebeg merljivih skupova u $\mathbb{R}^n$, tada važi sledeći odnos: $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}$ (gde $2^{\mathbb{R}^n}$ predstavlja ukupan broj podskupova od $\mathbb{R}^n$).

Definicija 1.3.8 *Funkcija* $f : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $A \in \Sigma$, *je merljiva ako je skup*

$$\{x : f(x) > a\}$$

merljiv za svako $a \in \mathbb{R}$.

Funkcija koja slika prostor sa σ-algebrom u topološki prostor je merljiva ako je inverzna slika otvorenog skupa merljiv skup.

Definicija 1.3.9 *Funkcija*

$$\kappa_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

naziva se karakteristična funkcija skupa A.

Realnu funkciju s na $\mathbb{R}^n$ zvaćemo jednostavnom ukoliko je njena slika konačan skup u $\mathbb{R}$. Ako je za svako x iz domena, $s(x) \in \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, onda, očito, važi

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \kappa_{A_i},$$

gde je $A_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = a_i\}$.

Neka je $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. Definišemo

$$\int_A s(x)dx = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$$

i

$$\int_A f(x)dx = sup \int_A s(x)dx,$$

gde se supremum uzima po merljivim, jednostavnim funkcijama $s(x)$ koje su jednake nuli van A i zadovoljavaju: $0 \leq s(x) \leq f(x)$ na A. Ako $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f^+ = max(f, 0)$ i $f^- = -min(f, 0)$, gde su f^+ i f^- merljive i nenegativne, tada, očigledno važi $f = f^+ - f^-$.

Definicija 1.3.10 *Lebegov integral realne funkcije f je:*

$$\int_A f(x)dx = \int_A f^+(x)dx - \int_A f^-(x)dx.$$

Ako je ovaj integral konačan, kažemo da je funkcija f Lebeg integrabilna na A. Klasa Lebeg integrabilnih funkcija se obeležava sa $L^1(A)$.

Definicija 1.3.11 *Neka je $f = u + iv$, gde su u i v realne funkcije. $f \in L^1(A)$ ako $|f| = (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \in L^1$. Za takvo $f \in L^1(A)$ Lebegov integral je*

$$\int_A f(x)dx = \int_A u(x)dx \quad + \quad i \int_A v(x)dx.$$

Napomena 1.3.12 *Funkcija $f = u + iv$ je merljiva ako i samo ako su funkcije u i v merljive.*

Lako se pokazuje da $f \in L^1(A)$ akko $u, v \in L^1(A)$.

Teorema 1.3.13 *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ merljiv skup i $\{f_n\}$ konvergentan niz kompleksnih merljivih funkcija na A. Ako postoji funkcija $g \in L^1(A)$ takva da je $|f_n(x)| \leq g(x)$ za svako n i za svako $x \in A$, tada*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Definicija 1.3.14 *Funkcija u definisana skoro svuda na Ω je lokalno integrabilna na Ω ako $u \in L^1(A)$ za svaki merljiv skup $A \subset \Omega$ za koji važi $\bar{A} \subset \Omega$ i $\bar{A}$ je kompaktan. Prostor svih lokalno integrabilnih funkcija obeležavamo sa $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definicija 1.3.15 *Nosač funkcije $u : \Omega \to \mathbb{R}$, u oznaci $supp\, u$, je komplement najvećeg otvorenog skupa na kojem je u identički jednako nula. Odnosno*

$$supp\, u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 1.3.16 *Ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Riman integrabilna sa kompaktnim nosačem, tada je f i Lebeg integrabilna i Rimanov integral funkcije f jednak je Lebegovom integralu funkcije f, odnosno*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu = \mathcal{R}(f).$$

Za razliku od Riman integrabilnih funkcija, Lebeg integrabilne funkcije ne moraju biti ograničene, kao ni skup na kome inegralimo. Takođe, svaki apsolutno konvergentan nesvojstveni integral postoji kao Lebegov integral.

1.4 L^p prostori

Među funkcijama koje su Lebeg merljive uvodimo relaciju ekvivalencije "jednake skoro svuda na Ω", u oznaci $f \backsim g$ ako je skup $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ Lebegove mere 0.

Definicija 1.4.1 *Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je povezan ako se ne može rastaviti na uniju dva neprazna, disjunktna, otvorena podskupa.*

Neka je $1 \leq p < \infty$. Od sada će Ω označavati otvoren, povezan podskup od $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.4.2 *Lebegov prostor* (L^P) *dat je sa*

$$L^p = \{f/ \backsim : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \textit{ je merljiva, } \int_\Omega |f(x)|^p < \infty\}.$$

Ovo je Banahov prostor sa normom:

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = \| f \|_p = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Vidimo da $\| f \|_{L^p(\Omega)} = 0$ ne implicira da je $f = 0$, već da je $f = 0$ skoro svuda te je, stoga, prostor L^p definisan na skupu klasa ekvivalencije funkcija koje su jednake skoro svuda. Ipak, zbog jednostavnosti, poistovećujemo funkcije sa elementom klase i pišemo da $f \in L^p(\Omega)$ ako važi $\int_\Omega |f(x)|^p < \infty$.

Za $1 \leq p < \infty$ prostor $L^p(\Omega)$ je separabilan. Specijalno, prostor $L^2(\Omega)$ je i Hilbertov sa skalarnim proizvodom definisanim na sledeći način

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Definicija 1.4.3 *Neka je* $1 \leq p < \infty$. *Konjugovani indeks* q *definisan je relacijom*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Za $p = \infty$ imamo $q = 1$ i obratno. Indeks q naziva se i dualni za p. Prilikom pokazivanje nekih od osobina prostora L^p koristićemo sledeće tri nejednakosti:

1) *Jungova nejednakost:* Neka su $a, b > 0$ i $1 < p < \infty$. Tada je

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Dokaz: Koristimo činjenicu da je funkcija $E(x) = e^x$ konveksna. Imamo,

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = E(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q)$$
$$\leq \frac{1}{p}E(\ln a^p) + \frac{1}{q}E(\ln b^q) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

$\square$

2) *Helderova nejednakost:* Neka su $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ i $v \in L^q(\Omega)$, tada $uv \in L^1(\Omega)$ i važi

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \ \leq \ \| u \|_p \| v \|_q .$$

Dokaz: Kako su slučajevi $p = 1$ i $p = \infty$ trivijalni, pokazaćemo da gornja nejednakost važi za $1 < p < \infty$. Tvrdnja je trivijalna ako je jedna od funkcija jednaka nuli. Pretpostavimo, stoga, da su obe različite od nule. Primenom Jungove nejednakosti dobijamo da je

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v(x)|^q dx.$$

Ukoliko ovu nejednakost primenimo na funkcije $\frac{u}{\|u\|_p}$ i $\frac{v}{\|v\|_q}$ dobijamo

$$\frac{1}{\| u \|_p \| v \|_q}\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

odakle sledi tvrđenje.

$\square$

Za $p = q = 2$ dobija se Švarcova nejednakost, odnosno,

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \ \leq \ \| u \|_2 \| v \|_2 .$$

3) *Nejednakost Minkovskog:* Za svako $1 \leq p \leq \infty$ važi

$$\| u + v \|_p \leq \| u \|_p + \| v \|_p .$$

Dokaz: Primenom Helderove nejednakosti imamo da je

$$\| u + v \|_p^p = \int_\Omega |u(x) + v(x)|^p dx$$

$$\leq \int_\Omega |u(x) + v(x)|^{p-1}(|u(x)| + |v(x)|)dx$$

$$\leq \Big(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^p dx \Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \Big(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^p dx \Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_\Omega |v(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \| u + v \|_p^{p-1} (\| u \|_p + \| v \|_p).$$

□

Napomena 1.4.4 *Nejednakost Minkovskog je ujedno i nejednakost trougla za normu* $\| \cdot \|_p$.

Upravo korišćenjem nejednakosti Minkovskog se pokazuje da $L^p(\Omega)$ ima strukturu linearnog prostora i da je $\| u \|_p$ norma na $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$.

Definicija 1.4.5 *Merljiva funkcija u na Ω je esencijalno ograničena ako postoji konstanta K takva da je $|u(x)| \leq K$ skoro svuda na Ω. Najmanje takvo K je esencijalni supremum od $|u|$ na Ω i označava se sa $ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$. $L^\infty(\Omega)$ predstavlja vektorski prostor svih esencijalno ograničenih funkcija na Ω. Norma na L^∞ data je sa*

$$\| u \|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Analogno definiciji lokalno integrabilnih funkcija, prostor $L^1_{loc}(\Omega)$ definišemo na sledeći način

$L^p_{loc}(\Omega)\{f$ je merljiva $: f \in L^p(K)$za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega\}$.

Teorema 1.4.6 *Neka je* $\int_\Omega dx = \mu(\Omega) < \infty$ *i* $1 \le p \le r \le \infty$. *Ako* $u \in L^r(\Omega)$, *tada* $u \in L^p(\Omega)$ *i*

$$\| u \|_p \ \le \ (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \| u \|_r,$$

odnosno važi

$$L^r(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Dokaz: Za $p = r$ tvrđenje očigledno sledi. Neka je $1 \le p < r \le \infty$ i $u \in L^r(\Omega)$. Tada $u^p \in L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$ i Helderova nejednakost daje

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^p dx \ &\le \ \Big(\int_\Omega |u(x)|^r dx \Big)^{\frac{p}{r}} \Big(\int_\Omega dx \Big)^{1-\frac{p}{r}} \\ &\le \ \Big(\int_\Omega |u(x)|^r dx \Big)^{\frac{p}{r}} \Big(\int_\Omega dx \Big)^{1-\frac{p}{r}}\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$\| u \|_p \ \le \ (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \| u \|_r \, .$$

Slično se može pokazati i da je $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ za $1 \le p \le \infty$ i svaki domen Ω (zbog konačnosti Lebegove mere kompaktnog skupa).

$\square$

Helderova nejednakost, između ostalog pokazuje da svaka funkcija $g \in L^q(\Omega)$ generiše neprekidnu linearnu funkcionelu nad $L^p(\Omega)$ datu sa

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Može se pokazati i da je svaka neprekidna linearna funkcionela nad $L^p(\Omega)$ upravo takvog oblika.

Teorema 1.4.7 *Neka je* $1 \le p < \infty$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tada je*

$$\Big(L^p(\Omega) \Big)' = L^q(\Omega)$$

u smislu da za svaku neprekidnu linearnu funkcionelu l na $L^p(\Omega)$ postoji jedinstveno $g \in L^q(\Omega)$ takvo da je

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

za sve $f \in L^p(\Omega)$. Štaviše, $\| l \| = \| g \|_q$, gde $\|\|$ označava dualnu normu.

Za $p = \infty$, ne važi $(L^\infty)' = L^1$.

1.5 Distribucije i slabi izvodi

1.5.1 Istorija i motivacija

Kasnih 20ih godina prošlog veka Dirak [1] je u studiji kvantne teorije procesa kolizije uveo sledeću jednačinu

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x),$$

gde je δ funkcija koja je definisana na $\mathbb{R}$ i zadovoljava sledeće uslove:

(1) $\delta(x) = 0$, za $x \neq 0$,

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$,

(3) Za svaku neprekidnu funkciju f, definisanu na $\mathbb{R}$ važi $f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(a-x)dx$, u svakoj tački $a \in \mathbb{R}$,

(4) δ je beskonačno mnogo puta diferencijabilna u smislu da za bilo koju k puta neprekidno diferencijabilnu funkciju f na $\mathbb{R}$ važi $f^{(k)}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(k)}(a-x)dx$, švakoj tački $a \in \mathbb{R}$,

(5) Važi $\delta(x) = H'(x)$, gde je $H(x)$ Hevisajdova funkcija data sa

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

[1] Paul Dirac (1902-1984), britanski fizičar i Nobelovac, smatra se koosnivačem kvantne fizike.

δ je postala poznata kao Dirakova delta funkcija i privukla je pažnju brojnih matematičara tog vremena, jer se nije uklapala u klasične definicije funkcije. Kasnije se njome bavio Lebeg [2] i posmatrao je kao pozitivnu meru definisanu na skupu E, podskupu σ-algebre na $\mathbb{R}$, a potom i Švarc[3] koji je inspirisan δ funkcijom uveo teoriju distribucija.

Teorija distribucija je koncept koji generalizuje pojam funkcije. Lepota ove teorije leži u činjenici da ovakva nova notacija poznaje operator diferenciranja, pri čemu je svaka distribucija beskonačno diferencijabilna. Potreba za ovakvom generalizacijom se javljala mnogo puta u istoriji matematike.

Posmatrajmo talasnu jednačinu

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

kao primer na $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ koja opisuje vibriranje beskonačne žice. Njeno opšte rešenje dato je sa $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$. U realnosti se dešava da su F i G "rešenja" talasne jednačine, čak i ako nisu dva puta diferencijabilne, na primer, ako je F Hevisajdova funkcija, a $G \equiv 0$. Pitanje koje se postavljalo je kako da se matematički opišu ovakva rešenja.

1.5.2 Distribucije

Skup $C_0^k(\Omega)$ definišemo kao $C_0^k(\Omega) = \{u(x) \in C(\Omega) : \quad u(x)$ ima kompaktan nosač$\}$. Skup $C_0^\infty(\Omega)$ (klasa svih beskonačno diferencijabilnih funkcija na Ω sa kompaktnim nosačem) nazivamo prostor test funkcija. Ovaj prostor je prvi koristio kao test prostor Švarc.

Uvedimo sada pojam konvergencije u smislu prostora $\mathcal{D}(\Omega)$.

[2]Henri Leon Lebesgue (1875-1941), francuski matematičar.
[3]Laurent Schwartz (1915-2002) francuski matematičar, tvorac teorije distribucija.

Definicija 1.5.1 *Kažemo da niz $\{\phi_n\} \in C_0^\infty$ konvergira u smislu prostora $\mathcal{D}(\Omega)$ ka funkciji $\phi \in C_0^\infty$ ako važe sledeća dva uslova:*

(1) Postoji prekompaktan skup K, $\bar{K} \subset \Omega$, takav da je $supp\phi_n \subset K$ za svako n,

(2) $\lim_{n\to\infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformno na K za svaki multiindeks α.

Prostor C_0^∞ sa gore definisanom konvergencijom označavamo sa $\mathcal{D}(\Omega)$ i njegove elemente ćemo nazivati test funkcijama.

Definicija 1.5.2 *Neprekidna linearna funkcionela nad $\mathcal{D}(\Omega)$ naziva se distribucija.*

Prostor distribucija, dual prostora $\mathcal{D}(\Omega)$, obeležava se sa $\mathcal{D}'(\Omega)$. Distribucije preslikavaju $\mathcal{D}(\Omega)$ u $\mathbb{C}$, dok neprekidnost važi u nizovnom smislu, tj.

$$T(\phi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\phi), \text{ za } j \to \infty \text{ kada kod } \phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi.$$

Delovanje distribucije T na test funkciju ϕ označavamo sa $\langle T, \phi \rangle$, ili jednostavno $T(\phi)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ u odnosu na uobičajene operacije sabiranja i množenja.

Kažemo da $T_n \to T$ u prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$ akko $\langle T_n, \phi \rangle \to \langle T, \phi \rangle$ u $\mathbb{C}$ za svako ϕ iz $\mathcal{D}(\Omega)$.

Jedna od najznačajnijih distribucija je Dirakova, δ_a, distribucija, data sa $\langle \delta_a, \phi(x) \rangle = \phi(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Svakoj funkciji $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ odgovara distribucija $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definisana sa

$$T_u = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \qquad \phi \in \mathcal{D}.$$

Očito, ovako definisano T_u je linearna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$. Pokažimo da je T_u neprekidno preslikavanje. Neka $\phi_n \to \phi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$. Tada postoji prekompaktan skup K takav da $supp(\phi_n - \phi) \subset K$ za svako n. Stoga je

$$|T_u(\phi_n) - T_u(\phi)| \leq \sup_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)| dx.$$

Kako $\phi_n \to \phi$, desna strana teži nuli, pa je T_u neprekidno preslikavanje, a samim tim i distribucija. Ovakve distribucije nazivaju se regularne distribucije.

Nisu sve distribucije regularne. Lako se može pokazati da Dirakova δ distribucija za $a = 0$ data sa $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, za $0 \in \Omega$, nije regularna, tj. ne postoji lokalno integrabilna funkcija δ takva da za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$\int_\Omega \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0).$$

Napomena 1.5.3 *Funkciju u poistovećujemo sa regularnom distribucijom T_u. Kako je $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ za svaki domen Ω, prostor $L^p(\Omega)$ je, takođe prostor (regularnih) distribucija.*

Definicija 1.5.4 *Prostor distribucija $A \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ naziva se normalan prostor distribucija nad Ω ako je $C_0^\infty(\Omega)$ gust u A i ako je identičko preslikavanje $\mathcal{D}(\Omega) \to A$ neprekidno (odnosno iz $u_n \to u$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ sledi $u_n \to u$ u A). Dual prostora A smatramo potprostorom od $\mathcal{D}'(\Omega)$ (restrikcije sa A na $\mathcal{D}(\Omega)$ su distribucije).*

1.5.3 Pojam slabog izvoda

Motivacija za izbor test funkcija iz skupa C_0^∞ je sledeća: Ako $f \in C^1(a, b)$ i $\phi \in C_0^\infty(a, b)$, onda, po klasičnoj parcijalnoj integraciji, imamo:

$$\int_a^b \phi(x) f'(x) dx = -\int_a^b f(x)\phi'(x) dx.$$

Prvi sabirak koji se javlja kod parcijalne integracije u ovom slučaju nemamo, jer ϕ ima kompaktan nosač, što znači da je jednaka nuli u krajnjim tačkama a i b, te ovo opravdava izbor kompaktnog nosača.

Ukoliko $f \in C^k(a,b)$, tada se gore pomenuta parcijalna integracija može ponoviti k puta, odnosno imamo da je

$$\int_a^b \phi(x) f^{(k)}(x)dx = (-1)^k \int_a^b f(x)\phi^{(k)}(x)dx.$$

Ovo je poslužilo i kao motivacija za uvođenje pojma slabog izvoda.

Definišimo prvo izvod $D^\alpha T$ distribucije T na sledeći način,

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi).$$

Pokažimo da je ovako definisan izvod distribucije takođe distribucija. Kako $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $D^\alpha T$ jeste funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$. Jasno $D^\alpha T$ je linearno. Pokažimo još da je neprekidno.

Neka $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$. Tada je

$$supp(D^\alpha \phi_j) \subset supp(\phi_j) \subset K$$

za neki kompaktan podskup K od Ω. Takođe

$$\| \phi_j - \phi \| \ \to \ 0 \ \Rightarrow \ \| D^\alpha \phi_j - D^\alpha \phi \| \ \to \ 0.$$

Dakle, $T(D^\alpha \phi_j) \ \to \ T(D^\alpha \phi)$ pa sledi da $D^\alpha T(\phi_j) \ \to \ D^\alpha T(\phi)$.

Zaključujemo da svaka distribucija ima izvode proizvoljnog reda u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Štaviše, preslikavanje D^α iz $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekidno. Ako $T_n \ \to \ T$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ i ako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, onda je

$$(D^\alpha T_n)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_n(D^\alpha \phi) \ \text{ i } \ (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) = (D^\alpha T)(\phi).$$

Definicija 1.5.5 *Neka $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Tada može, a i ne mora, postojati funkcija $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da je $T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ako* *takva funkcija, v_α, postoji, ona je jedinstvena do na skup mere nula i zove se* ***slabi ili distribucioni*** *parcijalni izvod od u i označava se sa $D^\alpha u$.*

Odnosno, $D^\alpha u = v_\alpha$ u slabom (distributivnom) smislu, ako $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ zadovoljava jednakost

$$\int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)dx = (-1)^\alpha \int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx.$$

Ako u ima izvod u klasičnom smislu, onda je to izvod i u distributivnom smislu. S druge strane, ako lokalno integrabilna funkcija u ima slabi izvod, onda je ona skoro svuda diferencijabilna i u tim tačkama je slabi izvod jednak jakom.

Primer 1.5.6 *Uzmimo da je $\Omega = \mathbb{R}$ i $f(x) = |x|$. Ova funkcija nema izvod u nuli u klasičnom smislu. Međutim lako se pokazuje, primenom parcijalne integracije, da funkcija $f(x)$ ima slabi prvi izvod jednak $sgn(x)$ u $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Ova funkcija nema slabi izvod drugog reda u $L^1_{loc}(\Omega)$. Ukoliko proširimo posmatranje izvoda u prostor distribucija $\mathcal{D}'(\Omega)$, imamo da je $|x|'' = 2\delta_0$.

1.5.4 Konvolucija distribucija

Definicija 1.5.7 *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tada definišemo konvoluciju ove dve funkcije sa*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,\ x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.5.8 *Za $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i S, distribuciju nad $\mathbb{R}^n$ sa kompaktnim nosačem, definišemo konvoluciju distribucija*

$$\langle T * S\rangle := \langle T(x), \langle S(y), \phi(x+y)\rangle\rangle,\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.5.5 Furijeova transformacija i temperirane distribucije

Definicija 1.5.9 *Vektorski prostor brzoopadajućih funkcija je definisan skupom*

$$S = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| = 0, \textit{ za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

i konvergencijom koja je opisana na sledeći način. Kažemo da niz $\{\phi_j\}_j \subset S(\mathbb{R}^n)$ *konvergira ka nuli u* S, $\phi_j \xrightarrow{S} 0$, *kada* $j \to \infty$, *ako važi*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| = 0, \textit{ za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Iz definicije sledi da je $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ i $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$ implicira $\phi_j \xrightarrow{S} \phi$. S druge strane, postoje funkcije koje su u S, a nisu u $\mathcal{D}$, jedan takav primer je funkcija $\phi(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.5.10 *Vektorski prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad* $S(\mathbb{R}^n)$ *nazivamo prostor temperiranih distribucija, u oznaci* $S'(\mathbb{R}^n)$.

Elementi prostora $S'(\mathbb{R}^n)$ se nazivaju temperirane distribucije ili distribucije sporog rasta. Neprekidnost, konvergenciju i ostale osobine definišemo isto kao i kod $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Važi da je

$$S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \text{jer je } \mathcal{D} \subset S.$$

Definišimo sada klasičnu Furijeovu transformaciju $\mathcal{F}$ na prostorima $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$ na sledeći način. Neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(y) e^{-ixy} dy \in L^q(\mathbb{R}^n),$$

gde je q konjugovani indeks za p.

Inverzna Furijeova transformacija $\mathcal{F}^{-1}$ data je sa:

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(y) e^{ixy} dy.$$

Može se pokazati da ako $\phi \in S$, onda $\mathcal{F}(\phi)$, $\mathcal{F}^{-1}(\phi) \in S$;

$$(2\pi)^{-n}\phi = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\phi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\phi.$$

Štaviše, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ su injektivna preslikavanja prostora $S(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}S = \mathcal{F}^{-1}S = S.$$

Takođe važi da je

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\phi))(x) = \phi(-x),$$

a može se pokazati i da je za svako $1 \leq p \leq \infty$,

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n),$$

u smislu da za $f \in L^p$ važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \leq \infty, \text{ za } \phi \in S.$$

Kako je $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p((R)^n)$ sledi da možemo smatrati da je $S(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$. Zato sada možemo i proširiti Furijeovu transformaciju sa S na S'.

Definicija 1.5.11 *Neka $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}T$ i $\mathcal{F}^{-1}T$ se definiše sa*

$$(\mathcal{F}T)(\phi) = T(\hat{\phi}) \textit{ i } (\mathcal{F}^{-1}T)(\phi) = T(\check{\phi}),\ \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Ponovo važi da je

$$\mathcal{F}S' = \mathcal{F}^{-1}S' = S'.$$

Ako je $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ i α multiindeks, onda $x^\alpha T \in S'(\mathbb{R}^n)$ i $D^\alpha T \in S'(\mathbb{R}^n)$, i važi

(1) $\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|}x^\alpha(\mathcal{F}T)$,

(2) $\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|}D^\alpha(\mathcal{F}T)$.

Na kraju, ako $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ za $1 \leq p \leq \infty$, onda znamo da $\hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$. Može se pokazati i da restrikcije od $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$ generišu unitarne operatore na $L^2(\mathbb{R}^n)$ (odnosno $\| \mathcal{F}f \| = \| f \|$, $\mathcal{F}L^2 = L^2$) i važi

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = id_{L^2}.$$

Poglavlje 2

Prostori Soboljeva

2.1 Definicija i osobine

Definišimo funkcionelu $\| \cdot \|_{m,p}$, gde $m \in \mathbb{N}_0$ i $1 \leq p \leq \infty$ na sledeći način

$$\| u \|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \text{ ako je } 1 \leq p < \infty, \tag{2.1}$$

$$\| u \|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_\infty,$$

za sve funkcije u za koje desna strana ima smisla. Jasno je da je na ovaj način definisana norma na vektorskom prostoru funkcija gde je desna strana konačna, skoro svuda. Posmatrajmo sada neke od takvih prostora.

Definicija 2.1.1 *Neka $m \in \mathbb{N}_0$ i $1 \leq p \leq \infty$. Prostor:*

$$H^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ za } 0 \leq |\alpha| \leq m \},$$

gde je D^α izvod u distribucionom smislu, naziva se prostor Soboljeva.

Lako se može videti da su prostori Soboljeva potprostori prostora temperiranih distribucija. Ako je $\Omega = \mathbb{R}^n$, tada ćemo pisati samo

$H^{m,p}$. Takođe, ako je $p = 2$, prostor $H^{m,p}$ obeležavamo samo sa H^m.

Definicija 2.1.2 *Sa $H_0^{m,p}(\Omega)$ obeležavamo zatvaranje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u $H^{m,p}(\Omega)$ u odnosu na normu* (2.1).

Za $H_0^{m,p}(\Omega)$ ekvivalentna je sledeća definicija

$$f \in H_0^{m,p} \Leftrightarrow \Big(\forall \phi \in \mathcal{D}\Big) \phi f \in H^{m,p}$$

Napomena 2.1.3 *Neki autori sa $H^{m,p}(\Omega)$ obeležavaju zatvaranje prostora $C^m(\Omega)$ u odnosu na normu $\| \cdot \|_{m,p}$, dok se gore definisan prostor Soboljeva označava sa $W^{m,p}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Kako može da se pokaže da je $H^{m,p} = W^{m,p}$ (ovo je zapravo i dokazano teoremom* $2.2.4$*), mi ćemo sve prostore Soboljeva označavati sa $H^{m,p}(\Omega)$.*

Jasno, za $m = 0$ prostor $H^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Teorema 2.1.4 *Prostor $H^{m,p}(\Omega)$ je Banahov, za $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Prostor $H^m(\Omega)$ je Hilbertov.*

Dokaz: Neka je $\{u_n\}$ Košijev niz u $H^{m,p}(\Omega)$. To znači da je $\{D^\alpha u_n\}$ Košijev u $L^p(\Omega)$ za $0 \leq |\alpha| \leq m$. Kako je $L^p(\Omega)$ kompletan, važi da $\{D^\alpha u_n\}$ konvergira u $L^p(\Omega)$. Neka $u_n \to u$ i $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ u $L^p(\Omega)$, kada $n \to \infty$. Pokazaćemo da ovo implicira da $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ i onda kako je diferenciranje neprekidna operacija u $\mathcal{D}'(\Omega)$, slediće da je $u_\alpha = D^\alpha u$. Dakle, na osnovu Helderove nejednakosti, za proizvoljno $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi da je

$$|T_{u_n} - T_u| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\phi(x)|dx \leq \| \phi \|_q \| u_n - u \|_p,$$

za $0 \leq |\alpha| \leq m$ i $q = \frac{p}{p-1}$. Ovo znači da $T_{u_n} \to T_u$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$, a slično se pokazuje da $T_{D^\alpha u_n} \to T_{u_\alpha}$. Za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^\alpha T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^\alpha T_u(D^\alpha \phi),$$

odnosno

$$T_{u_\alpha}\phi = T_{D^\alpha u}\phi, \text{ ili } u_\alpha = D^\alpha u.$$

Odatle zaključujemo da je $u \in L^p$ i $D^\alpha u \in L^p$ (odnosno $u \in H^{m,p}$) i
$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|_{m,p} = 0$. Dakle, $H^{m,p}(\Omega)$ je kompletan.

Lako se proverava da sledeći izraz definiše skalarni proizvod u prostoru $H^m(\Omega)$:

$$(u, v)_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u \overline{D^\alpha u} dx, \qquad u, v \in H^m(\Omega)$$

pa je prostor $H^m(\Omega)$ Hilbertov.

$\square$

Teorema 2.1.5 *Prostor* $H^{m,p}(\Omega)$ *je separabilan za* $1 \leq p < \infty$*, a refleksivan za* $1 < p < \infty$*.*

Dokaz: Neka je N broj indeksa α za koje važi $|\alpha| \leq m$. Posmatraćemo proizvod prostora $L^p(\Omega) : L^p_N = \prod_{i=1}^N L^p(\Omega)$ sa normom

$$\| u \|_{p,N} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^N \| u_j \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{1\leq j\leq N} \| u_j \|_\infty, & p = \infty \end{cases} \tag{2.2}$$

Topologija u $\prod_{i=1}^N (L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ je ekvivalentna topologiji koju norma (2.2) indukuje u proizvodu $L^p_N = \prod_{i=1}^N L^p(\Omega)$. Kako je L^p separabilan za $1 \leq p < \infty$ i refleksivan za $1 < p < \infty$, tako isto važi za proizvod L^p_N. Svakom $u \in H^{m,p}$ možemo dodeliti dobro definisan vektor $Pu \in L^p_N$:

$$Pu = (u^{(\alpha_1)}, ..., u^{(\alpha_N)})$$

gde su α_1,..., α_N poređani u proizvoljnom, ali, fiksiranom poretku. Kako je $\| Pu \|_{p,N} = \| u \|_{m,p}$, P je izometrija iz $H^{m,p}(\Omega)$ na potprostor $H \subset L^p_N$. Kako je $H^{m,p}(\Omega)$ kompletan, H je zatvoren potprostor od L^p_N. Svaki potprostor separabilnog potprostora je separabilan, a svaki zatvoren potprostor refleksivnog prostora je refleksivan. To važi za H, a zbog izometrije i za $H^{m,p}(\Omega)$.

$\square$

Kako je svaki zatvoren potprostor Banahovog, respektivno Hilbertovog, prostora Banahov, respektivno Hilbertov, zaključujemo da važi sledeća teorema.

Teorema 2.1.6 *Prostor $H_0^{m,p}(\Omega)$ je Banahov, a prostor $H_0^m(\Omega)$ je Hilbertov.*

2.2 Aproksimacija glatkim funkcijama na Ω

Označimo sa C sledeći skup,

$$C = \{\phi \in C^m(\Omega) : \| \phi \|_{m,p} < \infty\}. \tag{2.3}$$

Očigledno važi $S \subset H^{m,p}(\Omega)$, odakle dobijamo da je $\overline{C} \subset H^{m,p}(\Omega)$. Kako je $H^{m,p}(\Omega)$ kompletan, imamo da je i $\overline{C}$ takođe kompletan. Identičko preslikavanje je izometrija između C i $\overline{C}$, tj. $\overline{C}$ je kompletiranje od C. Pa imamo da je kompletiranje prostora C podskup od $H^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 2.2.1 *Neka je A proizvoljan podskup skupa $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{O}$ kolekcija otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ koji pokrivaju A, odnosno, $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$. Tada postoji kolekcija Φ funkcija $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ koja ima sledeće osobine:*

(1) $\forall \phi \in \Phi$ *i* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$,

(2) sve sem konačno mnogo funkcija $\phi \in \Phi$ su identički jednake nuli na svakom kompaktnom podskupu od A,

(3) $(\forall\phi \in \Phi)(\exists U \in \mathcal{O}) supp\phi \subset U$,

(4) $\sum_{\phi\in\Phi} \phi(x) = 1$, $\forall x \in A$.

Kolekcija Φ sa ovim osobinama se naziva C^∞ podela jedinice za A podređena kolekciji $\mathcal{O}$.

Definišimo sada, pomoću konvolucije, funkciju J čija je svrha aproksimiranje distribucija glatkim funkcijama.

Neka je J nenegativna, realna funkcija iz $C_0^\infty(\Omega)$ koja ima sledeće osobine:

(1) $J(x) = 0$, za $1 \leq |x|$,

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1$.

Primer 2.2.2

$$J(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0 \quad , & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Gde je $k > 0$ izabrano tako da važi uslov (2).

Ako je $\varepsilon > 0$, funkcija $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(\frac{x}{\varepsilon})$ je nenegativna i pripada C_0^∞. Za ovu funkciju važi

(1) $J_\varepsilon(x) = 0$, za $|x| \geq \varepsilon$,

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x)dx = 1$.

Konvolucija

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)u(y)dy, \tag{2.4}$$

definisana za funkciju u za koju desna strana gornje jednačine ima smisla, naziva se (Soboljevo) uglačanje u. Može se pokazati da, ako $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, gde $u = 0$ van Ω, onda $J_\varepsilon * u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.2.3 *Neka je $1 \leq p < \infty$ i $u \in H^{m,p}(\Omega)$. Ako je Ω' prekompaktan podskup od Ω i $\overline{\Omega} \subset H^{m,p}(\Omega)$, onda važi*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u = u, \quad \textit{u } H^{m,p}(\Omega').$$

Teorema 2.2.4 *$\overline{C} = H^{m,p}(\Omega)$, odnosno $H^{m,p}(\Omega)$ je kompletiranje prostora C, $1 \leq p < \infty$.*

Dokaz: Pokažimo da, za $u \in H^{m,p}(\Omega)$ i $\varepsilon > 0$, postoji $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tako da $\| u - \phi \|_{m,p} < \varepsilon$.

Ograničimo se na $\Omega_k \subset \Omega$ koji zadovoljava uslove prethodne leme. Koristimo i takvu podelu za koju postoji samo konačno mnogo $\phi_k \in \Phi$ koje ne nestaju na Ω_k. Neka je

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k,\ d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}\ , k = 1, 2, ...$$

gde je d udaljenost tačke od skupa: $d(x, G) = \inf_{y \in G} |x - y|$, za neko $G \subset \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Neka je $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$. Važi $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, ...$ i $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$. Takođe,

$$\mathcal{O} = \{U_k : U_k = \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c, k = 1, 2, 3, ...\}$$

je kolekcija otvorenih podskupova od Ω koji pokrivaju Ω. Neka je Φ podela jedinice za Ω podređena $\mathcal{O}$. Neka ϕ_k označava sumu konačno mnogo funkcija $\phi \in \Phi$ čiji su nosači sadržani u U_k.

Za svako $x \in \Omega_k$ možemo napisati u kao

$$u(x) = \sum_{j=1}^\infty \phi_j(x) u(x)$$

gde se samo konačno mnogo sabiraka sume razlikuju od nule. Dalje, možemo izabrati ε_k tako da

$$\| J_{\varepsilon_k} * (\phi_k u) - \phi_k u \|_{m,p,\Omega_k} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Jasno, nejednakost važi na osnovu prethodne leme, jer $\phi_k u \in H^{m,p}(\Omega)$.

Neka je $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} J_{\varepsilon_k} * (\phi_k u)$, gde se na Ω_k samo konačno mnogo sabiraka razlikuje od nule, pa opet $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Takođe, možemo pisati

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k} \phi_j(x)u(x), \qquad \phi(x) = \sum_{j=1}^{k} J_{\varepsilon_{kj}} * (\phi_j u)(x).$$

Onda imamo da je

$$\| u - \phi \|_{m,p,\Omega_k} \leq \sum_{j=1}^{k} \| J_{\varepsilon_j} * (\phi_j u) - \phi_j u \|_{m,p,\Omega_k} < \varepsilon.$$

A kako je $\Omega_k = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$, a niz parcijalnih suma u prethodnoj nejednakosti je ograničen i rastući, na osnovu teoreme o monotonoj konvergenciji sledi

$$\| u - \phi \|_{m,p,\Omega} < \varepsilon. \qquad \square$$

Teorema 2.2.5 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je gust u $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Posledica 2.2.6 *Ako je $1 \leq p < \infty$, tada je $H_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Posledica 2.2.7 *$S(\mathbb{R}^n)$ je gust u $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Dokaz: Iz $\mathcal{D} \subset S \subset H^{m,p}$, pa $H^{m,p} = \overline{\mathcal{D}} \subset \overline{S} \subset \overline{H^{m,p}} = H^{m,p}$, sledi $\overline{S} = H^{m,p}$.

2.3 Dual Soboljevog prostora - Prostori Soboljeva sa negativnim indeksom

Teorema 2.3.1 *Distribucija $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekidna linearna funkcionela nad $H_0^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako se u može zapisati u obliku*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_\alpha. \tag{2.5}$$

Gde su $u_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, $q = \frac{p}{p-1}$, a izvod je dat u distribucionom smislu. .

Dokaz: Pokažimo da je uslov (2.5) dovoljan. Neka je $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ oblika (2.5), pokažimo da $u \in (H^{m,p}(\Omega))'$. Neka je $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Važi

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u_\alpha, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle u_\alpha, D^\alpha \phi \rangle$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha(x) D^\alpha \phi(x) dx.$$

Na osnovu Helderove nejednakosti imamo

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |u_\alpha D^\alpha \phi| dx$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \| u_\alpha \|_q \| D^\alpha \phi \|_p \leq C \| \phi \|_{p,m,\Omega}, \tag{2.6}$$

gde je $C = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| u_\alpha \|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Ovo znači da je u neprekidna funkcionela nad $C_0^\infty(\Omega)$ u odnosu na normu (2.1) i da se može proširiti na $H_0^{m,p}(\Omega)$, pa $u \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$.

Pokažimo sada da je uslov (2.5) potreban. Koristimo ponovo prostore L_N^p sa normom (2.2). Može se pokazati da za svaku neprekidnu linearnu funkcionelu $\mathcal{L}$ nad L_N^p postoji jednistveno $u \in \sum_{i=1}^N L^q(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$, tako da za svako $f \in L_N^p$ važi

$$\mathcal{L}(f) = \langle u, f \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} u_i f_i dx.$$

Zapravo, $(L_N^p)'$ je izomorfan sa $\sum_{i=1}^N L^q(\Omega)$. Neka, dalje, $u \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$. Preslikavanje $H_0^{m,p}(\Omega)$ u $L_N^p(\Omega)$, definisano sa

$$i : \phi \to (D^{\alpha_1}\phi, ..., D^{\alpha_N}\phi),$$

je izomorfizam prostora $H_0^{m,p}(\Omega)$ i potprostora od L_N^p koje ćemo označiti sa L. Izrazom

$$(D^{\alpha_1}\phi, ..., D^{\alpha_N}\phi) \to u(\phi)$$

definisana je neprekidna linearna funkcionela U nad L. Neprekidne (ograničene) linearne funkcionele nad potprostorom normiranog prostora imaju proširenje na dati normirani prostor (specijalan slučaj Han-Banahove teoreme). Dakle, U se može proširiti na L_N^p kao neprekidna linearna funkcionela $\tilde{U}$, za koju važi $\tilde{U} = U$ nad L. Kako $\tilde{U} \in \sum_{i=1}^N L^q(\Omega)$ sledi da postoje funkcije $u_{\alpha_i} \in L^q(\Omega)$ tako da je

$$\tilde{U} = \sum_{i=1}^N (-1)^{\alpha_i} u_{\alpha_i}.$$

Kako je za $\phi \in H_0^{m,p}(\Omega)$

$$\langle \tilde{U}, (D^{\alpha_1}\phi, ..., D^{\alpha_N}\phi) \rangle = \langle u, \phi \rangle,$$

tako i za $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ važi

$$\langle \tilde{U}, (\phi^{(\alpha_1)}, ..., \phi^{(\alpha_N)}) \rangle = \sum_{i=1}^N (-1)^{\alpha_i} \langle u_{\alpha_i}, \phi^{(\alpha_i)} \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{N} D^{\alpha_i} u_{\alpha_i}, \phi \right\rangle = \langle u, \phi \rangle.$$

Dakle, dobili smo da je $u = \sum_{i=1}^{N} D^{\alpha_i} u_{\alpha_i}$, što je i trebalo pokazati.

$\square$

Definicija 2.3.2 *$H^{-m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 1$ je potprostor od $\mathcal{D}'(\Omega)$ čiji su elementi oblika*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} u_{\alpha} \tag{2.7}$$

gde su $u_\alpha \in L^p(\Omega)$.

Na prostoru $H^{-m,p}(\Omega)$ uvodimo normu $\| u \|_{p,-m,\Omega}$, datu na sledeći način:

$$\| u \|_{p,-m,\Omega} = \inf \left\{ \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \| u_\alpha \|_p^p \Big)^{\frac{1}{p}} \right\}, \tag{2.8}$$

gde se infimum uzima po svim reprezentacijama funkcije u oblika (2.7).

Posmatrajmo $u \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$, dualna norma od u je

$$\| u \|'_{p,m,\Omega} = sup\{ |\langle u, \phi \rangle| : \| \phi \|_{p,m,\Omega} \leq 1 \}.$$

Na osnovu (2.6) imamo da je

$$\sup_{\|\phi\|_{p,m,\Omega} \leq 1} \Big\{ |\langle u, \phi \rangle| \Big\} \leq \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} (\| u_\alpha \|_q)^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Može se pokazati da je zapravo

$$\| u \|'_{p,m,\Omega} = \| u \|_{q,-m,\Omega} .$$

Sledi sledeća teorema.

Teorema 2.3.3 *Prostor* $(H_0^{m,p}(\Omega))'$, $1 \leq p < \infty$ *sa dualnom normom je izometričan sa* $H^{-m,q}(\Omega)$ *i normom* (2.8).

Posmatrajmo sada prostore $H^{-m}(\Omega)$ i $H_0^m(\Omega)$. Pri dokazivanju nekih od osobina ovih prostora, koristićemo sledeću teoremu.

Teorema 2.3.4 *(Risova teorema o reprezentaciji) Ako je* H *Hilbertov prostor i* g *neprekidna linearna funkcionela nad* H*, onda postoji* $y \in H$ *takvo da* $g(x) = \langle x, y\rangle$*, za svako* $x \in H$*. Takođe,* $\| g \|' = \| x \|$.

Teorema 2.3.5 *Prostori* $H^{-m}(\Omega)$ *i* $H_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ *su izometrični. Izometrija ova dva prostora je definisana sa*

$$u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u, \tag{2.9}$$

za svako $u \in H_0^m(\Omega)$.

Dokaz: Sa (2.9) je definisano preslikavanje iz $H_0^m(\Omega)$ u $H^{-m}(\Omega)$ jer je

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} u_{\alpha},$$

gde je $u_\alpha = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega)$.

Dokažimo sada da je preslikavanje (2.9) sirjekcija. Neka $g \in H^{-m}(\Omega)$, tada je g neprekidna linearna funkcionela na $H_0^m(\Omega)$. Na osnovu Risove teoreme o reprezentaciji, znamo da postoji $f \in H_0^m(\Omega)$ tako da za svako $\phi \in H_0^m(\Omega)$ važi

$$\langle g, \phi \rangle = (\phi, f)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha \phi(x) D^\alpha \overline{f}(x) dx,$$

$$\| g \|' = \| f \|_{m,\Omega} . \tag{2.10}$$

Označimo sa $\overline{f} = h \in H_0^m(\Omega)$. Tada imamo da je

$$\langle g, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle D^{2\alpha} h, \phi \rangle,$$

odnosno da je g distribucija oblika $\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} h$, $h \in H_0^m(\Omega)$. Znamo da je $\| g \|' = \| g \|_{-m,\Omega}$ i $\| h \|_{m,\Omega} = \| f \|_{m,\Omega}$, pa iz (2.10) sledi da je (2.9) izometrija:

$$\| g \|_{-m,\Omega} = \| h \|_{m,\Omega} .$$

□

Teorema 2.3.6 *Prostor $H^{-m}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ je Hilbertov i normalan prostor distribucija.*

Dokaz: Kako znamo da su prostori $H_0^m(\Omega)$ i $H^{-m}(\Omega)$ izometrični i $H_0^m(\Omega)$ je Hilbertov, sledi da je i $H^{-m}(\Omega)$ takođe Hilbertov prostor. Pokažimo sada da je $H^{-m}(\Omega)$ normalan prostor distribucija. Neka je f izometrija data sa (2.9), f je bijekcija iz $C_0^\infty(\Omega)$ na $C_0^\infty(\Omega)$, tj. $C_0^\infty(\Omega)$ je podskup od $H^{-m}(\Omega)$. Proizvoljno $u \in H^{-m}(\Omega)$ se može zapisati kao $u = f(v)$, za neko $v \in H_0^m(\Omega)$. Tada postoji niz $v_n \in C_0^\infty(\Omega)$ koji teži ka v u $H_0^m(\Omega)$. Sledi da $f(u_n)$ teži ka $f(v)$ u $H^{-m}(\Omega)$, a kako $f(v_n)$ takođe pripada $C_0^\infty(\Omega)$, sledi da je $C_0^\infty(\Omega)$ gust u $H^{-m}(\Omega)$.

□

Poglavlje 3

Konvergencija u L^p i $H^{m,p}$ prostorima

Jedan od osnovnih razloga zbog kog posmatramo konvergenciju i definišemo različite oblike konvergencije u L^p i $H^{m,p}$ je sledeći.

Pretpostavimo da želimo da rešimo neku nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$A[u] = f, \tag{3.1}$$

gde $A[\cdot]$ predstavlja dati nelinearni operator, f je zadata funkcija i u je nepoznata. Da bismo ustanovili postojanje rešenja u datog problema, želimo da napravimo kolekciju finijih, približnih problema, koje možemo da rešimo. Njih možemo zapisati na sledeći način

$$A_k[u_k] = f_k, k = 1, 2, 3..., \tag{3.2}$$

gde $A_k[\cdot]$ nelinearni operator koje teži ka $A[\cdot]$ za dovoljno veliko k u operatorskoj normi, dok se f_k pribižava ka f, a u_k je rešenje ovog aproksimativnog problema. Cilj je formirati takav sistem (3.2) za koji važi

$$u_k \to u, k \to \infty. \tag{3.3}$$

Gore predložena procedura je, naravno, veoma generalna. U praksi, operator $A_k[\cdot]$ može predstavljati konačno dimenzionalne projekcije, singularne regularizacije, diskretizacije, itd. Za dato (3.1) nije teško pronaći rešive aproksimacije, međutim, poteškoća je pokazati da rešenje jednačine (3.2) konvergira ka rešenju jednačine (3.1) te su nam, stoga, teoreme o konvergenciji od velikog značaja.

Osnovni problem koji se javlja prilikom pokazivanja konvergencije je, naravno, nelinearnost. Uglavnom možemo pokazati da niz u_k u odgovarajućem prostoru funkcija slabo konvergira, što vrlo često nije dovoljno. Čak i ako konstruišemo operatore aproksimacije $A_k[\cdot]$ koji teže ka $A[\cdot]$, to ne mora u praksi da znači da slaba konvergencija (3.3) implicira

$$A[u_k] \to A[u], k \to \infty \tag{3.4}$$

Glavni razlog ovome je taj što se slaba konergencija jako loše ponaša u odnosu na nelineranost. Uprkos ovom problemu, slaba konvergencija je uglavnom ono najbolje što možemo postići.

Jedan od načina na koji možemo da prevaziđemo ovaj problem je identifikacija nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina kod kojih nelinearna struktura nosi u sebi dovoljno informacija na osnovu kojih možemo opravdati slabu konvergenciju.

Kako znamo da je skup $A \subset X$ kompaktan ukoliko svaki niz u A ima podniz koji konvergira u X ka granici iz A, rezultati kompaktnosti u prostorima $L^p(\mathbb{R}^n)$ su često od vitalnog značaja pri pokazivanju postojanja rešenja nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

U ovom poglavlju ćemo dati definicije raznih vrsta konvergencije i navesti neke od osnovnih teorema o konvergenciji. Kako su pojmovi konvergencije i kompaktnosti blisko povezani, pokazaćemo i neke od fundamentalnih teorema o kompaktnosti u Soboljevim i Lebegovim prostorima.

3.1 Razni tipovi konvergencije

U ovom odeljku ćemo definisati razne pojmova vezane za konvergenciju i razmotriti odnose među njima. Radi jednostavnosti, posmatraćemo samo realne funkcije iz $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Definicija 3.1.1 *Neka je f_n, $n \in \mathbb{N}$ niz realnih funkcija na $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Za niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da:*

(1) (KU) Konvergira uniformno ka $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon))(\forall x \in \Omega)|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon,$$

(2) (KT) Konvergira tačkasto ka $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \Omega)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon, x))|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon,$$

(3) (KSS) Konvergira skoro svuda ka $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ako

$$(\exists M \in \mathcal{M})(\mu(M) = 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \Omega \backslash M)(\exists N(\varepsilon, x) \in (N))$$

$$(\forall n \geq N(\varepsilon, x))|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

(4) (L^p) *Konvergira jako u* L^p, $p \geq 1$, *ka* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in L^p(\Omega)$, *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) \parallel f_n - f \parallel_p < \varepsilon.$$

Jasno, (KU) $\Rightarrow$ (KT) $\Rightarrow$ (KSS). Obrnute implikacije u opštem slučaju ne važe. Ipak, u slučaju kada je kardinalnost skupa Ω konačna, imamo da tačkasta konvergencija povlači uniformnu konvergenciju. Slično, u slučaju kada je prazan skup jedini skup mere nula, onda skoro svuda konvergencija implicira tačkastu konvergenciju.

Kako je $L^p(\Omega)$ kompletan, ako je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz iz $L^p(\Omega)$ takav da za neku merljivu funkciju f važi

$$\parallel f_n - f \parallel_p \to 0, \text{ kada } n \to \infty, \text{ sledi } f \in L^p(\Omega).$$

Teorema 3.1.2 *Neka je* $\mu(\Omega) < \infty$ *i neka je* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* $L^p(\Omega)$ *koji uniformno konvergira ka* f *na* Ω. *Tada* $f \in L^p(\Omega)$ *i* $f_n \to f$ *u* $L^p(\Omega)$ *kada* $n \to \infty$.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ i neka za $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ važi

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow sup_{x\in\Omega}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Tada je

$$\parallel f_n - f \parallel_p = \left(\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega \varepsilon^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}, \, n \in \mathbb{N},$$

pa $f_n \to f$ u $L^p(\Omega)$.

$\square$

Teorema 3.1.3 *Neka su* $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \kappa_{A_i}$ *i* $t = \sum_{j=1}^n \beta_j \kappa_{B_j}$ *nenegativne merljive jednostavne funkcije na* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. *Neka je*

$$\varphi_s(E) = \int_E s d\mu, \, E \in \mathcal{M}.$$

Tada je:

(1) φ_s *mera na* $\mathcal{M}$

(2) $\int_E (s+t)d\mu = \int_E sd\mu + \int_E td\mu$.

Teorema 3.1.4 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor sa netrivijalnom merom.*

(1) Neka je $A_i \subseteq A_{i+1}$, *gde je* $A_i \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(2) Neka je $A_i \supseteq A_{i+1}$ *gde je* $A_i \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{N}$ *i* $\mu(A_1) < \infty$. *Tada je*

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Teorema 3.1.5 *(Lebegova teorema monotone konvergencije) Neka je* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor sa merom i neka je* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz merljivih funkcija na* Ω *sa osobinama:*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq \infty, \qquad \textit{za svako } x \in \Omega; \tag{3.5}$$

$$f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty, \qquad \textit{za svako } x \in \Omega. \tag{3.6}$$

Tada važi:

(1) f *je merljiva funkcija,*

(2) $\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu$, $n \to \infty$.

Dokaz:

(1) Može se pokazati da je supremum niza merljivih funkcija merljiva funkcija, te iz ovoga direktno sledi tvrđenje.

(2) Kako je

$$\int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f_{n+1} d\mu, \, n \in \mathbb{N},$$

sledi da je

$$\int_\Omega f_n d\mu \to \alpha \in [0, \infty], \, n \to \infty.$$

Iz $f_n \leq f$, $n \in \mathbb{N}$, imamo da je

$$\int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu, \, n \in \mathbb{N}, \text{ odnosno } \alpha \leq \int_\Omega f d\mu.$$

Pokažimo sada da $\int_\Omega f d\mu \leq \alpha$.

Neka je s jednostavna merljiva funkcija, $0 \leq s \leq f$ i $c \in (0, 1)$. Definišimo

$$E_n = \{x \in \Omega | f_n(x) \geq cs(x)\}, \, n \in \mathbb{N}.$$

Kako su f_n i s merljive funkcije i $E_n = (f_n - cs)^{-1}([0, \infty])$, imamo da je E_n merljiv skup, a znamo da je $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq$. Dokažimo da je $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Neka je $x \in \Omega$ proizvoljno. Ako je $f(x) = 0$, tada je i $s(x) = 0$ i $f_n(x) = 0$ te $x \in E_1$.
Dalje, uzmimo da je $f(x) > 0$. U ovom slučaju važi $cs(x) < f(x)$ jer je $0 < c < 1$ i $s(x)$ konačan broj. Kako je

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

postoji n_0 tako da važi

$$cs(x) \leq f_{n_0}(x) \leq f(x),$$

pa $x \in E_{n_0}$.
Ukoliko u sledeći odnos

$$\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs d\mu,$$

stavimo da je

$$\varphi_s(F) = \int_F s d\mu, F \in \mathcal{M},$$

na osnovu Teoreme 3.1.3 sledi da je φ_s mera i kako je $E_n \subseteq E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, na osnovu Teoreme 3.1.4, sledi $\varphi_s(E_n) \to \varphi_s(\Omega)$, $n \to \infty$.
Dobijamo

$$\int_\Omega f_n d\mu \geq c\varphi_s(E_n) \Rightarrow \alpha \geq c \int_\Omega s d\mu.$$

U graničnom procesu, kada $c \to 1$, dobija se:

$$\alpha \geq \int_\Omega s d\mu.$$

Sada, uzimajući supremum po s, $0 \leq s \leq f$, sledi

$$\alpha \geq \int_\Omega f d\mu$$

čime je teorema dokazana.

$\square$

Lema 3.1.6 *(Lema Fatua) Neka su funkcije* $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$*, merljive, tada važi*

$$\int_\Omega (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n d\mu.$$

Dokaz: Podsetimo se, $\lim_{n\to\infty} \inf f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{n\geq k} f_n \Big)$. Neka je

$$g_k(x) = \inf_{i\geq k} f_i(x), \qquad x \in \Omega.$$

Jasno, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je rastući niz funkcija koji konvergira ka $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k$.
Važi i sledeće

$$g_k \leq f_n, n \geq k, \text{ te je } \int_\Omega g_k d\mu \leq \inf_{n\geq k} \int_\Omega f_n d\mu, k \in \mathbb{N},$$

$$\int_\Omega g_k d\mu \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{n\ge k} \int_\Omega f_n d\mu \Big) = \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n d\mu. \tag{3.7}$$

Niz $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je rastući i važi da je $g = \lim_{k\to\infty} g_k$ merljiva funkcija. Na osnovu Lebegove teoreme monotone konvergencije sledi da je

$$\int_\Omega g_m d\mu \to \int_\Omega g d\mu, \qquad m \to \infty.$$

Kako je $\lim\limits_{k\to\infty} g_k$ jednak $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k$ i na osnovu (3.5) imamo

$$\int_\Omega g d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n d\mu,$$

odakle dobijamo sledeće

$$\int_\Omega (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n d\mu.$$

□

Teorema 3.1.7 *(Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji) Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompleksnih merljivih funkcija na $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ i neka je*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\, x \in \Omega.$$

Ako postoji $g \in L^1(\mu)$ tako da je

$$|f_n(x)| \le g(x), \quad n \in \mathbb{N}, x \in \Omega,$$

tada $f \in L^1(\mu)$ i važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f d\mu.$$

Dokaz: Funkcija f je merljiva kao granica niza merljivih funkcija. Kako je $|f| \le g$ sledi da je$f \in L^1(\mu)$. Važi

$$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g.$$

Primenimo lemu Fatua na $r_n = 2g - |f_n - f|$, $n \in \mathbb{N}$. Važi

$$\int_\Omega (\lim \inf_{n\to\infty} r_n) d\mu \leq \lim \inf_{n\to\infty} \int_\Omega r_n d\mu.$$

Dalje možemo zaključiti sledeće

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2g d\mu &\leq \int_\Omega 2g d\mu + \lim \inf_{n\to\infty} (-\int_\Omega |f_n - f| d\mu) \\ &= \int_\Omega 2g d\mu - \lim \sup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu,\end{aligned}$$

pa dobijamo da je

$$\lim \sup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

Odatle imamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0.$$

Kako je

$$\Big| \int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega f d\mu \Big| \leq \int_\Omega |f_n - f| d\mu,$$

sledi i poslednji deo tvrđenja. □

Teorema 3.1.8 *Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $L^p(\Omega)$ koji konvergira skoro svuda ka f. Ako postoji $g \in L^p(\Omega)$ tako da važi*

$$|f_n(x)| \leq g(x),\ x \in \Omega,\ n \in \mathbb{N},$$

tada je $f \in L^p(\Omega)$ i $f_n \to f$ u $L^p(\Omega)$ kada $n \to \infty$.

Dokaz: Iz pretpostavke sledi da je $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro svuda. Kako $g \in L^p(\Omega)$, sledi da je $f \in L^p(\Omega)$. Takođe važi i sledeća ocena

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (2g(x))^p, \text{ s.s.}$$

Kako $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ skoro svuda i $(2g(x))^p \in L^1(\Omega)$, na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji imamo da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|f_n - f|^p d\mu = 0.$$

$\square$

Definicija 3.1.9 *Niz merljivih realnih funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ konvergira u meri (KM) ka $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ako*

$$(\forall\alpha > 0)\lim_{n\to\infty}\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

Ako $f_n \to f$, $n \to \infty$, uniformno na Ω, tada za svako $\alpha > 0$ postoji $n_0(\alpha)$ tako da važi

$$n > n_0(\alpha) \Rightarrow \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset.$$

Dakle, (KU) $\Rightarrow$ (KM).

Teorema 3.1.10 *Ako je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz merljivih funkcija iz $L^p(\Omega)$ koji konvergira u $L^p(\Omega)$ ka f, tada $f_n \to f$ u meri.*

Teorema 3.1.11 *Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija iz $L^p(\Omega)$ koji konvergira u meri ka f i neka postoji $g \in L^p(\Omega)$ tako da važi*

$$|f_n(x)| \leq g(x),\ x \in \Omega \text{ s.s.},\ n \in \mathbb{N},$$

tada $f \in L^p(\Omega)$ i $f_n \to f$ u $L^p(\Omega)$, $n \to \infty$.

Teorema 3.1.12 *(Vitalijeva teorema o konvergenciji) Dat je merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija iz $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Tada, $f_n \to f$ u $L^p(\Omega)$, $n \to \infty$, ako i samo ako su zadovoljena sledeća tri uslova:*

(1) $f_n \to f$ *u meri,* $n \to \infty$,

(2) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists E_\varepsilon \in \mathcal{M})(\mu(E_\varepsilon) < \infty)$

$$((F \in \mathcal{M}) \wedge (F \cap E_\varepsilon = \emptyset)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\int_F |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p),$$

(3) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)$

$$((E \in \mathcal{M}) \wedge (\mu(E) < \delta(\varepsilon))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p).$$

Dokaz: Znamo da konvergencija u L^p implicira konvergenciju u meri. Takođe se lako pokazuje da L^p konvergencija implicira uslove (2) i (3).
Obratno, pokažimo da navedena tri uslova impliciraju $L^p(\Omega)$ konvergenciju datog niza. Neka je za dato $\varepsilon > 0$, skup E_ε dat kao u uslovu (2) i neka je $F = \Omega \backslash E_\varepsilon$. Primenjujući nejednakost Minkovskog na funkcije

$$f_n - f_m = (f_n - f_m)\kappa_{E_\varepsilon} + f_n\kappa_F + f_m\kappa_F$$

dobijamo

$$\| f_n - f_m \|_p \leq \Big(\int_{E_\varepsilon} |f_n - f_m|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + 2\varepsilon, n, m \in \mathbb{N}. \qquad (3.8)$$

Stavimo $\alpha = \frac{\varepsilon}{(\mu(E_\varepsilon))^{\frac{1}{p}}}$ i

$$H_{nm} = \{x \in E_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}.$$

Prema uslovu (1) postoji $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takav da za $n, m \geq K(\varepsilon)$ važi $\mu(H_{nm}) < \delta(\varepsilon)$.
Primenom nejednakosti Minkovskog i uslova (3) dobijamo

$$\Big(\int_{E_\varepsilon} |f_n - f_m|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Big(\int_{E_\varepsilon \backslash H_{nm}} |f_n - f_m|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{H_{nm}} |f_n|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + \qquad (3.9)$$

$$\Big(\int_{H_{nm}} |f_m|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \alpha(\mu(E_\varepsilon))^{\frac{1}{p}} + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, n, m \geq K(\varepsilon).$$

Sada na osnovu (3.8) i (3.9) dobijamo da je $\| f_n - f_m \|_p \leq 5\varepsilon$, tj. niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev u $L^p(\Omega)$. Dakle, niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $L^p(\Omega)$. Kako prema uslovu (1) niz konvergira u meri ka f, prema jedinstvenosti (do na skup mere nula) granične funkcije, sledi da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka f u $L^p(\Omega)$. □

Definicija 3.1.13 *Niz merljivih realnih funkcija* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *na* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *konvergira (KSU) skoro uniformno ka* $f : \omega \to \mathbb{R}$*, ako*

$$(\forall\delta > 0)(\exists E_\delta \in \mathcal{M})\mu(E_\delta) < \delta$$

(niz uniformno konvergira ka f *na* $\Omega\backslash E_\delta$*),*

pri čemu uniformna konvergencija na $\Omega\backslash E_\delta$ *znači da*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{N})(n > n_0(\delta, \varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in\Omega\backslash E_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Jasno, (KU) ⇒ (KSU) ⇒ (KSS). Navedimo sada neke od teorema koje pokazuju odnos skoro uniformne konvergencije sa ostalim tipovima konvergencije.

Teorema 3.1.14 *Ako niz* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *skoro uniformno konvergira ka* f*, tada konvergira i u meri. Obratno, ako* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira u meri ka* f*, tada ima podniz koji konvergira skoro uniformno ka* f*.*

Teorema 3.1.15 *(Teorema Egorova) Neka je* $\mu(\Omega) < \infty$ *i* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz realnih funkcija koji konvergira skoro svuda ka merljivoj funkciji* f*. Tada niz* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira skoro uniformno i u meri ka* f*.*

Dokaz: Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u svakoj tački skupa Ω ka f.

Za $m, n \in \mathbb{N}$ definišemo skup

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\}.$$

Jasno, $E_n(m) \in \mathcal{M}$ i $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$, $n \in \mathbb{N}$. Kako $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, za sve $x \in \Omega$ sledi da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \emptyset$. Zbog pretpostavke teoreme da je $\mu(\Omega) < \infty$, imamo da $\mu(E_n(m)) \to 0$, kada $n \to \infty$.
Neka je $\delta > 0$ i $k_m \in \mathbb{N}$ takav da važi

$$\mu(E_n(m)) < \frac{\delta}{2^m}, \qquad E_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{km}(m).$$

Iz definicije skupa E_δ sledi da $E_\delta \in \mathcal{M}$ i $\mu(E_\delta) < \delta$. Ako $x \notin E_\delta$, tada $x \notin E_{km}(m)$, $m \in \mathbb{N}$ pa važi

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \text{ za sve } k \geq k_m.$$

To znači da niz $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uniformno konvergira na komplementu skupa E_δ, tj. konvergira skoro uniformno na Ω.

$\square$

3.2 Slaba konvergencija

Definicija 3.2.1 *Niz $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ konvergira slabo ka $f \in L^p(\Omega)$, u oznaci,*

$$f_k \rightharpoonup f, \text{ u } L^p(\Omega),$$

ako

$$\int_\Omega f_k g dx \to \int_\Omega f g dx, \text{ kada } k \to \infty, \tag{3.10}$$

za svako $g \in L^q(\Omega)$ $(q = \frac{p}{p-1})$.

Teorema 3.2.2 *(O ograničenosti slabo konvergentnih nizova) Ako* $f_k \rightharpoonup f$, *u* $L^p(\Omega)$, *tada:*

(1) niz $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je ograničen u* $L^p(\Omega)$,

(2) $\| f \|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \| f_k \|_p$.

Iz (1) vidimo da ako $f_k \rightharpoonup f$, u $L^p(\Omega)$ i ako $g_k \to g$ u $L^q(\Omega)$, tada

$$\int_\Omega f_k g_k dx \to \int_\Omega f g dx.$$

Iz (2) dobijamo da, ako $1 < p < \infty$, $f_k \rightharpoonup f$ u $L^p(\Omega)$ i

$$\| f \|_p = \lim_{k\to\infty} \| f_k \|_p,$$

tada

$$f_k \to f, \text{ u } L^p(\Omega).$$

Teorema 3.2.3 *(Slaba kompaktnost) Neka je* $1 < p < \infty$ *i niz* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *ograničen u* $L^p(\Omega)$. *Tada postoji podniz* $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *i funkcija* $f \in L^p(\Omega)$ *takva da važi*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f, \text{ u } L^p(\Omega).$$

Kada je $p = \infty$, imamo malo drugačiju terminologiju. Kažemo da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ konvergira slabo ka $f \in L^\infty(\Omega)$, u oznaci

$$f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f, \text{ u } L^\infty(\Omega),$$

ako važi (3.10) za sve $g \in L^1(\Omega)$. Takođe, i za ovaj tip konvergencije, analogno važe teoreme 3.2.2 i 3.2.3.

Pretpostavimo, sada, da važi

$$f_k \rightharpoonup f, \text{ u } L^p(\Omega)$$

gde $1 < p < \infty$. Ukoliko je $E \subset \Omega$ ograničen, merljiv skup, i ako u (3.10) uzmemo $g = \kappa_E$, imamo

$$\int_E f_k dx = \int_E f dx. \tag{3.11}$$

Ovo implicira da srednja vrednost funkcija $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nad skupom E konvergira ka srednjoj vrednosti funkcije f nad E. Može se pokazati da ako je niz $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ograničen u $L^p(\Omega)$ i važi (3.11) za svaki ograničen i merljiv skup $E \subset L^p(\Omega)$, tada $f_k \rightharpoonup f$, u $L^p(\Omega)$. Problem koji se često sreće prilikom rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina je taj što konvergencija srednjih vrednosti ne implicira slabu konvergenciju (čak ne implicira ni konvergenciju skoro svuda). Primetimo da $f_k \rightharpoonup f$, u $L^p(\Omega)$ ne implicira da $F(f_k) \rightharpoonup F(f)$, u $L^p(\Omega)$ gde je F proizvoljna nelinearna funkcionela. Ilustrujmo ovo na sledećem primeru.

Primer 3.2.4 *Neka su $a < b$ i $0 < \lambda < 1$ takvi da važi*

$$F(\lambda a + (1-\lambda)b) \neq \lambda F(a) + (1-\lambda)F(b).$$

Neka je $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, izaberimo

$$f_k(x) = \begin{cases} a, & \frac{j}{k} \leq x \leq \frac{j+\lambda}{k}, \qquad j = 0, 1, ..., k-1 \\ b, & \textit{inače} \end{cases}$$

Tada $f_k \rightharpoonup^* f \equiv \lambda a + (1-\lambda)b$ u L^∞, pri čemu

$$F(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{F} \equiv \lambda F(a) + (1-\lambda)F(b) \neq F(f).$$

3.3 Kompaktnost u Soboljevim prostorima

U ovom podpoglavlju koeficijentom q ćemo označavati Soboljev konjugovani indeks koji je definisan za $1 \leq p < n$ na sledeći način

$$q = \frac{pn}{n-p}.$$

Teorema 3.3.1 *(Galjardo-Nirenberg-Soboljeva nejednakost) Neka, $1 \leq p < n$, tada važi*

$$\| f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \| Df \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.12}$$

za sve funkcije $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, gde konstanta C_p zavisi samo od p i n.

Lako se može pokazati da gornja nejednakost takođe važi za $f \in L^q$ i $Df \in L^p$.
Neka je Ω kao i do sada otvoren, ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$, iz (3.12) sledi

$$\| f \|_{L^r(\Omega)} \leq C \| f \|_{H^{1,p}(\Omega)}, \tag{3.13}$$

za svako $1 \leq r \leq q$ i $f \in H^{1,p}(\Omega)$, gde konstanta C zavisi samo od p, n i Ω.

Teorema 3.3.2 *(Relihova teorema o kompaktnosti) Neka je niz $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ograničen u $H^{1,p}(\Omega)$. Tada je niz $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ prekompaktan u $L^r(\Omega)$ za svako $1 \leq r < q$.*

3.4 Oscilacije i koncentracije

U ovom odeljku ćemo pokušati kratko da predstavimo konstrukciju određenih alata koji nam pomažu da razumemo razne uzroke zbog kojih slaba konvergencija ne implicira jaku konvergenciju.

Neka je $1 < p < \infty$ i neka niz $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergira slabo ka f u $L^p(\Omega)$, ali ne važi jaka konvergencija $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ka f na $L^p(\Omega)$. Postoji nekoliko različitih uzroka koji mogu izazvati ovakvo ponašanje.

Primetimo prvo da, čak iako znamo da je niz funkcija $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ograničen u supremum normi tako da f_k konvergira slabo ka f u

$L^P(\Omega)$ za sve $1 \leq p < \infty$, i dalje ne možemo zaključiti jaku konvergenciju ni za jedno $1 \leq p < \infty$. Ova poteškoća se javlja usled mogućnosti vrlo brzih fluktuacija funkcija f_k. Ovaj problem nazivamo problem oscilacija.

Zatim, čak iako dodatno znamo da $f_k \rightarrow f$ skoro svuda na Ω i na ovaj način isključimo oscilacije, i dalje ne možemo sa sigurnošću tvrditi jaku konvergenciju na $L^p(\Omega)$. Uzrok ovome je što masa $|f_k - f|^P$ može na neki način da se stopi u skup Lebegove mere nula. Ovakva pojava se naziva koncentracija.

Na primer $u_n(x, y) = \cos(2n\pi(x - y))$ je jedan jednostavan niz funkcija definisanih na $\mathbb{R}^2$ koji ima osilacije, dok je delta niz, niz koji se koncentriše u jednoj tački kad $n \rightarrow \infty$. Naravno, može se desiti da se problem oscilacija i koncentracije javi zajedno.

Primer 3.4.1 *Neka je*

$$u_n(x) = sin(nx), \qquad x \in (0, 2\pi), \qquad n = 1, 2, ...$$

Lako se može proveriti da

$$u_n \rightharpoonup u := 0 \text{ u } L^p(0, 2\pi) \qquad \forall p \geq 1,$$

ali imamo

$$\| u_n \|_p = C(p) > 0.$$

Stoga, u_n *ne konvergira jako u* $L^p(0, 2\pi)$ *ni za jedno* $p \geq 1$.

Nizovi sa oscilacijama su interesantni jer se oscilacije ne mogu locirati u smislu da, ako posmatramo niz na nekoj maloj okolini neke tačke, da ćemo izbeći opstrukcije jake konvergencije, tj. možemo da kažemo da ako oscilacije postoje u nizu, one postoje na celom $\mathbb{R}^n$. Nebitno je odakle one dolaze. Za niz

$$u_n(x, y) = \cos(2n\pi(x - y))$$

vidimo da oscilacije ”propagiraju” u pravcu vektora $(1,-1)$, odnosno duž prave $y=-x$. Takođe vidimo da jedino u pravcu vektora $(1,1)$ koji je normalan na $(1,-1)$ ovaj niz ne oscilira tj. jednak je jedinici. Ovaj jedini pravac bez oscilacija se pojavljuje samo u slučaju kada oscilacije dolaze isključivo iz jednog pravca. Čim se pojave i po nekom drugom pravcu npr. $u_n(x,y)=\cos(2n\pi(x-y))+\cos(2n\pi x)$ nema više ni jedne prave po kojoj nemamo oscilacije. Put ka dobijanju kompaktnosti sastoji se ustvari iz izdvajanja tačaka $(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}$ na čijoj okolini možemo popraviti nedostatke kompaktnosti. S^{n-1} predstavlja jediničnu sferu u $\mathbb{R}^n$. Okolina o kojoj pričamo je ustvari proizvod lopte sa centrom u x_0 i konusne okoline vektora ξ_0.

Prikažimo sada metodologiju za karakterizaciju efekata koncentracije. Pretpostavimo da $f_k\rightharpoonup f$ i posmatrajmo sledeću meru

$$\theta_k=|f_k-f|^p,\qquad k=1,2,... \tag{3.14}$$

$\theta_k(E)=\int_E|f_k-f|^p dx$ kontroliše koliko su blizu f_k i f u L^p normi, posmatrano na Borelovom skupu E. Kao posledica ovako odabrane mere θ_k, granična vrednost niza $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bi trebala da predstavlja moguće nedostatke slabe konvergencije.

Definicija 3.4.2 *Za svaki Borelov skup $E\subset\Omega$ definišemo redukovanu meru defekta na sledeći način*

$$\theta(E)\equiv\limsup_{k\to\infty}\int_E|f_k-f|^p dx.$$

Važi da f_k jako konvergira ka f u $L^p(E)$ ako i samo ako $\theta(E)=0$. Takođe, θ je po definiciji konačno aditivna spoljašnja mera.

3.5 Teoreme kompaktnosti

Kao što smo već napomenuli, rezultati o kompaktnosti u prostorima L^p su često od ključnog značaja u određivanju postojanja rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Potreban i dovoljan uslov za kompaktnost skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ je dat u Kolmogorov-Ris teoremi o kompaktnosti. Dokaz ove teoreme je često zasnovan na Arzela-Askoli teoremi, koja zapravo predstavlja prvu i baziču teoremu o prekompaktnosti. U ovom odeljku ćemo pokazati da se obe ove teoreme mogu dokazati pomoću leme o kompaktnosti u metričkim prostorima koja je, zapravo, zasnovana na činjenici da je metrički prostor kompaktan ako i samo ako je kompletan i totalno ograničen.

Definicija 3.5.1 *ε-pokrivač metričkog prostora je pokrivač prostora koji se sastoji od skupova prečnika najviše ε.*

Definicija 3.5.2 *Metrički prostor je totalno ograničen ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan ε-pokrivač ovog prostora.*

Primetimo da totalna ograničenost implicira ograničenost, dok obratno ne mora da važi. U prostoru $\mathbb{R}^n$ pojmovi totalne ograničenosti i ograničenosti su ekvivalentni.

U teoriji funkcionalne analize poznato je da je metrički prostor kompaktan ako i samo ako je kompletan i totalno ograničen. Kako posmatramo L^p prostore koji su Banahovi, možemo se fokusirati samo na uslove totalne ograničenosti.

Lema 3.5.3 *Neka je X metrički prostor i neka za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, metrički prostor W i preslikavanje $\Phi : X \to W$ takvo da je $\Phi[X]$ totalno ograničen. Pretpostavimo, dalje, da važi*

$$(\forall x, y \in X) d(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon.$$

Tada je X totalno ograničen metrički prostor.

Dokaz: Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ izaberemo δ, Φ i W tako da su zadovoljeni uslovi leme. Kako je $\Phi[X]$ totalno ograničen, znamo da postoji konačan δ-pokrivač, $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$, skupa $\Phi[X]$. Odavde sledi da je $\{\Phi^{-1}(V_1), \Phi^{-1}(V_2), ..., \Phi^{-1}(V_n)\}$ ε-pokrivač od X, odnosno sledi da je X totalno ograničen.

□

Definicija 3.5.4 *Skup $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ je tačkasto ograničen ako za svako $x \in \Omega$ važi*

$$\sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Definicija 3.5.5 *Skup $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ je ekvineprekidan ako za svako $x \in \Omega$ i za svako $\varepsilon > 0$, postoji okolina V od x tako da važi*

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon,$$

za svako $y \in V$ i svako $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.5.6 *(Arzela-Askoli) Neka je Ω kompaktan topološki prostor. Tada je podskup od $C(\Omega)$ totalno ograničen u supremum normi ako i samo ako:*

(1) je tačkasto ograničen i

(2) ekvineprekidan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ tačkasto ograničen i ekvineprekidan. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$. Kombinujući ekvineprekidnost skupa $\mathcal{F}$ i kompaktnost prostora Ω možemo pronaći skup tačaka $x_1, x_2, ..., x_n \in \Omega$ čije okoline $V_1, V_2, ..., V_n$ pokrivaju Ω tako da važi $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon$, kada $f \in \mathcal{F}$ i $x \in V_j$.
Definišimo sada $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ na sledeći način:

$$\Phi(f) = \big(f(x_1), ..., f(x_n)\big).$$

Kako je $\mathcal{F}$ tačkasto ograničen, sledi da je $\Phi[\mathcal{F}]$ ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$, a samim tim i totalno ograničen u $\mathbb{R}^n$.

Neka su, sada, $f, g \in \mathcal{F}$ takve da važi $\| \Phi(f) - \Phi(g) \|_\infty < \infty$, tada važi (pošto svako $x \in \Omega$ pripada nekom V_j):

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| < 3\varepsilon,$$

odakle dobijamo da $\| f - g \|_\infty \leq 3\varepsilon$. Ukoliko za δ uzmemo $\delta = 3\varepsilon$, sledi da $\mathcal{F}$ zadovoljava uslove leme $3.5.3$, pa je $\mathcal{F}$ totalno ograničen.

Pokažimo da važi i suprotan smer tvrđenja. Neka je $\mathcal{F}$ totalno ograničen podskup od $C(\Omega)$, pokažimo da važi tačkasta ograničenost i ekvineprekidnost.

Postojanje konačnog ε-pokrivača za $\mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ proizvoljno, implicira ograničenost, odakle sledi i tačkasta ogrančenost skupa $\mathcal{F}$.

Pokažimo da važi ekvineprekidnost. Uzmimo proizvoljno $x \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Posmatrajmo ε-pokrivač $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ skupa $\mathcal{F}$. Neka $g_j \in U_j$. Izaberimo okolinu V_j tačke x za koju važi $|g_j(y) - g_j(x)| < \varepsilon$, za svako $y \in V_j$, $j = 1, 2, ..., n$. Neka je $V = V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n$. Ako $f \in U_j$, tada $\| f - g_j \|_\infty \leq \varepsilon$, za $y \in V$,

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - g_j(y)| + |g_j(y) - g_j(x)| + |g_j(x) - f(x)| < 3\varepsilon,$$

što dokazuje ekvineprekidnost. $\square$

Pokažimo sada sledeću teoremu koju je po prvi put pokazao Frechet za $p = 2$. Dokaz ove teoreme je dosta kratak i u njemu su sadržane neke od ključnih ideja za dokazivanje Ris-Kolmogorov teoreme.

Teorema 3.5.7 *Podskup od $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, je totalno ograničen ako i samo ako:*

(1) je tačkasto ograničen i

(2) za svako $\varepsilon > 0$ postoji n tako da za svako x koje pripada posmatranom podskupu važi

$$\sum_{k>n} |x_k|^p < \varepsilon^p.$$

Dokaz: Neka $\mathcal{F} \subset L^p$ zadovoljava uslove (1) i (2). Za dato $\varepsilon > 0$ biramo n tako da je zadovoljen drugi uslov, i definišemo funkciju $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ kao

$$\Phi(x) = (x_1, ..., x_n).$$

Na osnovu tačkaste ograničenosti $\mathcal{F}$ zaključujemo da je slika $\Phi(\mathcal{F})$ totalno ograničena.

Neka $x, y \in \mathcal{F}$ tako da $\| \Phi(x) - \Phi(y) \|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Tada imamo da je

$$\| x - y \|_p \leq \Big(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k>n} |x_k - y_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Na osnovu $3.5.3$ sledi da je $\mathcal{F}$ totalno ograničen. Da obratno važi lako se dokazuje koristeći slične tehnike kao u teoremi $3.5.6$.

□

Teorema 3.5.8 *(Jensenova nejednakost) Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mere, $\mu(X) = 1$, $g : X \to [a, b]$ funkcija klase $L^1(X)$ i $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada važi*

$$F\Big(\int_X g d\mu \Big) \leq \int_X F \circ g d\mu.$$

Ova nejednakost govori da je konveksna transformacija srednje vrednosti funkcije, manja ili jednaka srednjoj vrednosti konveksne transformacije te funkcije.

Teorema 3.5.9 *(Kolmogorov-Ris teorema) Neka je $1 \leq p < \infty$. Skup $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ je totalno ograničen ako i samo ako:*

(1) $\mathcal{F}$ *je ograničen,*

(2) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists R)(\forall f \in \mathcal{F}) \int_{|x|>R} |f(x)|^p dx < \varepsilon^p$,

(3) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\rho > 0)(\forall f \in \mathcal{F})(\forall y \in \mathbb{R}^n)|y| < \rho$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p.$$

Uslov (2) predstavlja osobinu uniformnog opadanja, dok po terminologiji koja je korišćena u Arzela-Askoli teoremi, kažemo da su funkcije u $\mathcal{F}$ L^p-ekvineprekidne, ako važi (3).

Dokaz: Neka $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ zadovoljava uslove teoreme. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i R, ρ tako da za njih važe drugi i treći uslov.

Neka je Q otvorena kocka sa centrom u koordinatnom početku, tako da je $|y| < \frac{1}{2}\rho$, za svako $y \in Q$.

Neka su $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ translacije kocke Q koje se međusobno ne preklapaju takve da zatvaranje od $\bigcup_i Q_i$ sadrži loptu prečnika R sa centrom u koordinatnom početku. Neka je P projekcija prostora $L^p(\mathbb{R}^n)$ na lineal skupa karakterističnih funkcija kocki Q_i data sa

$$Pf(x) = \begin{cases} \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f(z)dz, & x \in Q_i, i = 1, 2, .., N \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Iz (2) i definicije Pf imamo da za svako $f \in \mathcal{F}$ važi

$$\| f - Pf \|_p^p < \varepsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |f(x) - Pf(x)|^p dx$$

$$= \varepsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} (f(x) - f(z)) dz \right|^p dx.$$

Iskoristimo sada Jensenovu nejednakost i promenimo promenjivu po kojoj integralimo, tako što uvedemo smenu $z = x + y$. Primetimo da $x - z \in 2Q$, kada $x, y \in Q_i$. Dobijamo sledeće

$$\| f - Pf \|_p^p < \varepsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} |f(x) - f(z)|^p dzdx$$

$$\leq \varepsilon^p + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{1}{|Q_i|} \int_{2Q} |f(x) - f(x+y)|^p dydx$$
$$\leq \varepsilon^p + \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+y)|^p dxdy$$
$$< \varepsilon^p + \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \varepsilon^p dy = (2^n + 1)\varepsilon^p$$

prema (3). Dakle, $\| f - Pf \|_p < (2^n + 1)^{\frac{1}{p}}\varepsilon$ i $\| f \|_p < (2^n + 1)^{\frac{1}{p}}\varepsilon + \| Pf \|_p$. Na osnovu linearnosti P, sledi da ako $f, g \in \mathcal{F}$ i $\| Pf - Pg \|_p < \varepsilon$, tada $\| f - g \|_p < ((2^n + 1)^{\frac{1}{p}} + 1)\varepsilon$.

Kako je P je ograničen (zapravo $\| P \| = 1$) i $\mathcal{F}$ je ograničen prema (1), slika $P[\mathcal{F}]$ je ograničena. Kako je slika od $\mathcal{F}$ konačno dimenzionalna, $P[\mathcal{F}]$ je totalno ograničen. Dakle, prema lemi $3.5.3$, sledi da je $\mathcal{F}$ totalno ograničen.

Pokažimo sada da važi i suprotan smer tvrđenja.

Neka je $\mathcal{F}$ totalno ograničen skup. Postojanje konačnog ε-pokrivača od $\mathcal{F}$, za svako ε, implicira ograničenost skupa $\mathcal{F}$, time pokazujući ja važi (1).

Da bismo pokazali da važi (2), uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$. Neka je $\{U_1, ..., U_n\}$ ε-pokrivač od $\mathcal{F}$ i neka $g_j \in U_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Izaberimo R tako da

$$\int_{x>R} |g_j(x)|^p dx < \varepsilon^p, \, j = 1, 2, ..., n.$$

Ako $f \in U_j$, tada je $\| f - g_j \|_p \leq \varepsilon$, pa važi

$$\left(\int_{x>R} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{x>R} |f(x) - g_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{x>R} |g_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \| f - g_j \|_p + \left(\int_{x>R} |g_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon.$$

Ovim smo pokazali uslov (2).

Uslov (3) se može slično pokazati, ako primetimo da se nejednakost data u uslovu (3) može lako ustanoviti za sve funkcije $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Možemo iskoristiti činjenicu da je C_0^∞ gust u $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dalje, izaberimo ε-pokrivač $\{U_1, ..., U_n\}$ i $g_j \in U_j$, za svako j kao u prethodnom paragrafu. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\rho > 0$ tako da važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_j(x+y) - g_j(x)|^p dx < \varepsilon^p, \qquad |y| < \rho, \, j = 1, 2, ...n.$$

Dalje, ako $f \in U_j$ imamo:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - g_j(x+y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g_j(x+y) - g_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g_j(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < 3\varepsilon.$$

Čime je dokaz kompletiran. $\square$

Napomena 3.5.10 *U praksi se često konstruiše niz f_n u L^p koji zadovoljava prva dva uslova Kolmogorov-Ris teoreme i sledeći uslov*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x+y) - f_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \alpha(y) + \beta(n),$$

$$\lim_{y \to 0} \alpha(y) = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \beta(n) = 0.$$

Tada je za neko N i $\delta > 0$ desna strana gornje nejednačine manja od ε za sve $n > N$ i sve dovoljno male $|y|$. Kako je skup C_O^∞ gust u L^p, možemo izabrati dovoljno malu granicu za $|y|$ tako da važi da je integral manji od ε za $n = 1, 2, ..., N$. Dakle, niz f_n zadovoljava uslov (3) te stoga ima konvergentan podniz.

Posledica 3.5.11 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ takav da*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \| f \|_2 \leq M < \infty.$$

Ako važi

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|x| \geq r} |f(x)|^2 dx = 0 \quad i \quad \lim_{\rho \to \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|\xi| \geq \rho} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

tada je $\mathcal{F}$ totalno ograničen u $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Posledica 3.5.12 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Neka je $f_K(x) = f(x)$ kada $x \in K$ i $f_K(x) = 0$ za ostale $x \in \Omega$. Skup $\mathcal{F} \subseteq L^p_{loc}(\Omega)$ je totalno ograničen ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(1) za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji M tako da je

$$\int |f_K(x)|^p dx < M, \qquad f \in \mathcal{F},$$

(2) za svako $\varepsilon > 0$ i za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji $\rho > 0$ tako da važi

$$\int |f_K(x+y) - f_K(x)|^p dx < \varepsilon^p, \qquad f \in \mathcal{F}, \quad |y| < \rho.$$

Posledica 3.5.13 *Skup $\mathcal{F} \subseteq H^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ je totalno ograničen ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(1) $\mathcal{F}$ je ograničen, odnosno postoji M tako da je

$$\int |D^\alpha f(x)|^p dx < M, \qquad f \in \mathcal{F}, \quad |\alpha| \leq k,$$

(2) za svako $\varepsilon > 0$ postoji R tako da važi

$$\int_{|x|>R} |D^\alpha f(x)|^p dx < \varepsilon^p, \qquad f \in \mathcal{F}, \quad |\alpha| \leq k,$$

(3) za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\rho > 0$ tako da važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x+y) - D^\alpha(x)|^p dx < \varepsilon^p, \quad f \in \mathcal{F}, \quad |\alpha| \leq k \quad |y| < \rho.$$

Primer 3.5.14 *Neka je dat niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{R}^n}$ na sledeći način:*

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Pokažimo da niz f_n nije jako konvergentan koristeći Kolmogorov-Ris teoremu.
Za ovaj niz ne važi uslov (2) jer

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x+y) - f_n(x)|^p dx = \int_0^{\frac{1}{n}-y} |ny|^p dx + \int_{\frac{1}{n}-y}^{\frac{1}{n}} |1 - nx|^p dx^{\frac{1}{p}}.$$

Kako je prvi integral jednak $n^p|y|^p(\frac{1}{n} - y)$, celokupan izraz sa leve strane se ponaša kao $n^{\frac{p-1}{p}}|y|$ kada $n \to \infty$, odakle sledi da $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x+ y) - f_n(x)|^p dx$ ne može biti manje od ε^p ni za jedno ograničenje za $|y|$.

Teorema 3.5.15 *Neka je $p < n$ i $p \leq q < p^*$, $(\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n})$, dalje, neka je $\mathcal{F}$ ograničen podskup od $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji R tako da za svako $f \in \mathcal{F}$ važi*

$$\int_{|x|>R} \left(|f(x)|^p + |\nabla f(x)|_p^p\right) dx < \varepsilon^p,$$

tada je $\mathcal{F}$ totalno ograničen podskup od $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz: Pokažimo da skup $\mathcal{F}$ zadovoljava uslove Kolmogorov-Ris teoreme, za $p = q$. Korostićemo Soboljevu nejednakost, $\parallel f \parallel_q \leq C \parallel f \parallel_{1,p}$, gde konstanta C zavisi samo od p, q i n. Uslov (1) iz Kolmogorov-Ris teoreme sledi direktno iz Soboljeve nejednakosti.

Pokažimo da važi i (2) uslov. Formirajmo funkciju $F = f(x)\kappa(|x| - R)$, gde je $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \kappa \leq 1$, $\kappa(x) = 0$ za $x < 0$ i $\kappa(x) = 1$ za $x > 1$. Ukoliko primenimo Soboljevu nejednakost na ovu funkciju, dobijamo da važi uslov (2). Preostaje nam još da pokažemo uslov (3).

Ako primenimo Soboljevu nejednakost na funkciju $x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$, za $\lambda > 0$ i zatim uvedemo smenu u integraciji, dobijamo

$$\lambda^{\frac{n}{q}} \parallel f \parallel_q \leq C\Big(\lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx + \lambda^{n-p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|_p^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{3.15}$$

Primenimo sada gornju nejednakost na funkciju $x \mapsto f(x+y) - f(x)$, gde $f \in \mathcal{F}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Za dovoljno veliko λ važi

$$C\Big(\lambda^{n-p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x+y) - \nabla f(x)|_p^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \lambda^{\frac{n}{q}}, \tag{3.16}$$

za sve $f \in \mathcal{F}$, jer je dati integral uniformno ograničen za $f \in \mathcal{F}$. Dalje, koristeći Jensenovu i Helderovu nejednakost, kao i Fubinijevu teoremu, imamo da važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_0^1 y \nabla f(x+ty) dt|^p dx$$

$$\leq |y|_{p'}^{p} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x+ty)|_p^p dx dt$$
$$\leq |y|_{p'}^{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|_p^p dx,$$

gde je p' konjugovani indeks za p, za svaku test funkciju f, a samim tim i za svako $f \in H^{1,p}$. Integrali sa desne strane su uniformno ograničeni za $f \in \mathcal{F}$, pa postoji $\delta > 0$ tako da za $|y| < \delta$ važi

$$C\Big(\lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \lambda^{\frac{n}{q}}. \tag{3.17}$$

Ukoliko, sada, za ovakvo y primenimo nejednakost (3.15) na funkciju $x \mapsto f(x+y) - f(x)$, gde $f \in \mathcal{F}$ i iskoristimo ograničenja (3.16) i (3.17), dobijamo

$$\lambda^{\frac{n}{p}} \parallel f(\cdot + y) - f(\cdot) \parallel_q \leq 2^{\frac{1}{p}} \varepsilon \lambda^{\frac{n}{p}},$$

čime je pokazan i uslov (3), pa na osnovu Kolmogorov-Ris teoreme sledi da je skup $\mathcal{F}$ totalno ograničen u L^q. □

Pokažimo sada da i sa slabijim uslovom od uslova datog u prethodnoj teoremi, tvrđenje važi.

Teorema 3.5.16 *Neka je* $1 \leq p < n$ *i* $p \leq q < p^*$, $(\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n})$, *dalje, neka je* $\mathcal{F}$ *ograničen podskup od* $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *Ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* R *tako da za svako* $f \in \mathcal{F}$ *važi*

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p dx < \varepsilon^p,$$

tada je $\mathcal{F}$ *totalno ograničen podskup od* $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz: Koristićemo, opet, Soboljevu nejednakost $\parallel f \parallel_q \leq C \parallel f \parallel_{1,p}$, gde konstanta C zavisi samo od p, q i n. Direktno iz

Soboljeve nejednakosti sledi da je $\mathcal{F}$ ograničen podskup od $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Primenimo sada nejednakost (3.12) (Galjardo-Nirenberg-Soboljeva nejednakost). Imamo da postoji C koje zavisi samo od p i od n takvo da važi

$$\| f \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \| \nabla f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

za sve funkcije $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Ova nejednakost se može proširiti na sve $f \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$: Neka niz $f_n \in C^1(\mathbb{R}^n)$ konvergira ka f u $H^{1,p}$. Tada gore navedena nejednakost implicira da je niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev u $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, pa ima i graničnu vrednost koja mora biti jednaka f, jer neki podniz konvergira tačkasto. Uzevši u obzir neprekidnost norme, pokazali smo željeno.

Gornja nejednakost, zajedno sa nejednakosti

$$\| f \|_q \leq \| f \|_p^{\theta} \| f \|_{p^*}^{1-\theta},$$

gde je

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}, \qquad (0 < \theta \leq 1)$$

daje

$$\| f \|_q \leq C^{1-\theta} \| f \|_p^{\theta} \quad \| \nabla f \|_p^{1-\theta} .$$

Neka je $\varepsilon > 0$ dato, izaberimo R tako da su zadovoljeni uslovi teoreme. Neka je $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ funkcija za koju važi $0 \leq \phi \leq 1$ i $|\nabla\phi|_p \leq 1$ i važi $\phi(x) = 1$, za $|x| \leq R$. Tada je skup $\phi\mathcal{F} = \{\phi f, f \in \mathcal{F}\}$ ograničen u $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ pa na osnovu teoreme 3.5.15 imamo da je $\phi\mathcal{F}$ totalno ograničen u $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Dalje, možemo svako $f \in \mathcal{F}$ uniformno aproksimirati sa ϕf u normi L^q:

$$\| f - \phi f \|_q \leq C^{1-\theta} \| (1-\phi) f \|_p^{\theta} \quad \| \nabla((1-\phi)f) \|_p^{1-\theta}$$

$$\leq C^{1-\theta} \varepsilon^{\theta} \| (1-\phi)\nabla f - f \nabla\phi \|_p^{1-\theta}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C^{1-\theta}\varepsilon^{\theta}(\| (1-\phi)\nabla f \|_p + \| f\nabla\phi \|_p)^{1-\theta} \\
&\leq (C2^{1-\frac{1}{p}} \| f \|_{1,p})^{1-\theta}\varepsilon^{\theta} \\
&\leq M\varepsilon^{\theta}
\end{aligned}
$$

gde konstanta M zavisi samo od n, p, q i $\mathcal{F}$. U pretposlednjoj liniji prethodnih nejednakosti smo koristili Jensenovu nejednakost na formi $u+v \leq 2^{1-\frac{1}{p}}(u^p+v^p)^{\frac{1}{p}}$ kada su $u, v \geq 0$, zajedno sa definicijom norme na prostoru $H^{1,p}$.

Na ovaj način smo pokazali da se svaki član $f \in \mathcal{F}$ nalazi na rastojanju manjem ili jednakom od $M\varepsilon^{\theta}$ od $\phi\mathcal{F}$ u L^q normi. Kako je $\phi\mathcal{F}$ totalno ograničen i $M\varepsilon^{\theta}$ može biti proizvoljno malo, sledi da je $\mathcal{F}$ totalno ograničen.

$\square$

3.6 Kompaktnost u L^2 i Furijeove transformacije

U ovom odeljku ćemo pokazati neke od uslova za kompaktnost u prostoru L^2, kao i povezanost glatkoće i opadanja funkcije preko Furijeove transformacije.

Teorema 3.6.1 *Neka je $\mathcal{F}$ ograničen podskup od $L^2(\mathbb{R}^n)$ i neka je $\hat{\mathcal{F}}$ Furijeova transformacija skupa $\mathcal{F}$, $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{f},\ \ f \in \mathcal{F}\}$. Funkcije u $\mathcal{F}$ su L^2-ekvineprekidne ako i samo ako funkcije u $\hat{\mathcal{F}}$ uniformno opadaju u L^2 i obratno.*

Kombinujući ovu teoremu sa teoremama iz prethodnog odeljka, dobijamo dve alternativne teoreme koje opisuju kompaktne skupove u $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.6.2 *Neka je $\mathcal{F}$ ograničen podskup od $L^2(\mathbb{R}^n)$. Skup $\mathcal{F}$ je uslovno kompaktan (totalno ograničen) ako i samo ako*

$$
\int |f(x+y) - f(x)|^2 dx \to 0, \textit{ kada } y \to 0 \qquad i
$$

$$\int |\hat{f}(\xi+\omega)-\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \to 0, \textit{ kada } \omega \to 0,$$

oba uniformno za $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.6.3 *Neka je* $\mathcal{F}$ *ograničen podskup od* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Skup* $\mathcal{F}$ *je uslovno kompaktan (totalno ograničen) ako i samo ako*

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^2 dx \to 0, \qquad i \qquad \int_{|\xi|>R} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \to 0,$$

oba uniformno za $f \in \mathcal{F}$ *kada* $R \to \infty$.

Teorema 3.6.4 *Neka je* $\mathcal{F}$ *ograničen podskup od* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. *Funkcije u* $\mathcal{F}$ *su* L^p*-ekvineprekidne (uniformno opadaju u* L^p*) ako i samo ako funkcije u* $\hat{\mathcal{F}}$ *uniformno opadaju (su* L^q*-ekvineprekidne) u* L^q *i obratno, gde su* p *i* q *konjugovani indeksi.*

Dokaz: Da bismo pokazali ovo tvrđenje trebaće nam sledeći pojmovi i osobine.

Za $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definišemo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Važi sledeće:

(1) Furijeova transformacija može da se proširi na ograničeno linearno preslikavanje $f \to \hat{f}$ iz L^p u L^q, $1 \leq p \leq 2$ i p i q su konjugovani indeksi, tako da važi $\| \hat{f} \|_q \leq C_p \| f \|_p$ za $f \in L^p$.

(2) Za $f \in L^p$, $\omega \in \mathbb{R}^n$, važi $[\widehat{e^{-i\omega x} f}(x)](\xi) = \hat{f}(\xi+\omega)$ u L^q.

(3) Za svako $f \in L^p$, ψ iz Švarcove klase S, $(\widehat{f * \psi})(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\psi}(\xi)$ u L^q.

Pokažimo sada dato tvrđenje. Pretpostavimo da za $\mathcal{F}$ važi uniformno opadanje u L^p. Za sve $f \in \mathcal{F}$ imamo sledeće

$$\hat{f}(\xi+\omega) - \hat{f}(\xi) = [(\widehat{e^{-i\omega x}} - 1)f(x)](\xi),$$

pri čemu je

$$\| \hat{f}(\xi+\omega) - \hat{f}(\xi) \|_q \leq C_p \| (e^{-i\omega x} - 1)f(x) \|_p$$

$$\leq C_p \Big(\int_{|x|\leq R} (|\omega||x||f(x)|)^p dx + 2 \int_{|x|>R} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i neka je M granica za $\mathcal{F}$ u L^p. Kako za $\mathcal{F}$ važi uniformno opadanje u L^p, možemo odabrati dovoljno veliko R tako da je $\int_{|x|>R} |f(x)|^p dx < \frac{1}{2}(\frac{\varepsilon}{C_p})^p$, nezavisno od $f \in \mathcal{F}$. Kako je:

$$\int_{|x|\leq R} (|x||f(x)|)^p dx \leq (RM)^p$$

za svako $f \in \mathcal{F}$, imamo da je

$$\| \hat{f}(\xi+\omega) - \hat{f}(\xi) \|_q < \varepsilon,$$

za dovoljno malo ω, $|\omega|^p < \frac{1}{2}(\frac{\varepsilon}{C_p} RM)^p$, za svako $f \in \mathcal{F}$, iz čega sledi da je $\hat{\mathcal{F}}$ ekvineprekidan u L^q.

Neka je sada $\mathcal{F}$ ekvineprekidan u L^p. Želimo da pokažemo da funkcije u $\hat{\mathcal{F}}$ uniformno opadaju u L^q. Neka je $\psi(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{2}}$, $\psi_R(x) = \psi(Rx)R^n$, tako da funkcije ψ_R i $\hat{\psi}_R(\xi) = \hat{\psi}(\frac{\xi}{R})$ pripadaju S i $\hat{\psi}(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, $\hat{\psi}_R(0) = \int \psi_R(y)dy = 1$. Sada, za $|\xi| \geq 2R$, $\frac{1}{2} \leq 1 - \hat{\psi}_R(\xi)$ i sve $f \in \mathcal{F}$, važi

$$\frac{1}{2}\Big(\int_{|\xi|>2R} |\hat{f}(\xi)|^q d\xi \Big)^{\frac{1}{q}} \leq \| \hat{f}(\xi)(1 - \hat{\psi}_R(\xi)) \|_q$$

$$\leq C_p \| f(x) - f * \psi_R(x) \|_p$$

$$= C_p\Big[\int\Big|\int(f(x)-f(x-y))\psi_R(y)dy\Big|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Koristeći Jensenovu nejednakost i Fubinijevu teoremu, dalje dobijamo

$$\leq C_p\Big[\int\Big[\int\Big|f(x)-f(x-\frac{y}{R})\Big|^p dx\Big]\psi(y)dy\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Neka je sada H funkcija definisana na $\mathcal{F}$ na sledeći način:

$$H(y)=\sup_{f\in\mathcal{F}}\int|f(x)-f(x-y)|^p dx.$$

Kako je $\mathcal{F}$ ekvineprekidan u L^p, $H(y)\to 0$, za $y\to 0$ i $H(y)\leq (2M)^p$, za svako y, dobijamo

$$\Big[\int_{|\xi|>2R}|\hat{f}(\xi)|^q d\xi\Big]^{\frac{1}{q}}\leq 2C_p\Big[\int H\Big(\frac{y}{R}\Big)\psi(y)dy\Big]^{\frac{1}{p}}\to 0,\qquad R\to\infty$$

uniformno za svako $f\in\mathcal{F}$, odakle sledi da je $\hat{\mathcal{F}}$ skup uniformno opadajućih funkcija.

□

Neka su $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$ ograničene funkcije na $\mathbb{R}^n$ za koje važi

$$\lim_{|x|\to\infty}\phi_i(x)=0, i=1,2.$$

Posmatrajmo preslikavanje dato sa $u(x)\mapsto\phi_i(x)u(x)$, $i=1,2$, $u(x)\in L^2$. Neka je F operator Furijeove transformacije $u\mapsto Fu=\hat{u}$. Definišimo operator $T=\phi_1F\phi_2$ i pretpostavimo da je $\phi_1(x)$ neprekidno.

Propozicija 3.6.5 *T je kompaktan operator na L^2.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{F}$ ograničen skup u L^2. Skup $\phi_2\mathcal{F}$ ima osobinu uniformnog opadanja u L^2. Prema teoremi 3.6.1 skup $\phi_2\mathcal{F}$ je L^2-ekvineprekidan. Skup $T\mathcal{F}=\phi_1\mathcal{F}\phi_2$ je, takođe, L^2-ekvineprekidan i ima osobinu uniformnog opadanja, pa sledi da je skup $T\mathcal{F}$ totalno ograničen. □

Zaključak

Ovaj master rad je posvećen izučavanju osobina određenih Banahovih prostora slabo diferencijabilnih funkcija koji su izuzetno važni u izučavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina i u nekim drugim oblastima matematičke analize. Vremenom ovakvi prostori su postali osnovni alat u ovim disciplinama. Prostori posebno razmatrani u ovom radu su Lebegovi i Soboljevi prostori.

U radu su date definicije i osobine Lebegovih i Soboljevih prostora i prikazan je, u malom delu, njihov značaj. Zbog prirode Soboljevih prostora, videli smo pojmove iz raznih oblasti: teorije mere, distribucija, slabih izvoda, Furijeove transformacije, teorije operatora i diferencijalne geometrije. Sami prostori imaju niz zanimljivih osobina, koji se većinom odnose na dualne prostore i na aproksimaciju glatkim funkcijama.

Kako je pitanje slabe konvergencije i slabog rešenja parcijalnih diferencijalih jednačina od velikog značaja, predstavili smo neke od razloga zbog kojih slaba konveregencija ne implicira jaku, kao i moguće pristupe u identifikovanju ovih "problema".

Za kompaktnost se često kaže da predstavlja topološku generalizaciju konačnosti, što je u nekom dubljem smislu i tačno, jer se topologija bavi otvorenim skupovima, što znači da nas često zanima kako se nešto ponaša na otvorenom skupu, a za kompaktne prostore to znači da postoji konačno mnogo ovakvih poašanja. Kompaktni prostori se, kao pseudo-konačni, ”lepo” ponašaju (jer se ponašaju kao konačni skupovi za važne topološke osobine) što nam omogućava da radimo sa njima. Neki od potrebnih i dovoljnih uslova za kompaktnost u L^p i $H^{m,p}$ prostorima predstavljeni su u ovom radu.

Literatura koja je dostupna o Soboljevim prostorima je jako obimna i bilo bi nemoguće sve staviti u okvir jedne knjige, a još manje u okvir ovog master rada. Osnovni cilj je bio predstaviti suštinu ovih prostora dovoljno generalno da pokrije i neke od primena. Nadam se da smo u tome i uspeli i da je predstavljena materija čitaču razumljiva i korisna.

Literatura

[1] Robert A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Brezis, Haim Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[3] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[4] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 1996.

[5] Hanche-Olsen, Harald; Holden, Helge The Kolmogorov-Riesz compactness theorem. Expo. Math. 28 (2010), no. 4, 385–394

[6] Kenneth H. Karlsen *Notes on weak convergence*, MAT4380 - Spring 2006.

[7] T. Muthukumar, *Sobolev Spaces and Applications*, (http://home.iitk.ac.in/ tmk/courses/mth656/main.pdf)

[8] Marko Nedeljkov, *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2004.

[9] Endre Pap, *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Građevinska knjiga, Beograd, 1986.

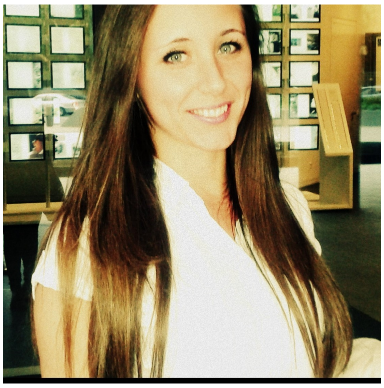
[10] Stevan Pilipović, Dora Seleši, *Mera i integral*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[11] Pego, Robert L. Compactness in L^2 and the Fourier transform. Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), no. 2, 252–254.

[12] Dietmar A. Salamon, *Measure and integration*, preprint (https://people.math.ethz.ch/ salamon/PREPRINTS/measure.pdf)

[13] Steve Shkoller, *Notes on L^p and Sobolev spaces*, Department of Mathematics, University of California, Davis, CA 95616, USA

Biografija



Marina Marčeta rođena je 09.09.1990. u Bihaću. Osnovnu školu "Miroslav Antić" završila je u Futogu, 2005. godine kao đak generacije. Iste godine je upisala Gimnaziju "Svetozar Marković" u Novom Sadu, koju završava 2009. godine kao nosilac Vukove diplome. Po završetku gimnazije, 2009. godine, upisala je osnovne studije na Prirodno - matematičkom faklutetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika, matematika finansija, koje je završila u junu 2012. godine, sa prosečnom ocenom 9.96. Potom je upisala master studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junskom roku 2014. godine. Bila je stipendista Nemačke službe za internacionalnu razmenu DAAD. Kao stipendista nemačke vlade obavljala je praksu u sedištu Deutsche Bank u Frankfurtu. Stipendista je fonda za mlade talente Republike Srbije. Od septembra 2014. zaposlena je kao saradnik u nastavi na katedri za matematiku Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu.

Novi Sad, avgust, 2016. Marina Marčeta

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Marina Marčeta
AU

Mentor: dr Jelena Aleksić
MN

Naslov rada: Teoreme konvergencije u Lebegovim i Soboljevim prostorima
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2016
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3, 81, 13, 13, 0, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine, Funkcionalna analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Lebegovi prostor, Soboljevi prostori, konvergencija, kompaktnost, Furijeove transformacije
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

U ovom master radu se bavimo Soboljevim i Lebegovim prostorima i njihovim osnovnim osobinama.
U uvodnom delu naveli smo osnovne pojmove funkcionalne analize neophodne za razumevanje definicije i osobina Soboljevih i Lebegovih prostora.
Rad je podeljen na tri tematske celine:
Prvo su razmatrani Lebegovi prostori, njihove osobine, prostori distribucija, kao i pojam i značaj slabih izvoda.
U drugom delu rada smo se posvetili prostoru Soboljeva i njegovom dualu. Razmatrali smo značaj ovih prostora u rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina.
U trećem, centralnom, delu naveli smo osnovne teoreme konvergencije definisane na gore pomenutim prostorima i obrazložili motivaciju za njihovo uvođenje. Posebna pažnja bila je posvećena kompaktnosti u prostoru L^2 i Furijeovoj transformaciji.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP Avgust, 2016.

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Jelena Aleksić, vandredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Marina Marčeta
AU

Mentor: Jelena Aleksić, Ph.D.
MN

Title: Convergence theorems in Lebesgue and Sobolev spaces
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2016
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3, 81, 13, 13, 0, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Partial Differential Equations, Functional Analysis
SD

Subject/Key words: Sobolev spaces, Lebesgue spaces, convergence, compactness, Fourier transformations
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
This thesis explores Lebesgue and Sobolev spaces and their properties.
In the introductory part we have stated some of the fundamental concepts of functional analysis which are needed for understanding the definition and basic properties of Lebesgue and Sobolev spaces.
Thesis has been divided into three chapters. In the first one, we have discussed Lebesgue spaces and properties. Afterwards, we have introduced the space of distributions as well as the weak derivative. In the second part we have dealt with Sobolev spaces and it's dual. In the third, central, part we gave some basic convergence and compactness theorems, as well as the motivation for their introduction. Special attention was given to compactness in L^2 spaces and Fourier transformation.

Accepted by the Scientific Board on: August 2016.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr. Jelena Aleksić, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr. Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad