UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Marija Demeč

MATEMATIČKI MODELI PROBLEMA PREBUKIRANOSTI U PROIZVODNOM SISTEMU

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2009.

Sadržaj:

1. Uvod

Na tržištu, snabdevači proizvodima i uslugama često koriste ograničene izvore sredstava da bi zadovoljili različite klase potražnji. Ova praksa dovodi do pitanja kako upravljati procesom prodaje sa ograničenim resursima da bi se maksimizovao ukupan prihod. Modeli upravljanja prihodima (yield management YM) koji se odnose na ovaj problem su definisani kao modeli sa više klasa. U literaturi, modeli sa više klasa se obično odnose na modele raspodele sedišta u avionu pošto je većina ovih modela razvijena radi prepoznavanja efektivnih pravila odluke za aviokompanije koje rutinski bukiraju više klasa.

Upravljanje prihodima je značajno za planiranje ishoda proizvodnje da bi se maksimizovao ukupan profit, mada nije toliko primenjivano u proizvodnim sistemima koliko u industriji usluga. Bilo koji problem upravljanja prihodom sadrži sledeće zajedničke karakteristike:

- Kapacitet je kratkotrajan i ograničen i ne može se lako povećati u kratkom periodu. Na primer, sedišta u avionu se smatraju kratkotrajnim sredstvom jer su beskorisna nakon poletanja aviona.
- Potražnja je stohastička.
- Postoje različite klase potrošača. Raspoloživa kratkotrajna sredstva se mogu prodati po različitim cenama, kroz različite klase rezervisanja (obično u različitim periodima).

U modelima razmatranim u literaturi je uobičajena pretpostavka da u svakom periodu količina raspoloživog kapaciteta je poznata i deterministička, mada kratkotrajna. Ova pretpostavka se može primeniti za aviokompanije, hotele ili industrije usluga, ali nije dovoljno dobra za proizvodni sistem. U industriji aviokompanija kapacitet aviona je podložan promenama zbog fluktuacija u potražnji. Uopšteno, kapacitet je fiksiran iako mehanički kvarovi ili uslovi lošeg vremena mogu često da dovedu do promena u poslednjoj minuti. Pošto su neredovne operacije tipične u industriji aviokompanija važno je ispitati uticaj koje imaju te neregularnosti u kapacitetu na avionski prihod. Zbog toga postoji potreba za tehnikama upravljanja prihodima koje eksplicitno uključuju mogućnosti budućih promena u kapacitetu. Iako postoji bogata literatura na temu upravljanja prihodima u kontekstu stohastičke potražnje, ne postoji mnogo izdanja koji se bave slučajem u kom je i kapacitet stohastički.

Raspodela kapaciteta i prebukiranost su dve glavne grane mreže upravljanja prihodima. Posebno, raspodela kapaciteta se bavi pitanjem koji plan puta ostaviti otvorenim za kupovinu, a koji zatvoriti kao preostali kapacitet. Prebukiranost se bavi pitanjem koja veličina prodaje treba da premaši fizički dostupan kapacitet leta pod uslovom da se neće svi koji imaju rezervacije pojaviti u vreme poletanja.

Odluke raspodele kapaciteta i prebukiranosti su nerazdvojivo povezane. Koliko putničkih klasa treba postaviti za prodaju zavisi od toga koliko je sedišta premašilo fizički dostupan kapacitet koji je aviokompanija spremna da proda. Sa druge strane, koliko prebukirati zavisi od plana puta koji aviokompanija drži otvorenim i od verovatnoće da će se potrošač koji kupuje rezervaciju za jedan od otvorenih letova pojaviti u vreme poletanja.

U ovom radu je konstruisano nekoliko modela da bi se ispitali efekti različitih politika, koje koriste prebukiranost, na prihod i troškove aviokompanija. Troškovi koje aviokompanija mora da plati putnicima koji su isključeni sa leta za koji su već kupili kartu direktno utiču na prihod. U isto vreme aviokompanije teže da povećaju prihod popunjavanjem letova bliže kapacitetu. Kada je putnik isključen sa leta usled prebukiranosti on može ili da bira ili da odbije da pregovara sa aviokompanijom radi nadoknade. Ovi izbori daju različite troškove za aviokompaniju.

Da bi bolje razumeli optimalnu politiku prebukiranja razvijamo tri veoma različita, ali komplementarna modela: *Osnovni model prebukiranosti* , *Model sa stohastičkim kapacitetom i Model sa pomerajućim kapacitetom* .

Osnovni model prebukiranosti modeluje očekivani prihod kao funkciju politike prebukiranja u slučaju kada posmatramo samo jedan avion. Pomoću ovog modela ispitan je odnos između optimalne strategije prebukiranosti (maksimizacije prihoda) i verovatnoće pojavljivanja vlasnika karte. Kasnije će ovaj model biti proširen uključivanjem više klasa u avionu. Ova analiza otkriva, pored drugih stvari, da uključivanje više klasa ne mora da znači i promenu u politici prebukiranja. Korišćenjem preliminarne analize faktora komplikacija otkrivene su male promene koje se pojavljuju u verovatnoći pojavljivanja vlasnika karte i demonstrirani su mogući efekti koji utiču na optimalno rezervisanje.

Model sa stohastičkim kapacitetom ima za cilj da se razvije optimalna politika prihvatanja/odbijanja porudžbina da bi se ostvario maksimalan očekivani ukupni prihod (uključujući i troškove kazne). Komplikacije se javljaju zbog činjenice da tačan kapacitet nije poznat u vreme pristizanja porudžbina zbog svoje stohastičke prirode.

Model sa pomerajućim kapacitetom je uglavnom primenjivan u aviosaobraćaju. Ideja je da se uvedu takozvana konvertibilna sedišta koja omogućuju preraspodelu kapaciteta između klasa u avionu. Problem je formulisan pomoću modela matematičkog programiranja i predstavljen je deterministički i stohastički prilaz. Takođe, model je proširen tako da uključuje mogućnost otkazivanja rezervacija i razmatrane su različite politike rezervisanja koje direktno utiču na prihod.

2. Uvodni matematički pojmovi

Funkcije raspodele i funkcije gustine

U teoriji verovatnoće i statistici, funkcija raspodele diskretne slučajne promenljive X je data na sledeći način:

X je diskretna slučajna promenljiva, tj. $X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$

gde p_i predstavlja verovatnoću da slučajna promenljiva X primi vrednost x_i.

Tada, za svako realno x, *funkcija raspodele* za X je data sa:

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

gde desna strana jednakosti predstavlja verovatnoću da slučajna promenljiva X primi vrednost manju ili jednaku sa x. Verovatnoća koja leži u intervalu $(a,b]$ je tada $F_X(b) - F_X(a)$, ako je $a < b$.

Ako je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva ona je data svojom *funkcijom gustine* koja je definisana sa:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \text{ili} \qquad f(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Svaka funkcija raspodele F je (ne striktno) monotono rastuća i ima sledeće osobine:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Ako je X diskretna slučajna promenljiva onda prima vrednosti $x_1, x_2, \ldots$ sa verovatnoćom $p_i = P(x_i)$ i funkcija raspodele za X će biti prekidna u tačkama x_i, a neprekidna između njih:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

Ako je X apsolutno nepekidna slučajna promenljiva onda za funkciju gustine važi sledeće:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \text{i} \quad P[a \leq X \leq b] = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Jedna od najčešće korišćenih raspodela u statističkoj analizi je *normalna raspodela*. Njena široka primena bazirana je na jednoj od osnovnih teorema matematičke statistike, tj. na centralnoj graničnoj teoremi.

Za slučajnu promenljivu X kažemo da ima normalnu raspodelu ako je njena funkcija gustine data sa

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2b^2}}, b > 0$$

Vrednosti a i b su parametri modela. Normalnu raspodelu označavaćemo sa $X : N(a,b)$.

Matematičko očekivanje

Def 1: Neka je X diskretna slučajna promenljiva zadata sa

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Ako red $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ apsolutno konvergira, tada njegovu sumu nazivamo matematičko očekivanje slučajne promenljive X i označavamo ga sa $E[X]$.
Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive definišemo sa

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$, ako je $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < \infty$.

<u>Osobine matematičkog očekivanja:</u>

- Očekivanje konstante je jednako samoj konstanti, tj. ako je c konstanta onda je $E(c) = c$.
- Monotonost - Ako su X i Y slučajne promenljive takve da je $X \leq Y$ onda je i $E[X] \leq E[Y]$.
- Linearnost -
  $E[X + c] = E[X] + c$
  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
  $E[aX] = aE[X]$
- $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$
- $E[X] = \int_{0}^{\infty} P(X \geq x)dx$.

Definitnost matrice

<u>Def 2:</u> Neka je $Q(x)$ kvadratna matrica i A simetrična matrica takva da je $Q(x) = x' Ax$.
Tada je $Q(x)$ (a takođe i matrica A):

- Pozitivno definitna, ako je $x' Ax > 0$ za sve $x \neq 0$
- Negativno definitna, ako je $x' Ax < 0$ za sve $x \neq 0$
- Pozitivno semidefinitna, ako je $x' Ax \geq 0$ za sve x
- Negativno semidefinitna, ako je $x' Ax \leq 0$ za sve x
- Indefinitna, ako nije ni pozitivno ni negativno semidefinitna (tj. ako je za neko x, $x' Ax > 0$, a za neko x, $x' Ax < 0$).

Unimodalna funkcija

<u>Def 3:</u> Funkcija $f(x)$ je *unimodalna* ako postoji m (koji nazivamo mod) tako da je monotono rastuća za $x \leq m$ i monotono opadajuća za $x \geq m$. U tom slučaju maksimalna vrednost za $f(x)$ je $f(m)$ i ne postoji ni jedan drugi lokalni maksimum.

3. Osnovni model prebukiranosti

Termini

- Vlasnik karte- osoba koja je rezervisala kartu i čiji je prihod od karte aviokompanija već primila.
- Putnici- vlasnici karte koji su se pojavili na terminalu u vreme poletanja aviona.
- Ukrcani putnici- putnici koji su uspeli da uđu u avion i zauzmu svoja mesta.
- Prekobrojni putnici- putnici koji nisu dobili svoje mesto u avionu.
- Dobrovoljno prekobrojni putnici- prekobrojni putnici koji su se odrekli svog mesta u avionu u korist neke nadoknade (obično novčane) od strane aviokompanije.
- Nedobrovoljno prekobrojni putnici- prekobrojni putnici koji se odriču svog mesta u avionu protiv svoje volje.
- Troškovi nadoknade- ukupan iznos novca i drugih kompenzacija koje aviokompanija daje prekobrojnim putnicima.
- Kapacitet leta- ukupan broj sedišta u datom avionu.
- Prebukiranost- praksa prodavanja broja karata za let koji je veći od kapaciteta aviona.
- Vreme čekanja- vreme koje prekobrojni putnik treba da čeka do sledećeg leta koji mu odgovara.
- Faktor opterećenja- odnos broja popunjenih sedišta u odnosu na kapacitet.

U slučaju kada je vlasnik karte nedobrovoljno prekobrojan aviokompanija specificira skup pravila za prinudne naknade. Predstavljen je model za raspodelu vremena čekanja koji dopušta procenu prosečnih troškova po nedobrovoljno prekobrojnom putniku.

U slučaju kada je putnik dobrovoljno spreman da se odrekne svoje karte, interakcija između aviokompanije i putnika prima oblik aukcije sa najnižom ponudom u kojoj pobednik dobija nadoknadu za odricanje od svog mesta u avionu.

Svi prekobrojni putnici su ili dobrovoljno ili nedobrovoljno prekobrojni i analiza očekivanih troškova, koji se tiču ova dva slučaja, dovodi do dobrog razumevanja troškova koji se tiču prekobrojnih putnika.

3.1 Faktori komplikacija

Svaki od modela teži da uzme u obzir trenutnu situaciju u kojoj se nalaze aviokompanije. Pozivaćemo se kolektivno na četiri faktora koje nazivamo faktorima komplikacija. Individualno su posmatrani kao:

- **Faktor saobraćaja-** U proseku postoji manje letova između bilo kojih lokacija u toku dana i u toku noći.
- **Faktor bezbednosti-** Bezbednost u i oko aerodroma

- **Faktor straha-** Putnici su obazriviji zbog opasnosti putovanja avionom, kao što su mogući napadi terorista, pad aviona ili greške kod obezbeđenja.
- **Faktor finansijskog gubitka-** Aviokompanije su izgubile milijarde dolara prihoda tokom nekoliko proteklih meseci zbog opadanja potražnje za putovanjem avionom kao i zbog povećanja troškova bezbednosti i povećanog industrijskog rizika.

Pre predstavljanja modela i modifikacija koje su uvedene pomoću ovih faktora, navedene su analize svakog od njih.

Faktor saobraćaja

Pošto u proseku postoji manje letova između bilo koje dve lokacije, posmatrajući trenutnu situaciju, vrlo je verovatno, iako su sve ostale stvari ostale nepromenjene, da će potražnja za bilo koji dati let rasti. Na osnovu toga, letovi će verovatno biti puniji nego ranije, a prosečno vreme čekanja između letova do date destinacije će se verovatno povećati. Pošto će se prosečno vreme čekanja između letova povećati razumno je očekivati da će prekobrojni putnik zahtevati viši nivo nadoknade zbog gubitka vremena.

U slučaju putnika koji prihvate neku vrstu nadoknade, prosečna zahtevana cena za odricanje mesta u avionu će biti viša. Za nedobrovoljno prekobrojne putnike aviokompanije poseduju planove nadoknade koji zavise od cene karte i od vremena čekanja putnika do sledećeg slobodnog leta. Ove nadoknade će takođe biti više iz dva razloga. Prvo, pod pretpostavkom da zalihe aviona opadnu više nego što je opala potražnja za letove prema svim destinacijama, cena karte će tada rasti. Drugo, povećanje prosečnog vremena čekanja dovodi do većih troškova aviokompanija za nadoknade nedobrovoljno prekobrojnim putnicima. Sprovedena je detaljna analiza slučajeva dobrovoljno i nedobrovoljno prekobrojnih putnika korišćenjem modela aukcije i modela raspodele vremena čekanja.

Faktor bezbednosti

Povećanje bezbednosti u i oko aerodroma će dovesti do povećanja broja vlasnika karata koji će se pojaviti na aerodromu, ali ukoliko dođe do zastoja u bezbednosti ti putnici neće biti u mogućnosti da stignu na vreme do izlaza. Ovaj efekat će dovesti do opadanja verovatnoće p da će se pojedinačni vlasnik karte pojaviti na svoj let. Sa druge strane, uspešna primena mera bezbednosti može dovesti do poboljšanja u javnoj slici avionske industrije i do povećanja potražnje.

Faktor straha

Faktor straha jednim delom utiče na efekte faktora bezbednosti. Sa jedne strane, povećan strah od letenja dovodi do opadanja potražnje za putovanjem avionom i do opadanja veličine tržišta. Ako manje ljudi odluči da leti tada zastoji u bezbednosti nisu toliko ozbiljni. Sa druge strane, ako veći procenat vlasnika karata odluči da leti zbog neminovnosti, onda će se verovatnoća da vlasnik karte postane putnik, tj. da dobije svoje mesto u avionu, povećati zbog smanjenja otkazivanja i nepojavljivanja.

Faktor straha ukazuje na to da zbog većeg dela ljudi koji lete zbog neophodnosti, manje njih će pristati da budu prekobrojni po bilo kojoj ceni. Dakle, procenat nedobrovoljno prekobrojnih putnika će se povećati. Zajedno sa tim, prosečan nivo nadoknade zahtevan od strane dobrovoljno prekobrojnih putnika će verovatno rasti.

Faktor finansijskog gubitka

Pošto kompanije teže da uvećaju kratkoročne profite moguće je da neke aviokompanije odluče da primene malo agresivniju politiku prebukiranja. Kada se takva situacija dogodi može doći do rata između aviokompanija ako povećana prebukiranost dovodi do višeg prihoda zbog toga što su avioni popunjeni bliže kapacitetu. Aviokompanije koje nisu primenile ovu politiku će brzo biti prinuđene da prate ostale aviokompanije da bi dorasle svojim konkurentima. Povećanje broja prekobrojnih putnika će dovesti do povećanja troškova nadoknade što će poravnati uvećani prihod. Ako aviokompanije saglasno odluče da primene agresivnu politiku prebukiranja, rezultati će verovatno naneti štetu većini ako ne i svim aviokompanijama kroz više troškove nadoknada.

Ako su aviokompanije manje kratkovide uzeće u obzir i efekat koji ima javna slika na potražnju za putovanjem avionom. Posebno, opadanje broja prekobrojnih putnika će poboljšati njihovu sliku i može podstaći potražnju što će dati podlogu za budući tok prihoda. U praksi je bitno da pojedinačne aviokompanije procene relativnu važnost ovih efekata kada uspostavljaju svoju politiku prebukiranja.

3.2 Uvod i motivacija za osnovni model prebukiranosti

Prvo je razmatrana strategija optimalnog prebukiranja za jedan let nezavisan od svih drugih letova. Ovo je važno pojednostavljenje glavnog problema prebukiranosti. Ovaj model je bitan i koristan zbog nekoliko razloga. Prvo, služi da bi se razvila intuicija o opštem problemu prebukiranja. Drugo, razmatra netrivijalan slučaj koji je i dalje veoma lako obradiv i zbog toga nam dopušta više analiza.

Pretpostavlja se da avion ima kapacitet sa C identičnih sedišta. Ova pretpostavka će kasnije biti oslabljena kada se bude razmatrao model sa više klasa. Takođe pretpostavlja se da je cena karte $T = 140\$$ nezavisna od vremena kada je kupljena. Konačno, pretpostavlja se da je strategija prebukiranja aviokompanije da proda do B karata ako je to moguće ($B > C$).

Ova strategija je analizirana u slučaju kada je let u potpunosti rasprodat (tj. sve karte B su prodate). Analiza ovog slučaja je jedan od direktnih načina da se izmeri efikasnost strategije prebukiranja aviokompanije.

Broj putnika po letu je modelovan binomnom raspodelom, gde vlasnik karte postaje putnik sa verovatnoćom p. Prosečna vrednost za p dobijena je na osnovu letova deset američkih avikompanija i iznosi $p = 0.85$. Primetimo, međutim, da p vrednost za pojedinačni let zavisi od mnoštva faktora- naprimer vremena poletanja, dužine leta, destinacije i od toga da li je sezona odmora. Zbog mogućih varijacija vrednosti p od leta do leta sprovedena je analiza za niz mogućih vrednosti p. Međutim, aviokompanija poseduje ili može da proceni empirijsku vrednost za p za bilo koji pojedinačni let. Korišćenjem binomnog modela, verovatnoća da postoji tačno i putnika među B vlasnika karata je

$$\binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i}.$$

Dalje su modelovani troškove nadoknade. Pretpostavlja se da je svakom prekobrojnom putniku plaćena nadoknada $(k+1)T = 140(k+1)$ za neku pozitvnu konstantu k. Prevedeno u svakodnevne termine, to znači da prekobrojni putnik dobija nadoknadu jednaku ceni svoje karte i još neku dodatnu kompenzaciju $kT > 0$. Pretpostavka da je trošak nadoknade konstantan za sve prekobrojne putnike će kasnije biti oslabljena.

Funkcija troškova nadoknade je definisana sa $F(i,C)$ i ona predstavlja ukupne nadoknade koje aviokompanija mora da plati ako postoji tačno i putnika za let kapaciteta C

$$F(i,C) = \begin{cases} 0 & i \le C \\ (k+1)T(i-C) & i > C \end{cases}.$$

Sa dosadašnjim rezultatima očekivani prihod R se može izračunati kao funkcija strategije prebukiranja B

$$R(B) = \sum_{i=1}^{B} \binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i} (BT - F(i,C)) \tag{1}$$

$$= 140B - 140(k+1) \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i} p^i (1-p)^{B-i} (i - C). \tag{2}$$

Dakle, za date C, p i k, moguće je odrediti strategiju prebukiranja B_{opt} koje maksimizuje $R(B)$. B_{opt} je određeno pomoću kompjuterskog programa simulacijom različitih vrednosti za C, p i k.

Primetimo da je prihod od prekobrojnog putnika ,$T-(k+1)T = -kT$, umanjen k puta u odnosu na prihod od ukrcanog putnika, T. Dakle, optimalna strategija prebukiranja treba biti izabrana tako da je raspodela putnika balansirana na neki način tako da $1/(k+1)$-ti deo odgovara prekobrojnim putnicima, a preostali $k/(k+1)$-ti deo odgovara ukrcanim putnicima.

Binomna raspodela putnika je aproksimirana pomoću standardne normalne raspodele da bi iskoristili funkciju $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2 dt}$, čime se dobija

$$\frac{C - Bp}{\sqrt{Bp(1-p)} = \phi^{-1}(\frac{k}{k+1})}.$$

Oslobađanjem imenilaca i rešavanjem jednačine po B dobija se

$$B'_{opt} = \left(\frac{-\phi^{-1}(\frac{k}{k+1})\sqrt{p(1-p)} + \sqrt{\phi^{-1}(\frac{k}{k+1})^2 p(1-p) + 4pc}}{2p} \right)^2, \tag{3}$$

kao analitička aproksimacija za B_{opt}. Primetimo da kada stavimo da je $k = 1$ dobijamo $B'_{opt} = C/p$.

Rezultati i tumačenje

Korišćenjem softverskog paketa Mathematica rešena je jednačina (2) za optimalno B i određene C, p i k. U tabeli 1 su predstavljeni rezultati za let kapaciteta $C = 150$.

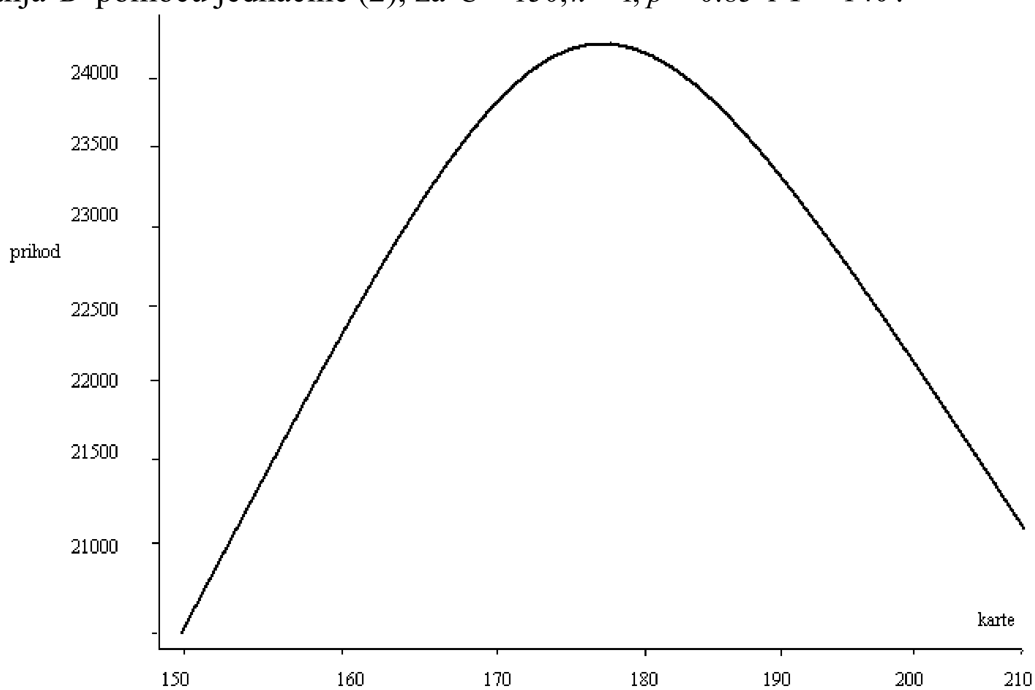
Tabela 1

p	k	B_{opt}	B'_{opt}
0.80	1	189	188
0.85	1	177	176
0.90	1	167	167
0.80	2	186	185
0.85	2	175	174
0.90	2	165	165
0.80	3	184	183
0.85	3	173	173
0.90	3	164	164

Tabela 1: Optimalna strategija prebukiranja u poređenju sa matematičkom aproksimacijom B'_{opt} sa datim verovatnoćama pojavljivanja i konstantama nadoknade.

Primetimo da u realnoj situaciji k neće nikad preći 3. To znači da prekobrojni putnici nikad neće dobiti nadoknadu koja je $k+1=4$ puta veća od njihove cene karte. Realnija situacija bi bila da je $k=1$ ili 2. Takođe, primetimo da je p uvek negde između 0.85, kao što je spomenuto ranije. Vrednosti za p i k prikazane u tabeli 1 su veoma realne i zbog toga formula (3) daje stope prebukiranosti koje su veoma blizu optimalnim vrednostima dobijenim kompjuterski. Zbog toga se ova formula može smatrati razumnom aproksimacijom pravog B_{opt}.

Sada su detaljnije analizirani podaci dobijeni kompjuterski za optimalnu strategiju prebukiranja. Primetimo da za dati let, C i T su poznati i aviokompanija može, kao što je ranije objašnjeno, dobiti veoma dobre aproksimacije za p i k. Dakle, pošto su poznati svi podaci za C, T, p i k može se dobiti optimalna strategija prebukiranja B_{opt}. Na slici 1 je prikazan očekivani prihod $R(B)$ u odnosu na strategiju prebukiranja B pomoću jednačine (2), za $C=150, k=1, p=0.85$ i $T=140$.



<u>Slika 1</u>

Prihod R u odnosu na strategiju prebukiranja B, za $C=150, k=1, p=0.85$ i $T=140\$$

U optimalnom $B=177$, aviokompanija može da očekuje prihod $R(177)=24200\$$, što je više od 15% ostvarenog viška u odnosu na $R(150)=21000\$$, gde nije korišćena politika prebukiranja. Ovo pokazuje očigledne prednosti koje aviokompanije imaju ukoliko koriste politiku prebukiranja.

Međutim, najvažnije je primetiti da ako se koriste neke strategije koje su blizu optimalne, to može dovesti do ozbiljnih posledica na prihod. Korišćenjem ovog modela može se pokazati da ako se koriste politike prebukiranja B koje su izvan intervala $[173,183]$ očekivani gubitak će biti više od milijardu dolara tokom perioda od 5 godina. Ovo pokazuje finansijski uticaj koji ima odabir optimalne, ili blizu optimalne strategije u odnosu na manje optimalne.

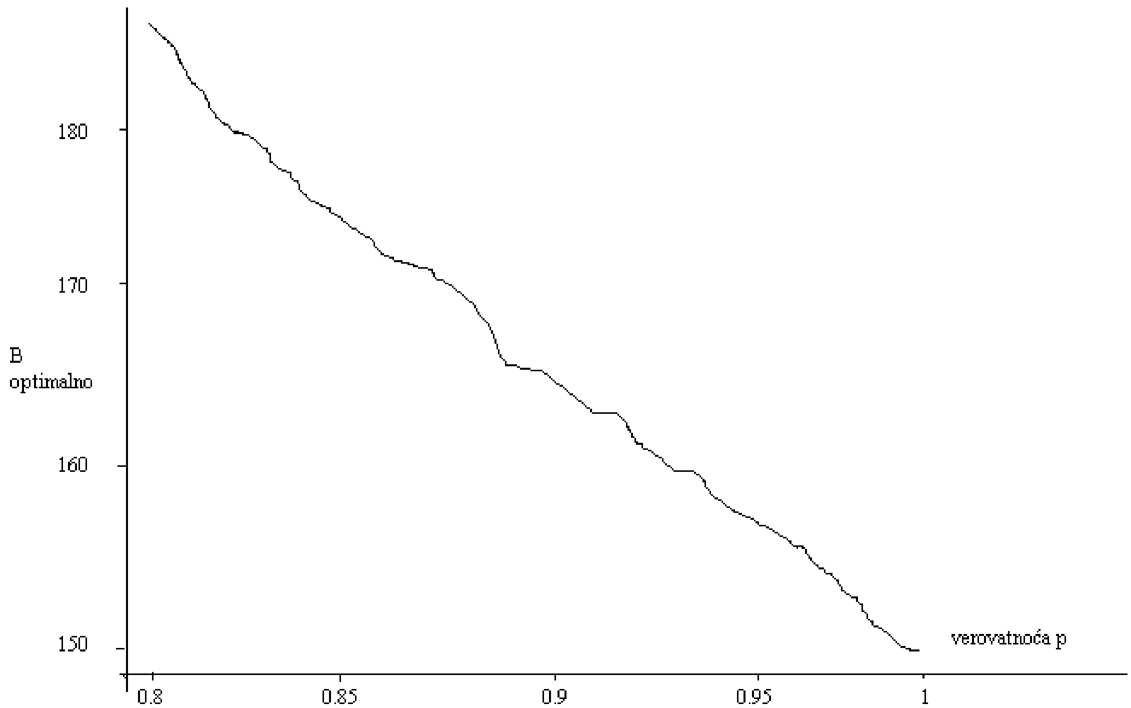
Model koji je do sada predstavljen je dosta pojednostavljen. Njegovo očigledno ograničenje je što ne uzima u obzir nezadovoljstvo prekobrojnih putnika i sklonost da promene aviokompaniju. Takođe model pretpostavlja konstantnu funkciju troškova nadoknade za prekobrojne putnike. Dodatno, osnovni model pretpostavlja da su sve karte identične, tj. da svi lete u jednoj klasi. Takođe, model pretpostavlja da su svih B karata koje kompanija planira da proda i prodate što nije slučaj za svaki let.

Ovaj model uspešno analizira najvažnije promenljive u problemu prebukiranja-prihod kao funkciju strategije prebukiranja kada kapacitet aviona, verovatnoća da će se vlasnik karte pojaviti i funkcija troškova nadoknade variraju.

Faktori komplikacija

Od četiri faktora komplikacija samo su dva relevantna za ovaj model i to su faktor bezbednosti i faktor straha. Na osnovu dosadašnje analize, glavni efekat faktora bezbednosti je smanjenje verovatnoće p. Sa druge strane, glavni efekat faktora straha je da veći deo putnika koji lete to čine iz neophodnosti. Pošto će se takvi putnici verovatnije pojaviti u vreme poletanja aviona od drugih, faktor straha utiče na to da verovatnoća p raste.

Slika 2 prikazuje optimalnu strategiju prebukiranja B_{opt} u odnosu na p (za fiksne $k=1$ i $C=150$).



<u>Slika 2</u>

Teško je utvrditi tačne promene u p koje rezultuju od faktora bezbednosti i straha. Međutim, aviokompanije mogu to odrediti empirijski pomoću statističkih podataka svojih letova.

Osnovni model prebukiranosti pruža mogućnost maksimizacije prihoda u određenim scenarijima. Posebno, daje nam vrednost B_{opt} za maksimalan broj karata koje aviokompanija treba da proda za određeni let. Model daje odgovor na to pitanje za različite vrednosti kapaciteta aviona C, verovatnoće pojavljivanja p i konstante nadoknade k. Na primer, u realnim uslovima model predlaže prodaju 177 karata za avion kapaciteta 150 da bi se maksimizovao prihod. Dodatno je navedena i formula za dobijanje dobre aproksimacije kompjuterski generisanog B_{opt}.

Model je koristan zato što dozvoljava veći broj razumnih analiza kao podslučajeva opšteg problema prebukiranja. Međutim, on ne uzima u obzir situacije koje uključuju više letova ili više klasa.

3.3 Osnovni model prebukiranosti-više klasa

Uvod i motivacija

Većina aviokompanija prodaje karte za više različitih klasa koje su najčešće biznis i ekonomska klasa. U ovom poglavlju je proširen osnovni model, koji je uzimao u obzir samo jednu klasu, sa više klasa.

Zbog jednostavnosti se razmatra slučaj sa dve klase, biznis i ekonomskom. Avion ima C_1 sedišta biznis klase i C_2 sedišta ekonomske klase. Pretpostavlja se da je cena karte u biznis klasi $T_1 = 280\$$, a u ekonomskoj $T_2 = 140\$$. Razmatra se strategija prebukiranja prodavanjem do B_1 karata biznis klase i do B_2 karata ekonomske klase, gde su ta dva tipa prodaje nezavisni jedan od drugog.

Slično kao i ranije pretpostavlja se da vlasnik karte u biznis klasi postaje putnik sa verovatnoćom p_1, a da vlasnik karte u ekonomskoj klasi postaje putnik sa verovatnoćom p_2. Korišćene su dve nezavisne binomne raspodele. Vlasnici karata biznis klase će verovatnije postati putnici od onih u ekonomskoj klasi pošto su oni uložili više novca u svoje karte, tj. $p_1 > p_2$.

Dakle, verovatnoća da postoji tačno i putnika biznis klase je

$$\binom{B_1}{i} p_1^i (1-p_1)^{B_1-i},$$

i verovatnoća da postoji tačno j putnika ekonomske klase je

$$\binom{B_2}{j} p_2^j (1-p_2)^{B_2-j}.$$

Troškovi nadoknade su modelovani kao konstantni po prekobrojnom putniku, ali zavisni u odnosu na putničku klasu, sa $(k_1+1)T_1$ nadoknade za prekobrojnog putnika biznis klase i $(k_2+1)T_2$ za prekobrojnog putnika ekonomske klase, za neke pozitivne k_1 i k_2. Dalje, je definisana funkcija troškova nadoknade $F(i, j, C_1, C_2)$ da bude ukupan trošak nadokanada koje aviokompanija plaća ako postoji i putnika biznis klase i j putnika ekonomske klase za avion sa C_1 sedišta biznis klase i C_2 sedišta ekonomske klase

$$F(i,j,C_1,C_2) = \begin{cases} 0 & i \le C_1, j \le C_2 \\ T_1(k_1+1)(i-C_1) & i > C_1, j \le C_2 \\ \max\{T_2(k_2+1)((j-C_2)-(i-C_1)),0\} & i \le C_1, j > C_2 \\ T_1(k_1+1)(i-C_1)+T_2(k_2+1)(j-C_2) & i > C_1, j > C_2 \end{cases}.$$

Treći slučaj u gornjoj jednačini znači da višak putnika u ekonomskoj klasi može biti prebačen na slobodna sedišta biznis klase. Sa druge strane, višak putnika biznis klase ne sme biti prebačen na sedišta ekonomske klase; to se vidi u drugom slučaju.

Sada se može modelovati očekivani prihod R kao funkcija od strategija prebukiranja (B_1, B_2),

$$R(B_1,B_2)=\sum_{i=1}^{B_1}\sum_{j=1}^{B_2}\binom{B_1}{i}\binom{B_2}{j}p_1^i(1-p_1)^{B_1-i}p_2^j(1-p_2)^{B_2-j}(B_1T_1+B_2T_2-F(i,j,C_1,C_2)).$$

Rezultati i objašnjenje

Za fiksne C_i, T_i, p_i i $k_i, (i=1,2)$, mogu se odrediti $(B_{1,opt}, B_{2,opt})$ za koje je $R(B_1,B_2)$ maksimalno, korišćenjem istog kompjuterskog programa kao i u slučaju jedne klase. Primetimo da za dati let, C_i i T_i su poznati i aviokompanija može empirijski odrediti vrednosti za p_i i k_i.

Na primer, za avion kapaciteta $C_1=20$ sedišta biznis klase i $C_2=130$ sedišta ekonomske, sa cenama karata $T_1=280\$$ i $T_2=140\$$ i konstantama nadoknade $k_1=k_2=1$, dobijaju se optimalne strategije prebukiranja u tabeli 2.

Tabela 2

p_1	p_2	$B_{1,opt}$	$B_{2,opt}$
0.85	0.80	23	165
0.90	0.80	22	165
0.95	0.80	20	166
0.85	0.85	23	155
0.90	0.85	22	155
0.95	0.85	20	155
0.90	0.90	22	146
0.95	0.90	21	145

Tabela 2: Optimalne strategije prebukiranja kod dve klase za date verovatnoće pojavljivanja

Optimalna strategija uključuje veoma malo prebukiranja putnika biznis klase. To je razuman rezultat pošto je nadoknada mnogo viša kod prekobrojnih putnika biznis klase nego kod ekonomske klase.

Primetimo da za konstantno p_2, ukupan broj prebukiranih putnika $B_{1,opt}+B_{2,opt}$ u optimalnoj strategiji nije mnogo narušen tačnom vrednošću p_1. Ova činjenica je prikazana u tabeli 3. Upoređeni su ukupan broj prekobrojnih putnika $B_{1,opt}+B_{2,opt}$ u optimalnoj strategiji sa dve klase i verovatnoćama pojavljivanja (p_1,p_2) sa brojem prekobrojnih putnika B_{opt} u optimalnoj strategiji sa jednom klasom i verovatnoćom pojavljivanja $p=p_2$. Dakle, verovatnoća pojavljivanja u slučaju jedne klase je jednaka verovatnoći pojavljivanja kod ekonomske klase u slučaju dve klase.

Tabela 3 jasno pokazuje da je $B_{1,opt}+B_{2,opt}$ jednako ili veoma blizu jednakosti sa B_{opt} u svim slučajevima. Zaključak je da efekat više klasa na optimalnu strategiju prebukiranja i nije toliko značajan.

Tabela 3

p_1	p_2	$B_{1,opt} + B_{2,opt}$	B_{opt} za $p = p_2$
0.85	0.80	188	189
0.90	0.80	187	189
0.95	0.80	186	189
0.85	0.85	178	177
0.90	0.85	177	177
0.95	0.85	175	177
0.90	0.90	168	167
0.95	0.90	166	167

Tabela 3: Ukupan broj prebukiranja u optimalnim slučajevima sa jednom i dve klase

4. Analiza troškova nadoknade

U ovom poglavlju su analizirani troškovi aviokompanija zbog nadoknada prekobrojnim putnicima. Postoje razni pristupi ophođenja prema prekobrojnim putnicima. Ključni element koji razdvaja ove pristupe je stepen izbora koji imaju putnici. U slučaju kada putnik nije spreman da se odrekne svoje karte i mesta u avionu aviokompanija mora nasilno da suspenduje korišćenje te putničke karte. U takvim slučajevima putnik ima malo izbora što se tiče količine nadoknade koja mu pripada.

Sa druge strane, putnik se može složiti da pregovara sa aviokompanijom u nadi da će izvući određenu cenu za svoje odricanje karte. U ovom slučaju putnici imaju više izbora nego u prošlom scenariju i uglavnom to dovodi do odgovarajućeg kompromisa. Da bi to postigla, aviokompanija često organizuje aukcije za putnike u kojim se najniže ponude prve kupuju.

U ovom poglavlju je podeljena analiza troškova nadoknade na dva dela. Prvo je konstruisan model za troškove nedobrovoljno prekobrojnih koji uzimaju u obzir raspodele vremena čekanja za letove. Nakon toga su razmatrane metode aukcije za dobrovoljno prekobrojne putnike i izvedeni novi rezultati za očekivane troškove nadoknade kod neprekidne aukcije.

4.1 Nedobrovoljno prekobrojni

Aviokompanije su obavezne da svim putnicima koji su nedobrovoljno prekobrojni daju pisanu izjavu u kojoj opisuju njihova prava i objašnjavaju kako aviokompanija odlučuje ko će ući na prebukirani let, a ko neće. Onim putnicima koji ne uspeju da uđu u avion se obično dodeljuje na licu mesta određena nadoknada zbog odbijanja. Iznos te nadoknade zavisi od cene njihove karte i od dužine čekanja na sledeći način:

- Putnici koji su nedobrovoljno prekobrojni i kojima aviokompanija uredi neki drugi let u zamenu za taj u roku od jednog sata, ne dobijaju nikakvu nadoknadu.
- Ako aviokompanija uredi odgovarajuću zamenu za let za koji se čeka između jednog i dva sata, ona mora ispalatiti prekobrojnim putnicima iznos jednak njihovoj ceni karte u jednom pravcu sa još 200$ maksimum.
- Ako se za naredni let čeka duže od dva sata ili ako aviokompanija ne obezbedi nikakvu zamenu leta, ona mora platiti iznos manji ili jednak sa 300% od cene karte ili još 400$.
- Prekobrojni putnici uvek mogu da zadrže svoje karte i iskoriste ih za drugi let. Ako odluče da sami pronađu drugi let dobijaju nadoknadu u visini njihove cene karte.

Ovi uslovi se primenjuju samo za domaće letove i ne veže za avione koji primaju 60 putnika i manje. Postoje drugi manji izuzeci, ali oni nisu bitni za ovaj model. Funkcija koja predstavlja troškove nadoknade za nedobrovoljno prekobrojne putnike sada je data sa

$$C(T,F)=\begin{cases} 0 & ako \quad 0<T\le 1 \\ \min(2F,F+200) & ako \quad 1<T\le 2 \\ \min(3F,F+400) & ako \quad 2<T \end{cases},$$

gde je T vreme čekanja, a F je cena karte. Kao što je pomenuto ranije pretpostavlja se da su svi letovi na datoj lokaciji direktni i imaju isto trajanje. Zbog toga je vreme čekanja između letova jednako razlici u vremenima poletanja i vreme čekanja T se smatra vremenom do sledećeg poletanja aviona na datoj relaciji. Kod formulacije gornje jednačine pretpostavlja se da nedobrovoljno prekobrojni putnici uvek traže nadoknade za svoje karte.

4.2 Nedobrovoljno prekobrojni: Model vremena čekanja i očekivanih troškova

Da bi koristili funciju troškova nadoknade za određivanje prosečne nadoknade (po nedobrovoljno prekobrojnom putniku) potrebno je poznavati raspodele za cene karata i vreme čekanja. Pošto je do ove informacije veoma teško doći sa tačnošću za određeni avion tokom datog dana u mesecu, posmatra se sledeće:

1. Određuju se očekivani troškovi nadoknade za prosečnu cenu karte 140$.
2. Kasnije se specificira model za raspodelu vremena čekanja koji omogućava direktno izračunavanje ovih troškova.

Model za raspodelu vremena čekanja će imati eksponencijalnu raspodelu. Postoje dva glavna razloga zbog kojih se preporučuje korišćenje ovog modela:

1. Eksponencijalna raspodela se obično pojavljuje u praksi kao raspodela za količinu vremena dok se ne desi neki događaj.

2. Ako vreme čekanja između događaja ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ, broj događaja koji se dese u jednom vremenskom intervalu prati Poasonov proces sa parametrom λ. Pristizanja aviona mogu biti posmatrana pomoću jednog takvog procesa. Poasonov proces ima osobinu da je suma Poasonovih procesa sa parametrima λ_1 i λ_2, respektivno, takođe Poasonov proces sa parametrom $\lambda_1 + \lambda_2$.

Eksponencijalni model

Neka je T slučajna promenljiva koja predstavlja vreme čekanja između letova tako da je

$$\Pr ob(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Zbog osobina eksponencijalne raspodele poznato je da je $E(T) = \tau = 1/\lambda$, gde je τ srednje vreme čekanja do sledećeg slobodnog leta. U stvarnosti τ je funkcija koja zavisi od mnogo faktora uključujući vreme u godini kao i atraktivnost destinacije. Uopšteno, količina zastoja u bezbednosti (faktor bezbednosti), kao i činjenica da je u skorije vreme količina letova smanjena (faktor saobraćaja), utiču na povećanje τ iznad ranijih nivoa.

Očekivani troškovi

Sada se mogu izračunati očekivani troškovi nadoknade za nedobrovoljno prekobrojne putnike.

Teorema 1: Pretpostavlja se da vreme čekanja T ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ i da su troškovi nadoknade funkcija koja zavisi od cene i vremena čekanja, data sa $C(F,T)$. Očekivani troškovi nadoknade za nedobrovoljno prekobrojne putnike koji su kupili kartu po ceni $F = P$ su

$$\min(2P, P+200)[e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}] + \min(3P, P+400)[e^{-2\lambda}].$$

Dokaz: Slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ ima funkciju gustine $\lambda e^{-\lambda t}$. Na osnovu definicije uslovnog očekivanja i definicije za $C(F,t)$ sledi

$$E[C(F,t)\ \big| F = P] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} C(P,t)dt = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t}(0)dt + \int_1^2 \lambda e^{-\lambda t}\min(2P, P+200)dt +$$

$$+\int_2^\infty \lambda e^{-\lambda t}\min(3P, P+400)dt.$$

Izračunavanjem ovih integrala po t dobija se željeni rezultat. ■

Pomoću ovog rezultata dobija se osnova za procenu prosečnih troškova po nedobrovoljno prekobrojnom putniku.

Procena za τ

Ostalo je još da se proceni prosečno vreme čekanja τ. Nažalost, statistički podaci koji se tiču vremena čekanja pomoću kojih bi odredili vrednost za τ nisu dostupni. Međutim, zbog nedostatka tih podataka pretraženi su sajtovi na internetu koji sadrže onlajn rezervisanje za letove između većih gradova. Po tim proračunima realno vreme čekanja u toku dana je otprilike 2.6 sati. Ovaj proračun ne uzima u obzir vreme između poslednjeg leta u jednom danu i prvog leta u narednom danu na istoj destinaciji. Ako se i to uključi u proračun onda je $\tau \approx 4.8$. Korišćenjem manje vrednosti, $\tau = 2.6$ sati dobijaju se očekivani troškovi nadoknade

$$E[C(F,t) \,|F = 140] = 255\$.$$

4.3 Dobrovoljno prekobrojni: Metod aukcije

Poteškoće koje se javljaju zbog prebukiranja putnika se teško predviđaju. Gubitak dobre volje putnika i neizbežno smanjenje u tržišnom udelu je dodatno pogoršano legalnim poteškoćama i mogućnostima krivičnog gonjenja. 1968. godine J.L. Simon je predložio rešenje ovih problema zasnovano na aukciji. Svaki vlasnik karte koji konkuriše za mesto u avionu podnosi zapečaćenu kovertu koja sadrži najmanji iznos novca za koji je spreman da se odrekne svoga mesta u avionu i sačeka drugi let. Ako nema sedišta za sve putnike, aviokompanija tada može da pruži nadoknadu onim putnicima koji su zahtevali najmanje novca i zahteva da se oni odreknu svojih mesta. Simon je naglasio da bi ovo bilo bolje za putnike, jer nikad neće biti prekobrojni bez odgovarajuće nadoknade, a takođe je povoljno i za aviokompanije jer time mogu da podignu svoj nivo prebukiranosti na viši nivo.

Postoje dva moguća načina za postizanje aukcije:

1. Prvi, predložen od strane Simon-a, je da se prisili svaki putnik da izabere cenu za koju će se odreći svoje karte. Aviokompanija će tada biti u mogućnosti da odmah uredi sva svoja prebukiranja.
2. Drugi, koji je više primenjivan u većini aviokompanija je da se cene nadoknade saopštavaju u diskretnim vremenskim intervalima. Tada putnici mogu da biraju ponudu koja im odgovara.

Prva mogućnost je interesantna zato što se može odmah realizovati i dozvoljava aviokompanijama da nadoknade svakom putniku samo minimalni iznos novca. Druga mogućnost, sa druge strane, može prouzrokovati zastoj dovodeći do nezadovoljstva putnika i aviokompanije će uvek plaćati malo više od minimalne nadoknade za svakog prekobrojnog putnika (zato što je samo konačan broj nadoknada ponuđen). Sa druge strane, aukcija drugog tipa može biti započeta dovoljno pre poletanja aviona i i dalje imati dovoljno prisutnih putnika da bi se dobili dobri rezultati. Takođe, ako se intervali postepeno povećavaju razlika u ceni je zanemarljiva. Dakle, ove metode bi trebalo da daju slične rezultate i zbog jednostavnosti se posmatra samo druga metoda, ali sa neprekidnim ponudama nadoknade.

4.4 Dobrovoljno prekobrojni: Rezultati neprekidne aukcije

U ovom poglavlju je sprovedena analiza rezultata aukcije sa konstantnim povećavanjem nadoknade. U literaturi je uobičajeno pretpostaviti da ako m putnika dobije nadoknadu kroz aukciju, tada će ukupan trošak nadoknade aviokompanije biti linearna funkcija po m, mada neki autori smatraju da bi ta funkcija trebalo da bude nelinearna i konveksna. Moguće je reći puno više sa samo nekoliko osnovnih pretpostavki:

- n vlasnika karata se pojavilo za let kapaciteta C, gde je $n > C$ (dakle ima n putnika za C sedišta),
- svaki putnik poseduje neku minimalnu cenu nadoknade za koju je spreman da se odrekne svoje karte. Nju ćemo zvati *granična cena*,
- aviokompanija uvek može da prebaci vlasnika karte na neki od svojih narednih letova bez troškova (tj. ne mora da plaća kartu kod konkurentne aviokompanije).

U idealnoj aukciji aviokompanija će ponuditi dovoljno visoke cene za nadoknade i kad god ta cena prekorači graničnu cenu putnika on će se dobrovoljno odreći svoje karte. Da bi ovo analizirali prvo se pretpostavlja da postoje vlasnici karata $(\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n)$. Zbog jednostavnosti su poređani tako da je granična cena putnika Γ_i manja od granične cene putnika Γ_j ako i samo ako je $i < j$.

Definišemo:

$D(x)$ - verovatnoća da će se slučajno izabrani vlasnik karte odreći svoje karte za cenu x,

Y_m - iznos nadoknade koju aviokompanija mora da plati Γ_m da bi ga navela da se odrekne svoje karte,

X_m - ukupan iznos nadoknada koje aviokompanija mora da plati da bi navela m putnika da se odreknu svojih karata.

Primetimo da zbog pretpostavke da je granična cena putnika Γ_i manja od granične cene putnika Γ_j ako i samo ako je $i < j$, sledi da je $X_m = \sum_{i=1}^{m} Y_i$. Zbog toga, da bi se odredilo $E[X_m]$ treba samo odrediti $E[Y_i]$ za $i \le m$. Da bi to uradili koristimo sledeću teoremu:

Teorema 2:

$$E[Y_m] = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \int_0^{\infty} (D(x))^m (1 - D(x))^{n-m} \, dx$$

Dokaz: Neka je $G_m(x)$ verovatnoća da će se tačno m putnika odreći svoje karte dobrovoljno za nadoknadu x. Tada, pošto su reakcije putnika nezavisne imamo

$$G_m(x) = \binom{n}{m}(F(x))^m (1 - F(x))^{n-m}.$$

Neka je $D_m(x)$ verovatnoća da putnik Γ_m ima graničnu cenu manju od x (tj. $D_m(x)$ je verovatnoća da vlasnik karte ima graničnu cenu manju od x, pri čemu on ima m-tu najmanju graničnu cenu od svih n vlasnika karata). Pošto će se najmanje m putnika odreći svoje karte dobrovoljno za naknadu x ako i samo ako je granična cena putnika Γ_m manja od x sledi

$$D_m(x) = \sum_{i=m} nG_i(x) = \sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}(D(x))^i (1 - D(x))^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}(D(x))^i (1 - D(x))^{n-i},$$

Pošto je $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(D(x))^i (1 - D(x))^{n-i} = (D(x) + 1 - D(x))^n = 1$. Međutim, $D_m(x)$ je po definiciji funkcija raspodele za Y_m, pa je

$$E[Y_m] = \int_0^{\infty}(1 - D_m(x))dx = \int_0^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}(D(x))^i (1 - D(x))^{n-i}\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}\int_0^{\infty}(D(x))^i (1 - D(x))^{n-i}\,dx$$

■

Veoma malo stvari se dalje može uraditi bez boljeg poznavanja prirode $D(x)$. Ne postoje neki skoriji podaci, ali kada su aviokompanije prvi put razmatrale problem aukcije 1978. godine K.V. Nagarajan je birao putnike na osnovu njihove granične cene. Iako je sproveo malo analiza, zaključuje se da funkcija raspodele ove granične cene veoma lepo odgovara ekponencijalnoj krivoj oblika $1 - e^{-Ax}$ za fiksno A.
Iako su ovi podaci zastareli ovo strogo opravdava pretpostavku da je $D(x) = 1 - e^{-Ax}$ za neko A izabrano nezavisno od x. Navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 3: Ako je $D(x) = 1 - e^{-Ax}$ za neko konstantno A, tada je

$$E[X_m] = \frac{1}{A}(m - (n-m)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + ... + \frac{1}{n-m+1}))$$

Dokaz: Neka je $u = D(x) = 1 - e^{-Ax}$. Tada je

$\frac{du}{dx} = Ae^{-Ax} = A(1-u)$ pa je $\frac{dx}{du} = \frac{1}{A(1-u)}$. Ako ovo zamenimo u teoremu dobijamo

$$E[Y_m] = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}\int_0^{1}u^m(1-u)^{n-m}\frac{1}{A(1-u)}du = \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}\int_0^{1}u^m(1-u)^{n-m-1}du.$$

Sada je $\int_0^1 u^m (1-u)^{n-m-1} du$ Beta funkcija, a poznato je da je ona jednaka

$$\frac{i!(n-m-1)!}{(n-m+i)!} = \frac{1}{(n-m)\binom{n}{m}}.$$

Dakle,

$$E[Y_m] = \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}\frac{1}{(n-i)\binom{n}{i}} = \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{n-i}.$$

Konačno,

$$E[X_m] = E[\sum_{i=1}^{m} Y_i] = \sum_{i=1}^{m} E[Y_i] = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{n-j} = \frac{1}{A}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=j+1}^{m}\frac{1}{n-j} = \frac{1}{A}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{m-j}{n-j} =$$

$$= \frac{1}{A}(m - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{n-m}{n-j}) = \frac{1}{A}(m-(n-m)(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+...+\frac{1}{n-m+1})).$$

■

Korišćenjem aproksimacije $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} \approx \ln n$ dobija se da je

$$E[X_m] \approx \frac{1}{A}(m-(n-m)\ln(\frac{n}{n-m})).$$

Ostaje samo da se odredi vrednost za A. Nažalost, ne postoji razlog da verujemo da je ono konstantno za sve scenarije. Na primer, putnici će sigurno prihvatiti manju nadoknadu za svoje karte ako je sledeći let u skorije vreme. Dakle, ovo je svakako oblast koja zahteva više istraživanja.

U svrhu ovog istraživanja pretpostavlja se da je A konstantno za sve situacije i biće procenjeno na osnovu leta kapaciteta $C = 150$ sa samo malim brojem prekobrojnih putnika Γ_1 koji imaju graničnu cenu 100\$. Dakle imamo $\frac{1}{A}\frac{1}{150} \approx 100\$$, tako da je

$$A \approx \frac{1}{15000}\$.$$

Konačno, pokazano je da u slučaju idealne aukcije sa ekponencijalnom funkcijom potražnje, očekivani iznos nadoknada koji je potreban da bi se m od n vlasnika karata navelo da se odreknu svoje karte je

$$\frac{1\$}{15000}(m-(n-m)\ln(\frac{n}{n-m})).$$

Dosta vremena i iskustva nalaže da su aukcija, prebukiranje i njihova kombinacija najbolje strategije za aviokompanije. Svakako, ako je putnik nedobrovoljno prekobrojan, ne postoji razlog da mu se plati više nego što je neophodno jer će on svakako biti nezadovoljan. Ako je putnik dobrovoljno prekobrojan, aukcija će ga samo ohrabriti da se odrekne svoje karte po ceni koja je veoma blizu njegovoj graničnoj.

U ovom poglavlju su uspešno modelovani troškovi nadoknade u oba slučaja. Procenjeno je da ako je m od n putnika kupljeno putem aukcije , očekivani trošak aviokompanije će biti

$$\frac{1\$}{15000}(m-(n-m)\ln(\frac{n}{n-m}))\,.$$

Sa druge strane, što je naglasio Simon, ove mušterije će verovatno biti zadovoljne i posao neće biti izgubljen. Očekivani trošak aviokompanije koja je prisilno prebukirala m od n putnika će biti

$$255\$ * m\,.$$

Naravno, mušterija koja je prekobrojna protiv svoje volje će sigurno biti nezadovoljna i postoji verovatnoća da će pokušati da se prebaci na let neke druge aviokompanije.

5. Model prebukiranosti sa stohastičkim kapacitetom

U mnogim proizvodnim sistemima kapacitet je stohastička veličina, što čini planiranje proizvodnje mnogo komplikovanijim, posebno kod proizvodnih sistema izrada po porudžbini (make-to-order MTO) i sastavljanja po porudžbini (assemble-to-order ATO).

U MTO (ili ATO) sistemu proizvodnje planiranje se vrši na osnovu porudžbina (rezervacija) koje se primaju unapred. Prihvatanje ili odbijanje rezervacije zavisi od snabdevenosti kapacitetom, ali takođe i od njegove cene. Za svaku rezervaciju ugovara se vreme isporuke, ako je prihvaćena. Međutim, ako je rezervacija prihvaćena, ali nije izvršena sistem mora da plati određenu kaznu. Ovo može da se desi kada zahtevani kapacitet za prihvaćene rezervacije jednog perioda prekorači kapacitet tog perioda što se pripisuje stohastičkoj prirodi kapaciteta ili zbog precenjivanja kapaciteta proizvodnje. Sa druge strane, odbijanje rezervacije znači gubitak prihoda. Zbog toga, prihvatanje ili odbijanje rezervacije rezultira gubitkom prihoda ili troškovima kazne. Dakle, cilj je da se razvije optimalna politika prihvatanja/odbijanja rezervacija da bi se ostvario maksimalan očekivani ukupni prihod (uključujući i troškove kazne). Komplikacije se javljaju zbog činjenice da tačan kapacitet nije poznat u vreme pristizanja rezervacija zbog svoje stohastičke prirode.

Realno gledano, jedan razlog nesigurnosti kapaciteta se javlja zbog propusta strojeva, zaustavljanja ili kvarova tokom operacije. Kao rezultat, pošto je trajanje izdržljivosti nepredvidivo, sistem ima stohastičke sate rada ili zapravo stohastički kapacitet proizvodnje. Fluktuacije u dostupnosti radne snage su drugi razlog zbog kog tačan kapacitet nekog proizvodnog sistema ne može da se predvidi, posebno kada se mnogo oslanjamo na stručnjake.

Da bi formulisali stohastičke probleme raspodele kapaciteta u proizvodnom sistemu, primenjuju se pojmovi i tehnike upravljanja prihodima. U ovom modelu se pretpostavlja da je kapacitet proizvodnje stohastička veličina i otuda se njena tačna mera ne može unapred predvideti u vreme planiranja. Model je razvijen matematički i dat je metod analitičkog rešenja. Osobine optimalnog rešenja kao i ponašanje funkcije cilja su takođe analizirane.

Pretpostavlja se da postoje dve klase potrošača, redovni (učestali) i povremeni (manje učestali) potrošači. Prva klasa potrošača ima prioritet i nivo cena je niži od nivoa cena kod potrošača druge klase. Takođe kazna za poništenje rezervacije uzrokovane prebukiranošću se razlikuje za ove dve klase. S obzirom da su nivo cena i troškovi kazne različiti za svaku klasu, politika prihvatanja/odbijanja za svaku klasu se takođe prikladno razlikuje. U stvari, optimalna politika utvrđuje maksimalnan kapacitet koji se može dodeliti svakoj klasi. Da bi formulisali model i odredili optimalno rešenje, primenjuju se koncepti upravljanja prihodima i modifikuju neke od njegovih tehnika da bi odgovarale modelu.

Upravljanje prihodima (još se naziva i upravljanje dobiti), koje je zasnovano na osnovu industrije aviokompanija, odnosi se na kolekciju metoda, tehnika i koncepata koje imaju za cilj da pripišu neku ograničenu količinu kratkotrajnih sredstava nekim klasama potrošača. Littliwood (1972) se smatra osnivačem upravljanja prihodima. On je predstavio analitički model za dodeljivanje sedišta putnicima u letu sa dve klase. Mc Gill i Van Ryzin (1999) su raščlanili glavne oblasti istraživanja u oblasti upravljanja prihodima na: kontrolu spiskova sedišta, prebukiranost, vrednovanje i predviđanje potražnje.

Najpoznatija i najstarija primena upravljanja prihodima je u aviokompanijama gde fiksiran kapacitet sedišta mora biti prodat (rezervisan) pre polaska svakog leta. Međutim, veoma efikasno je primenjen i na druge oblasti kao što su iznajmljivanje kola, krstarenje brodovima, internet servis provajder, železnice, neprofitni sektor, stanovi i hoteli, restorani, zdravstvena nega i turizam.

5.1 Problem raspodele kapaciteta

U ovom poglavlju je detaljnije definisan problem. U narednim poglavljima model je matematički formulisan i predstavljen je prilaz za pronalaženje optimalnog rešenja.

Posmatra se MTO (ili ATO) proizvodni sistem sa stohastičkim kapacitetom. Kao što je spomenuto ranije, sistem ima dve klase potrošača, redovne i povremene potrošače. U slučaju ograničenog kapaciteta potrošači prve klase imaju prioritet u odnosu na potrošače druge klase što se tiče prihvatanja rezervacija. Dalje, oni imaju prednost u vidu nekog popusta i njihova cena je uglavnom niža u odnosu na onu kod potrošača druge klase.

Iako je sistem sposoban da proizvodi različite proizvode ili usluge, veličina svake rezervacije se meri u terminima iskorišćenosti kapaciteta, bez obzira na tip proizvoda. Takođe se pretpostavlja da je svaka rezervacija obrađena bez prekida. Zbog toga se rezervacije obrađuju jedna za drugom. Rezervacije stižu unapred i mogu da uključuju različite tipove proizvoda. Potražnja u svakoj klasi je nenegativna slučajna promenljiva sa poznatom neprekidnom funkcijom raspodele i nezavisna je u odnosu na potražnju neke druge klase.

Svaka rezervacija se ili prihvata ili odbija u vreme dospeća na osnovu prihvaćene politike u sistemu. Međutim, ako je porudžbina prihvaćena, ali nije sprovedena na vreme, sistem mora da plati određenu kaznu. Zbog toga je bitno utvrditi koliko rezervacija (u smislu kapaciteta) se sme prihvatiti od svake klase, da bi se maksimizovala ukupna očekivana dobit (uključujući i troškove kazne). Nivo cene zavisi od klase potrošača. Slično, kazna za nesprovođenje porudžbine u ugovoreno vreme se razlikuje u zavisnosti od toga koja je klasa u pitanju. Visina kazne za poništenje rezervacije kod redovnih potrošača je viša od one u drugoj klasi zato što su oni pouzdaniji, a i zbog očuvanja dugotrajnih veza.

Model koji je ovde predstavljen se može primeniti na neke slučajeve koje su uveli Harris i Pinder kao potencijalna primena upravljanja prihodima u proizvodnom okruženju. Oni su dali primer industrijskog objekta za popravke transformatora koji ima dve grupe mušterija. Prva grupa se sastoji od mušterija koje imaju dugoročne ugovore i šalju svoje transformatore radi preventivnog održavanja. Druga grupa se sastoji od potrošača koji imaju iznenadne potrebe za popravkama zbog slučajnih kvarova. Normalno, prva grupa ima prednost u vidu manjeg plaćanja zato što oni obično imaju dugoročne ugovore i više finansijskih veza sa kompanijom koja vrši popravke. Štaviše, druga grupa plaća više za iste usluge, zato što oni obično imaju manje izbora i manje vremena u hitnim slučajevima. Dodatno, kazna za otkazivanje porudžbine redovnih potrošača (prve grupe) je viša, jer kompanija ne želi da izgubi ove pouzdane potrošače i njihove buduće ugovore.

Postoje još neki slučajevi spomenuti od strane Harrisa i Pindera (1995) i svi imaju dve grupe redovnih i povremenih potrošača sa osobinama sličnim prethodnom slučaju. Na primer, proizvođač sportske opreme ima stalne mušterije kao što su sportski klubovi i prodavnice sportske opreme kao i pojedinačne mušterije u specijalnim prilikama kao što su festivali i turniri. Drugi slučajevi koji se mogu spomenuti su proizvođači keramičkih poklona i kompanije za pakovanje i dostavljanje cveća.

Rezervacije su registrovane na osnovu perioda do datuma dospeća kupca. Bez gubitka opštosti, pretpostavlja se da se sve rezervacije sa istim periodom do dospeća sprovode u istom periodu. Tada, ukupni zahtevani kapacitet svakog perioda ne može prekoračiti postojeći kapacitet tog perioda. Drugim rečima, problem je formulisan pomoću statičkog modela za jedan period. Međutim, zbog stohastičke prirode kapaciteta, tačna veličina kapaciteta se ne može predvideti u vreme planiranja.

Problem donosioca odluke je kako da izvrši raspodelu proizvodnog kapaciteta između klasa. Drugim rečima, optimalna politika mora utvrditi limit rezervacija za svakog potrošača, dok kapacitet nije poznat u vreme pristizanja rezervacija.

Limit rezervacija (buking limit) je maksimalan broj dnevnih jedinica kapaciteta koje se mogu pripisati određenoj klasi. U ranijim modelima upravljanja prihodima sa dve klase, postavljen je zaštitni nivo za više poželjne klase u odnosu na buking limit drugih klasa. Zaštitni nivo je deo kapaciteta koji se čuva samo za rezervacije posebne klase. U ovom modelu nije postavljen nikakav zažtitni nivo za klase zato što ukupan kapacitet nije poznat u vreme planiranja i zbog toga se zaštitni nivo ne može primeniti.

U ovom modelu nije dozvoljeno umetanje i zarobljavanje. Pretpostavka umetanja ukazuje da bilo koja jedinica kapaciteta zaštićena za određenu klasu je takođe zaštićena i za sve njene više profitabilne klase. U slučaju dve klase to znači da ne posoji zaštitni nivo za niže profitabilne klase i bilo koja rezervacija za višu profitabilnu klasu se prihvata ako se primenjuje pretpostavka umetanja. Pod zarobljavanjem se podrazumeva da zahtev za rezervisanje niže vrednosti se pretvara u višu vrednost, kada niža vrednost klase rezervisanja nije dostupna.

5.2 Načelo prednosti

U svakom periodu, ako je ishod kapaciteta manji od planiranog zahtevanog kapaciteta, onda potrošači koji naručuju češće (prva klasa) imaju prednost u odnosu na drugu klasu. Drugim rečima, ako kapacitet nije dovoljan za sve rezervacije jednog perioda onda se rezervacije druge klase prvo odbijaju. Rezervacije prve klase potrošača se odbijaju samo ako su sve rezevacije druge klase već odbijene.

5.3 Pretpostavka ograničenosti

Naredne pretpostavke važe za svaku funkciju gustine. Pretpostavlja se da važi

$$\lim_{x_i \to \infty} f_i(x_i) = 0, \quad \text{i=1,2} \tag{4}$$

$$\lim_{c \to \infty} f_c(c) = 0, \tag{5}$$

gde x_1, x_2 predstavljaju potražnje klasa 1 i 2, a c je stohastički kapacitet. $f_1(x_1), f_2(x_2)$ i $f_c(c)$ su funkcije gustine za x_1, x_2 i c respektivno.

6. Model

Oznake:

r_1, r_2 - cena rezervacije (po jedinici kapaciteta) za klase 1 i 2, respektivno

p_1, p_2 - nivo kazne za otkazivanje rezervacije za klase 1 i 2, respektivno

π_1, π_2 - nivo gubitka profita u slučaju otkazivanja rezervacije za klase 1 i 2, respektivno

(1) Logično, $r_1 < r_2$ i pretpostavlja se da je $p_1 > p_2$. Međutim, ova pretpostavka ne utiče direktno na funkciju cilja i na metod.

(2) π_1, π_2 nisu nezavisni parametri i pretpostavlja se da je $\pi_1 > \pi_2$. Oni se dobijaju iz r_1, r_2, p_1, p_2 na sledeći način:

$$\pi_i = r_i + p_i, \quad \text{i=1,2.} \qquad (6)$$

<u>*Slučajne promenljive:*</u>

x_1, x_2 - potražnja (u terminu veličine kapaciteta) za klase 1 i 2, respektivno, ($x_1, x_2 \geq 0$)

c - stohastički kapacitet ($c \geq 0$)

$f_1(x_1), f_2(x_2), f_c(c)$ - funkcije gustine za x_1, x_2 i c, respektivno

$F_1(x_1), F_2(x_2), F_c(c)$ - funkcije raspodele za x_1, x_2 i c, respektivno.

$$\overline{F}(.) = 1 - F(.).$$

<u>*Odlučujuće promenljive:*</u>

b_1, b_2 - granice rezervisanja (maksimalna veličina kapaciteta) raspodeljene na porudžbine klasa 1 i 2, respektivno

a_1, a_2 - veličine prihvaćenog kapaciteta (registrovanog) za porudžbine klasa 1 i 2, respektivno

d_1, d_2 - veličine kapaciteta koji je odbijen za porudžbine zbog nedostatka u klasama 1 i 2, respektivno

R - ukupan prihod ostvaren od profita registrovanih porudžbina minus kazna za otkazane porudžbine.

Primetimo: b_1, b_2 su nezavisne promenljive. Međutim, druge odlučujuće promenljive su dobijene iz b_1, b_2 kao i rezultati tih slučajnih promenljivih, tj.

$$a_i = \min\{x_i, b_i\}, \quad \text{i=1,2.} \qquad (7)$$

Veličina kapaciteta za odbijene porudžbine potrošača klase 1 zavisi samo od ishoda kapaciteta. Ona je nezavisna od porudžbina druge klase što je objašnjeno „*pravilom prioriteta*".

$$d_1 = \left\langle \begin{array}{lll} a_1 - c, & ako & 0 \leq c \leq a_1 \\ 0, & ako & a_1 \leq c \end{array} \right. \qquad (8)$$

Međutim, veličina kapaciteta za odbijene porudžbine potrošača klase 2 zavisi od ishoda kapaciteta kao i od porudžbina prve klase, kao što je objašnjeno „*pravilom prioriteta*".

$$d_2 = \begin{cases} a_1 - c, & ako \quad 0 \le c \le a_1 \\ a_1 + a_2 - c, & ako \quad a_1 \le c \le a_1 + a_2 \\ 0, & ako \quad a_1 + a_2 \le c \end{cases} \tag{9}$$

Sa druge strane, funkcija cilja je $R = r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot a_2 - \pi_1 \cdot d_1 - \pi_2 \cdot d_2$. Zbog toga je

$$E(R) = r_1 E(a_1) + r_2 E(a_2) - \pi_1 E(d_1) - \pi_2 E(d_2). \tag{10}$$

Očekivana veličina kapaciteta za prihvaćene porudžbine, $E(a_i), i = 1{,}2$ se dobija iz (7) korišćenjem definicije za očekivanje apsolutno neprekidne slučajne promenljive

$$E(a_i) = \int_0^{b_i} x_i \cdot f_i(x_i) \cdot dx_i + \int_{b_i}^{\infty} b_i \cdot f_i(x_i) \cdot dx_i \tag{11}$$

Očekivana veličina kapaciteta za odbijene porudžbine, $E(d_i), i = 1{,}2$ se dobija iz (8) i (9) na sledeći način

$$E(d_1) = \int_0^{b_1}\int_0^{x_1} (x_1 - c) \cdot f_c(c) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_1 + \int_{b_1}^{\infty}\int_0^{b_1} (b_1 - c) \cdot f_c(c) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_1 \tag{12}$$

I slično se dobija:

$$\begin{aligned} E(d_2) = {} & \int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\int_0^{x_1} x_2 \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1 + \int_{b_1}^{\infty}\int_0^{b_2}\int_0^{b_1} x_2 \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1 \\ & + \int_0^{b_1}\int_{b_2}^{\infty}\int_0^{x_1} b_2 \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1 + \int_{b_1}^{\infty}\int_{b_2}^{\infty}\int_0^{b_1} b_2 \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1 \\ & + \int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\int_{x_1}^{x_1+x_2} (x_1 + x_2 - c) \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1 \\ & + \int_{b_1}^{\infty}\int_0^{b_2}\int_{b_1}^{b_1+x_2} (b_1 + x_2 - c) \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1 \\ & + \int_0^{b_1}\int_{b_2}^{\infty}\int_{x_1}^{x_1+b_2} (x_1 + b_2 - c) \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1 \\ & + \int_{b_1}^{\infty}\int_{b_2}^{\infty}\int_{b_1}^{b_1+b_2} (b_1 + b_2 - c) \cdot f_c(c) \cdot f_2(x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot dc \cdot dx_2 \cdot dx_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Iako je funkcija cilja u ovom modelu maksimizovanje ukupnog očekivanog prihoda (minus troškovi), moguće je razmatrati i druge ciljeve kao na primer maksimizacija iskorišćenosti kapaciteta, maksimizacija prosečnog prihoda po potrošaču, minimizacija gubitka dobre volje potrošača itd.

6.1 Uslov optimalnosti

Uopšteno, funkcija cilja $E(R)$ nije ni konveksna ni konkavna. Ova činjenica je dokazana u narednim poglavljima. Međutim, dokazaćemo da je $E(R)$ unimodalna funkcija. Dakle, ova funkcija ima maksimum koji se može nalaziti na granici dopustive oblasti rešenja. Kao rezultat, optimalno rešenje se dobija računanjem parcijalnih izvoda funkcije $E(R)$ po b_1 i b_2 i izjednačavanjem sa nulom. Iz sistema ovih jednačina se dobija rešenje, ako postoji, a inače optimalno rešenje je nula.

6.2 Izvodi za $E(R)$

Da bi dobili parcijalne izvode funkcije cilja prvo treba da nađemo parcijalne izvode očekivanih vrednosti za a_1, a_2, d_1 i d_2. Iz (11) sledi

$$\frac{\partial E(a_1)}{\partial b_1} = \int_0^{b_1} 0dx_1 + b_1 f_1(b_1) + \int_{b_1}^{\infty} f_1(x_1)dx_1 - b_1 f_1(b_1) = \int_{b_1}^{\infty} f_1(x_1)dx_1 = 1 - \int_0^{b_1} f_1(x_1)dx_1 =$$
$$= 1 - F_1(b_1) = \overline{F}_1(b_1),$$

$$\frac{\partial E(a_1)}{\partial b_2} = \int_0^{b_1} 0dx_1 + b_1 f_1(b_1) + \int_{b_1}^{\infty} 0dx_1 - b_1 f_1(b_1) = 0,$$

$$\frac{\partial E(a_2)}{\partial b_1} = \int_0^{b_2} 0dx_2 + b_2 f_2(b_2) + \int_{b_2}^{\infty} 0dx_2 - b_2 f_2(b_2) = 0,$$

$$\frac{\partial E(a_2)}{\partial b_2} = \int_0^{b_2} 0dx_2 + b_2 f_2(b_2) + \int_{b_2}^{\infty} f_2(x_2)dx_2 - b_2 f_2(b_2) = \int_{b_2}^{\infty} f_2(x_2)dx_2 = 1 - \int_0^{b_2} f_2(x_2)dx_2 =$$
$$= 1 - F_2(b_2) = \overline{F}_2(b_2),$$

Iz (12) sledi

$$\frac{\partial E(d_1)}{\partial b_1} = \int_0^{b_1} 0dx_1 + \int_0^{b_1} (b_1 - c)\cdot f_c(c)\cdot f_1(b_1)\cdot dc + \int_{b_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial b_1}\left[\int_0^{b_1} (b_1 - c)\cdot f_c(c)\cdot f_1(x_1)\cdot dc\right]dx_1$$
$$-\int_0^{b_1} (b_1 - c)\cdot f_c(c)\cdot f_1(b_1)\cdot dc = F_c(b_1)\cdot \overline{F}_1(b_1)$$

$$\frac{\partial E(d_1)}{\partial b_2} = \int_0^{b_1} 0dx_1 + \int_0^{b_1} (b_1 - c)\cdot f_c(c)\cdot f_1(b_1)\cdot dc + \int_{b_1}^{\infty} 0dx_1 - \int_0^{b_1} (b_1 - c)\cdot f_c(c)\cdot f_1(b_1)\cdot dc = 0.$$

Iz (13) sledi

$$\frac{\partial E(d_2)}{\partial b_1} = \overline{F}_1(b_1)\left[\int_0^{b_2} F_c(b_1 + x_2)\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 - F_c(b_1) + F_c(b_1 + b_2)\cdot \overline{F}_2(b_2)\right],$$

$$\frac{\partial E(d_2)}{\partial b_2} = \overline{F}_2(b_2)\left[\int_0^{b_1} F_c(x_1+b_2)\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 + F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_1(b_1)\right].$$

Sada se može zaključiti da je

$$\frac{\partial E(R)}{\partial b_1} = r_1\cdot \overline{F}_1(b_1) - \pi_1\cdot F_c(b_1)\cdot \overline{F}_1(b_1)$$
$$-\pi_2\cdot \overline{F}_1(b_1)\left[\int_0^{b_2} F_c(b_1+x_2)\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 - F_c(b_1) + F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_2(b_2)\right] \tag{14}$$

I slično,

$$\frac{\partial E(R)}{\partial b_2} = r_2\cdot \overline{F}_2(b_2) - \pi_2\cdot \overline{F}_2(b_2)\left[\int_0^{b_1} F_c(b_2+x_1)\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 + F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_1(b_1)\right] \tag{15}$$

6.3 Konveksnost/konkavnost $E(R)$

Maksimalna vrednost za $E(R)$ se postiže kada izjednačimo (14) i (15) sa nulom pod uslovom da je $E(R)$ konkavna funkcija ili da je Hessian-ova matrica $E(R)$ negativno semi-definitna. Matrica M formata nxn je negativno semi-definitna ako je $x^*Mx < 0$ za sve nenula vektore $x \in \mathbb{C}^n$ (ili, za sve nenula vektore $x \in \mathbb{R}^n$ realne matrice).

Tu osobinu proveravamo na sledeći način

$$\frac{\partial^2 E(R)}{\partial b_1^2} = -r_1\cdot f_1(b_1) - \pi_1\left[f_c(b_1)\cdot \overline{F}_1(b_1) - F_c(b_1)\cdot f_1(b_1)\right]$$
$$+\pi_2\cdot f_1(b_1)\left[\int_0^{b_2} F_c(b_1+x_2)\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 - F_c(b_1) + F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_2(b_2)\right]$$
$$-\pi_2\cdot \overline{F}_1(b_1)\left[\int_0^{b_2} f_c(b_1+x_2)\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 - f_c(b_1) + f_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_2(b_2)\right]$$

$$\frac{\partial^2 E(R)}{\partial b_2^2} = -r_2\cdot f_2(b_2) + \pi_2\cdot f_2(b_2)\left[\int_0^{b_1} F_c(b_2+x_1)\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 + F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_1(b_1)\right]$$
$$-\pi_2\cdot \overline{F}_2(b_2)\left[\int_0^{b_1} f_c(b_2+x_1)\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 + f_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_1(b_1)\right]$$

$$\frac{\partial^2 E(R)}{\partial b_1\partial b_2} = \frac{\partial^2 E(R)}{\partial b_2\partial b_1} = \pi_2\cdot \overline{F}_1(b_1)\cdot \overline{F}_2(b_2)\cdot f_c(b_1+b_2).$$

6.4 Granične osobine za $E(R)$

Sledeće granične osobine funkcije cilja i njenih izvoda su nezavisne u odnosu na funkcije raspodele. Uzimajući u obzir pretpostavke o ograničenjima (4) i (5) sledi

1. Ako su obe granice rezervisanja jednake nuli očekivani prihod je jednak nuli i izvodi prvog stepena očekivanog prihoda su pozitivni.

$$b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow E(R) = 0, \qquad \frac{\partial E(R)}{\partial b_1} = r_1 > 0, \frac{\partial E(R)}{\partial b_2} = r_2 > 0.$$

2. Ako je vrednost granice rezervisanja jako velika tada očekivani prihod nije osetljiv na male promene u toj granici rezervisanja.

$$\lim_{b_1 \to \infty} \left(\frac{\partial E(R)}{\partial b_1} \right) = 0, \qquad \lim_{b_2 \to \infty} \left(\frac{\partial E(R)}{\partial b_2} \right) = 0.$$

3. Ako obe granice rezervisanja uzimaju velike vrednosti funkcija cilja će biti ravnog oblika, tj. ili je konveksna ili konkavna. Drugim rečima, ako H predstavlja Hessian-ovu matricu tada je

$$\lim_{b_1, b_2 \to \infty} H(b_1, b_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Ako samo jedna granica rezervisanja uzima jako veliku vrednost tada će funkcija cilja biti ravnog oblika u pravcu te promenljive (granice rezervisanja), ali njen pravac konveksnosti u drugom pravcu zavisi od veličine druge odlučujuće promenljive.

$$\lim_{b_1 \to \infty} H(b_1, b_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(b_2) \end{bmatrix}.,$$

gde je $\lambda(b_2) = -r_2 \cdot f_2(b_2) + \pi_2 \cdot f_2(b_2) \cdot E[F_c(x_1 + b_2)] - \pi_2 \cdot \overline{F}_2(b_2) \cdot E[f_c(x_1 + b_2)]$,

i $$\lim_{b_2 \to \infty} H(b_1, b_2) = \begin{bmatrix} \gamma(b_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.,$$

gde je
$$\begin{aligned} \gamma(b_1) &= -r_1 \cdot f_1(b_1) + \pi_2 \cdot f_1(b_1) \cdot [E[F_c(x_2 + b_1)] - F_c(b_1)] - \\ &\pi_2 \cdot \overline{F}_1(b_1) \cdot [E[f_c(x_2 + b_1)] - f_c(b_1)] - \pi_1 \cdot [f_c(b_1) \cdot \overline{F}_1(b_1) - F_c(b_1) \cdot f_1(b_1)]. \end{aligned}$$

6.5 Osobina unimodalnosti funkcije cilja

Da bi dokazali da je $E(R)$ unimodalna funkcija prvo navodimo sledeću lemu.

Lema 1: $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1}$ je proizvod nerastuće funkcije od b_1 i nenegativne nerastuće funkcije od b_1.

Dokaz: Kao što je izvedeno ranije važi $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1} = \overline{F}_1(b_1) \cdot \psi_1(b_1)$, gde je

$$\psi_1(b_1) = r_1 - F_c(b_1)(\pi_1 - \pi_2) - \pi_2 \left[\int_0^{b_2} F_c(b_1 + x_2) \cdot f_2(x_2) \cdot dx_2 + F_c(b_1 + b_2) \cdot \overline{F}_2(b_2) \right]. \qquad (16)$$

$\overline{F}_1(b_1)$ je nenagativna nerastuća funkcija od b_1, a $\psi_1(b_1)$ je nerastuća funkcija od b_1. To važi zato što su $F_c(b_1), F_c(b_1 + b_2)$ i $F_c(b_1 + x)$ neopadajuće funkcije od b_1 (za fiksirano b_2) i pod pretpostavkom da je $\pi_1 > \pi_2 \geq 0$.

Takođe važi $\frac{\partial E(R)}{\partial b_2} = \overline{F}_2(b_2) \cdot \psi_2(b_2)$, gde je

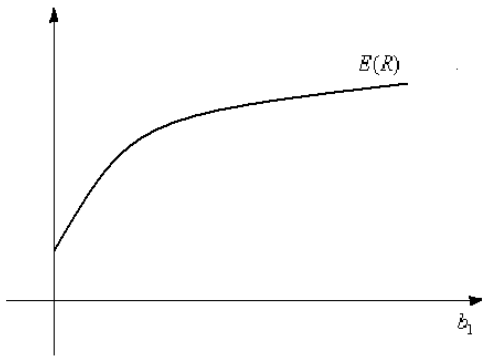
$$\psi_2(b_2) = r_2 - \pi_2 \left[\int_0^{b_1} F_c(b_2 + x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1 + b_2) \cdot \overline{F}_1(b_1) \right]. \qquad (17)$$

Sada ćemo dokazati osobinu unimodalnosti funkcije $E(R)$ pomoću tri međusobno isključiva slučaja. ■

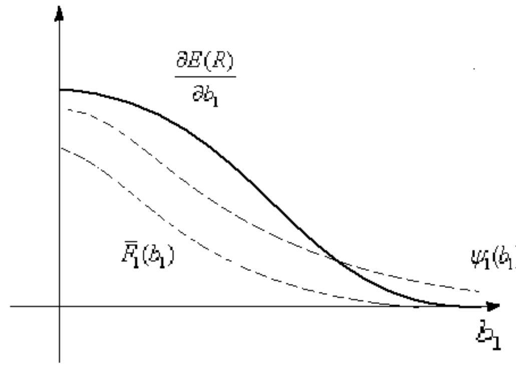
Teorema 4: Neka je $\psi_1(b_1) \geq 0$, za fiksirano b_2. Tada se nijedna porudžbina prve klase ne odbija. Drugim rečima, $E(R)$ je unimodalna i dostiže maksimalnu vrednost kada b_1 teži beskonačnosti. Slika 3 a) pokazuje tipičan slučaj krive funkcije $E(R)$ u odnosu na b_1, kada je b_2 fiksirano.

Dokaz: Pošto su i $\psi_1(b_1)$ i $\overline{F}_1(b_1)$ obe nenegativne, parcijalni izvod je takođe nenegativan i $E(R)$ je neopadajuća funkcija. Na osnovu graničnih osobina $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1}$ teži ka nuli kad b_1 teži beskonačnosti. Dakle, $E(R)$ raste sve dok ne dostigne fiksnu vrednost (vrh) kad b_1 teži beskonačnosti. Struktura $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1}$ je ilustrovana na slici 3 b).

■



a)



b)

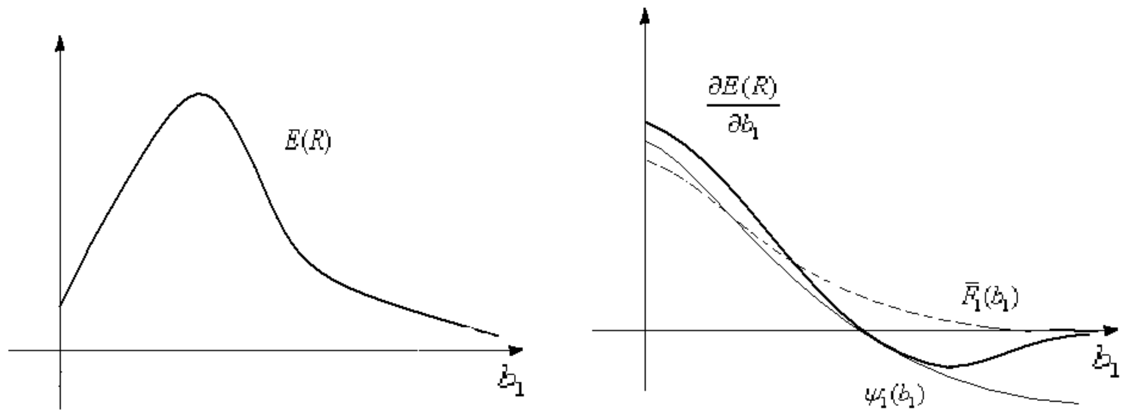
Slika 3

Napomena: Pod datim pretpostavkama, prvi slučaj se nikada ne dešava. Razlog tome je da $\lim_{b_1\to\infty}\psi_1(b_1) = r_1 - \pi_1 = -p_1 < 0$ i $\lim_{b_2\to\infty}\psi_2(b_2) = r_2 - \pi_2 = -p_2 < 0$.

<u>**Teorema 5**</u>: Za fiksirano b_2, neka je $\psi_1(b_1) > 0$ za $b_1 = 0$ i $\psi_1(b_1) < 0$ za veće vrednosti b_1. Tada je $E(R)$ unimodalna funkcija u odnosu na b_1 i dostiže svoj maksimum u tački gde je $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1} = 0$.

Slika 4 a) prikazuje tipičnu krivu ove funkcije u odnosu na b_1.

<u>*Dokaz:*</u> Pošto je u nuli parcijalni izvod pozitivan, $E(R)$ ima rastuć start. Raste dok ne dostigne vrh gde je $\psi_1(b_1)$ jednako nuli i zato je $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1} = 0$. Onda počinje da opada zato što je $\overline{F}_1(b_1)$ pozitivno, a $\psi_1(b_1)$ je negativno. Konačno, funkcija teži ka fiksnoj vrednosti zato što $\overline{F}_1(b_1)$ teži ka nuli i kao rezultat izvod teži ka nuli. Kao što je pomenuto ranije, ovo je razmatrano kod graničnih osobina funkcije $E(R)$. Jasno, u ovom slučaju optimalna vrednost za b_1 se dobija izjednačavanjem $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1}$ sa nulom. Slika 4 b) prikazuje tipičnu strukturu $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1}$ u ovom slučaju. ■

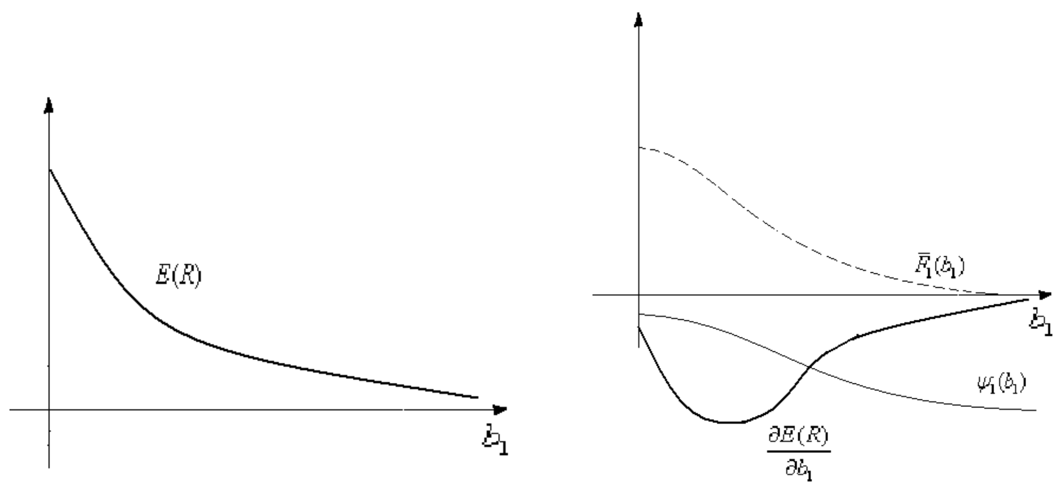


a) b)

Slika 4

Teorema 6: Za fiksirano b_2, neka je $\psi_1(b_1) \leq 0$. Tada je $E(R)$ unimodalna funkcija u odnosu na b_1 i dostiže svoj maksimum u tački $b_1 = 0$. Slika 5 a) prikazuje tipičnu krivu ove funkcije u odnosu na b_1.

Dokaz: Pošto je u nuli parcijalni izvod nepozitivan $E(R)$ ima opadajući start. Teži ka fiksnoj vrednosti za velike vrednosti b_1 zato što $\overline{F}_1(b_1)$ teži ka nuli (granične osobine) i zato i parcijalni izvod teži ka nuli. Jasno, u ovom slučaju, $b_1 = 0$ je optimalna vrednost. Zbog bolje ilustracije, priroda $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1}$ je prikazana na slici 5 b). ■



a) b)

Slika 5

Napomena: Teoreme 4-6 važe i u slučaju $\frac{\partial E(R)}{\partial b_2}$ u odnosu na b_2.

6.6 Optimalno rešenje

Neka su (b_1^*, b_2^*) optimalne vrednosti granica rezervisanja za klase 1 i 2 i neka je (β_1, β_2) moguće rešenje sistema jednačina $\psi_1(b_1, b_2) = 0, \psi_2(b_2, b_1) = 0$. Tada, s obzirom na gornje slučajeve i uzimanjem u obzir činjenicu da je $E(R)$ unimodalna funkcija, (b_1^*, b_2^*) se može dobiti praćenjem sledećih situacija.

Situacija 1: Ako postoje pozitivne vrednosti i za β_1 i za β_2 onda je $(b_1^*, b_2^*) = (\beta_1, \beta_2)$.
Situacija 2: Ako je $\beta_1 > 0$, ali se pozitivna vrednost za β_2 ne može pronaći, tada je $(b_1^*, b_2^*) = (\overline{\beta}_1, 0)$, gde je $\overline{\beta}_1$ pozitivna nula jednačine $\psi_1(b_1, b_2) = 0\big|_{b_2=0}$ i $(b_1^*, b_2^*) = (0,0)$ kada data jednačina nema pozitivno rešenje. Slično, ako je $\beta_2 > 0$, ali pozitivno rešenje za β_1 ne postoji, tada je $(b_1^*, b_2^*) = (0, \overline{\beta}_2)$, ako jednačina $\psi_2(b_2, b_1) = 0\big|_{b_1=0}$ ima pozitivnu nulu $\overline{\beta}_2$ i $(b_1^*, b_2^*) = (0,0)$ u suprotnom.
Situacija 3: Ako ne postoji pozitivna vrednost ni za β_1 ni za β_2 tada je $(b_1^*, b_2^*) = (0,0)$.

Napomena: Neka su $\hat{\beta}_1$ najmanja nula jednačine $\overline{F}_1(b_1) = 0$ i β_1 pozitivna nula jednačine $\psi_1(b_1, b_2) = 0\big|_{b_2=b_2^*}$. Ako je $\beta_1 \geq \hat{\beta}_1 \geq 0$ onda, na osnovu teoreme 2, b_1^* može biti bilo koja vrednost $b_1 \geq \hat{\beta}_1$. U ovom slučaju $\hat{\beta}_1$ je maksimalna moguća potražnja redovnih potrošača. Međutim, ako je $0 \leq \beta_1 < \hat{\beta}_1$ onda je $b_1^* = \beta_1$. Sličan rezultat se dobija i za drugu klasu potrošača.
Za dalje razmatranje optimalnog rešenja i njegovih osobina potrebne su detaljnije osobine funkcije raspodele potražnje i kapaciteta.

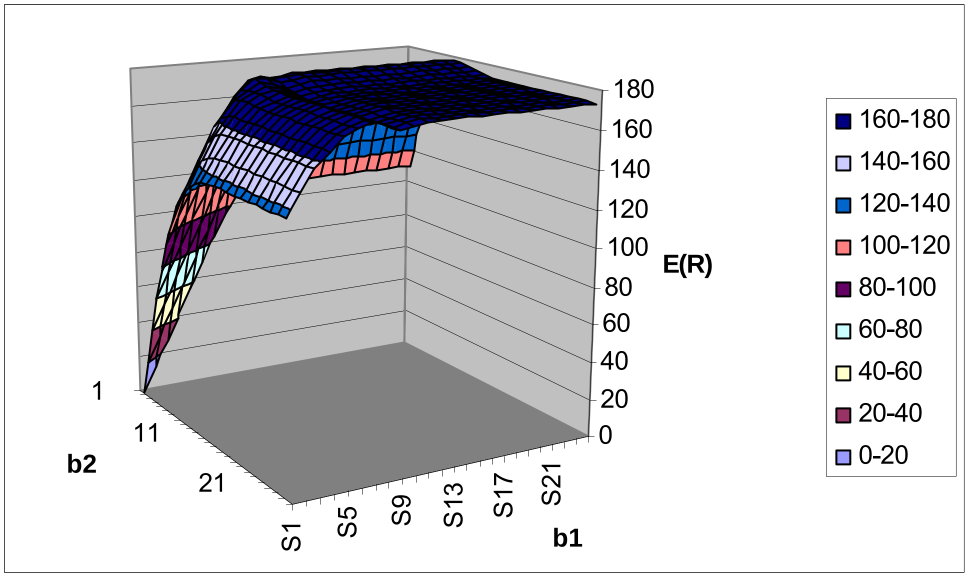
Primer:

Funkcija $E(R)$ je prikazana na slici 6 u odnosu na b_1 i b_2. U ovom primeru c, x_1 i x_2 svi imaju normalne raspodele:

$$c \approx \mathrm{N}[12,2],\ x_1 \approx \mathrm{N}[8,1],\ x_2 \approx \mathrm{N}[7,3]$$

gde $\mathrm{N}[\mu, \sigma]$ predstavlja normalnu raspodelu sa očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ.
Pretpostavlja se da ove slučajne promenljive primaju samo nenegativne vrednosti ili su odsečene od nule. U ovom primeru je $r_1 = 14, r_2 = 20, \pi_1 = 30$ i $\pi_2 = 25$.
Ovaj grafik je nacrtan pomoću metode simulacije. Prvo je generisano 100 slučajnih brojeva za slučajne promenljive c, x_1 i x_2 korišćenjem Statgraphics-a. Onda je izračunat odgovarajući prihod $R = r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot a_2 - \pi_1 \cdot d_1 - \pi_2 \cdot d_2$ za sve $(b_1, b_2) \in B$ i takođe za svaki uzorak (x_1, x_2, c) uzimajući u obzir relacije (7)-(9). (B je Cartesian-ov proizvod

B_1 i B_2, gde je $B_1 = B_2 = \{0,1,2,...,23\}$). Rezultujuće tačke $(b_1, b_2, E(R))$ su interpolirane korišćenjem Microsoft Excel-a.
U ovom slučaju kapacitet je ograničen prosečnom potražnjom zato što je srednja vrednost kapaciteta manja od sume srednjih vrednosti potražnje klasa 1 i 2.



Slika 6
Primer funkcije $E(R)$

Ovde za svako $b_2 \geq 0$ važi $\frac{\partial E(R)}{\partial b_1}\Big|_{b_1=0} > 0$ i slično za svako $b_1 \geq 0$, $\frac{\partial E(R)}{\partial b_2}\Big|_{b_2=0} > 0$. Dakle, $E(R)$ se ponaša po šablonu pokazanom u teoremi 5. Dakle, optimalno rešenje se nalazi u (β_1, β_2). (Situacija 1).

Sledeći kontraprimer pokazuje da $E(R)$ nije ni konveksna ni konkavna funkcija. Posmatramo prethodni primer i razmatramo dva rešenja ovog problema, ($b_1 = 13, b_2 = 10$) i ($b_1 = 4, b_2 = 7$). Sada je Hessian-ova matrica pozitivno definitna u prvom rešenju i negativno definitna za drugo rešenje. Dakle, optimalno rešenje se ne može postići postavljanjem gradijentnog vektora $E(R)$ da bude jednak nula vektoru.

7. Specijalan slučaj, deterministički kapacitet

Da bi proverili rezultat ovog modela razmatra se specijalan slučaj u kom je kapacitet deterministički i jednak $\hat{c} > 0$. Drugim rečima, c ima diskretnu funkciju raspodele. Tada su $\psi_1(b_1)$ i $\psi_2(b_2)$ dati na sledeći način

$$\psi_1(b_1) = \begin{cases} r_1 > 0 & ako \quad b_1 \le \hat{c} - b_2 \\ r_1 - \pi_2 \cdot \overline{F}_2(\hat{c} - b_1) & ako \quad \hat{c} - b_2 < b_1 < \hat{c} \\ r_1 - \pi_1 < 0 & ako \quad b_1 \ge \hat{c} \end{cases} \tag{18}$$

i

$$\psi_2(b_2) = \begin{cases} r_2 > 0 & ako \quad b_2 \le \hat{c} - b_1 \\ r_2 - \pi_2 \cdot \overline{F}_1(\hat{c} - b_2) & ako \quad \hat{c} - b_1 < b_2 < \hat{c} \\ r_2 - \pi_2 < 0 & ako \quad b_2 \ge \hat{c} \end{cases} . \tag{19}$$

Pošto su obe $\psi_1(b_1)$ i $\psi_2(b_2)$ neopadajuće funkcije tada za dato b_2 nula jednačine $\psi_1(b_1) = 0$ se nalazi u intervalu $[\hat{c} - b_2, \hat{c}]$. Slično, za dato b_1 nula jednačine $\psi_2(b_2) = 0$ leži u intervalu $[\hat{c} - b_1, \hat{c}]$. Dakle, optimalno rešenje za (b_1^*, b_2^*) se dobija rešavanjem sistema jednačina $\psi_1(b_1, b_2) = 0$ i $\psi_2(b_2, b_1) = 0$, tj.

$$\overline{F}_2(\hat{c} - b_1^*) = \frac{r_1}{\pi_2}, \quad \overline{F}_1(\hat{c} - b_2^*) = \frac{r_2}{\pi_2}. \tag{20}$$

Po našim pretpostavkama važi $0 < \frac{r_1}{\pi_2}, \frac{r_2}{\pi_2} < 1$ pa se odgovarajuće optimalno rešenje može pronaći.

Primedba: Ako ukupan kapacitet mora ceo biti raspodeljen između granica rezervisanja klasa 1 i 2, onda se uzimanjem u obzir da je $c = b_1 + b_2$, (20) može zapisati i ovako

$$\overline{F}_2(b_2^*) = \frac{r_1}{\pi_2}, \quad \overline{F}_1(b_1^*) = \frac{r_2}{\pi_2}. \tag{21}$$

Dakle,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{F}_2(b_2^*)}{\overline{F}_1(b_1^*)} = \frac{\overline{F}_2(\hat{c} - b_1^*)}{\overline{F}_1(b_1^*)}. \tag{22}$$

8. Analiza osetljivosti

U ovom poglavlju razmatra se osetljivost funkcije cilja kao i optimalnog rešenja u odnosu na parametre troškova (r_1, r_2, π_1 i π_2) ili u odnosu na parametre funkcija rapodele potražnje (x_1 i x_2) i kapaciteta (c). Iz (6) i (10) sledi

$$E(R) = \sum_{i=1}^{2} [r_i \cdot (E(a_i) - E(d_i)) - p_i \cdot E(d_i)]. \tag{23}$$

Očigledno, $E(R)$ je rastuća funkcija od r_1 ili r_2, i takođe opadajuća funkcija od p_1 ili p_2 uzimajući u obzir pretpostavku $E(a_i) \ge E(d_i)$, $\forall i$.

Međutim, pokazaće se da je optimalno rešenje osetljivije na $\frac{r_1}{\pi_2}$ i $\frac{r_2}{\pi_2}$ nego na pojedinačne parametre. Iz (16) za bilo koju nenegativnu vrednost b_2 važi

$$\psi_1(0) = r_1 - \pi_2\left[\int_0^{b_2} F_c(x_2)\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 + F_c(b_2)\cdot \overline{F}_2(b_2)\right]. \tag{24}$$

Ako je $\frac{r_1}{\pi_2}$ manje od $h_2(b_2) = \int_0^{b_2} F_c(x_2)\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 + F_c(b_2)\cdot \overline{F}_2(b_2)$ onda je najbolja vrednost za b_1 nula po teoremi 3. U suprotnom, ako je $\frac{r_1}{\pi_2} \geq h_2(b_2)$ onda za bilo koju datu nenegativnu vrednost b_2 , optimalna vrednost za b_1 je pozitivan koren jednačine $\psi_1(b_1) = 0$.

Primetimo da $h_2(b_2)$ zavisi od parametara funkcija raspodele kapaciteta i potražnje potrošača druge klase, ali ne i od drugih parametara.

Iz (16) važi

$$\begin{aligned}\psi_1(b_1) &= r_1\cdot \overline{F}_c(b_1) - p_1\cdot F_c(b_1) - \\ &-(r_2+p_2)\cdot\left[\int_0^{b_2} \Pr\{b_1 \leq c \leq b_1 + x_2\}\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 + \Pr\{b_1 \leq c \leq b_1 + b_2\}\cdot \overline{F}_2(b_2)\right].\end{aligned} \tag{25}$$

Pošto su $\overline{F}_c(b_1), F_c(b_1)$ i $\left[\int_0^{b_2} \Pr\{b_1 \leq c \leq b_1 + x_2\}\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 + \Pr\{b_1 \leq c \leq b_1 + b_2\}\cdot \overline{F}_2(b_2)\right]$ nenegativni izrazi i $\psi_1(b_1)$ je nerastuća funkcija, kada je $\frac{r_1}{\pi_2} \geq h_2(b_2)$, ako r_1 raste ili p_1, p_2 ili r_2 opada, optimalna vrednost za b_1 (vrednost u kojoj je $\psi_1(b_1) = 0$) raste u nekoj okolini. Ovo tvrđenje „u nekoj okolini" se ne može proširiti na ceo domen b_1 zato što je $\left[\int_0^{b_2} \Pr\{b_1 \leq c \leq b_1 + x_2\}\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2 + \Pr\{b_1 \leq c \leq b_1 + b_2\}\cdot \overline{F}_2(b_2)\right]$ uopšteno ni rastuća ni opadajuća funkcija.

Zapravo, ako $E(c)$ raste do $E(c)+\delta$ dok odstupanje i oblik funkcije gustine za c ostaju nepromenjeni, tada optimalna vrednost za b_1 se povećava tačno za δ .

U ovom slučaju, ako je $\frac{r_1}{p_1} = \frac{F_c(b_1)}{\overline{F}_c(b_1)}$ za ono b_1 u kom je $\Pr\{c \leq b_1 + b_2\} = 0$, tada je $\psi_1(b_1) = 0$ za isto to b_1 i ta tačka vraća optimalnu vrednost za b_1 .

Slično, za bilo koje b_1, može se ispitati osetljivost b_2 u odnosu na sve parametre, uzimajući u obzir osobine $\psi_2(b_2)$. Iz (17) za nenegativne vrednosti b_1 važi

$$\psi_2(0) = r_2 - \pi_2\left[\int_0^{b_1} F_c(x_1)\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 + F_c(b_1)\cdot \overline{F}_1(b_1)\right]. \tag{26}$$

Dakle, ako je $\frac{r_2}{\pi_2} \le \left[\int_0^{b_1} F_c(x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1) \cdot \overline{F}_1(b_1) \right]$, tada je optimalna vrednost za b_2 jednaka 0.

Iz $\pi_2 = r_2 + p_2$ sledi

$$\frac{p_2}{r_2} \ge \left[\frac{1}{\left[\int_0^{b_1} F_c(x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1) \cdot \overline{F}_1(b_1) \right]} \right] - 1 = h_1(b_1),$$

pa ako je $\frac{p_2}{r_2} \le h_1(b_1)$ optimalna vrednost za b_2 je tačka gde je $\psi_2(b_2) = 0$.

S obzirom na $\pi_2 = r_2 + p_2$ i na osnovu (14) može se izvesti

$$\begin{aligned} \psi_2(b_2) &= r_2 \left[1 - \int_0^{b_1} F_c(b_2 + x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1 + b_2) \cdot \overline{F}_1(b_1) \right] \\ &- p_2 \left[\int_0^{b_1} F_c(b_2 + x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1 + b_2) \cdot \overline{F}_1(b_1) \right]. \end{aligned} \tag{27}$$

$\left[\int_0^{b_1} F_c(b_2 + x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1 + b_2) \cdot \overline{F}_1(b_1) \right]$ uvek leži između 0 i 1 zato što je $\int_0^{b_1} F_c(b_2 + x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1 + b_2) \cdot \overline{F}_1(b_1) \le F_c(b_1 + b_2) \le 1$. Tako da u slučaju da je $\frac{p_2}{r_2} \le h_1(b_1)$, uzimajući u obzir (17), pošto je $\left[\int_0^{b_1} F_c(b_2 + x_1) \cdot f_1(x_1) \cdot dx_1 + F_c(b_1 + b_2) \cdot \overline{F}_1(b_1) \right]$ nenegativna neopadajuća funkcija od b_2, ako je r_2 povećano ili p_2 smanjeno, optimalna vrednost za b_2 raste.

Istim zapažanjem kao i ranije, ako $\frac{p_2}{r_2} \le h_1(b_1)$ kada se funkcija gustine za c pomera napred ili nazad za δ, optimalna vrednost b_2 se pomera u istom pravcu za isti iznos δ.

Da bi analizirali osetljivost optimalne vrednosti b_2 u odnosu na funkciju gustine za x_1 posmatramo

$$\int_0^{b_1} F_c(b_2+x_1)\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 + F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_1(b_1) = \int_0^{b_1} [F_c(b_2+b_1) - \Pr\{b_2+x_1 \le c \le b_1+b_2\}]\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1$$

$$+ F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_1(b_1) = F_c(b_1+b_2) - \int_0^{b_1} \Pr\{b_2+x_1 \le c \le b_1+b_2\}\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 .$$

Kada se funkcija gustine za x_1 pomera unapred, $\int_0^{b_1} \Pr\{b_2+x_1 \le c \le b_1+b_2\}\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1$ opada i tada $\int_0^{b_1} F_c(b_2+x_1)\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1 + F_c(b_1+b_2)\cdot \overline{F}_1(b_1)$ raste. Dakle, tačka u kojoj je $\psi_2(b_2)=0$ (optimalno b_2) se pomera unazad.

Sada se sve može sumirati. U optimalnom rešenju postavlja se pozitivna granica rezervisanja za prvu klasu (redovne potrošače) ako je odnos njihove cene i troškova plaćenih drugoj klasi potrošača (cena plus kazna u slučaju otkazivanja) dovoljno velik. Sve dok cena za redovne potrošače raste ili cena za povremene potrošače ili visina kazne za potrošače svih klasa opada, optimalna granica rezervisanja za redovne potrošače će rasti i neće se smanjivati. Proširenje kapaciteta rezultuje višom granicom rezervisanja za redovne potrošače. Ako je odnos cene i kazne za povremene potrošače jako nizak, onda se nijedan kapacitet njima ne dodeljuje. Rast kapaciteta ima rastući efekat na granicu rezervisanja povremenih potrošača, dok rast potražnje redovnih potrošača ima opadajući uticaj na tu granicu.

Detaljnija analiza osetljivosti se može sprovesti samo ako se poznaju funkcije gustine za potražnju i kapacitet. Rezultati nekih numeričkih primera analize osetljivosti su razmatrani u sledećem poglavlju pod pretpostavkom da funkcije gustine za potražnju i kapacitet imaju uniformnu raspodelu.

9. Numerička analiza osetljivosti

Da bi proverili rezultate analize osetljivosti iz prethodnog poglavlja ispituju se efekti koje prouzrokuju promene različitih parametara. Posmatra se osnovni problem i neka je

$$c \approx U[8,14], x_1 \approx U[5,9], x_2 \approx U[6,10],$$

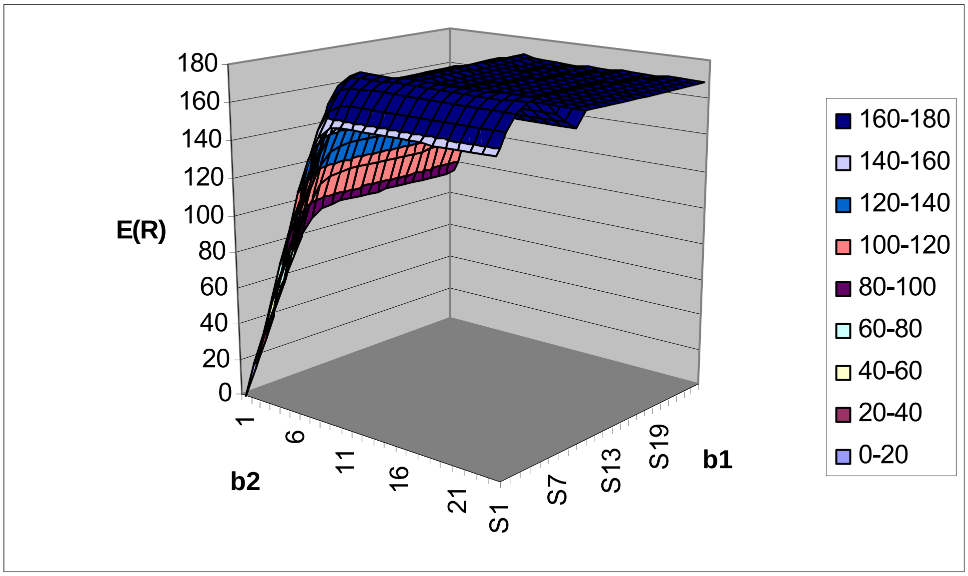
gde $U[a,b]$ predstavlja neprekidnu uniformnu raspodelu između a i b.

Neka je dalje

$$r_1 = 14, r_2 = 20, \pi_1 = 30, \pi_2 = 25.$$

Kao i u drugim realnim slučajevima i u ovom osnovnom problemu prosečan kapacitet je manji od očekivane ukupne potražnje.

Slika 7 prikazuje funkciju očekivanog prihoda. Optimalno rešenje se dostiže u $b_1^* = 4, b_2^* \ge 9, E(R)^* \cong 176.96.$ Optimalno rešenje je dobijeno metodom simulacije na isti način kao i u prethodnom primeru.

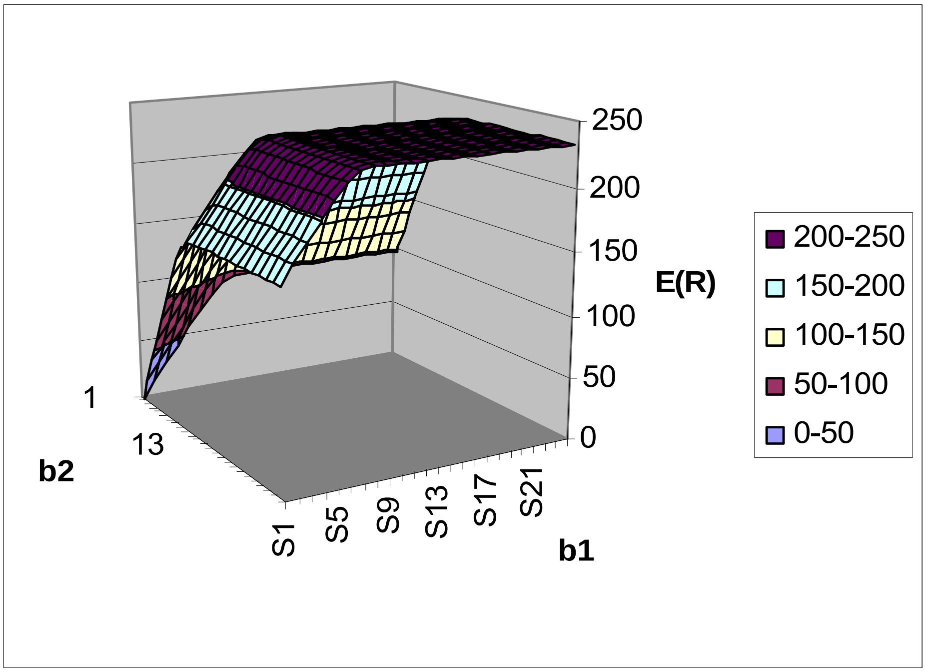


Slika 7

Funkcija $E(R)$ *u slučaju kada je prosečan kapacitet manji od prosečne potražnje*

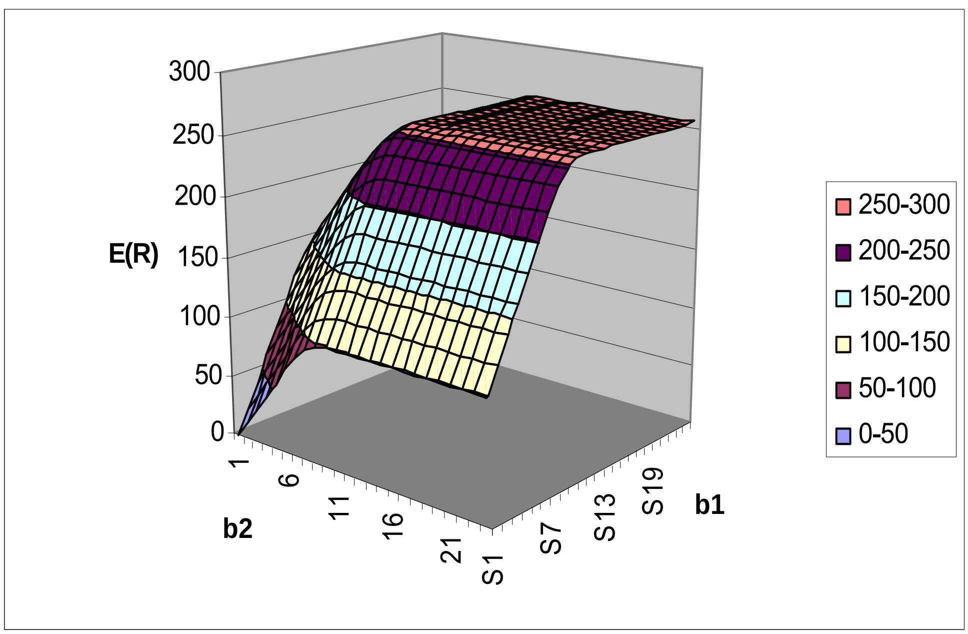
Sada se razmatraju druga dva slučaja. U prvom slučaju, prosečan kapacitet je jednak prosečnoj ukupnoj potražnji ($c \approx U[12,18]$), a u drugom slučaju prosečan kapacitet je viši od prosečne potražnje ($c \approx U[16,22]$). Pretpostavlja se da ostali parametri ostaju nepromenjeni. Na slikama 8 i 9 su prikazane rezultujuće funkcije $E(R)$ za prvi i drugi slučaj. Za prvi slučaj dobija se $b_1^* = 12, b_2^* \geq 9, E(R)^* \cong 226.73$, a za drugi slučaj $b_1^* \geq 14, b_2^* \geq 9, E(R)^* \cong 248.76$.

Rast kapaciteta utiče na to da se optimalna vrednost granice rezervisanja redovnih potrošača i maksimalna vrednost očekivanih prihoda povećavaju, međutim, ne utiče na optimalnu granicu rezervisanja povremenih potrošača. Štaviše, limit rezervisanja druge klase nema gornju granicu kada kapacitet nije povezan sa potražnjom povremenih potrošača.



Slika 8

Funkcija $E(R)$ *u slučaju kada je prosečan kapacitet jednak prosečnoj potražnji*

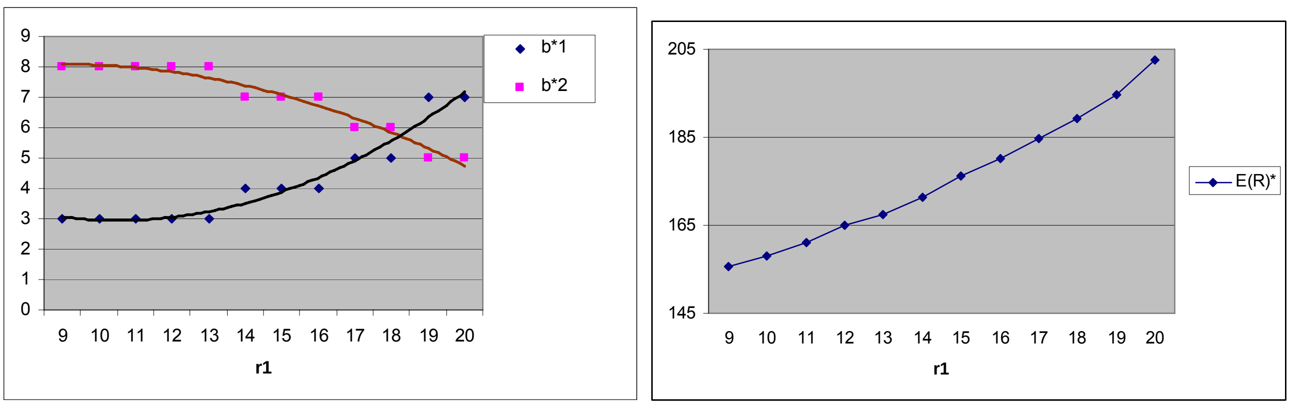


Slika 9

Funkcija $E(R)$ *u slučaju kada je prosečan kapacitet viši od prosečne potražnje*

Slično, limit rezervisanja redovnih potrošača nema gornju granicu ako prosečan preostali kapacitet (posle odbijanja povremene potražnje od dostupnog kapaciteta) nije ograničen potražnjom prve klase.

Da bi prostudirali efekte promena u nivou cene redovnih potrošača (r_1) na optimalno rešenje i optimalan prihod, navodimo oblast odstupanja za r_1, tako da je $r_1 \le r_2$ i $\pi_1 \ge \pi_2$. Dakle, smatra se da r_1 prima celobrojne vrednosti između 9 i 20. Za svako r_1 u pomenutom intervalu, generiše se slučajan uzorak od 100 elemenata za sve slučajne promenljive x_1, x_2 i c korišćenjem Statgraphics-a. Tada za svako r_1 i svako $(b_1, b_2) \in B$ (gde je B Cartesian-ov proizvod B_1 i B_2 i $B_1 = B_2 = \{0,1,2,...,23\}$), i svako ($x_1, x_2, c$) iz slučajno generisanog uzorka od ranije, odgovarajući prihod (R) se može izračunati. Sredina uzorka za R se računa za svako r_1 i svako $(b_1, b_2) \in B$ kao ocena za $E(R)$. Onda se navodi maksimalnu vrednost za $E(R)$ i optimalno (b_1, b_2) za svako r_1. Nakon aproksimacije optimalnog rešenja za svako r_1, polinomnom interpolacijom drugog stepena crta se kriva između optimalnih vrednosti za b_1 i b_2 da bi se olakšalo posmatranje šablona promena u optimalnom rešenju u odnosu na promene u r_1. Rezultati su prikazani na slici 10.



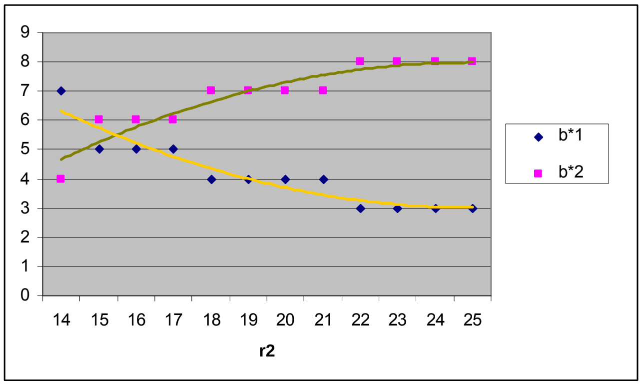
Slika 10

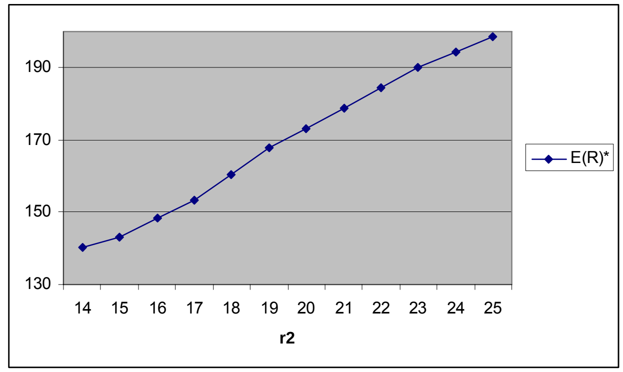
Osetljivost optimalnog rešenja (levo) i optimalnog očekivanog prihoda (desno) u odnosu na r_1

Posmatrano je kada visina cene stalnih potrošača raste, njihova granica rezervisanja se povećava dok se granica rezervisanja povremenih potrošača smanjuje za isti iznos. Dokle god se nivo cene prve klase povećava, stopa povećavanja njene granice rezervisanja i očekivanog prihoda će rasti.

Slična metoda je korišćena za analizu osetljivosti b_1^*, b_2^* i $E(R)^*$ u odnosu na druge parametre troškova. Razmatrane su samo celobrojne vrednosti za parametre r_2, p_1 i p_2. Intervali vrednosti za sve parametre su određeni tako da su uzete u obzir pretpostavke o visini cene i kazne koje su spomenute ranije. Dakle r_2, p_1 i p_2 se nalaze u intervalima [14,25],[11,30] i [0,10] respektivno. Rezultati su prikazani na slikama 11,12 i 13.

Isti zaključak za r_1 se može doneti i za r_2, zamenom r_2 umesto r_1 u prethodnom pasusu, osim što koliko god r_2 raste rastuća stopa očekivanog prihoda će se smanjivati.

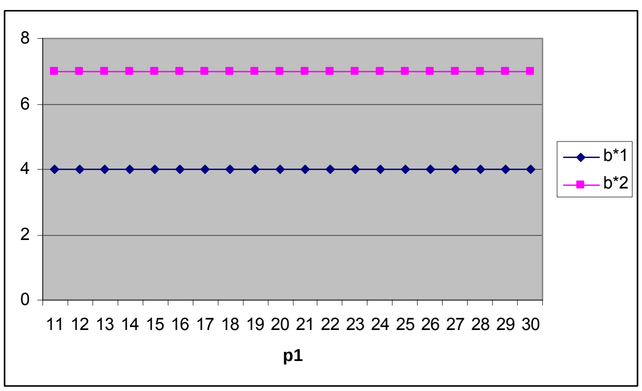


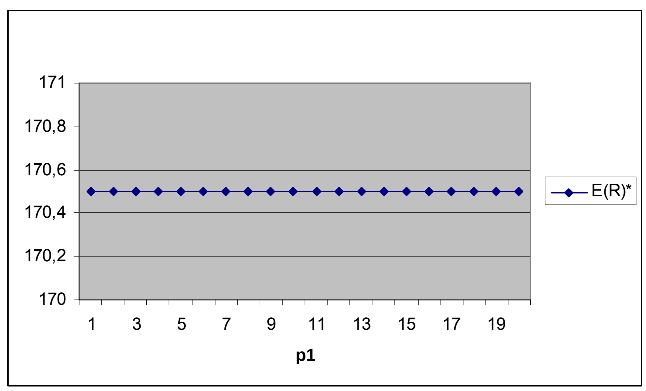


Slika 11

Osetljivost optimalnog rešenja (levo) i optimalnog očekivanog prihoda (desno) u odnosu na r_2

Ovde odstupanje visine kazne redovnih potrošača u određenom intervalu nema velikog uticaja niti na granicu rezervisanja niti na optimalan očekivan prihod. Razlog tome je zato što visina kazne prve klase uzima samo takve vrednosti da održava visinu nadoknade za otkazivanje višom kod redovnih potrošača od one kod povremenih potrošača ($\pi_1 \geq \pi_2$). Dakle, model pokušava da pronađe optimalno rešenje tako da izbegne plaćanje nadoknada prvoj klasi potrošača radije od druge klase. Otuda u tački (b_1^*, b_2^*) obično nema otkazivanja za redovne potrošače i odstupanje njihove visine kazne unutar datog intervala ne utiče na granice rezervisanja i očekivani prihod.



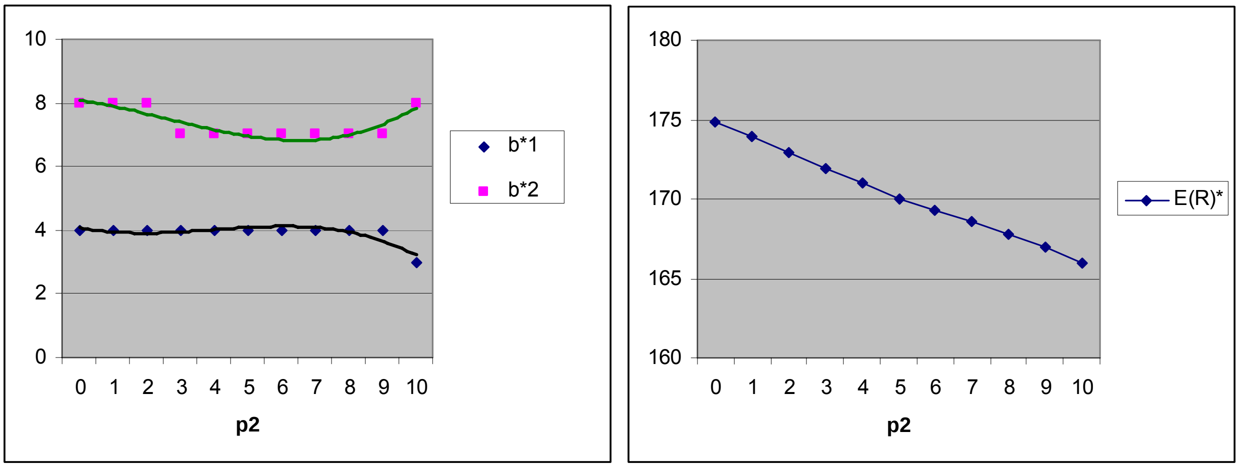


Slika12

Osetljivost optimalnog rešenja (levo) i optimalnog očekivanog prihoda (desno) u odnosu na p_1

Kada se visina kazne povremenih potrošača povećava njihova granica rezervisanja se malo smanjuje da bi se umanjila prebukiranost. Ali, pošto je pretpostavljeno da p_2 prima samo vrednosti koje održavaju $\pi_1 \geq \pi_2$ i model teži da iskorišćava neiskorišćen kapacitet prihvatanjem rizika prebukiranosti i propuštenih potrošača, uvek postoje neke odbijene porudžbine povremenih porošača. Zato što oni

plaćaju više od drugih potrošača i njihova odgovarajuća nadoknada je manja od druge grupe. Dakle, prebukiranost se uvek zadržava na drugoj klasi. Zbog toga, dokle god se visina kazne druge klase povećava očekivani prihod se smanjuje, sve dok kazna ne postane suviše visoka u poređenju sa nivoom cene.
Na slici 13 korišćene su dve polinomne interpolacije trećeg stepena da bi se nacrtale krive pravca na levoj strani slike.

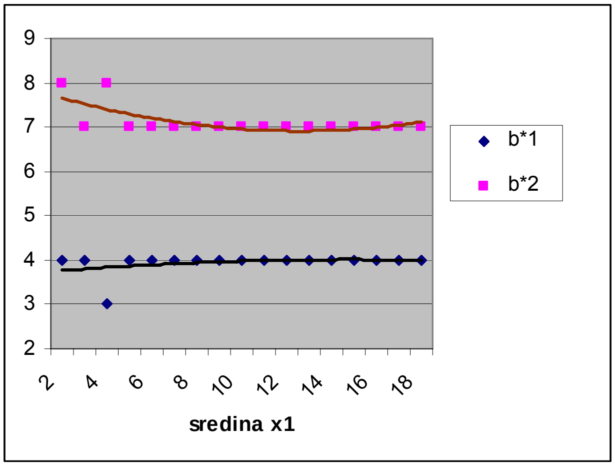


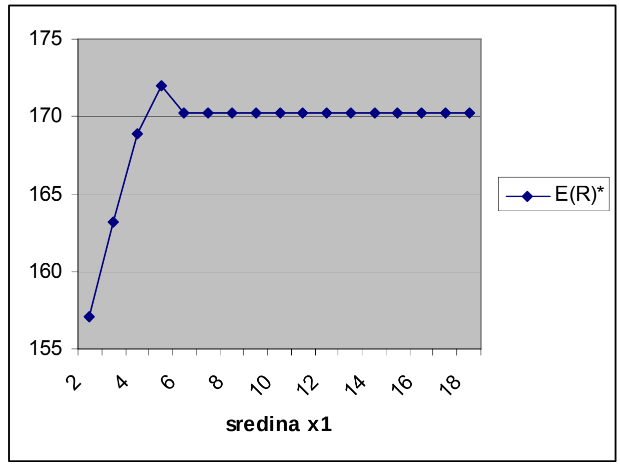
Slika 13

Osetljivost optimalnog rešenja (levo) i optimalnog očekivanog prihoda (desno) u odnosu na p_2

Sada se istražuje osetljivost optimalnog rešenja i očekivanog prihoda u odnosu na parametre raspodele. Da bi razmotrili srednju vrednost potražnje redovnih potrošača pretpostavlja se da se odstupanje potražnje ne menja. Dakle, minimalni nivo koji srednja vrednost za x_1 može da dostigne je 2. Postavlja se maksimalna vrednost za sredinu x_1 da bude 18 i posmatraju sve celobrojne vrednosti između 2 i 18 za analizu osetljivosti. Interval koji je određen za sredinu x_1 ima osobinu da se može videti slučaj kada je prosečan kapacitet niži od prosečne potražnje, kao i slučaj kada je viši od prosečne potražnje. Čak i u gornjoj granici intervala (sredina $x_1 = 18$) imamo slučaj kada je minimalna vrednost potražnje redovnih potrošača (to je 16) viša od maksimalne moguće vrednosti kapaciteta (to je 14). Za svaku celobrojnu vrednost sredine x_1 u datom intervalu generisan je slučajan uzorak od 50 elemenata za x_1 i drugi slučajan uzorak od 100 elemenata za x_2 i c. Tada za svako x_1 koje je generisano u odnosu na odgovarajuću sredinu x_1, za svako $(b_1, b_2) \in B$ i svaki elemenat (x_2, c) iz slučajnog uzorka ranije generisanog, računa se odgovarajući prihod (R). Tada se računa sredina uzorka od R za svaku sredinu x_1 i svako $(b_1, b_2) \in B$ kao ocena za $E(R)$. Kasnije se određuje maksimalno $E(R)$ i optimalno (b_1, b_2) za svaku sredinu x_1. Nakon toga, crta se interpolaciona funkcija drugog stepena između optimalnih vrednosti b_1 i b_2 kao kriva pravaca. Rezultati su prikazani na slici 14.

Rast sredine potražnje redovnih potrošača u početku povećava očekivani prihod zato što postoji dovoljno kapaciteta unutar granice rezervisanja da bi se zadovoljila potražnja. Ali posle nekog vremena očekivani prihod više ne raste pošto granica rezervisanja ograničava potražnju i više nijedna porudžbina ne može da se prihvati.



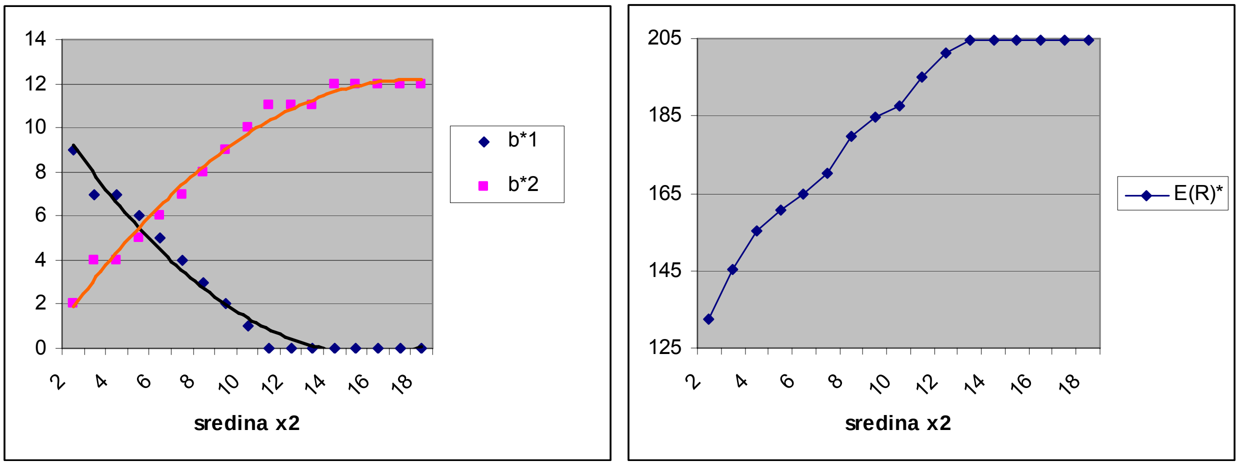


Slika 14

Osetljivost optimalnog rešenja (levo) i optimalnog očekivanog prihoda (desno) u odnosu na sredinu x_1

Osetljivost optimalnog rešenja i očekivanog prihoda u odnosu na sredinu x_2 i sredinu c je analizirana kroz proces koji je veoma sličan onom za sredinu x_1. Rezultati su prikazani na slikama 15 i 16.

Šablon promena u optimalnom rešenju i očekivanom prihodu u odnosu na sredinu x_2 je sličan onom za x_1. Znači, kad se sredina potražnje povremenih potrošača povećava njihova granica rezervisanja i očekivani prihod u početku rastu, a granica rezervisanja redovnih potrošača se smanjuje za isti iznos za koji se povećala granica rezervisanja povremenih potrošača. Posle izvesnog vremena sve prestaju sa promenama i teže ka fiksnoj vrednosti. Razlog tome je što neće biti dovoljno kapaciteta da se zadovolje porudžbine i rast granice rezervisanja druge klase dovodi do prebukiranosti i plaćanja kazne.

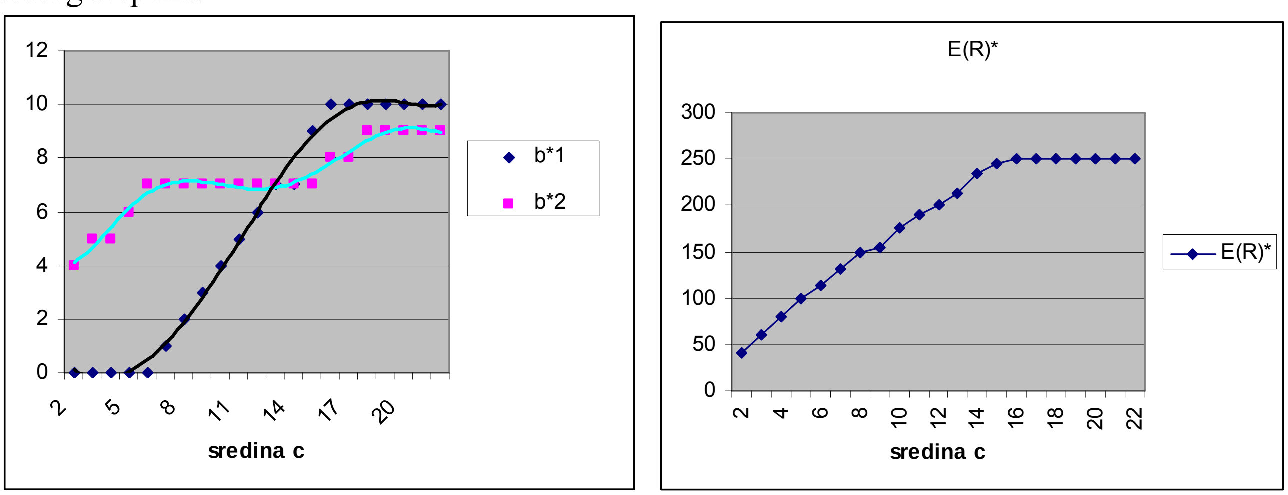


Slika 15

Osetljivost optimalnog rešenja (levo) i optimalnog očekivanog prihoda (desno) u odnosu na sredinu x_2

Kada je sredina kapaciteta jako niska samo povremeni potrošači imaju granicu rezervisanja koja se povećava rastom sredine kapaciteta, zato što oni imaju više nivoe cena i ako se granica rezervisanja pripiše redovnim potrošačima dolazi do manjka kapaciteta i biće neophodno plaćanje kazne. Nakon toga, granica rezervisanja druge klase potrošača prestaje sa rastom i granica rezervisanja prve klase raste. To važi iz razloga što potražnja druge klase ne sme sama popuniti kapacitet. Konačno, obe granice rezervisanja će težiti ka fiksnoj vrednosti, zato što uprkos tome što postoji adekvatan kapacitet da se zadovolje sve prihvaćene porudžbine, maksimalne moguće prihvaćene porudžbine ne mogu popuniti kapacitet.

Krive pravca na levoj strani slike 16 su aproksimirane pomoću polinomne interpolacije šestog stepena.



Slika 16

Osetljivost optimalnog rešenja (levo) i optimalnog očekivanog prihoda (desno) u odnosu na sredinu c

10. Model prebukiranosti sa pomerajućim kapacitetom

U problemu upravljanja prihodom kapaciteti aviona i njegovih različitih odeljaka, tj. biznis i ekonomske klase su fiksirani. Uprkos ovome, aviokompanije su upoznate sa praksom pomeranja kapaciteta sa biznis na ekonomsku klasu i obrnuto. To se čini „podizanjem“ pojedinačnih putnika sa ekonomske na biznis klasu ili „pomeranjem zavese“ između ove dve klase. Nedostatak ove procedure je što putnici koji plaćaju sedište u ekonomskoj klasi dobijaju luksuz biznis klase (ili bar sedište u biznis klasi) besplatno. Aviokompanija treba da spreči da dođe do toga zbog opasnosti da će ljudi početi da rezervišu ekonomsku klasu u nadi da će umesto nje dobiti biznis klasu. Zbog toga, pomeranje zavese ili podizanje nisu poželjne taktike za primenu na višem nivou.

Drugi način za preraspodelu kapaciteta biznis i ekonomske klase je omogućen pomoću takozvanih konvertibilnih sedišta. Pomoću jednostavne procedure red ovih sedišta može biti premešten sa ekonomske na biznis klasu i obrnuto. Ako putnik koji rezerviše ekonomsku klasu zaista i dobije ekonomsku klasu, nedostatak koji je malopre pomenut u vezi podizanja i pomeranja zavese ne važi kada koristimo konvertibilna sedišta. Štaviše, dodatna sedišta postaju dostupna kad god je red biznis klase pomeren u ekonomsku klasu. Konvertibilna sedišta se mogu koristiti bez bilo kakvih ozbiljnih posledica što čini avion veoma fleksibilnim u zadovoljavanju različitih šablona potražnje. Ovi različiti šabloni potražnje se mogu pojaviti kod letova koji lete u različitim danima u nedelji ili u različito vreme u toku dana.

U ovom radu predstavljamo model koji koristi pomerajući kapacitet pomoću konvertibilnih sedišta. Politika rezervisanja, koju koristimo da proširimo odluke o pomeranju kapaciteta, je dinamička i reoptimizuje se pri svakoj novoj rezervaciji. Model koji predstavljamo je standardni deterministički model upravljanja prihodom. Međutim, kasnije proširujemo ovaj model i uzimamo u obzir stohastičku prirodu potražnje pomoću simulacija. Dalje, dopuštamo otkazivanje i prebukiranje. Prebukiranje nije uvek uključeno u istraživanja upravljanja prihodom, ali je važno uključiti ga u kombinaciju sa odlukama o preraspodeli kapaciteta. Kada se određuje optimalna politika prebukiranja treba uzeti u obzir činjenicu da jedna rezervacija može blokirati čitav red sedišta i sprečiti da bude dostupan za druge klase u avionu. Takođe je interesantno uvideti da je u nekim slučajevima profitabilno odbiti jednu ili dve rezervacije, jer time oslobađamo čitav red za druge klase u avionu, iako postoje troškovi za takve postupke. Radi ilustracije opisujemo test događaj u kom jedan avion koristimo za niz letova i upoređujemo rezultate dobijene u simuliranom okruženju kada se odluka o preraspodeli kapaciteta donosi (i) unapred i ostaje fiksna za sve letove, (ii) pre svakog leta i (iii) dinamički tokom procesa rezervisanja svakog leta. Odluke o preraspodeli kapaciteta koje ovde razmatramo su način da se kapacitet raspodeli tamo gde je to potrebno.

10.1 Formulacija problema

Glavna odluka, koju treba doneti kada se primenjuje upravljanje prihodom u aviosaobraćaju, je da li prihvatiti ili ne pristiglu rezervaciju. Da bi doneli ovu odluku ukupan prihod ostvaren od prihvatanja rezervacija mora biti upoređen sa očekivanim prihodom koji bi se ostvario od sedišta ako se rezervacija odbije, tj. troškovima nadoknade za sedišta. Za određivanje troškova nadoknade za sedišta važno je imati dobru procenu buduće potražnje za različite rute i cene klasa.

Formulišemo problem pod standardnim pretpostavkama da je potražnja nezavisna od ruta i cene klasa i da je odbijena rezervacija zauvek izgubljena. Druga pretpostavka ukazuje na to da su rute i cene klasa dovoljno različite i da se kupac neće prebaciti na drugu rutu ili klasu kada je njegova rezervacija odbijena. U narednom poglavlju formulišemo problem, a kasnije proširujemo model sa pomerajućim kapacitetom pomoću otkazivanja i prebukiranosti, respektivno.

Formulacija problema

Pretpostavljamo da su kombinacije rute i cene klase dovoljno različite i zbog toga se mogu smatrati različitim proizvodima. Tada se sedišta u avionu mogu posmatrati kao resursi koji su potrebni za ove proizvode. Štaviše, kada se smatra da su kapaciteti sedišta za različite klase fiksirani, različite klase se mogu smatrati različitim resursima. Modelujemo potražnju kao niz rezervacija tokom vremena i vreme merimo u diskretnim intervalima brojanjem od nazad, tj. u trenutku 0 proces se završava. Definišemo $A=[a_{ij}]$, gde je $a_{ij}=1$ ako proizvod j koristi resurs i i 0 u suprotnom, za $i=1,2,...,m$ i $j=1,2,...,n$. Tada j-ta kolona matrice A, a_j, predstavlja resurse iskorišćene od jedne jedinice proizvoda j. Dalje, neka je $c=(c_1,c_2,...,c_m)^T$ kapacitet svakog resursa, $r=(r_1,r_2,...,r_n)^T$ prihod ostvaren od proizvoda, $u_t=(u_{1,t},u_{2,t},...,u_{n,t})^T$ broj proizvoda već prodatih u vremenskom trenutku t i $V_t(u_t)$ optimalni očekivani prihod koji se može ostvariti u t preostalih jedinica vremena ako je u_t proizvoda već prodato. Tada, u vremenskom trenutku t, rezervacija za k sedišta kombinacije j, rute i cene, će biti prihvaćena ako i samo ako je

$$kr_j \geq V_{t-1}(u_{t-1}) - V_{t-1}(u_{t-1}+ka_j)\,. \qquad (28)$$

Leva strana jednačine (28) predstavlja direktan prihod od rezervacija, a desna strana predstavlja procenjene troškove nadoknade za sedišta kojima su otkazane rezervacije. Međutim, teškoće se javljaju prilikom aproksimacije $V_t(u_t)$. Neka je $d_t=(d_{t,1},d_{t,2},...,d_{t,n})^T$ preostala potražnja u t preostalih jedinica vremena. Tada, ako je d_t poznato, $V_t(u_t)$ može da se definiše kao

$$V_t(u_t) = \max_x r^T x$$
$$Ax \le c \qquad (29)$$
$$u_t \le x \le u_t + d_t \qquad \text{ceo broj,}$$

gde $x = (x_1, x_2,.., x_n)^T$ predstavlja broj rezervacija prihvaćenih za svaku kombinaciju rute i cene klase. Model (29) daje linearan sistem jednačina koji može biti rešen pomoću tehnika celobrojnog programiranja.

Međutim, d_t nije poznato. Jedan način da se dobije aproksimacija za $V_t(u_t)$ je da se zameni d_t sa svojom očekivanom vrednošću. Ovo međutim ne uzima u obzir stohastičku prirodu potražnje. Stohastički model je predložen od strane Wollmer-a (1986), ali je računski teško obradiv zbog velikog broja promanljivih. Redukovanu verziju Wollmer-ovog modela, koja razmatra samo ograničen broj mogućih ishoda za potražnju, predložio je De Boer (2002). Najjednostavnija metoda koja uključuje stohastičku prirodu potražnje je predložena od strane Talluri-a i Van Ryzin-a (1999). Oni su simulirali niz vrednosti za d_t i izračunali $V_t(u_t)$ za svaku od ovih realizacija korišćenjem modela (29). Onda su procenili $V_t(u_t)$ pomoću prosečne vrednosti svih ishoda.

10.2 Formulacija problema sa preraspodelom kapaciteta

U ovom poglavlju proširujemo standardni problem upravljanja prihodom uvođenjem odluka o preraspodeli kapaciteta. Koristimo iste oznake kao i u prethodnom poglavlju samo što u ovom slučaju kapacitet c više nije konstantan, jer sad zavisi od odluke preraspodele kapaciteta. Pretpostavljamo da svaki avion ima ograničen broj konfiguracija kapaciteta koje ćemo zajedno označavati sa Y. Neka je l broj letova i $y = (y_1, y_2,..., y_l)^T \in Y$ vektor preraspodeljenog kapaciteta koji predstavlja izabranu konfiguraciju kapaciteta za svaki avion. Dalje, neka je kapacitet definisan kao funkcija od y, $c(y)$. Tada za dati vektor potražnje d_t, $V_t(u_t)$ se dobija kao

$$V_t(u_t) = \max_{x,y} r^T x \qquad (30)$$
$$Ax \le c(y)$$
$$u_t \le x \le u_t + d_t \qquad \text{ceo broj}$$
$$y \in Y,$$

gde x predstavlja broj prihvaćenih rezervacija za svaku kombinaciju rute i cene klase, a y predstavlja konfiguraciju aviona.

Model (30) neće biti sistem linearnih jednačina osim ako su $c(y)$ i Y specijalnog oblika. Stoga je veoma teško optimizirati model. Međutim, pokazaćemo da su osobine $c(y)$ i Y, na koje nailazimo u praksi, takve da će model (30) biti sistem linearnih jednačina. Da bismo to uvideli opisujemo situaciju aviona koji ima dve klase, biznis i ekonomsku. Avion koji ima konvertibilna sedišta obično ima fiksiran broj sedišta za obe klase zajedno sa redovima koji mogu biti iskorišćeni ili u biznis ili u ekonomskoj klasi. Pretpostavljamo da je fiksirani kapacitet sedišta za biznis klasu c_b, a za ekonomsku klasu c_e. Dalje, neka su R redovi konvertibilnih sedišta koji mogu biti iskorišćeni ili za biznis klasu b_b ili za ekonomsku klasu b_e. Sada možemo da definišemo

$$c(y) = \begin{pmatrix} c_b + b_b y \\ c_e + b_e(R - y) \end{pmatrix}, \qquad \text{gde je } Y = \{y \in \mathrm{N} : 0 \le y \le R\}.$$

U ovom slučaju y predstavlja broj konvertibilnih redova pripisanih biznis klasi.
Da bi predstavili model (30) sa ovom formulacijom za $c(y)$, neka su c_b, c_e, b_b, b_e i R vektori dimenzija $l \times 1$ takvi da sadrže informacije o preraspodeli kapaciteta za sve letove u mreži. Dalje, vršimo podelu za r, x, A, u_t i d_t na deo koji sadrži informaciju koja se tiče biznis klase i na deo koji adrži informaciju koja se tiče ekonomske klase.

Sada možemo definisati

$$V_t(u_t) = \max_{x_b, x_{e0,y}} r_b^T x_b + r_e^T x_e \qquad (31)$$

$$A_b x_b - b_b^T y \le c_b$$

$$A_e x_e - b_e^T (R - y) \le c_e$$

$$u_{b,t} \le x_b \le u_{b,t} + d_{b,t} \qquad \text{ceo broj}$$

$$u_{e,t} \le x_e \le u_{e,t} + d_{e,t} \qquad \text{ceo broj}$$

$$0 \le y \le R \ , \qquad \text{ceo broj}$$

gde x_b i x_e predstavljaju broj prihvaćenih rezervacija za svaku kombinaciju rute i cene klase, a y predstavlja konfiguraciju aviona. Model (31) se sastoji od linearnog sistema jednačina i stoga može biti optimizovan istom procedurom kao i u modelu (29). Dalje, model ima isti broj ograničenja za kapacitet kao i model (29) i ima samo još l promenljivih, gde je l broj letova u mreži. Primetimo da, iako model (31) pruža konfiguraciju aviona svaki put kada se optimizuje, samo na kraju perioda rezervisanja, u vremenskom trenutku 0, avioni će biti fizički konvertovani u željenu konfiguraciju.

10.3 Formulacija problema sa otkazivanjem i prebukiranošću

U industriji aviokompanija veliki broj rezervacija se otkazuje pre poletanja aviona. Zbog toga, da bi sprečila poletanje aviona sa praznim sedištima aviokompanije prebukiraju svoje letove. Kad god se primenjuje prebukiranje postoji verovatnoća da neće sve rezervacije dobiti svoje mesto u avionu. Ovo se može desiti namerno, kada je odbijena rezervacija niže vrednosti u korist rezervacije više vrednosti ili slučajno, kada se broj otkazivanja preceni. Međutim, postoji trošak kazne koji je uključen u odbijanje prihvaćene rezervacije. On može da se sastoji od raznih vrsta troškova kao što su troškovi smeštaja ili gubitak dobre volje potrošača. Trošak kazne sprečava aviokompanije da previše rizikuju sa prebukiranošću. Interesantno je uvideti šta se dešava ako aviokompanija odluči da više rizikuje i prihvati troškove odbijenih rezervacija ako to znači da će čitav red biti dostupan za neku drugu klasu u avionu. Uvodimo $\bar{x}_t, \bar{u}_t$ i $\bar{d}_t$ kao neto vrednosti za x_t, u_t i d_t, gde neto vrednost definišemo kao broj rezervacija ispravljen sa brojem otkazanih rezervacija. Tako da, ako je u vremenu t prihvaćeno 30 rezervacija za kombinaciju j rute i cene klase od kojih će 6 biti otkazano u budućnosti, tada je $u_t = 30$, a $\bar{u}_t = 24$. Očigledno, unapred nije poznato koje će rezervacije biti otkazane. Međutim, možemo zameniti $\bar{u}_t$ i $\bar{d}_t$ sa očekivanim ili simuliranim vrednostima. Konačno, neka su q_b i q_e troškovi kazne za svaku kombinaciju rute i cene klase u biznis i ekonomskoj klasi, pa definišemo

$$V_t(u_t) = \max_{\bar{x}_b, \bar{x}_e, y, z_b, z_e} r_b^T \bar{x}_b + r_e^T \bar{x}_e - q_b^T z_b - q_e^T z_e \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& A_b(\bar{x}_b - z_b) - b_b^T y \le c_b \\
& A_e(\bar{x}_e - z_e) - b_e^T (R - y) \le c_e \\
& \bar{u}_{b,t} \le \bar{x}_b \le \bar{u}_{b,t} + \bar{d}_{b,t} && \text{ceo broj} \\
& \bar{u}_{e,t} \le \bar{x}_e \le \bar{u}_{e,t} + \bar{d}_{e,t} && \text{ceo broj} \\
& 0 \le y \le R && \text{ceo broj} \\
& 0 \le z_b && \text{ceo broj} \\
& 0 \le z_e, && \text{ceo broj}
\end{aligned}$$

gde z_b i z_e predstavljaju rezervacije u biznis i ekonomskoj klasi koje su odbijene prilikom poletanja aviona.

10.4 Test događaj

U ovom poglavlju predstavljamo test događaj da bi pokazali kako se modeli, koji su opisani u prethodnim poglavljima, mogu iskoristiti i šta može biti profitabilno korišćenjem politike upravljanja prihodom koja koristi odluke o preraspodeli kapaciteta pomoću konvertibilnih sedišta. Upoređujemo rezultate tri različite politike upravljanja prihodom. Jedna koja ne uzima u obzir činjenicu da kapacitet može biti preraspodeljen između biznis i ekonomske klase, druga koja to uzima u obzir, ali samo na početku perioda rezervisanja i treća, koja u potpunosti primenjuje upravljanje prihodom i odluke o preraspodeli kapaciteta. Testiramo različite politike upravljanja prihodom pomoću simulacija. Rezultati koje smo dobili daju indikacije o tome šta možemo očekivati u stvarnosti. U narednom poglavlju opisujemo postavku test događaja nakon čega predstavljamo rezultate različitih strategija rezervisanja sa i bez otkazivanja i prebukiranosti.

Prikaz test događaja

Test događaj se sastoji od jednog leta koji je posmatran tri puta. Svaki let je predstavljen pomoću svog šablona potražnje. Ova tri leta se mogu posmatrati kao isti let u različitoj sezoni ili u različitim danima u nedelji ili u različito vreme u toku dana. Specijalno, modelujemo jedan osnovni let zajedno sa jednim letom koji ima više putnika biznis klase i jednim letom koji ima više putnika ekonomske klase. Avion koji je korišćen za ovaj test događaj ima ukupno 35 redova sedišta koji svi mogu biti iskorišćeni ili za 5 sedišta biznis klase ili za 6 sedišta ekonomske klase. U tabeli 4 su predstavljene cene karata za biznis i ekonomsku klasu. Razmatramo slučaj kada imamo dve cene za biznis klasu i četiri za ekonomsku. U tabeli 4 je takođe predstavljena prosečna potražnja za svaku klasu za sva tri leta. Let 2 je osnovni let. Kod prvog leta , prosečna potražnja biznis klase je 30% viša od prosečne potražnje biznis klase u osnovnom letu, a prosečna potražnja ekonomske klase je za 30% niža od prosečne potražnje ekonomske klase u osnovnom letu. Za treći let je obrnut slučaj.

			Prosečna potražnja		
Klasa	Tip klase	Cena ($)	Let 1	Let 2	Let 3
1	Biznis	400	14.3	11	7.7
2	Biznis	350	36.4	28	19.6
3	Ekonomska	250	22.4	32	41.6
4	Ekonomska	200	30.8	44	57.2
5	Ekonomska	150	51.1	73	94.9
6	Ekonomska	100	43.4	62	80.6

Tabela 4: Cene klasa

Pored činjenice da se svih šest klasa razlikuju u ceni i nivou potražnje, one takođe imaju i specifične šablone rezervisanja. Rezervacije koje pristižu su modelovane pomoću nehomogenog Poasonovog procesa. To je postignuto podelom perioda rezervisanja na deset manjih vremenskih perioda svaki sa konstantnom stopom pristizanja. Potražnja za dve biznis klase se pretpostavlja da se realizuje na kraju perioda rezervisanja dok se potražnja za dve jeftinije klase ostvaruje na početku perioda rezervisanja.

10.5 Rezultati bez otkazivanja i prebukiranosti

Upoređujemo rezultate tri razičite politike upravljanja prihodom koje se razlikuju po tome kako se odnose prema odluci o preraspodeli kapaciteta. Sve tri politike su dinamičke politike u smislu da se troškovi nadoknade procenjuju svaki put kada pristigne nova rezervacija. Prva politika ne uzima u obzir odluku o preraspodeli kapaciteta. Za ovu politiku kapacitet ostaje fiksiran za sva tri leta i koristi se model (29) da bi se procenili troškovi nadoknade. Konfiguracija kapaciteta aviona je fiksirana i dobijena je iz modela (31) optimizacijom sva tri leta odjednom na osnovu njihove očekivane potražnje. To je učinjeno pre početka perioda rezervisanja i tada počinje proces upravljanja prihodom. Ovu politiku ćemo zvati politika fiksnog kapaciteta (FC-Fixed Capacity). Druga politika uzima u obzir odluku o preraspodeli kapaciteta. Za svaki let koji ima svoj šablon potražnje određuje se nova konfiguracija kapaciteta aviona. Ova konfiguracija ostaje nepromenjena tokom perioda rezervisanja. Pre početka perioda rezervisanja, koristimo model (31) da bi odredili raspodelu kapaciteta zasnovanu na očekivanoj potražnji, a tokom perioda rezervisanja je korišćen model (29) da bi se procenili troškovi nadoknada. Treća politika dinamički koristi odluke o preraspodeli kapaciteta. Ona u potpunosti sjedinjuje probleme preraspodele kapaciteta i upravljanja prihodom i konstantno koristi model (31) za procenu troškova nadoknade. To znači da će tačna konfiguracija aviona biti poznata tek na kraju perioda rezervisanja. Drugu politiku ćemo zvati politika preraspodele kapaciteta (SC-Shifting Capacity), a treću ćemo zvati politika dinamičke preraspodele kapaciteta (DSC-Dynamic Shifting Capacity).

Sve tri politike će biti primenjene i u determinističkom i u stohasičkom slučaju. Na ovaj način dobijamo šest različitih politika , tri determinističke i tri stohastičke politike. Determinističke politike baziraju svoje procene troškova nadoknade na očekivanoj budućoj potražnji, tj. u modelima (29) ili (31) vektor potražnje je zamenjen svojim očekivanjem. Za stohastičke politike simulirano je deset realizacija za buduću potražnju. Za svih deset realizacija određeni su troškovi nadoknade i dobijena je procena troškova nadoknade kao prosečna vrednost ovih deset slučajeva.

Da bismo testirali politike rezervisanja simuliramo 100 kompletnih procesa rezervisanja za sva tri leta. U tabeli 5 su prikazani rezultati svih šest politika koje su primenjene na 100 simuliranih procesa rezervisanja. Takođe dajemo optimalne rezultate koji su kasnije određeni za svaki proces rezervisanja. Rezultati su generisani kompjuterski pomoću softverskog paketa Mathematica za optimizaciju modela matematičkog programiranja. Vreme računanja je mereno u sekundama.

Politika	Prihod	Standardna devijacija	Min.	Maks.	Optimalna %	Najbolja %	Vreme računanja
FC det	121470	3422	113050	129950	94.78	0	3.85
FC stoh	121688	3479	113150	130100	94.95	1	37.24
SC det	124957	2873	118550	131020	97.49	5.5	3.75
SC stoh	125197	3037	118500	131100	97.67	22.5	34.82
DSC det	125114	2976	118250	130800	97.60	5.5	6.58
DSC stoh	126032	3048	118500	131700	98.30	65.5	62.50
Optimalno	128258	3444	120050	136250	100		

Tabela 5: Prosečni rezultati politika kontrole rezervacija

U tabeli 5 vidimo da stohastička DSC politika, koja je i najsofisticiranija politika, daje najbolje rezultate. U proseku dostiže i do 98.3% optimalnog prihoda koji se može ostvariti i daje bolje rezultate od ostalih pet politika u 65.5% slučajeva. Kada je kapacitet fiksiran prihodi koji se ostvaruju su jasno niži. Ekstra prihodi ostvareni od preraspodele kapaciteta su 2.71% i 2.82% za deterninističke SC i DSC politike respektivno, a 2.72% i 3.35% za stohastičke SC i DSC politike respektivno. U ovom test događaju to je negde između 1162$ i 1448$ po letu. Tabela 5 takođe prikazuje da su razlike između SC i DSC politika male:0.11% i 0.63% za determinističke i stohastičke politike respektivno. Ovo ukazuje na to da donošenje odluke o preraspodeli kapaciteta pre početka perioda rezervisanja može biti dobra alternativa za dinamičko donošenje odluka o preraspodeli kapaciteta. Dalje, vidimo da ako posmatramo buduću potražnju kao stohastičku dolazi do poboljšanja DSC politike za 0.7%. Za FC i SC politike međutim poboljšanje je znatno manje 0.17% i 0.18% respektivno. Ova poboljšanja se čine beznačajnim ako uzmemo u obzir dodatno vreme računanja potrebno za stohastičke politike.

Da bi uvideli odakle potiču razlike u rezultatima uključujemo prosečne konfiguracije kapaciteta i faktore opterećenja leta za različite politike rezervisanja u tabelama 6-9. Ova tabela prikazuje prosečan broj redova pripisanih biznis i ekonomskoj klasi, prosečan broj putnika i prosečan faktor opterećenja, koji predstavlja broj putnika kao procenat od ukupnog kapaciteta aviona. Primetimo da kod DSC politike prosečan broj redova biznis i ekonomske klase nije uvek jednak ukupnoj sumi redova u avionu zato što ako red ostane prazan on se ne pripisuje nijednoj klasi kod ove politike. Kod FC i SC politika broj redova pripisanih biznis i ekonomskoj klasi je poznat pre početka perioda rezervisanja i ostaje fiksan bez obzira da li su ti redovi puni ili ne.

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	46.59	0.266	25	143.11	0.681	0.948
FC stoh	10	46.62	0.266	25	143.05	0.681	0.948
SC det	10	46.59	0.266	25	143.11	0.681	0.948
SC stoh	10	46.61	0.266	25	143.03	0.681	0.947
DSC det	11.06	47.86	0.273	23.94	142.06	0.676	0.950
DSC stoh	11.17	48.57	0.278	23.83	141.46	0.674	0.951
Optimalno	11.15	49.42	0.282	23.85	141.96	0.676	0.958

Tabela 6:Let 1

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	39.70	0.227	25	149.10	0.710	0.937
FC stoh	10	39.69	0.227	25	148.73	0.708	0.935
SC det	8	37.65	0.215	27	161.09	0.767	0.982
SC stoh	8	37.69	0.215	27	160.52	0.764	0.980
DSC det	7.97	37.18	0.212	27.21	162.00	0.771	0.984
DSC stoh	8.01	38.23	0.218	26.99	160.92	0.766	0.985
Optimalno	8.13	39.55	0.226	26.87	161.22	0.768	0.994

Tabela 7: Let 2

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	28.71	0.164	25	149.59	0.712	0.876
FC stoh	10	28.71	0.164	25	149.41	0.711	0.876
SC det	5	24.41	0.139	30	179.43	0.854	0.994
SC stoh	5	24.43	0.140	30	179.30	0.854	0.993
DSC det	5.24	25.17	0.144	29.76	177.42	0.845	0.989
DSC stoh	5.56	26.79	0.153	29.44	175.62	0.836	0.989
Optimalno	5.76	28.15	0.161	29.24	175.44	0.835	0.996

Tabela 8: Let 3

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	38.33	0.219	25	147.27	0.701	0.920
FC stoh	10	38.34	0.219	25	147.06	0.700	0.919
SC det	7.67	36.22	0.207	27.33	161.21	0.768	0.975
SC stoh	7.67	36.24	0.207	27.33	160.95	0.766	0.974
DSC det	8.03	36.73	0.210	26.97	160.49	0.764	0.974
DSC stoh	8.25	37.86	0.216	26.75	159.33	0.759	0.975
Optimalno	8.35	39.04	0.223	26.65	159.54	0.760	0.983

Tabela 9: Ukupno

Tabele 6-9 pokazju da kada koristimo odluke o preraspodeli kapaciteta, prosečan broj redova biznis klase varira od 5 za treći let sa niskom potražnjom za biznis klasom do 10 za prvi let sa visokom potražnjom za biznis klasom. FC politika fiksira broj redova biznis klase na 10 i ekonomske na 25 što je dobra konfiguracija kada je potražnja za biznis klasom visoka, ali rezultuje praznim sedištima biznis klase kada je potražnja za biznis klasom niska. To se reflektuje na prosečne faktore opterećenja letova. Za prvi let faktori opterećenja FC politike su isti kao i kod SC politike i samo malo niži od onih kod DSC politike. Kod trećeg leta, međutim, ukupni faktori opterećenja FC politika su više od 11% ispod onih kod SC i DSC politika.

10.6 Rezultati sa otkazivanjem i prebukiranošću

U ovom poglavlju proširujemo test događaj uključivanjem otkazivanja i prebukiranosti. Modelujemo rezervacije tako da imaju verovatnoću da budu otkazane. Ova verovatnoća otkazivanja zavisi od cene karte i to je uopšteno verovatnoća da je rezervacija otkazana u nekom trenutku tokom perioda rezervisanja. Pretpostavljamo da je verovatnoća otkazivanja homogena tokom vremena tako da rezervacija koja je ostvarena t vremenskih perioda pre kraja perioda rezervisanja i koja ima verovatnoću otkazivanja p, ima verovatnoću otkazivanja p/t po jedinici vremena. Na ovaj način možemo da modelujemo otkazivanja pomoću homogenog Poasonovog procesa.

Modelujemo dve biznis klase tako da imaju verovatnoću otkazivanja 10%, prve dve ekonomske klase imaju verovatnoću 12.5%, a druge dve jeftinije ekonomske klase imaju verovatnoću otkazivanja 15%. Simulirana potražnja je proporcionalno povećana ovim procentima da bi se održala potražnja kao u prethodnom poglavlju.

Troškovi kazne za odbijene rezervacije se moraju uzeti u obzir kada je dozvoljeno prebukiranje. Postavićemo troškove kazne da budu 500$ za sve klase. To je više od maksimalnog prihoda koji se može ostvariti od bilo koje klase što znači da nikad nije profitabilno prihvatiti ekstra rezervacije sa visokom cenom ako to znači da neka druga rezervacija mora biti odbijena. Sa odlukama o preraspodeli kapaciteta, međutim, može biti profitabilno odbiti jednu ili dve rezervacije ako to oslobađa čitav red za druge klase u avionu. Simulirali smo 100 procesa rezervisanja na koje smo primenili istih šest politika rezervisanja kao i u prethodnom poglavlju. Ukupni rezultati ovih šest politika su prikazani u tabeli zajedno sa optimalnim rezultatima.

Politika	Prihod	Standardna devijacija	Min.	Maks.	Optimalna %	Najbolja %	Vreme računanja
FC det	120656	3607	110150	129600	94.20	0	5.65
FC stoh	120829	3669	110050	129750	94.36	4	52.05
SC det	123663	2850	116050	128700	96.56	5.5	5.33
SC stoh	123848	2844	115800	129300	96.70	14.5	49.11
DSC det	124260	2805	117150	130600	97.02	12	9.86
DSC stoh	125154	2801	117600	130000	97.71	64	84.41
Optimaln	128172	3630	119900	135850	100		

Tabela 10: Prosečni rezultati politika rezervisanja sa otkazivanjem i prebukiranošću

Rezultati predstavljeni u tabeli 10 pokazuju da politike rezervisanja daju manje prihode kada se uključuje otkazivanje i prebukiranost. To nije zato što je manje prihoda dostupno, već zato što otkazivanja čine problem mnogo komplikovanijim. Razlike u rezultatima politika sa i bez otkazivanja i prebukiranosti mogu promeniti i do 1% od optimalnog prihoda. Osim toga, razlike u rezultatima različitih politika pokazuju veoma slične šablone kao i u slučaju bez otkazivanja i prebukiranosti. Stohastička DSC politika se najbolje pokazala, a ostale politike koje koriste odluke o preraspodeli kapaciteta ne zaostaju puno. Deterministička FC politika je za 2.6% i 2.82% lošija od determinističkih SC i DSC politika respektivno. Stohastička FC politika je za 2.34% i za 3.35% lošija od stohastičkih SC i DSC politika respektivno. To znači da ekstra profit koji se može ostvariti korišćenjem odluka o preraspodeli kapaciteta se ne menja mnogo kada se uzmu u obzir otkazivanje i prebukiranost.

Prosečan broj odbijenih rezervacija po letu je prikazan u tabeli 11. Sa prosečnim brojem odbijenih rezervacija 0.537 ,u odnosu na 0.187 i 0.32 za druge politike, stohastička DSC politika je najmanje oprezna politika što se tiče prebukiranja. Ovo je potvrdilo ideju korišćenja preraspodele kapaciteta, da može biti profitabilno u nekim slučajevima podneti troškove odbijenih rezervacija ako to znači da će red sedišta moći da se iskoristi za neku drugu klasu.

Politika	Let 1	Let 2	Let 3	Ukupno
FC det	0.300	0.320	0.220	0.280
FC stoh	0.350	0.250	0.150	0.250
SC det	0.300	0.440	0.220	0.320
SC stoh	0.330	0.260	0.310	0.300
DSC det	0.180	0.210	0.170	0.187
DSC stoh	0.540	0.520	0.550	0.537
Optimalno	0	0	0	0

Tabela 11: Prosečan broj odbijenih rezervacija po letu

Konačno, u tabelama 12-15 prikazujemo prosečne konfiguracije kapaciteta i faktora opterećenja letova sa različitim politikama rezervisanja. Konfiguracije kapaciteta i faktori opterećenja ne pokazuju velika odstupanja od onih dobijenih u slučaju bez otkazivanja i prebukiranosti osim činjenice da DSC politika teži da pripiše više sedišta biznis klasi. To se najbolje vidi kod prvog leta gde DSC politika pripisuje više od čitavog dodatnog reda biznis klasi.

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	47.48	0.271	25	142.41	0.678	0.949
FC stoh	10	47.61	0.272	25	142.25	0.677	0.949
SC det	10	47.48	0.271	25	142.41	0.678	0.949
SC stoh	10	47.60	0.272	25	142.24	0.677	0.949
DSC det	11.03	48.91	0.279	23.97	142.08	0.677	0.956
DSC stoh	11.03	49.76	0.284	23.87	141.77	0.675	0.959
Optimalno	11.38	50.89	0.291	23.62	140.52	0.669	0.960

Tabela 12: Let1

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	39.97	0.228	25	148.82	0.709	0.937
FC stoh	10	40.00	0.229	25	148.25	0.706	0.935
SC det	8	37.40	0.214	27	160.88	0.766	0.980
SC stoh	8	37.44	0.214	27	159.93	0.762	0.976
DSC det	7.88	37.03	0.212	27.12	161.41	0.769	0.980
DSC stoh	8.04	37.96	0.217	26.96	160.94	0.766	0.983
Optimalno	8.22	39.95	0.228	26.78	160.68	0.765	0.993

Tabela 13:Let 2

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	28.85	0.165	25	148.91	0.709	0.874
FC stoh	10	28.85	0.165	25	148.52	0.707	0.872
SC det	5	23.95	0.137	30	178.62	0.851	0.987
SC stoh	5	24.18	0.138	30	178.24	0.849	0.987
DSC det	5.30	24.94	0.143	29.70	176.83	0.842	0.985
DSC stoh	5.51	26.60	0.152	29.49	175.99	0.838	0.990
Optimalno	5.82	28.39	0.162	29.18	175.08	0.834	0.996

Tabela 14: Let 3

	Biznis			Ekonomska			Ukupno
Politika	Redovi	Putnici	Faktori	Redovi	Putnici	Faktori	Faktori
FC det	10	38.77	0.222	25	146.72	0.699	0.920
FC stoh	10	38.82	0.222	25	146.34	0.697	0.919
SC det	7.67	36.28	0.207	27.33	160.64	0.765	0.972
SC stoh	7.67	36.41	0.208	27.33	160.14	0.763	0.971
DSC det	8.07	36.96	0.211	26.93	160.11	0.762	0.974
DSC stoh	8.23	38.11	0.218	26.77	159.57	0.760	0.978
Optimalno	8.47	39.74	0.227	26.53	158.76	0.756	0.983

Tabela 15:Ukupno

11. Zaključak

U ovom radu je predstavljeno nekoliko modela koji služe za ispitivanje efekata različitih politika prebukiranja na prihod i troškove aviokompanije. Prvo je predstavljen osnovni model prebukiranosti koji posmatra samo jedan avion. Iako je ovaj model bio dosta jednostavan pomoću njega je izvedeno dosta zaključaka koji se odnose na politiku prebukiranja. Uopšteno, pomoću kompjuterskog programa utvrđene su optimalne politike prebukiranja kada su poznati kapacitet aviona, verovatnoća pojavljivanja putnika i nadoknada za prekobrojniog putnika.

Proširenje osnovnog modela prebukiranosti je razmatralo slučaj jednog aviona sa više klasa: biznis i ekonomskom klasom. Kao i osnovni model i ovaj model je pružio razumne sugestije što se tiče politike prebukiranja. Analizirani su rezultate ovog modela i utvrđeno je da uključivanje više klasa ima veoma malo uticaja na politiku prebukiranja.

Nakon toga je razmatrana šema nadoknada za putnike koji su prekobrojni. Utvrđeno je da nedobrovoljno prekobrojni putnici dobijaju nadoknadu u skladu sa vremenom čekanja do narednog slobodnog leta. To je modelovano pomoću eksponencijalne raspodele vremena čekanja i dobijena je očekivana količina nadoknade koju aviokompanija mora da plati nedobrovoljno prekobrojnim putnicima. Takođe su modelovane šeme nadoknada za dobrovoljno prekobrojne putnike. Uopšteno, razvijen je model aukcije koji je veoma sličan realnim situacijama koje koriste aviokompanije. Što se tiče najbolje metode nadoknada, možemo zaključiti da je to kombinacija aukcije i prisilnog prebukiranja koje smo detaljnije obrazložili.

Najvažniji model u ovom radu je formulisan kao problem raspodele kapaciteta sa dve grupe redovnih i povremenih potrošača koji plaćaju različite cene za iste proizvode. Razvijena je metoda raspodele stohastičkog kapaciteta korišćenjem koncepta upravljanja prihodima. Funkcija cilja ima unimodalni oblik i optimalno rešenje se može pronaći analitički. Četiri slučaja se mogu desiti u zavisnosti od faktora kao što su funkcije raspodele potražnje i kapaciteta, cena proizvoda i visina kazne za otkazivanje porudžbine za svaku klasu. Takođe je prikazan i metod za pronalaženje optimalnog rešenja za svaki slučaj. Model je upoređen sa drugim modelima sa determinističkim kapacitetom i pokazana je usaglašenost. Osetljivost optimalnog rešenja u odnosu na različite parametre troškova i raspodele je takođe ispitana korišćenjem analitičkih i numeričkih metoda.

Konačno, predstavljen je model sa pomerajućim kapacitetom koji koristi konvertibilna sedišta koja omogućuju preraspodelu kapaciteta između klasa u avionu. Problem je formulisan pomoću modela matematičkog programiranja i predstavljen je deterministički i stohastički prilaz. Takođe, model je proširen tako da uključuje mogućnost otkazivanja rezervacija i razmatrane su različite politike rezervisanja koje direktno utiču na prihod.

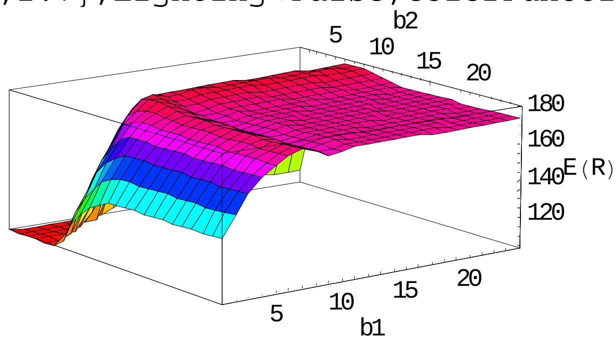
Modeli koji je predstavljen u ovom radu mogu se primeniti na razna proizvodna okruženja, gde se proizvodi po porudžbini sa slučajnim kapacitetom, koji imaju dugotrajne redovne potrošače sa niskom cenom i visokom kaznom i takođe kratkotrajne povremene potrošače koji imaju visoke cene i niske kazne. Model je bolje primenljiv kada je kapacitet povezan sa ukupnom potražnjom, ali se ne može u potpunosti utvrditi kada se posmatra samo jedna grupa potrošača.

Za dalje razmatranje se preporučuje da se istraži slučaj u kom je utvrđena samo granica rezervisanja za manje poželjnu klasu (klasu 2). U tom slučaju, sve porudžbine više poželjne klase se prihvataju, ali one imaju prioritet da budu otkazane. Još jedno polje za razmatranje je generalizacija ovog modela za slučaj kada ukupna visina nadoknade za redovne potrošače (π_1) nije neophodno viša od one za povremene potrošače (π_2). Dalje, dobro je proučiti slučaj potražnje sa ponovnim poručivanjem, gde u slučaju otkazivanja porudžbine umesto isplaćivanja cele sume koja je plaćena zajedno sa kaznom za otkazivanje (π_i), isplaćuje se samo kazna za otkazivanje (p_i), a porudžbina se odlaže i ne otkazuje u potpunosti. Takođe je poželjno pronaći tačne formule za optimalno rešenje i analizu osetljivosti koje odgovaraju nekim određenim funkcijama raspodele za potražnju i kapacitet. Još jedan koristan način za proširenje ovog modela je da se poveća broj klasa. Razvoj politike dinamičkog prihvatanja/odbijanja porudžbina za slučaj stohastičkog kapaciteta je takođe dobra ideja. Raspodela slučajnog kapaciteta u više perioda sa prilazom pomoću upravljanja prihodima može privući dalje istraživanje.

12. Numerički primer obrađen u softverskom paketu Mathematica

```
b1=Table[i,{i,0,23}]

a1=Outer[Min,b1,x1]

b2=Table[i,{i,0,23}]


 a2=Outer[Min,b2,x2]

 d1=Table[If[a1[[15,i]]≥c[[i]],a1[[15,i]]-
c[[i]],0],{j,1,24},{i,1,100}]

 d2=Table[If[a1[[15,i]]≥c[[i]],a1[[15,i]]-
c[[i]],If[a1[[15,i]]+a2[[j,i]]≥c[[i]],a1[[15,i]]+a2[[j,i]]-
c[[i]],0]],{j,1,24},{i,1,100}]

 R=Table[14*a1[[15,i]]+20*a2[[j,i]]-30*d1[[15,i]]-
25*d2[[j,i]],{j,1,24},{i,1,100}]


 ER23=Table[Mean[R[[i]]],{i,1,24}]

{109.998,129.672,147.29,162.492,172.615,177.448,178.165,177.659
,176.276,175.058,174.141,173.595,173.258,173.211,173.211,173.21
1,173.211,173.211,173.211,173.211,173.211,173.211,173.211,173.2
11}
```

```
ListPlot3D[{ER0,ER1,ER2,ER3,ER4,ER5,ER6,ER7,ER8,ER9,ER10,ER11,E
R12,ER13,ER14,ER15,ER16,ER17,ER18,ER19,ER20,ER21,ER22,ER23},Axe
sLabel→{"b2","b1","E(R)"},ViewPoint→{9.5,-
7,2.7},Lighting→False,ColorFunction→Hue]
```




```
-SurfaceGraphics-
```

Literatura:

1) Mohammad Modarres , Mehdi Sharifyazdi - *“Revenue management approach to stochastic capacity allocation problem”*- European Journal of Operational Research, Volume 192, Issue 2, 16 January 2009, p. 442-459
2) Richard E Chatwin - *“Continuous-Time Airline Overbooking with Time-Dependent Fares and Refunds”*- Transportation Science, May 1999; 33, 2; p. 87-121
3) Janakiram Subramanian; Shaler Stidham Jr; Conrad J Lautenbacher- *“Airline Yield Management with Overbooking, Cancellations, and No-Shows”*- Transportation Science; May 1999; 33, 2; p.147-167

4) Itir Karaesmen and Garett van Ryzin- *“Overbooking with substitutable inventory classes”*-Operations Research, Vol. 52, No. 1 (Jan.-Feb., 2004),pp. 83-104
5) Itir Karaesmen and Garrett van Ryzin- *„Coordinating Overbooking and Capacity Control Decisions on a Network“*-R.H. Smith School of Business, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA
Graduate School of Business, Columbia University, New York, NY
6) Kevin Pak, Rommert Dekker, Gerard Kindervater- *„Airline revenue management with shifting capacity“*- Erasmus University of Rotterdam, Erasmus Research Institute of Management, November,2003, p. 1-24

Kratka biografija

Zovem se Demeč Marija. Rođena sam 11. decembra 1984. godine u Kikindi. Završila sam srednju građevinsku školu na smeru visokogradnja u Kikindi. 2004. godine sam se upisala na Prirodno matematički fakultet na smer matematika finansija i diplomirala 29.09.2008. Iste godine sam upisala master studije na smeru primenjena matematika i po planu i programu položila sve predviđene ispite.

Novi Sad, 07.10.2009 Marija Demeč

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni Stampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Demeč Marija

AU

Mentor: dr Zorana Lužanin

MN

Naslov rada: Matematički modeli problema prebukiranosti u proizvodnom sistemu

MR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *s / e*

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2009.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Valentina Vodnika 13

MA

Fizički opis rada: (*11/ 38/0 / 0/ 4/ 2/ 0*)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: primenjena matematika

ND

Ključne reči: prebukiranost, upravljanje prihodima, raspodela kapaciteta, stohastički kapacitet, optimizacija

PO

UDK:

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovom radu je predstavljen matematički model problema prebukiranosti u proizvodnom sistemu sa dve klase potrošača. Problem se zasniva na raspodeli kapaciteta na klase potrošača koji plaćaju različite cene za iste proizvode pri čemu je kapacitet stohastički. Model koji je predstavljen u ovom radu se može primeniti na razna proizvodna okruženja gde se proizvodi po porudžbini sa slučajnim kapacitetom.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 07.0.2009.

Datum odbrane: DO

Članovi komisije: KO

Predsednik: dr Nataša Krejić , redovni profesor na Prirodno matematičkom fakultetu

Član: dr Zorana Lužanin, redovni profesor na Prirodno matematičkom fakultetu

Član: dr Sanja Rapajić, docent na Prirodno matematičkom fakultetu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Marija Demeč

AU

Mentor: Zorana Lužanin

MN

Title: Mathematical models of overbooking problem in manufacturing system

XI

Language of text: serbian

LT

Language of abstract: s

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2008.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Valentina Vodnika 13

PP

Physical description: (*11/ 38/0 / 0/ 4/ 2/ 0*)

PD

Scientific field: mathematica

SF

Scientific discipline: financial mathematic

Key words: overbooking, revenue management, capacity allocation, stochastic capacity, optimization

UC:

Holding data:

HD Note:

Abstract: In this work we are talking about mathematical model of overbooking problem in manufacturing system with two groups of customers. Problem is based upon capacity allocation on frequent and occasional customers, who pay different prices for the same product and capacity is stochastic. The model presented in this paper can be applied for make-to-order random-capacity production environments.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 07.07.2009.

Defended:

Thesis defend board: dr Nataša Krejić

Member: dr Zorana Lužanin

Member: dr Sanja Rapajić