UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jelena Petričević

Osnovne teoreme funkcionalne analize i primene u analizi aktivnosti

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2013

Sadržaj

Predgovor

Funkcionalna analiza je područje savremene matematike, čije se metode primenjuju u gotovo svim disciplinama matematike. U ovom radu biće prikazan način povezivanja funkcionalne analize sa optimizacijom.

U prvoj glavi se predstavlja Han-Banahova teorema u obliku proširenja i u obliku separacije. Teorema u obliku separacije se povezuje sa egzistencijom rešenja jednačine predstavljene Farkašovom Lemom.

Pošto je u prvoj glavi predstavljena jedna od osnovnih teorema funkcionalne analize, u drugoj glavi su predstavljene ostale važne teoreme funkcionalne analize, a to su Berova teorema o kategoriji, Princip uniformne ograničenosti, teorema o otvorenom preslikavanju i teorema o zatvorenom grafu.

Teoreme separacije, koje predstavljaju geometrijsku verziju Han-Banahove teoreme, detaljnije su objašnjene u trećoj glavi. Uveden je pojam analize aktivnosti, na koju se primenjuju teoreme separacije, a koja posmatra skup proizvodnih procesa u određenoj kompaniji. Uvedeni su pojmovi tačke efikasnosti, vektora cena i profita, kao i problem optimizacije, te se tačka efikasnosti uvodi preko maksimizacije profita.

U četvrtoj glavi se definišu pojmovi konkurentne ravnoteže i Pareto optimuma. Biće predstavljena konkretna primena analize aktivnosti, pomoću primera proizvodnje automobila i kamiona. Pokazuje se koja hiperravan razdvaja odgovarajuće skupove, i koja je to tačka efikasnosti, u kojoj je proizvodnja optimalna. U tačku efikasnosti pod pravim uglom dolazi jedinstven vektor cena, pa je tako rešen problem optimizacije.

U petoj glavi se primenjuje analiza aktivnosti na savremen primer računanja cena ekosistema. Pokazaćemo algoritam kojim se računaju cene i daćemo odgovor na pitanje da li su one odgovarajuće za ekonomsku procenu.

Zahvaljujem se mentoru dr Nenadu Teofanovu na korisnim smernicama i savetima u toku izrade ovog rada. Veliku zahvalnost dugujem svojim roditeljima i bratu, koji su tokom školovanja bili uz mene i uvek bili velika podrška.

Jelena Petričević

1

Uvod

Han-Banahova teorema je jedna od najvažnijih teorema koja leži u osnovama funkcionalne analize. Uz nju, značajne su teorema o uniformnoj ograničenosti i teorema o zatvorenom grafu. U nastavku će biti izložene ove teoreme, a uz njih još dve teoreme funkcionalne analize, Berova teorema o kategoriji i teorema o otvorenom preslikavanju. Zbog značaja za ostatak rada, detaljno će se obraditi Han-Banahove teoreme.

Teoreme Han-Banahovog tipa se mogu javiti u dva oblika. U prvi spadaju teoreme u obliku proširenja, a u drugu teoreme u obliku separacije.

Obe vrste teorema dokazuju postojanje linearnih funkcionela sa određenim karakteristikama.

Han-Banahove teoreme u obliku proširenja tvrde da se funkcionele definisane na potprostoru vektorskog prostora (sa dodatnom strukturom, obično sa normom ili topologijom) koje imaju dodatne karakteristike (linearnost i neprekidnost) mogu proširiti na čitav prostor zadržavajući te dodatne karakteristike.

Priroda ovih teorema i njihovih dokaza je analitička. Nasuprot tome, Han-Banahove teoreme u obliku separacije kao i njihovi dokazi su geometrijske prirode.

Han-Banahove teoreme u obliku separacije se bave pitanjima sledećeg oblika: Za date disjunktne konveksne skupove u vektorskom prostoru, pitamo se kada je moguće naći hiper-ravan takvu da dati konveksni skupovi leže na suprotnim stranama te hiper-ravni?

Oba oblika Han-Banahove teoreme su matematički ekvivalentna. To znači da se može dokazati Han-Banahova teorema o proširenju, a onda iskoristiti da se dokaže teorema separacije i obrnuto.

Pre svega, uvodimo osnovne pojmove vezane za prostore na kojima definišemo Han-Banahove teoreme, kao i osnovne osobine operatora. Potom definišemo konveksne skupove, nad kojima ćemo definisati i primeniti Han-

Banahovu teoremu u obliku separacije. U ovoj glavi je korištena literatura [1] i [7].

1.1 Definicija i primeri Banahovih prostora

U ovom poglavlju uvodimo osnovne pojmove i osobine vezane za prostore na kojima ćemo definisati Han-Banahove teoreme. Te osobine ćemo koristiti u kasnijim dokazima.

Vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{F}$, gde $\mathbb{F}$ može biti skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, je neprazan skup za koji važe aksiome:

1. $(V, +)$ je Abelova grupa.
2. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$ i $\forall x, y \in V$.
3. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $\forall x \in V$.
4. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $\forall x \in V$.
5. $1x = x, \quad \forall x \in V$.

Definicija 1.1.1. *Vektorski prostor X je normiran ako se u njemu može definisati preslikavanje $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$, tako da:*

1. $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$.
2. $\|x\| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$.
3. $\|cx\| = |c|\|x\|, \quad \forall x \in X$ *i* $\forall c \in \mathbb{F}$.
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$*- nejednakost trougla.*

Broj $\|x\|$ se zove norma od x, a par $(X, \|\cdot\|)$ je normiran prostor. Ako imamo normu $\|\cdot\|$, broj $\|x-y\|$ se naziva rastojanje između vektora x i y.

Funkcija $d(x,y) := \|x-y\|$ je metrika na $(X, \|\cdot\|)$, indukovana normom $\|\cdot\|$.

Poznate metrike su:

$$d_1(x,y) \equiv \sum_j |x_j - y_j|,$$

$$d_2(x,y) \equiv (\sum_j (x_j - y_j)^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_\infty(x,y) \equiv \max_j |x_j - y_j|.$$

Opštije, metrika je i:

$$d_p(x,y) \equiv (\sum_j (x_j - y_j)^p)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < \infty.$$

Skup:

$$B_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| < r\} = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

se naziva otvorena lopta u skupu X sa centrom u x i poluprečnikom r.

Ponekad su nam potrebne seminorme, koje po definiciji moraju zadovoljiti uslove *1*, *3* i *4* iz definicije *1.1.1*, ali ne moraju zadovoljiti uslov *2*. Na primer ako uzmemo da je $\|x\| = |x_1|$ za $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2$, tada je $\|\cdot\|$ seminorma na $\mathbb{F}^2$, ali nije norma na $\mathbb{F}^2$, jer može biti $\|x\| = 0$, ako je $x_1 = 0$, ali to ne znači da je $x = (x_1, x_2) = 0$. Ako biramo $x = (0,1)$, onda je $x \neq 0$ i $\|x\| = 0$, a to je kontradikcija.

Definicija 1.1.2. *Neka je X normiran vektorski prostor.*

1. *Niz vektora $\{x_n\}$ u X konvergira ka $x \in X$ ako imamo:*

   $$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0,\ \textit{odnosno ako}\ \forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N > 0,\ \ \forall n \geq N,\ \ \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

   U ovom slučaju pišemo $x_n \to x$ odnosno $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2. *Niz vektora $\{x_n\}$ u X je Košijev niz u X ako imamo:*

   $$lim_{m,n\to\infty}\|x_m - x_n\| = 0.$$

   Preciznije, ovo znači da $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall m,n \geq N,$ $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Svaki konvergentan niz u normiranom prostoru je Košijev niz. Ali obrnuto ne važi u opštem slučaju.

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je normiran vektorski prostor X kompletan ako je svaki Košijev niz u X konvergentan niz. Kompletan normiran vektorski prostor se naziva Banahov prostor.*

Kažemo da je X realan Banahov prostor ako je X Banahov prostor na polju realnih brojeva ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) i slično da je kompleksan Banahov prostor ako je Banahov prostor na polju kompleksnih brojeva ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Definicija 1.1.4. *Niz $\{x_n\}$ u Banahovom prostoru X je:*

1. *ograničen odozdo ako je $\inf_n \|x_n\| > 0$.*

2. *ograničen odozgo ako je $\sup_n \|x_n\| < \infty$.*

3. *normiran ako je $\|x_n\| = 1$, za svako $n \in \mathbb{N}$.*

Najjednostavniji primer Banahovog prostora je polje skalara $\mathbb{F}$, gde je norma na $\mathbb{F}$ apsolutna vrednost. U sledećem primeru se pokazuje da norma ne mora da bude jedinstveno određena.

Primer 1. *$\mathbb{F}^k$ je najjednostavniji primer Banahovog prostora i to je skup svih k-torki skalara, gde je k pozitivan ceo broj. Uzimamo vektor $v \in \mathbb{F}^k$, gde je $v = (v_1, ..., v_k)$. Svaki od sledećih izraza predstavlja normu na $\mathbb{F}^k$ i prostor $\mathbb{F}^k$ je kompletan u odnosu na te norme:*

$$|v|_p = \begin{cases} (|v_1|^p + ... + |v_k|^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{|v_1|, ..., |v_k|\}, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Euklidska norma $|v|$ vektora $v \in \mathbb{F}^k$ je norma koja odgovara izboru $p = 2$, pa je:

$$|v| = |v|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + ... + |v_k|^2}.$$

Sledeći primer pokazuje kako se može napraviti norma na bilo kom konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru.

Primer 2. *Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor. Tada postoji konačan skup vektora $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_k\}$ koji predstavlja bazu za V, to jest, svako $x \in V$ se može napisati kao:*

$$x = \sum_{l=1}^{k} c_l(x) x_l,$$

za jedinstven izbor skalara $c_l(x)$. Dato je $1 \leq p \leq \infty$, ako stavimo da je:

$$\|x\|_p = \begin{cases} (|c_1(x)|^p + ... + |c_k(x)|^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{|c_1(x)|, ..., |c_k(x)|\}, & p = \infty. \end{cases}$$

tada je $\|\cdot\|_p$ norma na V i V je kompletan u odnosu na tu normu.

Definicija 1.1.5. *Neka je X normiran vektorski prostor u odnosu na normu $\|\cdot\|$, takođe i u odnosu na normu $|||\cdot|||$. Norme $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$ su ekvivalentne ako postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ takve da važi:*

$$C_1\|x\| \leq |||x||| \leq C_2\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Za dve ekvivalentne norme važi:

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |||x - x_n||| = 0.$$

Teorema 1.1.1. *Ako je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor, tada su bilo koje dve norme na V ekvivalentne.*

Do sada smo govorili o Banahovim prostorima konačne dimenzije, a sada ćemo razmatrati neke primere vezane za beskonačne Banahove prostore.

Primer 3. *U ovom primeru razmatramo vektorske prostore čiji su elementi beskonačni nizovi skalara $x = \{x_k\} = \{x_k\}_{k\in N}$.*

- *Dato je $1 \leq p < \infty$. Definišemo l^p, prostor svih beskonačnih nizova skalara:*

  $$l^p = l^p(N) = \big\{x = \{x_k\} : \textstyle\sum_k |x_k|^p < \infty\big\}. \tag{1.2}$$

  Ovo je Banahov prostor u odnosu na normu:

  $$\|x\|_{l^p} = \|\{x_k\}\|_{l^p} = \big(\textstyle\sum_k |x_k|^p\big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

- *Definišemo l^∞, prostor svih ograničenih beskonačnih nizova:*

  $$l^\infty = l^\infty(N) = \{x = \{x_k\} : \{x_k\} \ \textit{je ograničen niz}\}.$$

  Ovo je Banahov prostor u odnosu na supremum normu:

  $$\|x\|_{l^\infty} = \|\{x_k\}\|_{l^\infty} = \sup_k |x_k|.$$

Teorema 1.1.2. *Ako je $1 \leq p \leq \infty$, tada je l^p Banahov prostor u odnosu na normu $\|\cdot\|_{l^p}$.*

Dokaz
Treba pokazati da je l^p kompletan normiran vektorski prostor. Fiksiramo $1 \leq p < \infty$ i pretpostavimo da je $\{x_n\}_{n\in N}$ Košijev niz u l^p. Kada dokažemo da je takav niz konvergentan, odatle sledi kompletnost. Svako x_n je vektor u l^p, pa neka su:

$$x_n = \Big(x_n(1), x_n(2), ...\Big)$$

komponente vektora x_n.

Tada za svaki fiksirani indeks $k \in N$ imamo $|x_m(k)-x_n(k)| \leq \|x_m-x_n\|_{l^p}$. Odatle je $\{x_n(k)\}_{n\in N}$ Košijev niz skalara i zbog toga on mora da konvergira, jer je $\mathbb{F}$ kompletan. Definišemo

$$x(k) = \lim_{n\to\infty} x_n(k).$$

Tada x_n konvergira po komponentama ka $x = (x(1), x(2), ...)$, na primer:

$$\forall k \in N, \text{ važi } x(k) = \lim_{n\to\infty} x_n(k).$$

Moramo pokazati da x_n konvergira ka x po normi l^p.

Biramo neko $\varepsilon > 0$. Tada, na osnovu definicije Košijevog niza, postoji N tako da je $\|x_m - x_n\|_{l^p} < \varepsilon$, $\forall m, n > N$. Fiksiramo bilo koje $n > N$. Za svako $M > 0$ imamo:

$$\sum_{k=1}^{M} |x(k) - x_n(k)|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{M} |x_m(k) - x_n(k)|^p \leq \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\|_{l^p}^p \leq \varepsilon^p.$$

Pošto je to tačno za svako M, zaključujemo:

$$\|x - x_n\|_{l^p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_n(k)|^p = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} |x(k) - x_n(k)|^p \leq \varepsilon^p. \tag{1.4}$$

Odatle sledi,

$$\|x\|_{l^p} = \|x - x_n + x_n\|_{l^p} \leq \|x - x_n\|_{l^p} + \|x_n\|_{l^p} < \infty,$$

pa $x \in l^p$. Pošto jednačina (1.4) važi za svako $n > N$, imamo da je:

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_{l^p} = 0,$$

to jest, $x_n \to x$ u l^p. Dokazali smo konvergenciju svakog Košijevog niza u l^p, pa je zbog toga i l^p kompletan, odatle Banahov prostor, što je i trebalo dokazati. $\square$

1.2 Operatori

Neka su X i Y vektorski prostori. Operator je funkcija: $L : X \to Y$. U sledećoj definiciji predstavljamo karakteristike operatora.

Definicija 1.2.1. *Neka su X i Y normirani vektorski prostori i neka je $L : X \to Y$ operator.*

1. *L je linearan ako*
$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall a, b \in \mathbb{F}.$$
2. *L je antilinearan ako*
$$L(ax + by) = \overline{a}L(x) + \overline{b}L(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall a, b \in \mathbb{F}.$$
3. *L je neprekidan ako $x_n \to x$ u X implicira da $L(x_n) \to L(x)$ u Y.*
4. *Jezgro ili nulti prostor operatora L čine elementi $x \in X$ za koje je $Lx = 0$:*
$$N(L) = \{x \in X : Lx = 0\}$$
5. *Rang od L je dimenzija njegovog kodomena: $rank(L) = dim(range(L))$. Kažemo da je L operator konačnog ranga, ako je njegov kodomen konačno-dimenzionalan.*
6. *L je funkcionela ako je $Y = \mathbb{F}$.*
7. *Dva operatora $A, B : X \to X$ su komutativna ako je $AB = BA$.*

Dalje uvodimo pojam otvorenog skupa. Ali da bismo definisali otvoren skup, moramo pre svega definisati okolinu proizvoljne tačke x.

Definicija 1.2.2. *Okolina tačke $x \in X$ je skup V za koji važi $B_r(x) \subset V$, za neko $r > 0$.*

Kada smo uveli okolinu tačke x, sada možemo definisati otvoren skup.

Definicija 1.2.3. *Skup $A \subset X$ je otvoren skup ako i samo ako važi $\forall x \in A$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tako da je $B_r(x) \subset A$. Odnosno, skup A je otvoren ako i samo ako je A okolina svake svoje tačke.*

Teorema 1.2.1. *Neka su X i Y normirani prostori i neka je data funkcija $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna ako i samo ako je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$.*

Nenula linearni operator $L : X \to Y$ ne može preslikati skup X u ograničeni podskup od Y, jer važi relacija $\|L(cx)\|_Y = |c|\|Lx\|_Y$, gde $|c|$ može biti proizvoljno veliko. Ograničenost možemo posmatrati i na drugi način, recimo upoređivanjem veličine normi $\|x\|_X$ i $\|Lx\|_Y$. Ako postoji granica koliko veliko može biti $\|Lx\|_Y$ u odnosu na $\|x\|_X$, onda kažemo da je L ograničen.

Sledeća definicija govori o ograničenim operatorima.

Definicija 1.2.4. *Neka su X i Y normirani vektorski prostori i neka je $L : X \to Y$ linearni operator.*

1. *L je ograničen, ako postoji konačno $K \geq 0$ takvo da je:*

$$\|Lx\|_Y \leq K\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

2. *Operatorska norma ili jednostavno norma za L je:*

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Lx\|_Y.$$

3. *Kažemo da L čuva normu ili je izometričan ako:*

$$\|Lx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

4. *Ako je L linearan, bijektivan i izometričan, onda L nazivamo izometrijski izomorfizam.*

5. *Kažemo da su X i Y izometrijski izomorfni, a to označavamo sa $X \cong Y$, ako postoji izometrijski izomorfizam $L : X \to Y$.*

Obično je jasno na koji se prostor primenjuje norma, tako da kad pišemo $\|L\|$, to označava operatorsku normu. Definicija operatorske norme je sledeća:

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|.$$

Ovde postoje tri različita značenja simbola $\|\cdot\|$: oznaka $\|x\|$ označava normu za $x \in X$, oznaka $\|Lx\|$ predstavlja normu za $Lx \in Y$ i $\|L\|$ je operatorska norma.

Sledećom teoremom uvodimo neke osnovne karakteristike operatora i operatorske norme.

Teorema 1.2.2. *Neka su X, Y normirani vektorski prostori i neka je $L : X \to Y$ linearni operator.*

1. *$L(0) = 0$ i L je injekcija ako i samo ako je $N(L) = \{0\}$. Važi još, ako je L izometrija onda je L injektivno.*
2. *Ako je L bijekcija, onda je inverzno preslikavanje $L^{-1} : Y \to X$ takođe linearna bijekcija.*
3. *L je ograničen ako i samo ako je $\|L\| < \infty$.*
4. *Ako je L ograničen, onda važi:*
$$\|Lx\| \leq \|L\|\|x\|, \ \forall x \in X$$
i $\|L\|$ je najmanji realan broj K takav da je $\|Lx\| \leq K\|x\|$, $\forall x \in X$.
5. *Važi:*
$$\|L\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Lx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}.$$

Glavna osobina linearnih operatora na normiranim vektorskim prostorima je da su ograničenost i neprekidnost ekvivalentni.

Teorema 1.2.3. *Ako su X, Y normirani vektorski prostori i $L : X \to Y$ je linearni operator, tada važi:*

$$L \text{ je neprekidan } \Leftrightarrow L \text{ je ograničen.}$$

Dokaz

- $\Leftarrow$ Ako je L ograničen i važi $x_n \to x$, tada imamo:
$$\|Lx - Lx_n\| = \|L(x - x_n)\| \leq \|L\|\|x - x_n\| \to 0 \quad kada \quad n \to \infty,$$
pa je L neprekidan.
- $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je L linearan i neprekidan, ali neograničen. Tada imamo $\|L\| = \infty$, pa mora postojati $x_n \in X$ sa $\|x_n\| = 1$, tako da je $\|Lx_n\| \geq n$. Stavljamo: $y_n = \frac{x_n}{n}$. Tada $\|y_n - 0\| = \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} \to 0$, tako da $y_n \to 0$. Pošto je L neprekidan i linearan, to implicira da $Ly_n \to L0 = 0$. Na osnovu neprekidnosti norme, imamo $\|Ly_n\| \to \|0\| = 0$. Ipak, na osnovu toga kako smo definisali y_n, imamo:
$$\|Ly_n\| = \frac{1}{n}\|Lx_n\| \geq \frac{1}{n}n = 1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$
a to je kontradikcija. Zbog toga L mora da bude ograničen.

Definicija 1.2.5. *Dati su normirani vektorski prostori X, Y. Definišemo vektorski prostor operatora:*

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{L : X \to Y | L \text{ je ograničen i linearan}\}.$$

Ako je $X = Y$ onda pišemo $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$.

Sledeća teorema kaže da bilo koji linearni operator koji preslikava konačno-dimenzionalan vektorski prostor V na normirani prostor Y, mora biti ograničen.

Teorema 1.2.4. *Ako je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor i Y normiran vektorski prostor, tada je bilo koji linearan operator $T : V \to Y$ ograničen.*

Dokaz

Napomenimo da je, na osnovu teoreme 16.2. iz [2], konačno-dimenzionalni normirani vektorski prostor V nad $\mathbb{R}$ dimenzije n linearno izomorfan sa $\mathbb{R}^n$, pa možemo dokazati da je linearni operator $T : \mathbb{R}^n \to Y$ ograničen. Uzmimo da je $V = \mathbb{R}^n$. Onda su na $\mathbb{R}^n$ definisani vektori $e_1, e_2, ..., e_n$, na sledeći način:

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Tada je $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ moguće predstaviti kao $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Odavde sledi:

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_X &= \|T(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n)\|_X \\
= \|x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + ... + x_nT(e_n)\|_X &\leq \sum_{k=1}^{n} \|x_kT(e_k)\|_X \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|T(e_k)\|_X \leq \max_{1\leq k\leq n} \|T(e_k)\|_X \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
&\leq M\sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = M'\|x\|_{\mathbb{R}^n},
\end{aligned}$$

gde je:

$$M = \max_{1\leq k\leq n} \|T(e_k)\|_X,\ M' = M\sqrt{n}.$$

Iz nejednakosti

$$\|T(x)\|_X \leq M'\|x\|_{\mathbb{R}^n}, \text{ za svako } x \in \mathbb{R}^n,$$

sledi neprekidnost preslikavanja T. $\square$

Sada treba pokazati da je operatorska norma, norma na $\mathcal{B}(X,Y)$ i da je $\mathcal{B}(X,Y)$ kompletan kad god je i Y kompletan.

Teorema 1.2.5. *Neka su X, Y i Z normirani prostori.*

1. *$\mathcal{B}(X,Y)$ je normiran vektorski prostor u odnosu na operatorsku normu.*
2. *Ako je Y Banahov prostor, tada je $\mathcal{B}(X,Y)$ Banahov prostor u odnosu na operatorsku normu.*
3. *Operatorska norma je submultiplikativna, to jest, ako $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ i $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$, tada $BA \in \mathcal{B}(X,Z)$ i važi: $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$.*

Dokaz

Dokazujemo deo pod *2*. Ideja je slična dokazu da je l^p kompletan. Dat je Košijev niz $\{A_n\}$. Iskoristićemo uslov da je to Košijev niz da pronađemo kandidata za granicu A, ka kojoj niz A_n konvergira po tačkama. A kasnije pokazujemo da A_n konvergira ka A po p normi.

Konvergencija operatora po tačkama znači da $A_n x \to Ax$, $\forall x \in X$, ali to ne znači da A_n konvergira ka A u operatorskoj normi.

Pretpostavimo da je X normiran, a Y je Banahov prostor i neka je $\{A_n\}$ Košijev niz operatora iz $\mathcal{B}(X,Y)$ u odnosu na operatorsku normu. Dato je bilo koje $x \in X$ i imamo:

$$\|A_m x - A_n x\| \leq \|A_m - A_n\|\|x\|.$$

Zbog toga je $\{A_n x\}$ Košijev niz u Y. Kako je Y kompletan, onda ovaj niz mora da konvergira, recimo $A_n x \to y \in Y$. Definišemo $Ax = y$. Ovo nam daje kandidata za granicu operatora A.

Ostaje da se pokaže da $A_n \to A$ u operatorskoj normi. Fiksiramo neko $\varepsilon > 0$. Kako je $\{A_n\}$ Košijev, postoji N takav da za:

$$m, n > N \Rightarrow \|A_m - A_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Biramo bilo koje $x \in X$ sa $\|x\| = 1$. Pošto $A_m x \to Ax$, postoji $m > N$ tako da:

$$\|Ax - A_m x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zbog toga, za bilo koje $n > N$ imamo:

$$\|Ax - A_n x\| \leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m x - A_n x\|$$
$$\leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m - A_n\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Uzimajući supremum nad svim jediničnim vektorima, zaključujemo da je $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$, $\forall n > N$, pa $A_n \to A$ u operatorskoj normi.

$\square$

1.3 Funkcionele i Han-Banahova teorema

Han-Banahove teoreme su suštinske teoreme o realnim vektorskim prostorima. Ove teoreme su prvo dokazane na realnom vektorskom prostoru, a kasnije proširene na kompleksni vektorski prostor. Ovde ćemo posmatrati samo realan vektorski prostor.

Opšti primeri realnog vektorskog prostora su $\mathbb{R}^n$, prostori nizova l^p, $p \in [1, \infty)$, prostori funkcija $C([a, b])$ i $C^1([a, b])$. Funkcionele na takvim prostorima su funkcije koje njihove elemente preslikavaju u realne brojeve.

Sledećom definicijom uvodimo osobine funkcionela.

Definicija 1.3.1. *Neka je V realan vektorski prostor. Funkcionela na V je funkcija $\phi : V \to \mathbb{R}$. Za funkcionelu ϕ može da važi:*

- *aditivnost ako: $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$, $\forall a, b \in V$.*
- *homogenost ako: $\phi(\alpha a) = \alpha\phi(a)$, $\forall a, b \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.*
- *linearnost: ϕ je linearna ako je aditivna i homogena.*
- *subaditivnost ako: $\phi(a + b) \leq \phi(a) + \phi(b)$, $\forall a, b \in V$.*
- *pozitivna homogenost ako: $\phi(\alpha a) = \alpha\phi(a)$, $\forall a \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.*
- *sublinearnost: ϕ je sublinearna ako je subaditivna i pozitivno homogena.*
- *konveksnost ako: $\phi((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)\phi(a) + t\phi(b)$, $\forall a, b \in V$ i $t \in [0, 1]$.*

Primer 4. *Funkcionela ϕ definisana na $\mathbb{R}^2$ sa:*

$\phi(x_1, x_2) := |x_1| + |x_2|$, $\quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *je sublinearna ali ne i linearna.*

Dokaz
Neka su $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$. Ako je $y = -x$, onda važi:

$$\phi(x + y) = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| = |x_1 - x_1| + |x_2 - x_2| = 0.$$

Ako još važi $x \neq 0$, onda je: $\phi(x+y) \neq \phi(x)+\phi(y) = |x_1|+|x_2|+|y_1|+|y_2| = |x_1|+|x_2|+|-x_1|+|-x_2| = |x_1|+|x_2|+|x_1|+|x_2| = 2(|x_1|+|x_2|)$. Time je pokazana subaditivnost. Ostaje još da se pokaže homogenost. Uzmimo, na primer, da je $\alpha = -2$, dokazujemo homogenost, pa važi:

$$\phi((-2)x) = |(-2)x_1| + |(-2)x_2| = 2|x_1| + 2|x_2| = 2(|x_1| + |x_2|) = 2\phi(x),$$

a to je kontradikcija. Vidimo da α ne može biti negativno, pa tako važi pozitivna homogenost $\alpha \geq 0$, odatle sledi da je funkcija definisana gore sublinearna. $\square$

PRIMER 5. *Funkcionela ψ definisana na $\mathbb{R}^2$ sa:*

$$\psi(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ je linearna.}$$

Dokaz
Neka je $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$, onda važi:

$$\psi(x + y) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2 = \psi(x) + \psi(y).$$

Čime je dokazana aditivnost. Dokazujemo još homogenost:

$$\psi(\alpha x) = 2\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(2x_1 + x_2) = \alpha\psi(x).$$

$\square$

Sada možemo predstaviti prvu od Han-Banahovih teorema o proširenju. Pomoću nje se dokazuju sve ostale teoreme o proširenju. Ovom teoremom pokazujemo da linearna funkcionela, koja je definisana na potprostoru realnog vektorskog prostora V i kojom dominira sublinearna funkcionela definisana na čitavom prostoru V, ima linearno proširenje kojim takođe dominira ista sublinearna funkcionela.

Teorema 1.3.1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i p sublinearna funkcionela na X. Neka je $A \neq \{0\}$ potprostor prostora X i $f : A \to \mathbb{R}$ je linearna funkcionela za koju važi $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in A$. Tada postoji linearna funkcionela $F : X \to \mathbb{R}$ tako je $F|_A = f$, $F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$. $F|_A$ je restrikcija funkcije F na A.*

Dokaz

Ako je $A = X$, dokaz ove teoreme je trivijalan.
Dalje ćemo dokazati slučaj kad je $A \neq X$.

Pretpostavimo da $\exists\, x_0 \in X \backslash A$. Definišemo B potprostor od X na sledeći način:

$$B = \{lx_0 + x \mid l \in \mathbb{R},\ x \in A\}$$

i važi $B \supset A$.

Definišemo dalje $f_B : B \to \mathbb{R}$ sa:

$$f_B(lx_0 + x) = l\mu + f(x),\ \forall l \in \mathbb{R} \text{ i } \forall x \in A,$$

gde je μ realan broj koji je određen tako da važi:

$$f_B(t) \leq p(t),\ t = lx_0 + x \in B. \tag{1.3.1}$$

Važi $f_B|_A = f$ i f_B je linearna funkcija na B.

Koristeći subaditivnost i pozitivnu homogenost funkcionele p dobijamo da μ treba da zadovoljava sledeće uslove:

1. Za $l > 0$ i $x \in A$ treba da važi uslov:

$$\begin{gathered} f_B(lx_0 + x) \leq p(lx_0 + x) \\ l\mu + f(x) \leq p(lx_0 + x) \\ l\mu \leq p(lx_0 + x) - f(x) \\ \mu \leq p(x_0 + \tfrac{x}{l}) - f(\tfrac{x}{l}) \end{gathered}$$

2. Za $l < 0$ i $x \in A$ treba da važi:

$$\begin{gathered} f_B(lx_0 + x) \leq p(lx_0 + x) \\ l\mu + f(x) \leq p(lx_0 + x) \\ l\mu \leq p(lx_0 + x) - f(x) \\ \mu \geq -p(-x_0 - \tfrac{x}{l}) - f(\tfrac{x}{l}). \end{gathered}$$

Kako je A vektorski prostor, iz uslova 1) i 2) sledi da važi uslov:

$$-p(-x_0 - \tfrac{x}{l}) - f(\tfrac{x}{l}) \leq \mu \leq p(x_0 + \tfrac{x}{l}) - f(\tfrac{x}{l}), \text{ odnosno}$$
$$-p(-x_0 - y) - f(y) \leq \mu \leq p(x_0 + z) - f(z),\ y, z \in A. \tag{1.3.2}$$

Treba pokazati da važi:

$$\sup_{y\in A}\{-p(-x_0-y)-f(y)\} \leq \inf_{z\in A}\{p(x_0+z)-f(z)\}, \tag{1.3.3}$$

što implicira da postoji $\mu \in \mathbb{R}$ tako da važi (1.3.2) odnosno da za f_B važi (1.3.1).

Pošto $z-y \in A$, jer $z, y \in A$, sledi da važi:

$$f(z)-f(y) = f(z-y) \leq p(z-y) = p(x_0+z+(-x_0-y)) \leq p(x_0+z)+p(-x_0-y),$$

što implicira:

$$-p(-x_0-y)-f(y) \leq p(x_0+z)-f(z),\ y, z \in A$$

odakle sledi (1.3.3). Dakle, pokazali smo da postoji (B, f_B), tako da važi:

$$A \subset B,\ f_B|_A = f \text{ i } (1.3.1) \tag{1.3.4}$$

Drugi korak koristi Zornovu Lemu da formira maksimalan potprostor koji sadrži A i na kom se f može proširiti tako da zadovoljava zadate uslove. Na kraju se pokazuje, koristeći prvi korak, da se taj maksimalan potprostor mora poklapati sa X. Označimo:

$$C = \{(B, f_B);\ \text{važi } (1.3.4)\}$$

i uvodimo relaciju poretka:

$$(B_1, f_{B_1}) \leq (B_2, f_{B_2}) \Longleftrightarrow B_2 \supset B_1,\ f_{B_2}|_{B_1} = f_{B_1}.$$

Svaka totalno uređena podfamilija od C, $\{(B_\alpha, f_{B_\alpha}), \alpha \in L\}$ ima gornje ograničenje. To je (B, f_B), gde je $B = \bigcup_{\alpha\in L} B_\alpha$ i f_B definisano tako da važi $f_B|_{B_\alpha} = f_{B_\alpha},\ \alpha \in L$. Na osnovu Leme Zorna, postoji maksimalan element u C. Neka je to (B_0, f_{B_0}). Mora biti $B_0 = X$, jer ako nije, upravo prvi deo dokaza daje konstrukciju elementa $(B, f_B) \in C$ za koji važi:

$$B_0 \subsetneqq B,\ f_B|_{B_0} = f_{B_0}$$

što znači da (B_0, f_{B_0}) nije maksimalan. Stavimo $F = f_{B_0}$. Ova funkcija zadovoljava tvrđenje teoreme. $\square$

Najpopularnija Han-Banahova teorema je ona koja govori u kontekstu normiranih vektorskih potprostora.

Ranije smo definisali kada su nizovi u Banahovom prostoru ograničeni. Sada ćemo definisati kada su linearne funkcionele ograničene.

Definicija 1.3.2. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normiran vektorski prostor. Linearna funkcionela* ϕ *na* X *je ograničena ako je*

$$\sup_{\|x\|\le 1}\{|\phi(x)| : x \in X\} < \infty.$$

Ako definišemo $\|\cdot\| : \phi \mapsto \|\phi\| := \sup_{\|x\|\le 1}\{|\phi(x)|; x \in X\}$, ovako definisano preslikavanje ispunjava uslove norme vektorskog prostora ograničenih linearnih funkcionela na X. Dakle, ako je ϕ ograničena linearna funkcionela na X, tada važi:

$$|\phi(x)| \le \|\phi\|\|x\|,\ \forall x \in X.$$

Lako se pokazuje da je linearna funkcionela ϕ na X ograničena ako i samo ako je neprekidna za svako $x \in X$ ako i samo ako je uniformno neprekidna na X.

Han-Banahova teorema o proširenju kaže da svaka ograničena linearna funkcionela definisana na potprostoru normiranog vektorskog prostora ima proširenje koje čuva normu na celom prostoru.

Teorema 1.3.2. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normiran vektorski prostor,* Y *je potprostor od* X *i* ϕ *je ograničena linearna funkcionela definisana na* Y*. Tada postoji ograničena linearna funkcionela* ψ *definisana na* X *tako da je*

$$\phi(y) = \psi(y),\ \forall y \in Y \ i\ \|\psi\| = \|\phi\|.$$

Dokaz

Neka je p funkcionela definisana na sledeći način:

$$p(x) := \|\phi\|\|x\|,\ \forall x \in X.$$

Dokažimo da je p sublinearna i da je $\phi(x) \le p(x),\ \forall x \in Y$. Prvo dokazujemo da je p sublinearna:

$$p(x+y) = \|\phi\|\|x+y\| \le \|\phi\|\|x\| + \|\phi\|\|y\| = p(x) + p(y),\ \forall x, y \in X.$$

Zatim dokazujemo da je $\phi(x) \le p(x),\ \forall x \in Y$. Kako je ϕ ograničena linearna funkcionela na Y, važi $|\phi(x)| \le \|\phi\|\|x\|,\ \forall x \in Y$. Odavde vidimo da je $\phi(x) \le p(x),\ \forall x \in Y$, zbog načina na koji smo definisali funkcionelu p. Na osnovu teoreme 1.3.1 postoji funkcionela ψ definisana na X takva da je $\psi|_Y = \phi$, gde je $\psi(x) \le \phi(x)$. Znači, $\psi(y) = \phi(y),\ \forall y \in Y$. Ako primenimo normu na prethodnu jednakost, dobijamo $\|\psi\| = \|\phi\|$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Ova teorema se koristi kada ispitujemo aproksimaciju. Na primer, ako želimo da znamo da li se neki element $a \in X$ može aproksmirati elementima iz potprostora Y, odnosno da li a priprada zatvaranju od Y.

Podsetimo se, tačka $y \in X$ je tačka nagomilavanja skupa $Y \subset X$, ako postoji niz $\{y_n\} \subset Y$ takav da je $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, odnosno ako za

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_o \Rightarrow \|y_n - y\| < \varepsilon.$$

Y je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

Posledica 1.3.1. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran linearan prostor, Y je potprostor od X i $a \in X$. Tada a pripada zatvaranju $\overline{Y}$ od Y ako i samo ako ne postoji ograničena linearna funkcionela ϕ na X tako da je $\phi(y) = 0$ za sve $y \in Y$ i $\phi(a) \neq 0$.*

Dokaz

Ako $a \notin \overline{Y}$, ϕ je ograničena linearna funkcionela na X i $\phi(y) = 0,\ \forall y \in Y$, onda neprekidnost funkcionele ϕ pokazuje da takođe važi $\phi(a) = 0$.

Suprotno, pretpostavimo da $a \in \overline{Y}$. Tada postoji $\delta > 0$ tako da $\|y - a\| > \delta,\ \forall y \in Y$. Neka je Y' potprostor određen sa Y i a, definišemo $\phi(y + \lambda a) = \lambda$, ako je $y \in Y$ i λ je skalar. Kako je:

$$\delta|\lambda| \leq |\lambda|\|a + \lambda^{-1}y\| = \|\lambda a + y\|,$$

vidimo da je ϕ linearna funkcionela na Y', čija je norma najviše δ^{-1}. Takođe, $\phi(y) = 0$ na Y i $\phi(a) = 1$. Han-Banahova teorema dozvoljava da se proširi funkcionela ϕ sa Y' na X. $\square$

1.4 Konveksni skupovi i njihova separacija

U ovom poglavlju razmatramo Han-Banahove teoreme u obliku separacije. To znači da se ove teoreme bave pitanjem postojanja hiper-ravni koja razdvaja dva data disjunktna konveksna podskupa.

Najpre ćemo uvesti pojam aditivnog prostora. Takav prostor je komutativna grupa, pa je vektorski prostor definisan na skupu celih brojeva, umesto na skupu realnih brojeva.

Na vektorskom prostoru se mogu definisati skupovi, kao i njihov presek, unija i suma. Suma dva skupa se definiše na sledeći način.

Neka je V realan vektorski prostor, A i B neprazni podskupovi prostora V. Tada je $A + B$ definisan sa:

$$A + B = \{c = a + b \mid \text{za neko } a \in A \text{ i neko } b \in B\}.$$

Takođe se može definisati proporcionalnost skupa. Neka je V realan vektorski prostor, $A \subset V$ neprazan skup i α realan broj. Tada imamo:

$$\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}.$$

Važi komutativnost: $A + B = B + A$, ali zbir $A + A$ ne mora nužno da bude $2A$. Na primer, ako je $A + A = \{a \mid a = a_1 + a_2,\ a_1 \in A,\ a_2 \in A\}$ i $2A = \{\widetilde{a} \mid \widetilde{a} = 2a,\ a \in A\}$. Ako je $a_1 = a_2$, sledi $\exists x \in A + A$, tako da je $x = 2a$, $\forall a \in A$, pa je $A + A \supset 2A$. $\square$

PRIMER 6. *Neka je* $A = \{1, 4\}$, *odatle sledi da je* $A + A = \{2, 5, 8\}$, *a* $2A = \{2, 8\}$.

Često se pojavljuje specijalan slučaj kada je B singlton, na primer, $\{x\}$. Tada je $A + x$ ili $x + A$ skup definisan na sledeći način:

$$\{x + a \mid a \in A\}.$$

Ovo se zove translacija skupa A za vektor x.

Na aditivnom prostoru se može definisati i aditivna funkcija, koja se koristi za decentralizaciju ekonomskog odlučivanja, o kojoj će biti govora kasnije.

Definicija 1.4.1. *(Aditivna funkcija)*

Funkcija L, definisana na aditivnom prostoru, je aditivna funkcija ako, za svako a, b u prostoru važi: $L(a + b) = L(a) + L(b)$.

Koristeći aditivnu funkciju dokazaćemo dve Leme, koje se koriste u teoriji efikasnosti konkurentnih tržišta. Njih ćemo koristiti u dokazima teorema u 4. glavi.

Lema 1.4.1. *Ako je $L(s)$ aditivna funkcija definisana na aditivnom prostoru S, ako su A i B podskupovi od S i ako $a \in A$ i $b \in B$, gde je $L(a) \geq L(x)$, $\forall x \in A$ i $L(b) \geq L(y)$, $\forall y \in B$, onda važi:*

$$L(a + b) \geq L(z), \ \forall z \in (A + B).$$

Dokaz

Ako $z \in (A + B)$, tada $z = x + y$, za neko $x \in A$ i $y \in B$. Znamo:

$$L(a) \geq L(x)$$

i

$$L(b) \geq L(y),$$

pa je $L(a + b) = L(a) + L(b) \geq L(x) + L(y) = L(x + y) = L(z)$, zbog aditivnosti funkcije L. □

Lema 1.4.2. *Ako je* $L(c) \geq L(z),\ \ \forall z \in (A + B)$, *onda je* $c = a + b$, *gde su* $a \in A$ *i* $b \in B$. *Onda važi:*

$$L(a) \geq L(x),\ \ \forall x \in A$$

i

$$L(b) \geq L(y),\ \ \forall y \in B.$$

Dokaz

Pretpostavimo suprotno. Ako je $L(x) > L(a)$, za neko $x \in A$, tada je $L(x + b) > L(a + b)$, zbog aditivnosti funkcije L. Kako je $c = a + b$ i $x + b \in (A + B)$, onda je to u kontradikciji sa pretpostavkom. Slično je i za slučaj kad je $L(y) > L(b)$, za neko $y \in B$. Odavde je $L(y + a) > L(a + b)$. Ako je $c = a + b$ i $(a + y) \in (A + B)$, onda dolazimo do kontradikcije, da je $L(z) > L(c)$, a iz $(a + y) \in (A + B)$, važi: $L(z) < L(c)$. □

Da bismo definisali konveksan skup, treba nam vektorski prostor na skupu realnih brojeva.

Za podskup C skupa V se kaže da je konveksan, ako za svako t, gde je $0 \leq t \leq 1$ važi:

$$(1 - t)C + tC \subseteq C.$$

Drugim rečima, za svako $x, y \in C$ i za svako $0 \leq t \leq 1$ je:

$$(1 - t)x + ty \in C.$$

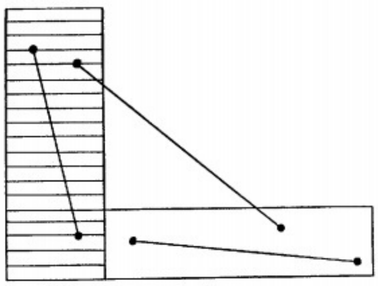
Primeri konveksnih skupova:

- Svaki potprostor je konveksan skup.

- Translacija potprostora nenula elementom nije potprostor, ali jeste konveksan skup.
- Presek dva konveksna skupa je konveksan skup.
- Suma dva konveksna skupa je konveksna, jer ako definišemo $c_1 = a_1 + b_1$ i $c_2 = a_2 + b_2$, onda važi:

$$\begin{aligned} \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 &= [\lambda a_1 + \lambda b_1 + (1-\lambda)a_2 + (1-\lambda)b_2] \\ &= [\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2] + [\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2]. \end{aligned}$$

Unija dva konveksna skupa ne mora biti konveksna. To grafički predstavljamo na sledeći način:



Slika 1.1

Konveksni skupovi i funkcionele su usko povezane u smislu da konveksne skupove možemo povezati sa funkcionelama i obrnuto. Na primer, ako je ϕ konveksna funkcionela i α realan broj, tada je skup:

$$\{x \in V : \phi(x) \leq \alpha\}$$

konveksan.

Ako je ϕ linearna funkcionela, tada je svaki od sledećih skupova konveksan:

- $\{x \in V : \phi(x) \leq \alpha\}$
- $\{x \in V : \phi(x) \geq \alpha\}$
- $\{x \in V : \phi(x) = \alpha\}$

Prisetimo se da je potprostor pravi ako je različit od celog prostora V.

Hiperprostor je maksimalan pravi potprostor, tj. pravi potprostor koji nije pravi podskup bilo kog drugog pravog potprostora.

Ako je V konačne dimenzije, recimo n, tada je svaki potprostor dimenzije $(n-1)$ hiperprostor. U $\mathbb{R}^2$, svaka prava linija koja prolazi kroz koordinatni početak je hiperprostor. Takodje, hiperprostori u $\mathbb{R}^3$ su ravni koje prolaze kroz koordinatni početak. Lako se dokazuje da ako je ϕ nenula linearna funkcionela na V, tada je nulti prostor ili jezgro funkcionele ϕ definisano sa:

$$N(\phi) := \{x \in V : \phi(x) = 0\}$$

hiperprostor.

Hiperravan je translacija hiperprostora. Ako je H hiperravan, tada postoji nenula funkcionela ϕ i vektor $a \in V$ takav da:

$$H = a + N(\phi).$$

Sada pretpostavimo da je $\phi(a) = \alpha$. Neka je $h \in H$, tada je $h = a + y$ za neko $y \in N(\phi)$. Kada primenimo funkcionelu ϕ na tu jednakost, dobijamo:

$$\phi(h) = \phi(a) + \phi(y) = \alpha.$$

Pokažimo da se svakoj hiperravni H može pridružiti par (ϕ, α), gde je ϕ nenula linearna funkcionela i α je realan broj takav da je:

$$H = \{x \in V : \phi(x) = \alpha\}.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $x \in V$ i takav je da važi $\phi(x) = \alpha$. Neka je $y = x - a$. Tada je $\phi(y) = 0$, to jest, $y \in N(\phi)$ i važi:

$$x = a + y \in a + N(\phi) = H.$$

Na primer, razmotrimo ravan datu jednačinom:

$$2x_1 - x_2 + 7x_3 - 5 = 0 \quad \text{u} \quad \mathbb{R}^3.$$

Jednačina predstavlja hiper-ravan, a pridruženi par je $(\phi, 5)$, gde je ϕ funkcionela data sa:

$$\phi(x) = 2x_1 - x_2 + 7x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Svaka takva hiperravan H deli celi prostor V na dva konveksna skupa:

- H_- $\quad H_- = \{x \in V : \phi(x) \leq \alpha\}$ i
- H_+ $\quad H_+ = \{x \in V : \phi(x) \geq \alpha\}$,

poznata kao poluprostori.

Kažemo da su dva neprazna podskupa A i B iz V razdvojeni pomoću hiperravni H ako A i B leže na različitim stranama H, to jest, A i B su sadržani u različitim poluprostorima formiranim pomoću H.

Predstavljamo osnovnu teoremu separacije, u slučaju da je $X = \mathbb{R}^n$. Dokazi će biti dati u glavi 3.

Teorema 1.4.1. *Neka su A i B neprazni disjunktni konveksni podskupovi realnog vektorskog prostora X. Tada se A i B mogu razdvojiti pomoću hiperravni, to znači postoji nenula linearna funkcionela ϕ i realan broj α takav da važi:*

$$\phi(x) \leq \alpha \leq \phi(y),\ \forall x \in A \ i \ \forall y \in B$$

Skupove, koji nisu konveksni, ne možemo razdvojiti pomoću hiper-ravni na isti način kao konveksne skupove.

Na primer, ako je A krug u $\mathbb{R}^2$ sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom 1, a B jednočlani skup koji se sastoji od koordinatnog početka, onda ne postoji prava linija koja može razdvojiti skupove A i B, s tim da su hiper-ravni u $\mathbb{R}^2$ prave linije.

Kao i kod teorema o proširenju, navedena je osnovna teorema 1.4.1, ali popularnije teoreme se navode u kontekstu normiranog vektorskog prostora.

Sledeće teoreme su Han-Banahove teoreme u formi separacije u normiranim vektorskim prostorima.

Teorema 1.4.2. *Neka su A i B neprazni disjunktni konveksni podskupovi realnog normiranog vektorskog prostora X. Pretpostavimo da A ima unutrašnju tačku. Tada A i B mogu biti razdvojeni pomoću zatvorene hiper-ravni, to jest, postoji nenula neprekidna linearna funkcionela ϕ i realan broj α takav da je:*

$$\phi(x) < \alpha \leq \phi(y), \quad \forall x \in A \ i \ \forall y \in B.$$

Posledica 1.4.1. *Neka su A i B neprazni disjunktni konveksni podskupovi realnog normiranog vektorskog prostora X. Pretpostavimo da je A kompaktan i B je zatvoren. Tada A i B mogu biti striktno razdvojeni pomoću zatvorene hiper-ravni, to jest, postoji nenula neprekidna linearna funkcionela ϕ i realni brojevi α i β takvi da:*

$$\phi(x) < \alpha < \beta < \phi(y), \quad \forall x \in A \ i \ \forall y \in B$$

Ove teoreme separacije imaju primenu na probleme optimizacije, odnosno klasu problema konveksnog programiranja.

Pomenućemo samo jedan interesantan rezultat, poznat kao Farkašova Lema, koja je direktna posledica teoreme separacije.

Teorema 1.4.3. *Neka je A realna matrica reda $m \times n$ i $b \in \mathbb{R}^m$. Tada tačno jedna od sledećih alternativa važi:*

- *Sistem jednačina $Ax = b$ ima nenegativno rešenje $x \in \mathbb{R}^n$. (Nenegativno znači da je $x_j \geq 0$, $\forall j = 1, ..., n$)*
- *Sistem nejednakosti $y^T A \geq 0$ i $y^T b < 0$ ima rešenje $y \in \mathbb{R}^m$.*

Lako se pokazuje da obe alternative ne mogu da važe istovremeno, jer ako bi važile, onda postoji x kao u prvoj alternativi i y kao u drugoj alternativi. Pa bi važilo:

$$0 \leq (y^T(A))x = y^T(Ax) = y^T b < 0$$

a to je kontradikcija.

Dokaz

Neka postoji konveksan skup:

$$C := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Pokazaćemo da jedna od alternativa važi. Ako $b \in C$, važi prva alternativa. Ako $b \notin C$, treba pokazati da važi druga alternativa. U tom slučaju, C i $\{b\}$ su neprazni disjunktni skupovi u $\mathbb{R}^m$ i zbog toga se mogu razdvojiti pomoću hiper-ravni H. Napominjemo da svakoj takvoj hiper-ravni H u $\mathbb{R}^m$, možemo pridružiti vektor $y \in \mathbb{R}^m$ i realan broj α takav da je:

$$H = \{u \in \mathbb{R}^m \mid y^T u = \alpha\}$$

Može se još pokazati da u posebnom slučaju α može biti i 0.

1.5 Ograničenja

U ovom poglavlju se ističu neka ograničenja Han-Banahovih teorema i metoda baziranih na ovim teoremama.

Formulacije svih Han-Banahovih teorema su tvrđenja egzistencije, to znači, tvrdi se samo postojanje nekih linearnih funkcionela.

Ipak, svi dokazi tih teorema su nekonstruktivni. Odnosno, dokazi ne govore ništa o tome kako naći linearne funkcionele čije je postojanje potvrđeno teoremom, čak i kad je vektorski prostor koji se razmatra konačne dimenzije.

PRIMER 7. *Pretpostavimo da su nam data 2 konačna skupa u* $\mathbb{R}^7$. *Jedan način uvođenja ovih skupova bi bio da se daju dve matrice gde svaka ima 7 vrsta. Neka se sa* A *i* B *označavaju konveksni omotači ova dva skupa. (Konveksni omotač skupa je najmanji konveksan skup koji sadrži dati skup).*

Posmatramo sledeći problem: Odrediti da li su A *i* B *disjunktni? U slučaju da jesu, naći hiper-ravan u* $\mathbb{R}^7$ *koja razdvaja* A *i* B.

Han-Banahova teorema je korisna da reši ovaj problem u smislu da ako su A i B disjunktni, tvrdi da postoji hiper-ravan u $\mathbb{R}^7$ koja razdvaja A i B. Ipak, Han-Banahova teorema ne pomaže u tome da se nađe razdvajajuća hiper-ravan.

Ovde smo govorili o Han-Banahovoj teoremi, kao značajnoj teoremi funkcionalne analize.

U sledećoj glavi navodimo ostale značajne teoreme funkcionalne analize, u koje osim Principa uniformne ograničenosti i teoreme o zatvorenom grafu, spadaju i Berova teorema o kategoriji i teorema o otvorenom preslikavanju.

2

Značajne teoreme funkcionalne analize

U ovoj glavi predstavljamo osnovne teoreme funkcionalne analize i njihove posledice. Kao što smo naveli ranije, tu spadaju Berova teorema o kategoriji, teorema o uniformnoj ograničenosti, teorema o otvorenom preslikavanju i teorema o zatvorenom grafu. Ovde smo koristili [1] iz spiska literature.

2.1 Berova teorema o kategoriji

Berova teorema o kategoriji pokazuje da se kompletan metrički prostor ne može napisati kao prebrojiva unija nigde gustih skupova, isto kao što se Euklidska ravan $\mathbb{R}^2$ ne može napisati kao unija prebrojivo mnogo pravih linija.

Pošto nas interesuju Banahovi prostori, teoremu ćemo dokazati u okviru kompletnih normiranih prostora, ali dokaz se izvodi bez promene na kompletnim metričkim prostorima.

Definicija 2.1.1. *(Nigde gusti skupovi)*
Neka je X Banahov prostor i neka je dat skup $E \subseteq X$.

- *E je nigde gust ako je $X \backslash \overline{E}$ gust u X.*
- *E je slab ili prve kategorije ako se može napisati kao prebrojiva unija nigde gustih skupova.*
- *E je jak ili druge kategorije ako nije slab.*

Značenje nigde gustih skupova se još može predstaviti na sledeći način.

Teorema 2.1.1. *Neka je E neprazan podskup Banahovog prostora X. Tada je E nigde gust ako i samo ako $\overline{E}$ ne sadrži neprazne otvorene podskupove skupa X.*

PRIMER 8. *Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ nije nigde gust podskup skupa $\mathbb{R}$, ali je slab u $\mathbb{R}$. Iako nije realan vektorski prostor, pa odatle ni normiran prostor, $\mathbb{Q}$ sa metrikom $d(x,y) = |x-y|$ je primer metričkog prostora, koji nije kompletan i koji je slab podskup samog sebe.*

Teorema 2.1.2. *(Berova teorema o kategoriji)*

Svaki Banahov prostor X je jak podskup samog sebe. Prema tome, ako je:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

gde je svako E_n zatvoren podskup od X, tada bar jedno E_n sadrži neprazan otvoren podskup.

Dokaz

Pretpostavimo da $X = \bigcup E_n$, gde je svako E_n nigde gust skup. Tada je po definiciji $U_n = X \backslash \overline{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$, gust i otvoren, jer je $\overline{E}_n$ zatvoren.

Izaberemo $x_1 \in U_1$ i neka je $r_1 > 0$ takvo da je $B_1 = B_{r_1}(x_1) \subseteq U_1$, gde je $B_{r_1}(x_1)$ otvorena lopta poluprečnika r_1 sa centrom u x_1. Pošto je U_2 gust skup, tada postoji tačka $x_2 \in U_2 \cap B_1$.

Kako su U_2 i B_1 oba otvoreni, postoji neko $r_2 > 0$ tako da je $B_2 = B_{r_2}(x_2) \subseteq U_2 \cap B_1$. Bez umanjenja opštosti, možemo uzeti r_2 dovoljno malo tako da imamo oba $r_2 < \frac{r_1}{2}$ i $\overline{B_2} \subseteq B_1$. Nastavljajući ovako, dobijamo tačke $x_n \in U_n$ i otvorene lopte $B_n = B_{r_n}(x_n) \subseteq U_n$ takve da:

$$r_n < \tfrac{r_{n-1}}{2} \quad \text{i} \quad \overline{B_n} \subseteq B_{n-1}.$$

Posebno, ako $r_n \to 0$, lopte B_n su ugnježđene.

Fiksiramo $\varepsilon > 0$ i neka je N dovoljno veliko tako da je $r_N < \frac{\varepsilon}{2}$. Ako je $m, n > N$, onda imamo $x_m, x_n \in B_N$. Pa važi:

$$\|x_m - x_n\| < 2r_N < \varepsilon.$$

Tada je $\{x_n\}_{n \in N}$ Košijev niz i zbog toga postoji neko $x \in X$ tako da $x_n \to x$.

Sada fiksiramo bilo koje $N > 0$. Pošto su B_n ugnježđeni, imamo $x_n \in B_{N+1}$, $\forall n > N$. Kako $x_n \to x$, ovo implicira da $x \in \overline{B_{N+1}} \subseteq B_N$. Ovo je tačno za svako N, pa:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \backslash \overline{E}_n).$$

Ali, onda $x \notin \bigcup E_n$, pa je to kontradikcija. $\square$

Ovo tvrđenje ćemo koristiti u narednom poglavlju.

2.2 Princip uniformne ograničenosti

Princip uniformne ograničenosti govori o tome da familija ograničenih linearnih operatora na Banahovom prostoru, koja je uniformno ograničena za svaku pojedinačnu tačku, mora biti uniformno ograničena u operatorskoj normi.

Teorema 2.2.1. *(Princip uniformne ograničenosti)*
Neka je X Banahov prostor i Y normiran vektorski prostor. Ako je $\{A_i\}_{i\in I}$ bilo koja kolekcija operatora u $\mathcal{B}(X,Y)$, gde je

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{L : X \to Y | L \textit{ je ograničen linearan operator}\}$$

tako da:

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| < \infty, \ \forall x \in X$$

tada je i:

$$\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty.$$

Dokaz

Neka je:

$$E_n = \{x \in X : \sup_{i\in I} \|A_i x\| \leq n\}.$$

Na osnovu hipoteze da je X Banahov prostor, važi $X = \bigcup E_n$. Pošto je svaki operator $A_i,\ i \in I$ neprekidan, sledi da je skup E_n zatvoren. Na osnovu Berove teoreme o kategoriji sledi da bar jedno E_n mora sadržati otvorenu loptu, recimo $B_r(x_0) \subseteq E_n$.

Neka je dato bilo koje $x \in X \setminus \{0\}$. Neka je:

$$y = x_0 + sx \quad \text{i} \quad s = \tfrac{r}{2\|x\|}. \quad \text{Tada važi } y \in B_r(x_0) \subseteq E_n.$$

Prema tome:

$$\|A_i x\| = \|A_i(\tfrac{y-x_0}{s})\| \leq \tfrac{1}{s}(\|A_i y\| + \|A_i x_0\|) \leq \tfrac{2\|x\|}{r} 2n = \tfrac{4n}{r}\|x\|.$$

Sledi, $\|A_i\| \le \frac{4n}{r}$, a to je konstanta nezavisna od i. $\square$

Često se koristi specijalan slučaj Principa uniformne ograničenosti, poznat pod nazivom Banah-Štajnhausova teorema.

Teorema 2.2.2. *(Banah-Štajnhaus)*
Neka su X i Y Banahovi prostori. Ako $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$, $\forall n \in N$ i ako postoji

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

za svako $x \in X$, tada $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ i važi:

$$\|A\| \le \sup_n \|A_n\| < \infty.$$

NAPOMENA: Iz hipoteze u Banah-Štajnhausovoj teoremi ne sledi da $A_n \to A$ u operatorskoj normi.

Kao primena Banah-Štajnhausove teoreme dokazuje se sledeća činjenica (koja se, između ostalog, koristi da se pokaže da je dualni prostor l^p izomorfan sa $l^{p'}$).

Teorema 2.2.3. *Fiksiramo $1 \le p \le \infty$ i bilo koji niz skalara $y = \{y_k\}$. Tada $\sum x_k y_k$ konvergira za sve $x \in l^p$ ako i samo ako $y \in l^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dalje, preslikavanje $T_y : l^p \to l^{p'}$, definisano sa $T_y x = (x_k y_k)$, je ograničeno, linearno i važi:*

$$\sum_k |x_k y_k| = \|T_y x\|_{l^1} \le \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^{p'}},\ x \in l^p.$$

Dokaz

Dokazujemo slučaj kad je $1 < p < \infty$. Pretpostavimo da $\sum x_k y_k$ konvergira za sve $x \in l^p$. Definišemo funkcionele $T_N, T : l^p \to \mathbb{F}$ pomoću:

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

i

$$T_N x = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k.$$

Vidimo da je T_N linearan, pa za $x \in l^p$, na osnovu Helderove nejednakosti, imamo:

$$|T_N x| \le \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le C_N \|x\|_{l^p}$$

gde je $C_N = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$ konačna konstanta nezavisna od x (iako nije nezavisna od N). Zbog toga $T_N \in \mathcal{B}(l^p, \mathbb{F}) = (l^p)^*$, za svako N.

Na osnovu pretpostavke o konvergenciji, važi: $T_N x \to Tx$, kada $N \to \infty$, $\forall x \in l^p$, onda je na osnovu Banah-Štajnhausove teoreme $T \in \mathcal{B}(l^p, \mathbb{F}) = (l^p)^*$ i važi: $\|T\| \leq C = \sup \|T_N\| < \infty$.

Neka je:

$$x_N = (\alpha_1 |y_1|^{p'-1}, ..., \alpha_N |y_N|^{p'-1}, 0, 0, ...) \in l^p$$

gde je α_k skalar jediničnog modula tako da je $\alpha_k y_k = |y_k|$.

Iz definicije za T znamo:

$$|Tx_N| = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k |y_k|^{p'-1} y_k = \sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p'},$$

a iz osobine $\|T\| \leq C$ dobijamo:

$$|Tx_N| \leq C\|x_N\|_{l^p} = C\left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{(p'-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = C\left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Kombinovanjem prethodne dve jednakosti, deljenjem sa

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}$$

i označavanjem da je $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ ovo implicira da je:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p'} \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq C.$$

Kad stavimo da $N \to \infty$, vidimo da je $\|y\|_{l^{p'}} \leq C$. □

2.3 Teorema o otvorenom preslikavanju

Da bismo lakše objasnili teoremu o otvorenom preslikavanju potrebno je, pre svega, da uvedemo sledeću teoremu.

Teorema 2.3.1. *(O inverznom preslikavanju)*

Neka su X, Y normirani prostori i neka je data funkcija $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna ako i samo ako je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$.

Definicija 2.3.1. *(Otvoreno preslikavanje)*

Neka su X i Y normirani linearni prostori. Funkcija $A : X \to Y$ je otvoreno preslikavanje ako važi:

$$U \text{ je otvoren u } X \Rightarrow A(U) \text{ je otvoren u } Y.$$

Uopšteno, neprekidna funkcija ne mora biti otvoreno preslikavanje.

PRIMER 9. *$f = \cos x$ je neprekidno preslikavanje realne ose na samu sebe, ali f preslikava otvoren interval $(0, 2\pi)$ na zatvoren interval $[-1, 1]$.*

Teorema o otvorenom preslikavanju zahteva da bilo koja linearna sirjekcija jednog Banahovog prostora na drugi, mora biti otvoreno preslikavanje. Dokazaćemo sledeću teoremu da bismo lakse shvatili dokaz teoreme o otvorenom preslikavanju. Pre svega, uvodimo oznake $B_r^X(x)$ i $B_r^Y(y)$, da bismo lakše razlikovali otvorene lopte u prostoru X i otvorene lopte u prostoru Y.

Teorema 2.3.2. *Neka su X, Y Banahovi prostori i fiksiramo $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ako $\overline{A(B_1^X(0))}$ sadrži neku otvorenu loptu u Y, tada $A(B_1^X(0))$ sadrži otvorenu loptu $B_r^Y(0)$ za neko $r > 0$.*

Dokaz

Neka važi $B_s^Y(z) \subset \overline{A(B_1^X(0))}$. Neka je $r = \frac{s}{2}$. Neka je $y \in B_r^Y(0)$, odnosno $\|y\|_Y < r = \frac{s}{2}$. Tada $(2y + z) \in B_s^Y(z)$, jer je $\|2y + z - z\|_Y < s$, pa znači $2y + z \in \overline{A(B_1^X(0))}$.

Znači da postoji niz elemenata $\widetilde{y}_n \in A(B_1^X(0))$, $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\lim_{n\to\infty} \widetilde{y}_n = 2y + z$, odnosno postoji niz elemenata $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in B_1^X(0)$ takav da je $\lim_{n\to\infty} Ax_n = 2y + z$. Slično, postoji niz elemenata $\widetilde{x}_n \in B_1^X(0)$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} A\widetilde{x}_n = z.$$

Neka je $\{w_n\}$ niz u X definisan sa $w_n = \frac{x_n - \widetilde{x}_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada važi:

1. $w_n \in B_1^X(0)$

2. $\lim_{n\to\infty} Aw_n = y$. $\left(\lim_{n\to\infty} A(\frac{x_n - \widetilde{x}_n}{2}) = \frac{2y+z-z}{2} = y\right)$

Odavde sledi: Ako $y \in B_r^Y(0) \Rightarrow y \in \overline{A(B_1^X(0))}$. $\quad (*)$

Ovo nije dovoljno jer treba da se dokaže da $A(B_1^X(0))$ sadrži otvorenu loptu u Y, a ne $\overline{A(B_1^X(0))}$.

U tu svrhu posmatramo $y \in B^Y_{\frac{r}{4}}(0)$. Jasno, iz $B^Y_{\frac{r}{4}}(0) \subset \overline{A(B^X_{\frac{1}{4}}(0))}$, ovo sledi iz (*).
Dakle, za $y \in B^Y_{\frac{r}{4}}(0)$ sledi da $\exists x_1 \in X$, tako da $x_1 \in B^X_{\frac{1}{4}}(0)$ i $\|y - Ax_1\| < \frac{r}{8}$.

Sada, ponovimo "skaliranje", $B^Y_{\frac{r}{8}}(0) \subseteq \overline{A(B^X_{\frac{1}{8}}(0))}$. Dakle, $\exists x_2 \in B^X_{\frac{1}{8}}(0)$ tako da je $\|(y - Ax_1) - Ax_2\| < \frac{r}{16}$. Na ovaj način se dobija niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\|x_n\|_X < 2^{-(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\|y - A(\sum_{k=1}^n x_k)\| < \frac{r}{2^{n+2}}$. Odavde sledi $A(\sum_{k=1}^n x_k) \to y$ kada $n \to \infty$. Konačno, $\{\sum_{k=1}^n x_k\}$ je Košijev niz u X, pa postoji $x = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n x_k)$.

Iz neprekidnosti operatora A sledi $y = Ax$. Dalje,

$$\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n x_k\| = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^n x_k\| \leq \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^n \|x_k\|)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^{n+2}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n+1}})$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k}\| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2} < 1.$$

Znači, $\|x\|_X < 1 \Rightarrow y \in A(B^X_1(0))$. Prema tome, $B^Y_{\frac{r}{4}}(0) \subset A(B^X_1(0))$. $\square$

Teorema 2.3.3. *(o otvorenom preslikavanju)*

Ako su X i Y Banahovi prostori i $A : X \to Y$ je neprekidna linearna sirjekcija, onda je A otvoreno preslikavanje.

Dokaz

Kako je A sirjekcija, imamo:

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A(B^X_k(0))}.$$

Berova teorema o kategoriji implicira da bar jedan skup $\overline{A(B^X_k(0))}$ mora sadržati otvorenu loptu. Na osnovu teoreme 2.3.2, postoji neko $r > 0$ tako da važi:

$$B^Y_r(0) \subseteq A(B^X_1(0))$$

Pretpostavimo da je U otvoren skup, $U \subseteq X$ i $y \in A(U)$. Tada je $y = Ax$ za neko $x \in U$, pa je

$$B_s^X(x) \subseteq U, \quad za \quad neko \quad s > 0.$$

Skaliranjem relacije $B_r^Y(0) \subseteq A(B_1^X(0))$, dobijamo $B_t^Y(0) \subseteq A(B_s^X(0))$, za neko $t > 0$.

Prema tome,

$$B_t^Y(y) = B_t^Y(0) + Ax \subseteq A(B_s^X(0) + x) = A(B_s^X(x)) \subseteq A(U)$$

pa je $A(U)$ otvoren.

$\square$

Za dokaz teoreme o otvorenom preslikavanju, neophodno je pretpostaviti da su oba prostora X, Y kompletna.

2.4 Teorema zatvorenog grafa

Teorema zatvorenog grafa je značajna zbog toga što obezbeđuje odgovarajuća sredstva koja proveravaju da li je linearni operator na Banahovom prostoru neprekidan.

Da bismo dokazali teoremu zatvorenog grafa, prvo moramo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 2.4.1. *Pretpostavimo da je X vektorski prostor, koji je kompletan u odnosu na svaku od sledeće dve norme $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$. Ako postoji $C > 0$ tako da je $\|x\| \leq C|||x|||, \forall x \in X$, tada su $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$ ekvivalentne norme na X.*

Dokaz

Iz pretpostavke sledi da je identičko preslikavanje:

$$I : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$$

ograničena bijekcija, pa je na osnovu teoreme 2.3.1 o inverznom preslikavanju, preslikavanje $I^{-1} : (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ ograničena bijekcija. Tada postoji neko $c > 0$ tako da važi:

$$|||x||| = |||I^{-1}(x)||| \leq c\|x\|.$$

Odavde sledi da su ove dve norme ekvivalentne na X. $\square$

Teorema 2.4.2. *(Teorema zatvorenog grafa)*

Neka su X i Y Banahovi prostori. Ako je $T : X \to Y$ linearno preslikavanje, tada su sledeće tvrdnje ekvivalentne:

1. *T je neprekidno preslikavanje.*

2. *Ako $x_n \to x$ u X i $Tx_n \to y$ u Y, onda je $y = Tx$.*

Dokaz

Slučaj kad iz 1. sledi 2. važi iz definicije neprekidnosti.

Pretpostavimo da važi 2. Dokazujemo da je preslikavanje T neprekidno. Definišemo:

$$|||x||| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \; x \in X.$$

Sada obraćamo pažnju na tvrdnju da je $|||\cdot|||$ norma na X i da je prostor X kompletan u odnosu na ovu normu.

Kako je $\|x\|_X \leq |||x|||$, za $x \in X$ i pošto X je kompletan u odnosu na obe norme, na osnovu prethodne teoreme sledi da postoji konstanta $C > 0$ takva da $|||x||| \leq C\|x\|_X$ za $x \in X$.

Na osnovu toga važi:

$$\|Tx\|_Y \leq |||x||| \leq C\|x\|_X$$

pa je T ograničen.

$\square$

Naziv teorema zatvorenog grafa potiče iz činjenice da pretpostavka 2. može da se formuliše na sledeći način:
Graf od T dat sa

$$graf(T) = \{(f, Tf) : f \in X\}$$

je zatvoren podskup proizvoda prostora $X \times Y$.

Kao i u slučaju teoreme o otvorenom preslikavanju i za teoremu o zatvorenom grafu je potrebna pretpostavka o kompletnosti prostora X i Y.

3

Analiza aktivnosti

Ovde posmatramo Han-Banahove teoreme u obliku separacije i njihove posledice. Predstavićemo i njihovu primenu u analizi aktivnosti. Kao najvažnija primena teorema separacije uzima se Minkovski-Farkaš teorema, koju ćemo dokazati. Definisaćemo proizvodni skup i osnovne osobine elemenata tog skupa. Bitan pojam, koji se javlja u analizi aktivnosti je tačka efikasnosti, koja predstavlja graničnu tačku, odnosno ograničenja resursa, pa ćemo je definisati u ovom poglavlju. Koristili smo [5] i [2] iz literature.

3.1 Teoreme separacije

Jedna od najznačajnijih teorema u optimizaciji je teorema separacije. U ovom poglavlju se bavimo suštinom Han-Banahove teoreme u obliku separacije, u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Podsetimo se pojma (afine) hiperravni koji je uveden u poglavlju 1.4.

Definicija 3.1.1. *Neka $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Skup $H = H(p, \alpha)$ definisan sa:*

$$H \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x \rangle = p \cdot x = \alpha\}$$

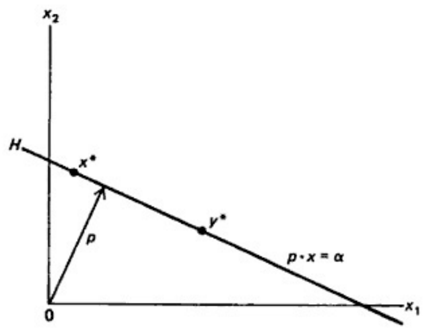
se zove hiper-ravan u $\mathbb{R}^n$ sa vektorom normale p.

Očigledno, H je zatvoren i konveksan skup. Ako je $\alpha = 0$, H je potprostor dimenzije $n = 1$. Za $\alpha \neq 0$, u literaturi se koristi naziv afina hiperravan. Primetimo da je $H(p, \alpha) = H(\frac{p}{\|p\|}, \frac{\alpha}{\|p\|})$, pa se može pretpostaviti da je $\|p\| = 1$.

NAPOMENA: Ako je $n = 3$, H je ravan, a ako je $n = 2$, H je tada prava linija. Pokažimo to:

pretpostavimo da je $p_2 \neq 0$ i $n = 2$. Tada je $p_1x_1 + p_2x_2 = \alpha$ jednačina prave, odnosno $x_2 = \frac{\alpha}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$. Slično se pokazuje da $H(p, \alpha)$ određuje jednačinu ravni za $n = 3$.

NAPOMENA: Neka je data hiperravan $H(p, \alpha)$ i neka $x^*, y^* \in H(p, \alpha)$. Tada je $p \cdot (x^* - y^*) = 0$. To znači da je vektor p ortogonalan na pravu koja prolazi kroz tačke x^* i y^*. Kako su x^* i y^* proizvoljno birani, sledi da je p ortogonalan na H, pa se na osnovu toga naziva vektor normale na $H(p, \alpha)$.
Za slučaj $n = 2$ to možemo ilustrovati:



Slika 3.1

Definicija 3.1.2. *Data su dva neprazna skupa X i Y u $\mathbb{R}^n$ i hiper-ravan $H(p, \alpha)$. Kažemo da H razdvaja skupove X i Y ako važi:*

$$\langle p, x\rangle \leq \alpha \leq \langle p, y\rangle, \ \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Ako važi:

$$\langle p, x\rangle < \alpha < \langle p, y\rangle, \ \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y,$$

tada kažemo da su X i Y strogo razdvojeni sa H.

Ako još važi:

$$\sup_{x \in X} p \cdot x \leq \alpha \leq \inf_{y \in Y} p \cdot y,$$

onda su skupovi X i Y jako razdvojeni sa H.

Kako smo već naveli u prvoj glavi, hiper-ravan H u $\mathbb{R}^n$ vrši podelu skupa $\mathbb{R}^n$ na dva poluprostora. Odnosno, $H(p, \alpha)$ odredjuje sledeća dva zatvorena poluprostora:

$$H^+ = \{x \mid p \cdot x \geq \alpha, \ x \in \mathbb{R}^n\} \quad i \quad H^- = \{x \mid p \cdot x \leq \alpha, \ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Očigledno, poluprostori H^+ i H^- su konveksni skupovi, a ako je $\alpha = 0$, tada su potprostori u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.1.3. *Dat je neprazan skup X u $\mathbb{R}^n$ i hiper-ravan $H(p, \alpha)$. Ako je $X \subset H^+$ ili $X \subset H^-$, onda se H zove granična hiperravan skupa X. Ako, pri tome, H ima zajedničku tačku sa rubom skupa X, to jest:*

$$\inf_{x \in X} p \cdot x = \alpha,$$

tada se H zove potporna hiperravan za X.

Presek dve ili više hiperravni se zove linearna mnogostrukost.
U nastavku predstavljamo teoremu separacije u drugačijem obliku.

Teorema 3.1.1. *Neka je $\overline{X}$ neprazan zatvoren konveksan skup u $\mathbb{R}^n$. Neka $x_0 \notin \overline{X}$. Tada važi:*

1. *Postoji tačka $a \in \overline{X}$ takva da je*

   $$d(x_0, a) \leq d(x_0, x), \ \forall x \in \overline{X}.$$

   S tim da je $d(x_0, a) > 0$.

2. *Postoji $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da:*

   $$p \cdot x_0 < \alpha \leq p \cdot x, \ \forall x \in \overline{X}$$

Drugim rečima, skupovi $\overline{X}$ i $\{x_0\}$ su jako razdvojeni sa hiperravni

$$H \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot x = \alpha\}.$$

Dokaz

1. Neka je $\overline{B(x_0)}$ zatvorena lopta sa centrom u x_0 i neka seče $\overline{X}$ (to jest, $\overline{B(x_0)} \cap \overline{X} \neq \emptyset$). Pišemo $A \equiv \overline{B(x_0)} \cap \overline{X}$.

   Skup A je neprazan, zatvoren i ograničen (zbog toga i kompaktan). Pošto je A kompaktan i funkcija rastojanja neprekidna, rastojanje $d(x_0, x)$ dostiže minimum u A kao rezultat Vajerštrasove teoreme.

   To jest, postoji $a \in A$ tako da $d(x_0, a) \leq d(x_0, x), \forall x \in A$. Zbog toga važi $d(x_0, a) \leq d(x_0, x), \forall x \in \overline{X}$.

   Kako $x_0 \notin \overline{X}$ i $a \in \overline{X}$, sledi $d(x_0, a) > 0$.

2. Dokažimo najpre da je $p \cdot x_0 < \alpha$. Neka je $p \equiv a - x_0$ i $\alpha \equiv pa$. Tada je:

$$\begin{aligned} px_0 = (a - x_0)x_0 &= (a - x_0)(x_0 - a + a) \\ &= (a - x_0)(x_0 - a) + (a - x_0)a \\ &= -(a - x_0)(a - x_0) + (a - x_0)a \\ &= -\|p\|^2 + pa = -\|p\|^2 + \alpha < \alpha \end{aligned}$$

gde je $0 < \|p\| < \infty$.

Sada dokazujemo da je $p \cdot x \geq \alpha,\ \forall x \in \overline{X}$. Neka je $x \in \overline{X}$ proizvoljna tačka. Pošto je $\overline{X}$ konveksan skup i $a \in \overline{X},\ x(t) \in \overline{X}$, gde je

$$x(t) \equiv (1 - t)a + tx \quad za \quad 0 < t \leq 1,$$

tada važi $d(x_0, a) \leq d(x_0, x(t))$, na osnovu 1.

Drugim rečima,

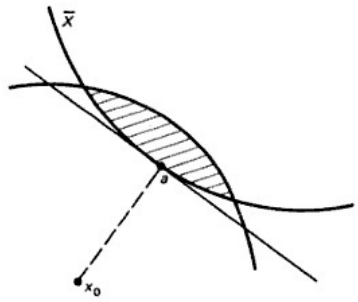
$$\begin{aligned} \|a - x_0\|^2 \leq \|x(t) - x_0\|^2 &= \|(1 - t)a + tx - x_0\|^2 \\ &= \|(1 - t)a + tx - x_0 + (1 - t)x_0 - (1 - t)x_0\|^2 \\ &= \|(1 - t)(a - x_0) + t(x - x_0)\|^2 \\ = (1 - t)^2\|a - x_0\|^2 + 2t(1 - t)(a - x_0)(x - x_0) &+ t^2\|x - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Odatle imamo:
$0 \leq t(t - 2)\|a - x_0\|^2 + 2t(1 - t)(a - x_0)(x - x_0) + t^2\|x - x_0\|^2.$

Delimo obe strane sa $t, (t > 0)$ i dobijamo:
$0 \leq (t - 2)\|a - x_0\|^2 + 2(1 - t)(a - x_0)(x - x_0) + t\|x - x_0\|^2.$

Primenimo limes kada $t \to 0$ i onda je:
$0 \leq -2\|a - x_0\|^2 + 2(a - x_0)(x - x_0)$ ili
$(a - x_0)(a - x_0) - (a - x_0)(x - x_0) \leq 0$
$(a - x_0)a - (a - x_0)x_0 - (a - x_0)x + (a - x_0)x_0 \leq 0$
$(a - x_0)a - (a - x_0)x \leq 0$, kako je
$p \equiv (a - x_0)$, onda je $pa \leq px$, odnosno $px \geq pa = \alpha,\ \forall x \in \overline{X}$.

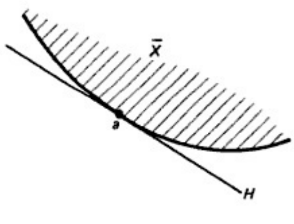
□

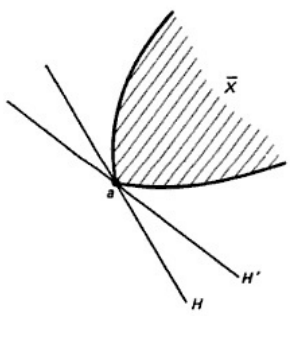


Slika 3.2

NAPOMENA 1: Konveksnost skupa $\overline{X}$ je korištena samo u drugom delu dokaza teoreme 3.1.1.
NAPOMENA 2: Napomenimo da je hiperravan $H(p, \alpha)$ potporna hiperravan za skup $\overline{X}$. Ova hiperravan razdvaja skup $\overline{X}$ od date tačke x_0, koja takođe predstavlja jedan konveksan skup.
Neka je $\overline{X}$ neprazan zatvoren konveksan skup i tačka a, koja pripada rubu skupa $\overline{X}$. Tvrdimo da postoji bar jedna potporna hiperravan za skup $\overline{X}$ koja prolazi kroz tačku a.
Ako je (hiper-) kriva, koja predstavlja granicu za $\overline{X}$, glatka u datoj rubnoj tački a, tada tangentna (hiper-) ravan formira tu potpornu hiperravan. U tom slučaju postoji samo jedna potporna hiperravan koja prolazi kroz tačku a.

Ipak, ako (hiper-) kriva nije glatka, onda može postojati mnogo potpornih hiperravni koje prolaze kroz datu tačku.





Slika 3.3

Ono što je značajno za teoremu separacije jeste da se ne zahteva da rubna hiper-kriva bude glatka u tački a.

Posledica 3.1.1. *Neka je X konveksan skup. Njegovo zatvaranje $\overline{X}$ je presek I, zatvorenih poluprostora koji sadrže X.*

Zatvoren poluprostor koji sadrži X, takođe sadrži $\overline{X}$, tako da je $\overline{X} \subset I$. Kako je $\overline{X}$ konveksan, onda, na osnovu teoreme 3.1.1. važi $x^0 \notin I$, ako $x^0 \notin \overline{X}$.

Definicija 3.1.4. *Neka su $x_0, ..., x_n$, $n+1$ tačka koje ne leže ni u jednoj hiper-ravni. Skup svih njihovih konveksnih kombinacija se zove $n-$simpleks, određen ovim tačkama.*

Lema 3.1.1. *Neka je X konveksan skup. Njegova unutrašnjost je jednaka unutrašnjosti njegovog zatvaranja $\overline{X}$.*

Posledica 3.1.2. *Neka je $\overline{X}$ neprazan zatvoren konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ i $0 \notin \overline{X}$. Tada postoji $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ i $\alpha > 0$ tako da:*

$$p \cdot x \geq \alpha, \quad \forall x \in \overline{X}.$$

Ova nejednakost može da bude i stroga. Primetimo da tada postoji $\beta > 0$, tako da je $p \cdot x > \beta$, $\forall x \in \overline{X}$.

Dokaz

Ako u teoremi 3.1.1. izaberemo $x_0 = 0$, onda je $p \cdot x \geq \alpha$, $\forall x \in \overline{X}$, pri čemu definišemo $p \equiv a - x_0 = a \neq 0$ i $\alpha = p \cdot a = a^2 > 0$, pa je posledica dokazana.

□

Posledica je ekvivalentna sa teoremom 3.1.1, ali izbor početne tačke može biti proizvoljan. Na osnovu toga, nejednakost u posledici može biti stroga, ako izaberemo tačku strogo izmedju tačke a i početne tačke.

U teoremi 3.1.1 se pretpostavlja da je $\overline{X}$ zatvoren skup, a ako oslabimo tu pretpostavku, dobijamo novu teoremu:

Teorema 3.1.2. *Neka je X neprazan konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ (ne nužno zatvoren). Neka je x_0 tačka u $\mathbb{R}^n$ koja nije u X. Tada postoji $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ tako da je:*

$$p \cdot x \geq p \cdot x_0, \ \forall x \in X.$$

Dokaz

Na osnovu pretpostavke teoreme da $x_0 \notin X$, sledi da x_0 može da pripada $\overline{X}$ ili da $x_0 \notin \overline{X}$. Zbog toga ispitujemo ta dva slučaja posebno.

Pretpostavimo najpre da $x_0 \notin \overline{X}$, gde je $\overline{X}$ zatvaranje za X. Tada, na osnovu teoreme 3.1.1, postoji $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da važi:
$px \geq \alpha, \forall x \in \overline{X}$ i $px_0 < \alpha$. Zbog toga je $px > px_0$, $\forall x \in \overline{X}$ i jače važi: $px > px_0, \forall x \in X$.

Pretpostavimo sada da je $x_0 \in \overline{X}$. Pošto $x_0 \notin X$ (to jest $x_0 \in X^C$), po pretpostavci, x_0 je rubna tačka za $\overline{X}$. Tada za bilo koju otvorenu loptu koja sadrži x_0 postoji tačka koja nije u $\overline{X}$, to jest postoji niz $\{x_n\}$ takav da $x_n \notin \overline{X}$ i $\lim_{n\to\infty} x_n \to x_0$. Pošto $x_n \notin \overline{X}$, a $\overline{X}$ je neprazan, zatvoren i konveksan, onda postoji, na osnovu teoreme 3.1.1, niz vektora $\{p_n\} \in \mathbb{R}^n$, $p_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ tako da:

$$p_n \cdot x > p_n \cdot x_n, \;\; \forall x \in \overline{X}.$$

Bez gubitka opštosti, možemo izabrati p_n takvo da je $\|p_n\| = 1$. Onda niz $\{p_n\}$ pripada jediničnoj sferi u $\mathbb{R}^n$. Za jediničnu sferu znamo da je kompaktan skup, pa postoji konvergentan podniz na $\{p_n\}$, odnosno postoji podniz $\{p_{n_k}\}$ takav da $\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p$ gde je $p \in \mathbb{R}^n$, $\|p\| = 1$, a niz $\{p_{n_k}\}$ odgovara nizu $\{x_{n_k}\}$. Kako je $p_{n_k} \cdot x > p_{n_k} \cdot x_{n_k}$, kada $k \to \infty$ dobija se:

$$p \cdot x \geq p \cdot x_0, \;\; \forall x \in \overline{X},$$

odatle je

$$p \cdot x \geq p \cdot x_0, \;\; \forall x \in X.$$

□

Teorema 3.1.3. *(Teorema Minkovskog)*

Neka su X i Y neprazni konveksni skupovi u $\mathbb{R}^n$ (ne nužno zatvoreni) takvi da je $X \cap Y = \emptyset$. Tada postoji $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je:

$$p \cdot y \leq \alpha \leq p \cdot x, \;\; \forall x \in X, \; \forall y \in Y.$$

Dokaz

Posmatramo $S \equiv X + (-Y) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid s = x + (-y), \; x \in X, \; y \in Y\}$. Kako su X i Y konveksni, S je takodje konveksan. Takođe, iz $X \cap Y = \emptyset$ sledi da $0 \notin S$.

Na osnovu teoreme 3.1.2, postoji $p \neq 0$ takvo da važi:

$$p \cdot s \geq p \cdot 0 = 0, \;\; \forall s \in S.$$

Kako je $s = x - y,\ x \in X,\ y \in Y$, sledi da je $px \geq py$, $\forall x \in X$ i $y \in Y$. Prema tome:

$$\inf_{x \in X} p \cdot x \geq \sup_{y \in Y} p \cdot y.$$

Odavde, za $\alpha = \sup_{y \in Y} p \cdot y$ sledi tvrđenje.

□

NAPOMENA: Ako uz pretpostavke teoreme 3.1.3 dodatno važi da je X zatvoren i Y kompaktan, tada možemo pojačati zaključak prethodne teoreme i to strogim razdvajanjem:

$$p \cdot y < \alpha < p \cdot x, \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y.$$

Uz sve navedene pretpostavke, osim strogim razdvajanjem, zaključak teoreme 3.1.3 možemo proširiti i jakim razdvajanjem, pa važi:

$$\sup_{y \in Y} p \cdot y \leq \alpha \leq \inf_{x \in X} p \cdot x.$$

NAPOMENA: Teorema 3.1.2. je specijalan slučaj teoreme Minkovskog, gde je jedan od dva skupa, skup koji sadrži samo jednu tačku, a to je konveksan skup.

Prethodna napomena generalizuje teoremu 3.1.1, jer je skup koji se sastoji od samo jedne tačke kompaktan.

Da bismo uveli sledeću lemu, najpre uvodimo pojam konusa.

Definicija 3.1.5. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konus sa vrhom u nuli ako $\forall x \in K$ i $\forall \alpha > 0$ važi $\alpha \cdot x \in K$.*

Sada predstavljamo najvažniju primenu teoreme separacije, a to je Minkovski-Farkaš Lema. Da bismo je u potpunosti dokazali, koristimo teoremu 3.1.1. i sledeću pomoćnu lemu.

Lema 3.1.2. *Neka je K konus u $\mathbb{R}^n$ sa vrhom u nuli i neka je $p \in \mathbb{R}^n$. Ako je skup $\{p \cdot x \mid x \in K\}$ ograničen sa donje strane, onda je $p \cdot x \geq 0,\ \ \forall x \in K$.*

Dokaz

Po pretpostavci, postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da $px \geq \alpha,\ \ \forall x \in K$. Kako je K konus, onda $x \in K$ implicira da je $\theta \cdot x \in K, \forall \theta \geq 0$.

Zbog toga je i $p \cdot (\theta \cdot x) \geq \alpha$ ili $p \cdot x \geq \frac{\alpha}{\theta},\ \ \forall x \in K$ i $\theta > 0$. Puštajući limes kada $\theta \to \infty$, dobijamo $p \cdot x \geq 0$. □

Da bismo dokazali sledeću teoremu, definišemo još konveksan konus i konveksan poliedarski konus.
NAPOMENA: Konus K sa vrhom u nuli je konveksan ako i samo ako $\forall x, y \in K$ i $\forall \alpha, \beta > 0$ važi $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in K$.
NAPOMENA: Neka je dat skup $S \subset \mathbb{R}^n$. Presek svih konveksnih konusa koji sadrže S se zove konveksan konus generisan skupom S i to označavamo sa $K(S)$. Ako se S sastoji od konačnog broja tačaka onda je $K(S)$ konveksan poliedarski konus. Ako $K(S)$ sadrži nulu, onda je on zatvoren skup.

Teorema 3.1.4. *(Minkovski-Farkaš)*
Neka su $a^1, a^2, ..., a^m$ i $b \neq 0$ tačke u $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je $bx \geq 0$, $\forall x$ za koje važi $a^i x \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$. Tada postoje nenegativni koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ od kojih je barem jedan različit od nule, tako da je:

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i.$$

Dokaz

Neka je K konveksni poliedarski konus odredjen sa $a^1, a^2, ..., a^m$, tada je K zatvoren skup. Hoćemo da pokažemo da $b \in K$.

Pretpostavimo da $b \notin K$. Tada je K neprazan, zatvoren, konveksan skup, disjunktan sa $\{b\}$, pa na osnovu teoreme 3.1.1. postoji $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je:

$$p \cdot b < \alpha \leq p \cdot x \quad \forall x \in K$$

Ovo znači da je $p \cdot x$ ograničen sa donje strane za sve $x \in K$. A iz Leme 3.1.2 važi da je $px \geq 0, \ \forall x \in K$.
Ako $0 \in K$, onda iz $p \cdot 0 \geq \alpha$ sledi $\alpha \leq 0$, pa je $b < 0$.

Pošto je $a^i \in K, \ \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$, onda je $pa^i \geq 0, \ \ \forall i$. Odavde je $\alpha \leq 0$, pa je $bp < 0$. To je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme. Stoga $b \in K$. Drugim rečima, postoje nenegativni koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, takvi da važi:

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i.$$

Kada bi svi koeficijenti $\lambda_i, \ i = 1, 2, ..., m$ bili jednaki nuli, onda bi b bio nula vektor, što je u suprotnosti sa uslovom teoreme. $\square$

NAPOMENA: Ako je $b = 0$, tada je moguće da je $\lambda_i = 0, \forall i = 1, 2, ..., m$.

Suprotno takođe važi. Ako su $a^1, a^2, ..., a^m$ i $b \neq 0$ tačke u $\mathbb{R}^n$ i ako postoje koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, svi veći ili jednaki 0, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da važi:

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i,$$

onda je $bx \geq 0$ za svako x takvo da je $a^i x \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m$.

Ovo dokazujemo tako što pretpostavimo da su svi koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ veći ili jednaki 0 i takvi da je:

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i.$$

tada:

$$bx = (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i)x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a^i x) \geq 0.$$

A to je i trebalo dokazati.

Minkovski-Farkaš lema se može navesti u još jednom obliku:

Teorema 3.1.5. *Date su tačke a^i, $i = 1, 2, ..., m$ i $b \neq 0$ u $\mathbb{R}^n$. Tačno jedna od sledeće dve alternative važi:*

1. *Postoje nenegativni koeficijenti λ_i, $i = 1, 2, ..., m$, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je:*

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i.$$

ili

2. *Postoji $x \in \mathbb{R}^n$, tako da je:*

$$bx < 0 \quad i \quad a^i x \geq 0, i = 1, 2, ..., m.$$

Ako ne važi *2*, onda važi *1*.

Teorema 3.1.5 se može uporediti sa teoremom 1.4.3. U obe teoreme postoje dva slučaja koji mogu da važe, ali ako važi prvi slučaj, drugi ne može da važi. Jedina razlika između ove dve teoreme je, da se u jednoj radi o desnom inverzu matrice A, dok je u drugoj reč o levom inverzu matrice A.

Teoremu 3.1.5 možemo navesti i preko matrica. Ako definišemo matricu dimenzije $m \times n$,

$$A \equiv \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}, \text{ vektor kolonu } x \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i vektor vrstu } \lambda \equiv [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m],$$

onda teorema 3.1.5 izgleda ovako:

1. Jednačina $b = \lambda A$ ima nenegativno rešenje $\lambda \geq 0,\ \lambda \neq 0$.

2. Nejednakosti $bx < 0$ i $Ax \geq 0$ imaju rešenje x.

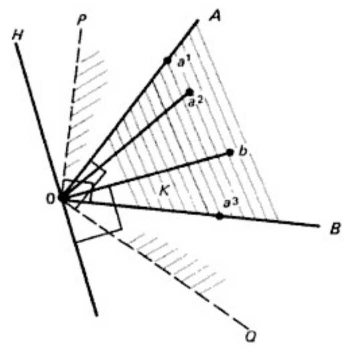
Minkovski-Farkaš teorema se, takodje, može formulisati preko matrica na sledeći način: ako je $bx \geq 0$ za sve x, takve da je $Ax \geq 0$, onda postoji $\lambda \geq 0$ gde je $\lambda \neq 0$ tako da važi $b = \lambda A$.
NAPOMENA: Geometrijska interpretacija teoreme Minkovski-Farkaš je sledeća:

1. Nejednakost $a^i x \geq 0,\ \forall i$ znači da se x nalazi u konusu POQ.

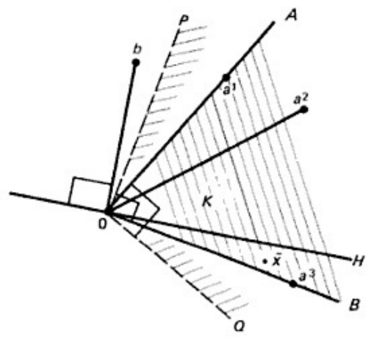
2. Nejednakost $bx \geq 0$ znači da se x nalazi u poluprostoru, odredjenom sa hiperravni $H \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid b \cdot x = 0\}$, koji sadrži tačku b.

3. Zaključak teoreme je $b \in K$ gde je $K \equiv \{y \mid y = \lambda A, \lambda \geq 0\}$

4. Ako $b \in K$ (slučaj A) imamo $bx \geq 0,\ \forall x$ takvo da je $a^i x \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$. Drugim rečima, konus AOB je sadržan u poluprostoru odredjenom hiper-ravni H, koji sadrži b.



Slučaj A



Slučaj B

5. Ako $b \notin K$ (slučaj B), onda postoji tačka, recimo $\tilde{x}$ u konusu AOB, koji nije u poluprostoru koji sadrži b.

Minkovski-Farkaš teorema je veoma značajna u linearnom programiranju, koristi se da se dokaže teorema dualnosti. Takođe ima značaja u teoriji igara i u nelinearnom programiranju kod teorema tipa Kun-Takera.

3.2 Analiza aktivnosti i opšti proizvodni skup

Glavni pojam tradicionalne analize proizvodnje je funkcija proizvodnje. To je funkcija koja opisuje tehnološku vezu izmedju različitih ulaza i izlaza.

Ako obeležimo izlazni vektor sa $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, a ulazni vektor sa $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r)$, tada se funkcija proizvodnje može napisati u obliku:

$$F(x, \nu) = 0.$$

Ova relacija se obično koristi da definiše jedinstvenu površinu na x-ravni za datu vrednost ν. Da bismo u potpunosti razumeli značenje tradicionalne analize proizvodne funkcije, treba prvo razmotriti slučaj kada nema združene proizvodnje, odnosno kad je $x = x_1$. U tom slučaju funkcija proizvodnje ima oblik $x = f(\nu)$.

Pretpostavljamo da je funkcija f funkcija jedne promenljive, odnosno da ta funkcija promenljivoj x dodeljuje jedinstvenu vrednost, za svaku vrednost vektora ν. U tradicionalnoj analizi aktivnosti se pretpostavlja da je funkcija f diferencijabilna. Ovakav pojam tradicionalne analize aktivnosti je odavno postao nepotrebno restriktivan, a to znači da se pretpostavlja da postoji "efikasni rukovodilac", čija je uloga da na osnovu dostupne količine faktora maksimizira količinu proizvedenih izlaza.

Kad je reč o združenoj proizvodnji, menadžer je taj koji maksimizira proizvodnju jednog proizvoljnog izlaza sa svim drugim izlazima koji su uzeti kao konstante.

"Analiza aktivnosti" menja tradicionalnu analizu proizvodnje, odbacujući navedene pojmove, kao i "efikasnog rukovodioca". Umesto toga, posmatra se skup proizvodnih procesa dostupnih u datoj ekonomiji.

Ekonomija u ovom smislu može biti firma, više firmi ili čitava nacionalna ekonomija. Elementi skupa proizvodnih procesa, odnosno proizvodnog skupa su n-torke, koje opisuju tehnološku vezu izmedju izlaza i ulaza jednog procesa proizvodnje. Element proizvodnog skupa se naziva proces ili aktivnost. U analizi aktivnosti ne postoji "efikasni rukovodilac", tako da se na početku proizvodnje ne pretpostavlja koji procesi u proizvodnom skupu treba da budu usvojeni, a koji odbačeni.

Pretpostavimo da postoji n dobara u ekonomiji i svako "dobro" je kvalitativno homogeno. "Dobro" je ovde definisano pomoću njegovih osobina, dostupnih lokacija i datuma raspoloživosti. Na primer, tokovi tehnički istih dobara na dve različite lokacije predstavljaju dva različita dobra.

PRIMER 10. *Posmatrajmo ekonomiju sa četiri dobra i dva proizvodna procesa.*

	Proces 1 (kožarstvo)	*Proces 2 (izrada obuće)*
Dobro 1.(cipele)	0	1
Dobro 2.(koža)	1	$-\frac{1}{4}$
Dobro 3.(krzno)	-1	0
Dobro 4.(rad)	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$

U svakom procesu ulazi su predstavljeni negativnim brojevima, a izlazi pozitivnim brojevima. Proces može imati više od jednog pozitivnog unosa i to je slučaj združene proizvodnje.

Na primer, ako imamo proces koji prerađuje kravlje krzno, tu se takođe može proizvoditi i govedina.

Način rada analize aktivnosti se oslanja na teoriju skupova i druge branše moderne matematike. Analiza aktivnosti je više aksiomatska, fundamentalnija i rigoroznija od tradicionalne analize funkcije proizvodnje. Teoreme separacije imaju bitnu ulogu u analizi aktivnosti, kao što derivati imaju ulogu u analizi funkcije proizvodnje.

U daljem tekstu proučavamo elemente moderne analize proizvodnje.

Neka je Y skup svih tehnički mogućih proizvodnih procesa u datoj "ekonomiji". Pretpostavljamo da je $Y \subset \mathbb{R}^n$ i $y \in Y$ označava proizvodni proces u "ekonomiji". Ako za i-tu komponentu y_i, proizvodnog procesa y važi $y_i > 0$, onda kažemo da je y_i izlaz proizvodnog procesa. Ako je $y_i < 0$, onda i-ta komponenta predstavlja ulaz. Komponenta y_i može biti i 0, a to znači da nije ni ulaz, ni izlaz, nego da uopšte nije uključena u proizvodni proces y. Kvantitet $|y_i|$ pokazuje količinu i-tog dobra, uključenog u proces y.

Dalje predstavljamo osobine procesa y. Najpre ćemo uvesti dve osnovne osobine.

(A-1) (**Aditivnost**) iz $y \in Y$ i $y' \in Y$ sledi da $y + y' \in Y$.

(A-2) (**Proporcionalnost**) za $y \in Y$ sledi da $\alpha y \in Y,\ \forall \alpha \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Na osnovu te dve osobine važi, skup Y je konveksni konus, a ako $a^j \in Y$, onda zbog proporcionalnosti važi:

$$\lambda_j a^j \in Y,\ \forall \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad gde \quad je \quad a^j \equiv \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

Vektor a^j se može odnositi na j-ti proces (ili aktivnost) proizvodnog skupa Y, na njegovom jediničnom nivou rada. A a_{ij} označava količinu i-tog dobra uključenog u jedinicu rada j-tog procesa. Sa λ_j se označava nivo aktivnosti j-tog procesa.

(A-3) (**Konačan broj osnovnih aktivnosti**) Postoji konačan broj procesa a^j, takvih da je Y konveksni poliedarski konus, određen pomoću tih procesa. Procesi a^j se nazivaju **osnovne aktivnosti**.

Drugim rečima, jedan element y iz Y se može predstaviti kao linearna kombinacija elemenata $a^1, a^2, \ldots, a^m$, gde je m konačan pozitivan ceo broj.

Na osnovu već navedenih osobina, proizvodni skup Y, u analizi aktivnosti se može predstaviti na sledeći način:

$$Y = \{y \mid y = A\lambda,\ \lambda \geq 0\},$$

gde je A matrica dimenzije $n \times m$, sa realnim vrednostima, formiranim pomoću $[a^1, \ldots, a^m]$, a λ je m-vektor, čiji je j-ti element λ_j.

Proporcionalnost označava potpunu deljivost svih dobara i konstantne prinose, dok aditivnost označava nezavisan rad svih aktivnosti, odnosno, ne postoji interakcija između aktivnosti.

Pojam da je Y konveksni poliedarski konus, podrazumeva nekoliko karakteristika:

1. $0 \in Y$ (mogućnost mirovanja). Ovo znači da je moguće da proizvođač ne radi ništa.

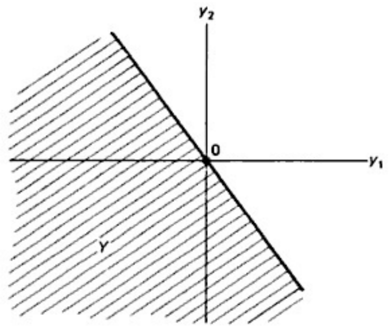
2. Y je zatvoren skup. Ekonomski ovo znači da bilo koji proizvodni proces, koji se može aproksimirati procesom iz skupa Y je i sam u skupu Y.

(A-4)(**Produktivnost**) Postoji najmanje jedan pozitivan element za neko $y \in Y$.

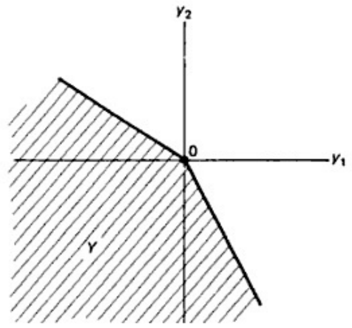
(A-5)(**No land of Cockaigne-"nema zemlje Dembelije"**) iz $y \geq 0$ sledi da $y \notin Y$. Ili $Y \cap \Omega = \{0\}$. Skup Ω nenegativan oktant (skup tačaka sa nenegativnim koordinatama) za $\mathbb{R}^n$.

(A-6)(**Ireverzibilnost**) $y \in Y$ i $y \neq 0$ implicira da $-y \notin Y$. Ili $Y \cap (-Y) = \{0\}$.

Sledeće dve figure prikazuju neke od sledećih osobina. U slučaju A, važe osobine (A-4) i (A-5), ali ne i (A-6). U slučaju B, važe osobine (A-4), (A-5) i (A-6).



Slučaj A



Slučaj B

Navešćemo važnu posledicu osobine (A-5), koja ilustruje njeno značenje. Pre svega uvodimo novi pojam, potreban za dokaz sledeće teoreme.

Neka je C konus sa temenom 0. Njegov suprotni skup (polar) C^* je skup $\{y \mid y \cdot x \leq 0, \ \forall x \in C\}$. C^* je konus sa temenom 0, koji je zatvoren i konveksan.

Posledica 3.2.1. *Ako je C zatvoren konveksan konus sa temenom u 0, tada važi $(C^*)^* = C$.*

Dokaz

Iz definicije suprotnog skupa (polara) važi $C^{**} \supset C$. Dalje ako $x^0 \notin C$ onda $x^0 \notin C^{**}$. Da bismo ovo pokazali, treba razmotriti hiper-ravan H definisanu u teoremi 3.1.1.

Ako je $x' = 0$, trivijalno H sadrži 0. Ako je $x' \neq 0$, x^0x' je normalna na polu-liniju $0x'$, koja se sadrži u H, tako da u bilo kom slučaju H sadrži 0.

Zbog toga postoji normala $y(\neq 0)$ na H u tački 0 tako da $y \cdot x \leq 0, \ \forall x \in C$ i $y \cdot x^0 > 0$. Zbog toga $y \in C^*$ i $x^0 \notin C^{**}$. $\square$

Teorema 3.2.1. *Neka je $Y \equiv \{y \mid y = A\lambda, \lambda \geq 0\}$. Y zadovoljava osobinu (A-5) ako i samo ako postoji $p > 0, p \in \mathbb{R}^n$, tako da važi:*

$$py \leq 0, \quad \forall y \in Y.$$

Dokaz

1. (Dovoljan uslov) $y \geq 0$ implicira da je $py > 0$, za bilo koje $p > 0$. Zbog toga, na osnovu pretpostavke, važi $y \notin Y$.

2. (Potreban uslov) Ovde ćemo dati skicu dokaza. Na osnovu pretpostavke, Y ne sadrži bilo koje $y \geq 0$. Neka je:

$$Y^* = \{p \mid p \cdot y \leq 0, \quad \forall y \in Y\}$$

   negativni polarni konus. Možemo pokazati da postoji $p \in Y^*$, tako da je $p > 0$, što zaokružuje dokaz.

   Pretpostavimo suprotno. Neka Y^* ne sadrži nijednu unutrašnju tačku skupa Ω, odnosno Ω^0. Neka je $M \equiv \Omega^0 - Y^*$, tada možemo pokazati da M ne sadrži koordinatni početak. Kako su skupovi Ω i Y^* konveksni, sledi da je i skup M konveksan. Odatle, na osnovu teoreme separacije, postoji hiperravan koja prolazi kroz koordinatni početak i granična je za skup M. Zbog toga, postoji $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0$, tako da je $\alpha p \leq 0, \forall p \in Y^*$. Odavde se može pokazati da $\alpha \in Y, \alpha \geq 0$, a to je u kontradikciji sa pretpostavkom.

$\square$

NAPOMENA: Ako pretpostavimo da je p vektor cena, tada py predstavlja profit za y. Zbog toga, ako važi $py \leq 0, \forall y \in Y$ znači da je maksimalan profit najviše 0.

Navodili smo osobine proizvodnog skupa Y, koji je predstavljao konveksni poliedarski konus. Te osobine mogu da važe i za skup koji nije konveksni poliedarski konus. Ako je Y skup kombinacija ulaz-izlaz, koje su izvodljive u datoj ekonomiji i kad se ne zahteva da Y bude konveksan poliedarski konus, onda ga nazivamo opšti proizvodni skup. Postoji nekoliko značajnih osobina vezanih za opšti proizvodni skup:

1. Y je zatvoren skup.

2. Ima mogućnost neaktivnosti ($0 \in Y$) (mirovanja).

3. Produktivnost, odnosno važi osobina (A-4).

4. No land of Cockaigne ($Y \cap \Omega \subset \{0\}$). To znači da presek Y sa Ω sadrži najviše element 0, odnosno koordinatni početak. To jest, $Y \cap \Omega$ može biti prazan skup, u slučaju kada $0 \notin Y$.

   Ako je Y konveksan poliedarski konus, onda $0 \in Y$, pa je osobina *4.* zamenjena uslovom $Y \cap \Omega = \{0\}$, kao u (A-5).

5. Ireverzibilnost $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$

6. Slobodna raspoloživost: $y \in -\Omega$ implicira da $y \in Y$, odnosno $(-\Omega) \subset Y$.

7. (a) Skup Y je konveksan poliedarski konus.
   (b) Skup Y je konveksan konus.
   (c) Skup Y je konveksan.

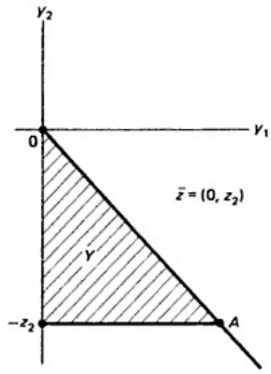
Osobine *7.(a)* i *2.* impliciraju da ako $y \in Y$, tada $\alpha y \in Y$, za sve $\alpha \in [0, 1]$. Drugim rečima, preovladavaju nerastući prinosi, odnosno, rastući prinosi su odbačeni. Konveksnost skupa Y pretpostavlja deljivost svih uključenih dobara.

Proizvodni skup Y ukazuje na tehnološke mogućnosti date "ekonomije", pa je zbog toga oslobođen resursnih ograničenja. To znači da $y \in Y$ pokazuje koliko se izlaza može proizvesti, nakon preciziranja količine ulaza, s tim da se ne postavlja pitanje da li su ti ulazi, uopšte dostupni u toj "ekonomiji". Znači $y \in Y$ je jedna vrsta šematskog prikaza.

Suprotno, ako razmatramo ograničenja resursa, onda skup Y može ukazivati na zarubljeni konveksni poliedarski konus, takav da je:

$$Y \equiv \{y \mid y = A\lambda,\ \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^m,\ \ y + \overline{z} \geq 0\},$$

gde je $\overline{z} \geq 0$ i označava ograničenje resursa u datoj "ekonomiji". Dakle, skup više nije samo konveksan poliedarski konus, iako je na osnovu osobine (A-5) i dalje konveksan. Sa ograničenjem resursa, skup Y je sada kompaktan, a zarubljenje se može ilustrovati kao:



Sada navodimo najvažniji pojam analize aktivnosti.

Definicija 3.2.1. *Neka je $Y \subset \mathbb{R}^n$ opšti proizvodni skup. Tačka $\hat{y} \in Y$ se zove* ***tačka efikasnosti*** *za Y, ako ne postoji $y \in Y$, takvo da važi $y \geq \hat{y}$.*

NAPOMENA: Tačka efikasnosti predstavlja graničnu tačku i odgovara tački u klasičnoj funkciji proizvodnje. Ona predstavlja ulaz-izlaz kombinaciju, tako da izlaz ne može da se poveća bez smanjenja drugih izlaza ili povećanja ulaza. Posmatrajući prethodni grafik, tumačimo to na način da duž OA predstavlja skup tačaka efikasnosti u zarubljenom konusu proizvodnje. Ako je proizvodni skup potpun konus, polu-linija od tačke O, koja prolazi kroz tačku A predstavlja skup tačaka efikasnosti.
NAPOMENA: Tačka efikasnosti služi za prepoznavanje ograničenja resursa, ako smo skup Y definisali tako da uključuje ograničenja resursa. Pa je ovakav pojam o tačkama efikasnosti prihvatljiv.

Ipak, definicija skupa Y je fleksibilna, pa se može uzeti u obzir skup koji ne uključuje ograničenje resursa. Kako je definicija za skup Y fleksibilna, onda je i definicija o tački efikasnosti fleksibilna. Odnosno, ako nijedno ograničenje resursa nije uzeto u obzir u skupu Y, tada neke tačke efikasnosti ne mogu biti dostižne u datoj "ekonomiji", jer su izvan raspona ograničenja resursa.

U analizi aktivnosti se javljaju tri vrste dobara: primarna dobra, srednja dobra i željena dobra.

Primarna dobra su ona koja dolaze u proizvodnju iz spoljnjeg proizvodnog sistema.

Srednja dobra su ona koja se proizvode jedino za upotrebu kao ulazi, za dalju proizvodnju.

Željena dobra su ona koja se proizvode za potrošnju ili drugu upotrebu izvan proizvodnog sistema.

Navodimo sada značajne teoreme u analizi aktivnosti.

Teorema 3.2.2. *Neka je Y opšti proizvodni skup u $\mathbb{R}^n$. Tačka $\hat{y} \in Y$ je tačka efikasnosti za Y ako postoji $p > 0, p \in \mathbb{R}^n$ tako da je $p\hat{y} \geq py$, $\forall y \in Y$.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno. Neka postoji $y \in Y$ takvo da je $y \geq \hat{y}$. Pošto je $p > 0$, odatle je $py > p\hat{y}$, a to je kontradikcija. $\square$

Da bismo dokazali teoremu značajnu za analizu aktivnosti, potrebno je pre toga dokazati sledeću Lemu.

Lema 3.2.1. *Neka je Y opšti proizvodni skup u $\mathbb{R}^n$. Ako je $\hat{y}$ tačka efikasnosti za Y, onda važi:*

$$(Y - \hat{y}) \cap \Omega^0 = \emptyset,$$

gde je Ω^0 pozitivan oktant za $\mathbb{R}^n$ (odnosno, unutrašnjost nenegativnog oktanta Ω za $\mathbb{R}^n$).

Dokaz

Neka je skup $Y - \hat{y}$ definisan kao:

$$Y - \hat{y} = Y - \{\hat{y}\} \equiv \{z \mid z = y - \hat{y},\ y \in Y\}.$$

Pretpostavimo suprotno, postoji $z > 0$ (to jest, $z \in \Omega^0$), tako da $z \in (Y - \hat{y})$. Tada $z + \hat{y} \in Y$, pa sledi da $\hat{y}$ nije tačka efikasnosti za Y, a to je kontradikcija sa pretpostavkom leme. □

Posledica 3.2.2. *Neka je Y zatvoren, konveksan konus sa temenom u 0. Ako $Y \cap \Omega = 0$, onda $Y^* \cap \Omega^0 \neq \emptyset$.*

Ako je $Y^* \cap \Omega^0 = \emptyset$, onda su Y^* i Ω^0 razdvojeni sa hiper-ravni, na osnovu teoreme 3.1.2, koja takođe razdvaja Y^* i Ω. Zbog toga, hiper-ravan prolazi kroz 0 i ima jednačinu $px = 0$, gde je $p \neq 0$. Odatle važi:

(1) $\forall x \in Y^*,\ \ p \cdot x \leq 0.$

(2) $\forall x \in \Omega,\ \ p \cdot x \geq 0.$

Iz (1), $p \in Y^{**}$, tj. $p \in Y$ (iz posledice 3.2.1); iz (2) $p \in -\Omega^* = \Omega$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom $Y \cap \Omega = 0$. Ova posledica je glavni matematički alat analize aktivnosti.

Teorema 3.2.3. *Neka je $Y \subset \mathbb{R}^n$ konveksni proizvodni skup. Ako je $\hat{y}$ tačka efikasnosti za skup Y, tada postoji $p \geq 0, p \in \mathbb{R}^n$, tako da važi:*

$$p\hat{y} \geq py, \quad \forall y \in Y.$$

Dokaz

Neka je $X \equiv Y - \hat{y}$. Tada je X konveksan, jer je linearna suma dva konveksna skupa. Pošto je $\hat{y}$ tačka efikasnosti za Y, onda $X \cap \Omega^0 = \emptyset$, na osnovu prethodne leme. Zbog toga imamo dva disjunktna neprazna konveksna skupa. Prema teoremi Minkovskog, postoji $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tako da:

$$pz \geq \alpha, \quad \forall z \in \Omega^0$$

i

$$px \leq \alpha, \quad \forall x \in X.$$

Napominjemo da $0 \in X$, za $\hat{y} \in Y$. Zbog toga je $\alpha \geq 0$, pa imamo da je $p \geq 0$. Ako ovo ne važi, onda postoji element p, odnosno p_i, koji je negativan, jer je $p \neq 0$. Biranjem adekvatnog elementa z, na primer z_i, koji je dovoljno veliki u Ω^0, možemo imati $pz < 0$, a to je kontradikcija.

Razmatramo slučaj kada je $\alpha \leq 0$. Ako ovo ne važi onda bi bilo $pz \geq \alpha > 0, \ \forall z \in \Omega^0$, a to je nemoguće, zato što biranjem dovoljno malog $\|z\|$, možemo imati $pz < \alpha$. Kako je $\alpha \leq 0$ i $\alpha \geq 0$, onda je $\alpha = 0$. Zbog toga $px \leq 0, \ \forall x \in X$ sa $p \geq 0$ ili $p(y - \hat{y}) \leq 0$. Odnosno važi $p\hat{y} \geq py, \ \forall y \in Y$ sa $p \geq 0$. □

Zbog homogenosti relacije $p\hat{y} \geq py, \ \forall y \in Y$, možemo birati p tako da je:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Na osnovu prethodne teoreme, tačka efikasnosti se uvodi preko maksimizacije profita, to jest maksimizacija funkcije py, u odnosu na y nad skupom Y. Rešenje ove maksimizacije je zagarantovano, ako je skup Y kompaktan, jer je unutrašnji proizvod neprekidna funkcija.

Pretpostavimo da je skup Y predstavljen preko linearnih nejednakosti oblika:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j \leq r_i, \ i = 1, ..., n, \ \lambda_j \geq 0, j = 1, ..., m.$$

Zadatak je da se nađe $\lambda \equiv (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, koja maksimizira funkciju py, i gde je $y = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j$, predmet gornjeg ograničenja. Primetimo da se egzistenicija rešenja može formulisati u obliku jedne varijante Farkaš Leme. Rešenje postoji ako ne postoji $x \geq 0$ za koje važi $Ax = 0$ i $r^T x < 0$. Nalaženje rešenja λ je problem linearnog programiranja, i poznat je pod nazivom simpleks metod.

4

Izabrane teme u ekonomiji

U prethodnoj glavi smo predstavili primenu Han-Banahove teoreme u analizi aktivnosti. U ovoj glavi tražimo tačku efikasnosti na hiperravni i na tu tačku normalan vektor cena, tako da vektor cena bude jedinstven, što rešava problem optimalne proizvodnje. Ali najpre uvodimo pojmove konkurentne ravnoteže i Pareto optimuma. Da bismo definisali te pojmove, moramo definisati i relaciju preferencije. Glavni momenat u ovoj glavi jeste da vidimo kako se međusobno odnose konkurentna ravnoteža i Pareto optimum. Pri tome smo koristili [6] iz spiska literature.

U nastavku definišemo skup dobara, dobavljače i profit koji se ostvaruje prilikom izbora određenih dobara, a zatim potrošače i njihove preferencije.

Prostor dobara, za n dobara je aditivni prostor C, dimenzije n, gde je svaka tačka prostora, u stvari, paket dobara predstavljen vektorom $y = (y_1, ..., y_n)$. Komponenta y_i je i-ta komponenta vektora y i predstavlja određen broj jedinica odgovarajućeg dobra. Dobro predstavlja robu, recimo gvožđe, pšenica, automobili, različiti tipovi službe rada i tako dalje.

U prostoru dobara postoje i dobavljači, koje ćemo označavati sa $j = 1, ..., m$. j-ti dobavljač je u mogućnosti da izabere bilo koju tačku y^j iz skupa $Y^j \subset C$, koji nazivamo j-ti nabavni skup. Pozitivne komponente vektora $y^j = (y_1^j, ..., y_n^j)$, predstavljaju izlaz za j-tog dobavljača, a negativne komponente su ulaz odgovarajućih dobara, dok komponenta koja ima vrednost 0 znači da dobro nije uključeno u izbor y^j.

Skup Y^j predstavlja poznatu proizvodnju za dobavljača ili resurse, kao što su zemlja, vode, mineralne sirovine, koje kontroliše dobavljač. Takođe skup Y^j može predstavljati poznatu proizvodnju i resurse i u slučaju da je dobavljač u isto vreme i proizvođač i vlasnik resursa.

Paket dobara, odnosno vektor, $y = \sum_j y^j$, predstavlja neto efekat istovremenih izbora $y^1, ..., y^m$ od strane m dobavljača. U ovoj sumi, izlazi jednog dobavljača, koji postaju ulazi za drugog dobavljača se poništavaju. Suma skupova $Y = \sum_j Y^j$, predstavlja skup svih mogućih efekata y za izbore y^j individualnih dobavljača, u okviru odgovarajućih nabavnih skupova.

Neka je dat vektor cena $p = (p_1, ..., p_k)$, isti za sve dobavljače, čije su komponente date tržišne cene odgovarajućih dobara. Ovaj vektor određuje aditivnu funkciju na skupu C:

$$py \equiv p_1y_1 + ... + p_ky_k,$$

koja predstavlja ukupan ostvariv profit od izbora y sa tržišnom cenom p. Upotrebom Leme 1.4.1. i 1.4.2, dobijamo sledeći rezultat:

(1) Ako j-ti pojedinačni dobavljač izabere y^j da bi maksimizirao svoj profit, to jest, ako je:

$$py^j \geq p\overline{y}^j, \ \ \forall \overline{y}^j \in Y^j, j = 1, ..., m,$$

tada se ukupan profit maksimizira na zbirnom skupu $Y \equiv \sum_j Y^j$ izborom $y \equiv \sum_j y^j$, odnosno:

$$py \geq p\overline{y}, \ \ \forall \overline{y} \in Y.$$

(2) Ako se bilo koji paket y, koji maksimizira ukupan profit na Y, raspadne u bilo kom smislu, po $y = \sum_j y^j$, gde je $y^j \in Y^j$, tada svako y^j maksimizira profit odgovarajućeg dobavljača na njegovom proizvodnom skupu Y^j.

Zbog toga, na osnovu (1) za firmu sa filijalama koje se odnose na isto nacionalno tržište sa datim cenama ne može se dostići profitni napredak pomoću centralizovanog izbora proizvodnih planova. Zaista, zbog naprednih informacija o proizvodnim mogućnostima filijala i zbog troškova komunikacije, decentralizovana kontrola će verovatno biti profitablinija.

Kao što je to navedeno u [6], u preduzeću General Motors imamo primer decentralizovane proizvodnje. Ali se ne uzima da je decentralizovana proizodnja uvek obavezna, to jeste, ne diktira svako srednje dobro konačnu ponudu cena na spoljnjem tržištu.

Suprotno ovoj situaciji, važi (2), odnosno, ako jedan dobavljač ne postigne maksimalan mogući profit, ne postoji način da drugi dobavljači nadoknade njegov gubitak. Odatle dobijamo da je ukupan profit tada neizbežno umanjen.

Ovakva analiza se može prilagoditi tako da uzima u obzir razlike u vrednosti dobara u različito vreme i na različitim mestima.

Pošto smo definisali dobavljače, sada treba definisati potrošače. Bitno je naglasiti i njihove preferencije. Označavaćemo potrošače sa $i = 1, .., n$, gde i-ti potrošač može birati iz potrošačkog skupa $X^i \subset C$.

Pozitivna komponenta x_l^i tačke $x^i = (x_1^i, ..., x_k^i)$ predstavlja potrošnju dobra l količine x_l^i. Apsolutna vrednost negativne komponente predstavlja količinu rada potrošača, dok komponenta sa vrednošću 0 predstavlja dobro koje nije uključeno u njegov izbor x^i. Skup X^i predstavlja fiziološka ograničenja sposobnosti i-tog potrošača da vrši potrošnju, da pruži usluge rada i da preživi sa datim "potrošnja-i-rad" paketom.

Pretpostavimo da svaki potrošač ima sopstveno određivanje preferencija za tačke svog potrošačkog skupa. Ovo se najčešće definiše kao binarna relacija $x \preceq \overline{x}$ (x se ne preferira u odnosu na $\overline{x}$), koja je:

- Kompletna: $x \preceq \overline{x}$ ili $\overline{x} \preceq x$ (ili oba) i
- Tranzitivna: ako važi $x \preceq \overline{x}$ i $\overline{x} \preceq \overline{\overline{x}}$ tada $x \preceq \overline{\overline{x}}$.

Iz toga sledi da $x \preceq x$, odnosno važi refleksivnost. Sada definišemo:

- $x \succ \overline{x}$, (x se preferira više od $\overline{x}$), ako $\overline{x} \preceq x$, ali ne $x \preceq \overline{x}$.
- $x \sim \overline{x}$, (x je sličan sa $\overline{x}$), ako $\overline{x} \preceq x$ i $x \preceq \overline{x}$.
- $x \prec \overline{x}$, (x se manje preferira od $\overline{x}$), ako $x \preceq \overline{x}$, ali ne $\overline{x} \preceq x$.

Može se pokazati da su $\prec$ i $\succ$ takođe tranzitivne relacije i da je $\sim$ relacija ekvivalencije: refleksivna, simetrična (ako $x \sim \overline{x}$, tada i $\overline{x} \sim x$) i tranzitivna.

Dalje, jedna i samo jedna od tri relacije $\prec, \succ, \sim$ važi za bilo koji uređeni par elemenata.

Relacija ekvivalencije $\sim$ razdvaja skup na dva dela na koji se primenjuje dati poredak $\preceq$ u uparenim disjunktnim podskupovima. Svaki od ovih je indiferentan skup u odnosu na poredak preferencija: potrošač je jednako zadovoljan sa bilo kojim paketom dobara takvog skupa. Pošto svaki potrošač ima sopstveni poredak preferencija, potrebno je da se pomoću indeksa označi na čiji se poredak misli, na primer, relacije

$$\preceq_i, \ \succ_i, \ \sim_i$$

se odnose na i-tog potrošača i potrošački skup X^i.

4.1 Konkurentna ravnoteža i Pareto optimum

Pošto smo definisali dobavljače, potrošače i njihove preferencije, možemo uvesti nove pojmove konkurentne ravnoteže i Pareto optimuma. U daljem tekstu ćemo dati uslove pod kojima je konkurentna ravnoteža Pareto optimum, nakon toga razmatramo obratan slučaj, kada je Pareto optimum realizovan kroz konkurentnu ravnotežu.

Ovde posmatramo ekonomiju koja sadrži dobavljača i potrošača. Vektor izbora je skup tačaka iz prostora C, dimenzije $(n+m)$, $(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m)$, gde je $x^i \in X^i$ i $y^j \in Y^j$. Ovo se još naziva ravnotežni vektor ako važi $x = y$, gde su $x \equiv \sum_i x^i$ i $y \equiv \sum_j y^j$.

Konkurentna ravnoteža je ravnotežni vektor izbora $(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m)$ i vektor cena $p = (p_1, ..., p_k)$ takav da važi:

(4.1.1) za sve i, $x^i \succeq_i \overline{x}^i$, $\forall \overline{x}^i \in X^i$, za koje važi

$$px^i \geq p\overline{x}^i \quad \text{i}$$

(4.1.2) za sve j, $py^j \geq p\overline{y}^j$, $\forall \overline{y}^j \in Y^j$.

Ovako definisana konkurentna ravnoteža opisuje idealizovanu funkciju tržišta sa cenom za svako dobro, koja je uniformna za sve agente i na koju nijedan agent ne pokušava da utiče. Ova situacija je poznata u ekonomskoj teoriji kao situacija sa savršenom konkurencijom, a to znači da svaki dobavljač bira na taj način da maksimizira profit. Svaki potrošač pravi najbolji mogući izbor, sudeći po njegovim preferencijama. On ne povećava neto višak troškova px^i svoje potrošnje iznad svoje zarade.

Uslov da izbori zajedno čine ravnotežni vektor govori da je tržište prazno. Ono što jedan agent (potrošač ili dobavljač) proda, drugi uvek kupi.

Pareto optimum je ravnotežni vektor izbora $(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m)$ takav da ne postoji ravnotežni vektor $(\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n; \overline{y}^1, .., \overline{y}^m)$ za koji važi:

(4.1.3) $\overline{x}^i \succeq_i x^i$, $\forall i$

(4.1.4) $\overline{x}^i \succ_i x^i$, za neko i.

Ovakav koncept je nezavisan od postojanja tržišta u gore navedenom obliku. Pretpostavlja se da ne postoji način da, kroz preuređenje nabavnih izbora ili preraspodelu potrošačkih dobara, damo jednom potrošaču bolji paket (u odnosu na njegove preferencije), a da ipak ne povredimo ostale potrošače (u odnosu na njihove odgovarajuće preferencije). Uslov da će izbori biti balansirani, znači da nijedno dobro ili usluga neće ući ili izaći iz ekonomije a da se ne uzime u obzir da ono što jedan agent napravi dostupnim, drugi može koristiti ili trošiti. Da li će roba promeniti vlasnika prodajom ili na neki drugi način, ostaje neodređeno.

Zbog toga Pareto optimum predstavlja pojam produktivne efikasnosti i efikasnosti raspodele u preobraćanju resursa i rada u "zadovoljstva". Pretpostavlja se da je ova tvrdnja dostignuta kroz centralizovano planiranje, kroz mehanizam tržišta ili na neki drugi izvodiv način.

Pojam Pareto optimuma ne utiče niti implicira bilo koji pojam o poštenoj ili čak prikladnoj raspodeli kupovne moći, određujući odgovarajuće nivoe potrošačkog zadovoljstva. Pareto optimum je kompatibilan sa velikim razlikama u nivoima potrošnje između pojedinačnih potrošača.

Da bismo logički povezali pojam Pareto optimuma i konkurentne ravnoteže, treba uvesti sledeći pojam.

Tačka zasićenja x^i (vezano za relaciju $\succeq_i$) je tačka iz X^i takva da $x^i \succeq_i \overline{x}^i$, $\forall \overline{x}^i \in X^i$ (to jest, nijedna tačka iz X^i se ne preferira u odnosu na x^i).

Poredak $\succeq_i$ je lokalno nezasićujući, ako je rastojanje $d(x^i, \overline{x}^i)$ definisano na X^i, i važi:

(4.1.5) Za svaku tačku $x^i \in X^i$, koja nije tačka zasićenja, i za svako pozitivno δ, postoji tačka $\overline{x}^i \in X^i$ takva da je:

(1) $d(x^i, \overline{x}^i) < \delta$ i

(2) $\overline{x}^i \succ_i x^i$.

Ovo znači da za bilo koju tačku, koja nije tačka zasićenja, postoje tačke proizvoljno blizu, koje se preferiraju više od nje.

Bitno je napomenuti da:

(1) Zbog (4.1.1), se može desiti da postoji $p = 0$ u konkurentnoj ravnoteži, samo ako svaki potrošač dostigne tačku zasićenja.

(2) Uslov za lokalno nezasićen poredak ograničava karakter prostora dobara C koji sadrži X^i. Uslov ne može biti zadovoljen ako C ima izolovane tačke. Sa ekonomske strane gledišta, uslov implicira da postoji bar jedno savršeno deljivo dobro i da u bilo kojoj situaciji, osim u slučaju potpunog zasićenja, postoji neispunjena želja za malo više takvog dobra.

(3) Članovi klase funkcija rastojanja, kao što su metrike $d_1(x, \overline{x})$, $d_2(x, \overline{x})$, $d_\infty(x, \overline{x})$ su svi prihvatljivi i ekvivalentni.

Teorema 4.1.1. *Ako je svaki poredak potrošačevih preferencija lokalno nezasićen, onda je bilo koja konkurentna ravnoteža, u kojoj ni jedan potrošač ne dostiže tačku zasićenja Pareto optimum.*

Dokaz

Pretpostavimo da je $(p; x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m)$ konkurentna ravnoteža u kojoj nijedan potrošač ne uspeva da dostigne zasićenje. Tada je $p \neq 0$, pa na osnovu (4.1.2) važi:

$$py^j \geq p\overline{y}^j, \ \forall \overline{y}^j \in Y^j. \tag{4.1.6}$$

Na osnovu Leme 1.4.1. imamo:

$$py \geq p\overline{y}, \ \forall \overline{y} \in Y \equiv \sum_j Y^j. \tag{4.1.7}$$

Dalje, iz (4.1.1) sledi:

$$p\overline{x}^i > px^i, \ \forall \overline{x}^i \in X^i \quad \text{tako da} \quad \overline{x}^i \succ_i x^i, \tag{4.1.8}$$

ali takođe važi:

$$p\overline{x}^i \geq px^i, \ \forall \overline{x}^i \in X^i \quad \text{tako da} \quad \overline{x}^i \sim_i x^i. \tag{4.1.9}$$

Ako ovo ne bio slučaj, onda bismo imali, za neke $\overline{x}^i$,

$$\overline{x}^i \sim x^i \quad \text{i} \quad p\overline{x}^i < px^i.$$

Kako x^i nije tačka zasićenja, nije ni $\overline{x}^i$.

Na osnovu lokalno nezasićenog karaktera i-tog poretka preferencije, postoji $\overline{\overline{x}}^i$:

(a) koji je dovoljno blizu $\overline{x}^i$ tako da $p\overline{\overline{x}}^i < px^i$, jer je vrednosna funkcija px^i neprekidna

(b) takvo da $\overline{\overline{x}}^i \succ_i \overline{x}^i$, pa na osnovu tranzitivnosti $\overline{\overline{x}}^i \succ_i x^i$.

Ovde vidimo da (a) i (b) dovode do kontradikcije, sudeći po (4.1.8). Zbog toga, kombinujemo (4.1.8) i (4.1.9) i dobijamo:

$$p\overline{x}^i \geq px^i, \ \forall \overline{x}^i \in X^i, \ \text{takvo da} \ \overline{x}^i \succeq_i x^i. \tag{4.1.10}$$

Sad pretpostavljamo da data konkurentna ravnoteža nije Pareto optimum. Onda postoji ravnotežni vektor $(\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n; \overline{y}^1, ..., \overline{y}^m)$ takav da je:

$$\overline{x}^i \succeq_i x^i,\ \forall i \quad \text{i} \quad \overline{x}^i \succ_i x^i \text{ za neko } i.$$

Odavde sledi, na osnovu (4.1.10) i (4.1.8):

$$p\overline{x}^i \geq px^i,\ \forall i \quad \text{i} \quad p\overline{x}^i > px^i, \text{ za neko } i.$$

Otuda dodavanjem važi:

$$p\overline{x} > px.$$

Koristeći (4.1.7), dobijamo:

$$p\overline{y} \leq py,$$

a pošto je konkurentna ravnoteža, u stvari ravnotežni vektor $x = y$, onda je:

$$px = py.$$

Pa imamo:

$$p\overline{x} > p\overline{y},$$

odakle je $\overline{x} \neq \overline{y}$, jer je $p \neq 0$, a to demantuje postojanje ravnotežnog vektora $(\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n; \overline{y}^1, ..., \overline{y}^m)$, a u isto vreme demantuje postojanje konkurentne ravnoteže koja nije Pareto optimum. $\square$

Dokaz koristi neprekidnost funkcije px, a ne neprekidnost poretka preferencije. Uslov lokalnog nezasićenja je zadovoljen.

Teorema ne govori ništa o raspodeli prihoda, koji proizilaze iz konkurentne ravnoteže. S tim u vezi, napominjemo da u (4.1.1) upoređujemo x^i samo sa alternativnim skupovima $\overline{x}^i$, koji ne koštaju više od x^i, $px^i \geq p\overline{x}^i$, bez preciziranja šta zapravo određuje veličinu troškova px^i.

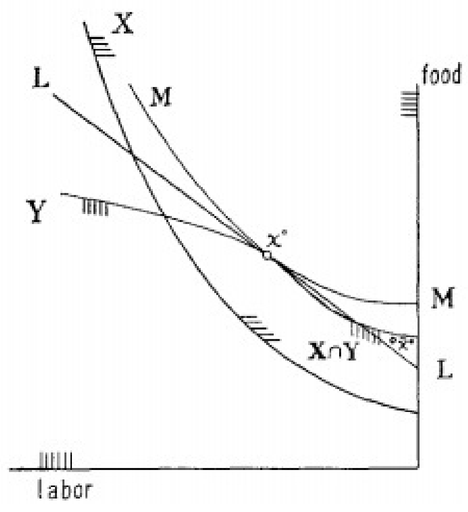
Zbog odsustva takve specifikacije, konkurentna ravnoteža je dovoljno fleksibilna, tako da se može razmotriti i obrnut slučaj. Dat je bilo koji Pareto optimum. Da li se on može dopuniti vektorom cena p da bi formirao konkurentnu ravnotežu? Ekonomski, da li se organizacija tržišta može iskoristiti da se ostvari bilo koji unapred smišljen Pareto optimum.

U slučaju kad imamo jednog proizvođača i jednog potrošača, ravnoteža izbora vektora znači da oba biraju istu tačku x^0.

Ako je x^0 Pareto optimum, tada je:

$$x^0 \succeq x,\ \forall x \in X \cap Y.$$

Na sledećem grafiku, MM je glatka indiferentna kriva kroz x^0 i sve tačke u X "iznad" krive MM se preferiraju u odnosu na x^0. Kako je x^0 Pareto optimum, onda nijedna od otih tačka nije u Y.



Slika 4.1

Tražimo vektor cena p koji od x^0 formira konkurentnu ravnotežu. Takav vektor određuje liniju:

$$
\begin{aligned}
L: px = px^0 \quad & kroz \quad x^0, \ a \\
px > px^0 \quad & iznad \quad x^0 \\
px < px^0 \quad & ispod \quad x^0.
\end{aligned}
$$

Uopšteno, L je hiper-ravan.
Za konkurentnu ravnotežu mora da važi:

(1) $x \succ x_0$ implicira $px > px_0$, $\forall x \in X$.

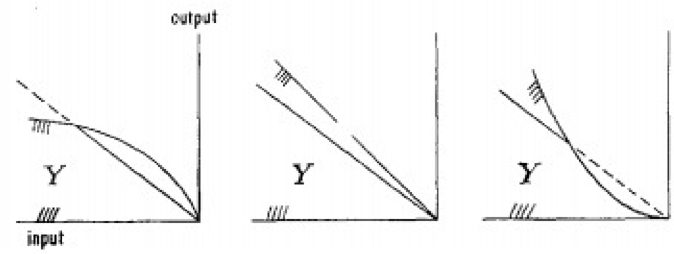
(2) $px \leqq px^0$, $\forall x \in Y$.

Ipak u dijagramu, tačka $\overline{x}^0$ narušava uslov (2), dok će bilo koji drugi način crtanja linije L kroz tačku x^0, stvoriti mogućnost da x naruši uslov (1). Jedini razlog zašto se to može desiti jeste zato što skup Y nije konveksan skup.

Zbog toga je potrebno da se pretpostavi da je ukupan nabavni skup $Y \equiv \sum_j Y^j$ konveksan, a to nije potpuno realna pretpostavka. Ako je proizvodni skup konveksan i sadrži 0 (na primer, moguće je izabrati da se ništa ne proizvodi i ova odluka zahteva da nema ulaznih dobara), tada ako je bilo koji dati paket ukupnih izlaza moguć, takođe je moguće da se proizvodi na primer, $\frac{1}{10}$ svakog izlaza, koristeći tačno $\frac{1}{10}$ svakog od prethodnih ulaza.

Pretpostavka konveksnosti na proizvodnom skupu zbog toga odgovara konstanti ili smanjenju prinosa i isključuje slučaj rastućih prinosa koji karakterišu tehnike masovne proizvodnje.

Sledeći grafici ilustruju slučaj jediničnog ulaza i jediničnog izlaza.



Slika 4.2

U nastavku posmatramo potrošače, pa se u vezi s tim moraju dati napomene o preferencnom poretku.

Preferencni poredak $\preceq$ na skupu X je neprekidan ako, za svako $x \in X$ imamo dva podskupa:

$\{\overline{x} \in X | \overline{x} \preceq x\}$ i $\{\overline{x} \in X | x \preceq \overline{x}\}$, oba zatvorena u X.

To jest, kad god niz tačaka, koji pripada jednom od ova dva podskupa, nazovimo ga A, ima graničnu tačku u X, onda ta granična tačka takođe pripada A.

Funkcija korisnosti za preferencni poredak $\preceq$ na skupu X je funkcija u definisana kao preslikavanje skupa X u skup realnih brojeva tako da, za svako x i $\overline{x}$ iz X, važi $x \preceq \overline{x}$ ako i samo ako je $u(x) \leq u(\overline{x})$. Odavde sledi da:

$$\begin{aligned} x \prec \overline{x} &\quad \textit{implicira} \quad u(x) < u(\overline{x}) \\ x \sim \overline{x} &\quad \textit{implicira} \quad u(x) = u(\overline{x}) \\ x \succ \overline{x} &\quad \textit{implicira} \quad u(x) > u(\overline{x}). \end{aligned}$$

Ako takva funkcija postoji, onda postoje i druge takve funkcije, odnosno sve funkcije v takve da važi:

$$v(x) = \phi(u(x)),$$

gde je ϕ strogo rastuća funkcija.

U sledećoj teoremi, skup X se naziva **povezan** ako nije unija dva neprazna disjunktna skupa od kojih nijedan ne sadrži rubne tačke drugog.

Teorema 4.1.2. *Ako je X povezan podskup u $\mathbb{R}^k$ (k-dimenzionalan vektorski prostor na skupu realnih brojeva) i $\preceq$ je neprekidna na X, tada postoji neprekidna funkcija korisnosti na X za $\preceq$.*

Definicija 4.1.1. *Poredak preferencija $\preceq$ na X se naziva konveksan ako važi:*

1. *Skup X je konveksan skup*
2. *Relacija $x \succ \overline{x}$ implicira $\lambda x + (1-\lambda)\overline{x} \succ \overline{x}$, za $0 < \lambda < 1$*
3. *Relacija $x \sim \overline{x}$ implicira $\lambda x + (1-\lambda)\overline{x} \succeq \overline{x}$, za $0 < \lambda < 1$.*

Ako je poredak preferencija $\preceq$ konveksan, tada su skupovi

$$\{x \in X \mid x \succ \overline{x}\} \text{ i } \{x \in X \mid x \succeq \overline{x}\},$$

oba konveksna.

Na primer, pretpostavimo da važi $x \succ \overline{x}$, $x' \succ \overline{x}$ i razmatramo da je $x \succeq x'$. Tada na osnovu osobina 2. i 3. o konveksnosti poretka preferencije dobijamo:

$$\lambda x + (1-\lambda)x' \succeq x' \succ \overline{x}.$$

Odatle je, skup $\{x \in X | x \succ \overline{x}\}$ konveksan. Slično je i za skup $\{x \in X | x \succeq \overline{x}\}$.

Iz pretpostavke konveksnosti za poredak preferencije $\preceq$ sledi, na slici 4.1, da uzastopno jednako smanjenje potrošnje, recimo, hrane mora biti kompenzovano jednakim ili rastućim povećanjem odmora, odnosno smanjenjem rada, da bismo ostali na istoj indiferentnoj krivoj MM.

NAPOMENA: Ako u definiciji konveksnosti poretka preferencije zamenimo relaciju $\succeq$ sa relacijom $\succ$ u osobini 3. dobijamo slučaj stroge konveksnosti.

Na osnovu toga, u gornjem primeru, uzastopna jednaka smanjenja potrošnje hrane se jedino mogu zameniti rastućim povećanjem odmora.

Teorema 4.1.3. *Ako je:*

1. *za sve i, relacija $\preceq_i$ konveksna i*
2. *Skup $Y = \sum Y^j$ konveksan,*

tada možemo adjungovati na bilo koji Pareto optimum $(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m)$ u kom bar jedan potrošač nije zasićen do vektora cena p tako da je:

a. *za sve j, $p\overline{y}^j \leq py^j$, $\forall \overline{y}^j \in Y^j$*

b. *za sve i, $p\overline{x}^i \geq px^i$, $\forall \overline{x}^i \in X^i$ tako da je $\overline{x}^i \succeq_i x^i$.*

Dokaz

Pretpostavimo da je prvi potrošač nezasićen. Sada su Y i

1. $X^{\circ 1}(x^1) \equiv \{\overline{x}^1 \in X^1 | \overline{x}^1 \succ_1 x^1\}$,
2. $X^i(x^i) \equiv \{\overline{x}^i \in X^i | \overline{x}^i \succeq_i x^i\}$,
3. $X^\circ(x^1, ..., x^n) = X^{\circ 1}(x^1) + \sum_{i=2}^n X^i(x^i)$,
4. $X(x^1, ..., x^n) = \sum_{i=1}^n X^i(x^i)$,

svi konveksni skupovi.

Pošto je $(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m)$ Pareto optimum, onda je

$$Y \cap X^\circ(x^1, ..., x^n) = \emptyset.$$

To znači da se nijedna tačka, zbog koje je prvi potrošač u boljem položaju od ostalih, ne nalazi u skupu Y. S tim da su ostali potrošači neoštećeni.

Zbog toga, na osnovu teoreme separacije za konveksne skupove, postoji hiper-ravan koja razdvaja Y i $X(x^1, ..., x^n)$. Pošto je vektor $(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m)$ ravnotežni, imamo:

$$x \equiv \sum_i x^i = \sum_j y^j \equiv y,$$

zbog toga $x \in Y$.

Dalje, ako $\overline{x} \in X^\circ(x^1, ..., x^n)$, možemo naći $\overline{x}^1 \in X^{\circ 1}(x^1)$ i $\overline{x}^i \in X^i(x^i)$, tako da

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^n \overline{x}^i.$$

Tada, ako je $\overline{x}^i(\lambda) \equiv \lambda \overline{x}^i + (1-\lambda)x^i,\ 0 < \lambda < 1,\ i = 1, ..., n$ i $\overline{x}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \overline{x}^i(\lambda)$, na osnovu konveksnosti relacije $\succeq_1$ imamo $\overline{x}^1(\lambda) \in X^{\circ 1}(x^1)$, takođe na osnovu konveksnosti skupa $X^i(x^i)$, imamo da je $\overline{x}^i(\lambda) \in X^i(x^i),\ i = 2, ..., n$, pa odatle sledi: $\overline{x}(\lambda) \in X^\circ(x^1, ..., x^n)$, to jest, postoje tačke iz $X^\circ(x^1, ..., x^n)$, koje su proizvoljno blizu x.

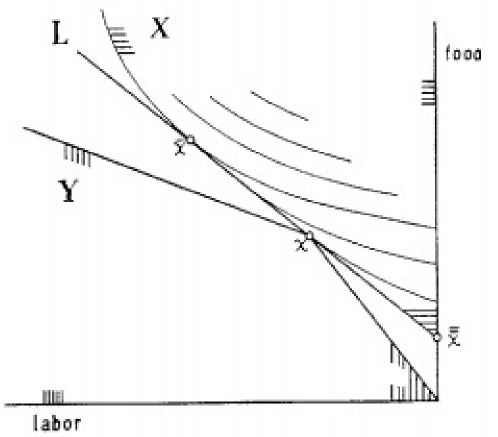
Sledi da separativna ravan L (L je, znači, hiperravan takva da razdvaja skup X od skupa Y) prolazi kroz $x(= y)$ i njena jednačina je:

$$p^\circ \overline{x} = p^\circ x,\ \ p^\circ \neq 0,$$

gde je $\overline{x}$ uzastopna promenljiva. Prema tome, vektor cena $p = \mu p^\circ$ je izabran na osnovu skalarnog faktora $\mu \neq 0$. Treba da koristimo izbor znaka skalarnog faktora u (opštem) slučaju tako da oba skupa Y i $X^\circ(x^1, ..., x^n)$ ne pripadaju hiperravni L istovremeno. U ovom slučaju je bar jedan od dva zatvorena poluprostora definisan, a drugi se može definisati kao suprotan poluprostor u odnosu na hiperravan L. Skupovi Y i $X^\circ(x^1, ..., x^n)$ se, dakle, nalaze sa suprotnih strana hiperravni L, što znači da skup Y pripada jednom poluprostoru, a skup $X^\circ(x^1, ..., x^n)$ suprotnom poluprostoru.

Onda biramo znak za μ takav da na Y strani od L imamo

$$p\overline{y} \leq py(= px), \ \forall \overline{y} \in Y.$$



Slika 4.3

Zbog toga, na osnovu Leme 1.4.2, za svako j, $p\overline{y}^j \leq py^j$, $\forall \overline{y}^j \in Y^j$.

Na $X^\circ(x^1, ..., x^n)$ strani od L imamo $p\overline{x} \geq px$, $\forall \overline{x} \in X^\circ(x^1, ..., x^n)$. U slučaju da su oba skupa Y i $X^\circ(x^1, ..., x^n)$ sadržani u L, znak za μ je beznačajan.

Sada važi: $p\overline{x}^i \geq px^i$, $\forall \overline{x}^i \in X^i(x^i)$, $i = 2, ..., n$ i $p\overline{x}^1 \geq px^1$, za svako $\overline{x}^1 \in X^{\circ 1}(x^1)$, to jest, za svako $\overline{x}^1$ tako da $\overline{x}^1 \succ x^1$.

Ovo nije u potpunosti ono što tvrdi ova teorema. Dalje moramo razmotriti vrednosti za $\overline{x}^1$ tako da je $\overline{x}^1 \sim x^1$.

U ovom slučaju, pošto x^1 nije tačka zasićenja, možemo naći $\overline{\overline{x}}^1 \succ_1 x^1 \sim_1 \overline{x}^1$.

Tada, na osnovu osobine 2. iz definicije 4.1.1 o konveksnosti relacije $\preceq$, dobijamo tačke:

$$x^1(\lambda) = \lambda\overline{\overline{x}}^1 + (1 - \lambda)\overline{x}^1$$

koje su proizvoljno blizu $\overline{x}^1$ i još $x^1(\lambda) \succ_1 x^1$ (to su tačke iz $X^{\circ 1}(x^1)$).

Zbog toga, za ove tačke važi $px^1(\lambda) \geq px^1$ i zbog neprekidnosti funkcije px sledi da je $p\overline{x}^1 \geqq px^1$, za tačke takve da je $\overline{x}^1 \sim x^1$. $\square$

Teorema 4.1.3. je ustanovila manje nego što se očekivalo. Za dati Pareto optimum od koga treba da se napravi konkurentna ravnoteža adjungovanjem vektora cena p, moramo postaviti, osim zaključka b. u teoremi 4.1.3, da je i $p\overline{x}^i > px^i$, $\forall \overline{x}^i \in X^i$ tako da $\overline{x}^i \succ_i x^i$.

Ako je $p\overline{x}^i = px^i$ kompatibilan sa tim da je $\overline{x}^i \succ_i x^i$, tada potrošač i, suočen sa cenovnim sistemom p i trošeći količinu px^i neće birati x^i, zato što bolji izbor $\overline{x}^i$ košta isto kao i x^i. Da se ovo zaista može desiti, ilustrovano je na *Slici 4.3* predstavljajući slučaj koji uključuje jednog proizvođača i jednog potrošača. Granica za X uključuje segment $\overline{x}\overline{\overline{x}}$, a kriva indiferentnosti kroz x dolazi na tangentu $\overline{x}\overline{\overline{x}}$ u tački x.

Sada je x jedina tačka optimuma jednostavno zato što je jedina zajednička za X i Y.

Linija L je jedina linija koja razdvaja $X(x)$ i Y, ali sadrži tačku $\overline{x}$ koja se preferira u odnosu na x. Treba pokazati da se sa neprekidnim preferencnim poretkom ovo može desiti jedino ako ne postoji tačka iz X, u cenovnom sistemu data separacijskom linijom, koja košta manje od x; to jest, ako potrošač živi na minimalnim mogućim troškovima koji mu dozvoljavaju da preživi. Ovo se izražava na sledeći način.

NAPOMENA: Ako je $\succeq_i$ neprekidno za sve i i ako neko p zadovoljava uslove a i b teoreme 4.1.3 i za svako i postoji $\underline{x}^i \in X^i$ tako da $p\underline{x}^i < px^i$, tada je $(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^m; p)$ konkurentna ravnoteža.

Dokaz

Želimo da pokažemo da ako je $\overline{x}^i \succeq_i x^i$ i $p\overline{x}^i = px^i$, tada je $\overline{x}^i \sim x^i$.

Pretpostavimo suprotno da je $\overline{x}^i \succ_i x^i$. Tada razmatramo tačke:

$$x^i(\lambda) = \lambda\overline{x}^i + (1 - \lambda)\underline{x}^i,$$

gde je $\underline{x}^i$ tačka takva da je $p\underline{x}^i < px^i$.

Sada imamo:

(1) $px^i(\lambda) < px^i$, za $0 < \lambda < 1$, zato što je $px^i(\lambda)$ linearna funkcija od λ.

Dalje, iz neprekidnosti $\succeq_i$, postoji λ data sa $0 < \lambda < 1$, tako da:

(2) $x^i(\lambda) \succ_i x^i$, jer da ne postoji takvo λ, važilo bi $x^i(\lambda) \preceq_i x^i$, za $0 < \lambda < 1$, pa je $\lambda = 1$, a to je u kontradikciji sa našom pretpostavkom.

Time smo došli do kontradikcije zaključaka (1) i (2) sa zaključkom b. iz teoreme 4.1.3. $\square$

Teorema 4.1.3. i dodatna napomena utvrđuju da bilo koji unapred smišljen Pareto optimum u kom nijedan potrošač nije na granici gladovanja može biti realizovan pomoću ravnotežnog tržišta.

Dok ovo daje valjan uvid u fleksibilnost tržišne organizacije, potrebna su nam dva ograničenja, slabije i jače.

Slabije je to da nismo uspeli u navođenju uslova u terminima skupa nabavke i potrošnje i poredaka preferencije, pod kojima pretpostavka NAPOMENE može biti zadovoljena.

Jače je to da definicija Pareto optimuma ne precizira (algebarsku) količinu px^i dostupnu i-tom potrošaču (zajedno sa njegovim dodatkom rada) za troškove potrošnje.

Zbog toga realizacija proizvoljno datog Pareto optimuma kroz proces tržišta može zahtevati uređenje, pomoću oporezivanja ili na drugi način, za transfere dohodaka između potrošača koji su nezavisni u odnosu na svoj izbor.

Ovde naš interes nije proizvoljni Pareto optimum, već optimum koji izbegava prevelike nejednakosti u različitim mogućnostima.

Prethodna diskusija o logičnim vezama između koncepta Pareto optimuma i konkurentne ravnoteže je zaobišla pitanje pod kojim uslovima vezanim za skupove nabavke, potrošnje i za poredak preferencije, oba koncepta postoje u matematičkom smislu.

Ono što je u ovom delu bitno jeste efikasnost raspodele gledano kroz konkurentna tržišta, a to je klasična tema u ekonomiji. Vezano za to, Wicksell je dao formulaciju da savršena konkurencija maksimizira proizvodnju, dok drugi tvrde da savršena konkurencija maksimizira ukupnu korisnost.

Ranija klasična teorija je jedino razmatrala pitanja da li konkurentna ravnoteža implicira Pareto optimum. Prvo razmatranje obrnutog pitanja je uradio sam Pareto, a kasnije su ga proširili Barone, Lange i Lerner. Lange i Lerner su delovali kao socijalisti ekonomisti, koji su želeli da utvrde "šemu" za socijalno društvo, koje je obnovilo konkurentno tržište.

Sve ove rasprave su bile matematički defektne:

(1) Ignorisana su ograničenja koja imaju oblike nejednakosti, (na primer, nenegativnost određenih promenljivih) i posledična mogućnost "ekstrema granične tačke", gde tangentna hiper-ravan na površinu koja predstavlja maksimum, ne bi morala da bude horizontalna.

(2) Ne postoji način identifikovanja globalnog ekstrema među onim lokalnim ekstremima koji su dobijeni metodama računanja. Zato nisu obezbeđeni ni potrebni ni dovoljni uslovi da se okarakteriše optimalnost.

4.2 Jedna primena analize aktivnosti

Analiza aktivnosti se bavi proučavanjem efikasne raspodele u proizvodnim sistemima, pomoću modela koji se mogu primenjivati numerički.

Sada se može predstaviti model linearne analize aktivnosti, kao specijalan slučaj teorije Pareto optimuma. Znamo da su dobra raspoređena u tri međusobno isključive klase: primarna, srednja i željena.

Ako je potrebno prvo i poslednje se može držati odvojenima, veštački, na primer, ako pijemo vodu iz potoka, onda je to aktivnost koja preobraća vodu kao primarno dobro u željeno dobro, pijaću vodu.
Skupove izbora u prostoru dobara predstavljamo na sledeći način.

Skupovi resursa predstavljaju mogućnost snabdevanja primarnim dobrom do granice dostupnosti. $h-$ti skup resursa se definiše kao:

$$Z^h \equiv \{z \mid 0 \leq z_h \leq \zeta_h \quad \text{i} \quad z_{h'} = 0 \quad za \quad h' \neq h\} \tag{4.3.1}$$

zatvoreni interval u rasponu od 0 sve do pozitivne ose koja odgovara primarnom dobru h. Ako je H skup oznaka primarnih dobara, zbirni skup resursa je:

$$Z = \sum_{h \in H} Z^h.$$

Geometrijski gledano, ovo je pravougaoni paralelopiped, sa jednako mnogo dimenzija koliko ima primarnih dobara.

Proizvodni skup je sledeći skup u prostoru dobara. Svaki takav skup predstavlja proces, koji konvertuje određena dobra u neka druga u datim odnosima iz ulaza u izlaze, i sa njim je moguće raditi na bilo kom nenegativnom nivou aktivnosti (ili intenzitetu) ξ. Za svaki proces postoji jedinica aktivnosti. To jest vektor $a \neq 0$ i proizvodni skup za svaki takav proces je preciznije skup svih nenegativnih višestrukosti od a.

Zbog toga, za dati vektor $a^j \neq 0$, gde je $a^j = [a_1^j, ..., a_m^j]$, za $j = 1, 2, ...$, skup:

$$Y^j \equiv \{y \mid y = \xi_j a^j, \ \xi_j \text{ je nenegativni skalar}\} \tag{4.2.2}$$

je zatvorena polu-linija koja dolazi iz koordinatnog početka 0.

Geometrijski, zbirni proizvodni skup $Y = \sum_j Y^j$ je konveksan poliedarski konus. (Konveksan je, jer je suma konveksnih skupova, a konus zato što je unija polu-linija izvan početka i poliedar, zato što je obuhvaćen konačnim brojem vektora a^j.)

Algebarski, skup Y se može predstaviti koristeći matričnu notaciju:

$$Y = \{A\xi \mid \xi \geq 0\}$$

gde je A matrica, nazvana matrica tehnologije, čije su vektor kolone respektivno jedinice aktivnosti $a^1, ..., a^n$ i $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$ je vektor čije su komponente nivoi odgovarajućih aktivnosti. Skup Y je tada skup tačaka neto izlaza dobijenih iz svih načina korištenja procesa Y^j zajedno, u svim mogućim kombinacijama i intenzitetima.

Zbirni nabavni skup je suma $W = Y + Z$ zbirnog proizvodnog skupa i skupa resursa. Zbog toga je taj skup neograničen konveksan poliedar.

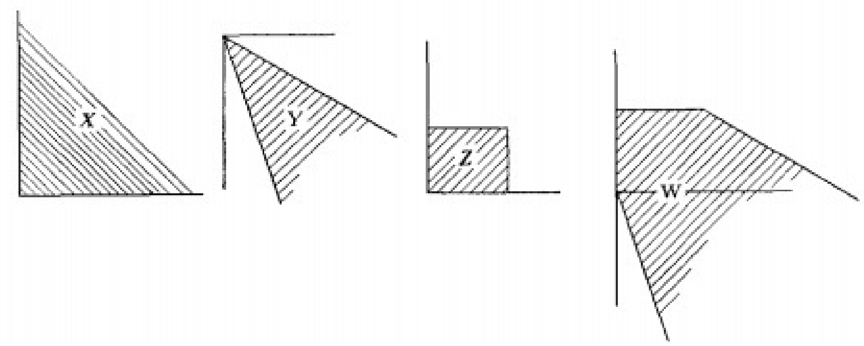
Konačno, definišemo **skup potrošnje** X^i, čija je jedina svrha da omogući potrošnju željenog dobra do neograničenih razmera. Zbog toga je:

$$X^i \equiv \{x \mid x_i \geq 0 \quad \text{i} \quad x_{i'} = 0 \quad \text{za} \quad i' \neq i\} \tag{4.2.3}$$

nenegativna poluosa, koja odgovara željenom dobru.

Za poredak preferencija na skupu X^i važi da je više u stvari bolje: $x \succeq_i \overline{x}$ za $x, \overline{x} \in X^i$ ako i samo ako $x_i \geqq \overline{x}_i$.

Zbirni skup potrošnje $X = \sum X^i$ je tada zatvoren pozitivni oktant u potprostoru željenih dobara. Forme zbirnih skupova X, Y, Z, W su prikazane na sledećoj slici u dvodimenzionom prostoru za svaki skup.



Slika 4.4

Razmotrimo ponovo Primer 9. iz poglavlja 3. sa napomenom da krzno i rad spadaju u kategoriju primarnih dobara, koža u srednje dobro, a cipele su željena dobra.

Na primer, proizvodnja 1 jedinice cipela, koristi $\frac{1}{4}$ kože i $\frac{1}{2}$ jedinice (dana) rada, a krzno se ne koristi uopste, dok proizvodnja 1 jedinice kože koristi $\frac{1}{10}$ jedinice rada i jedno krzno. Odavde je:

$$a^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix}, \qquad a^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ako ekonomija radi intenzitetom:

$$\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

rezultujuća aktivnost:

$$y = A\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ -4.2 \end{bmatrix},$$

koristi 4.2 dana rada i 2 krzna da se proizvede 8 cipela i nijedna jedinica kože. Matrica A je fiksirana pomoću tehnologije, dok su različite kombinacije aktivnosti određene različitim izborima intenziteta za vektor ξ.

Koordinate vektora, odnosno tačke y u prostoru dobara, pišemo takvim redosledom da su željena dobra prva, zatim srednja i onda primarna:

$$y = \begin{pmatrix} y_{des} \\ y_{int} \\ y_{pri} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu toga i matrica A ima sličnu strukturu:

$$A = \begin{pmatrix} A_{des} \\ A_{int} \\ A_{pri} \end{pmatrix}.$$

"Ravnotežni vektor izbora" se sada sastoji od vektora $x_{des} \geq 0$, izlaza željenih dobara (izbori potrošača), vektora $\xi \geq 0$ nivoa aktivnosti (koji izražava izbore proizvođača) i vektora z_{pri}, koji predstavlja resurse iz prirode sa osobinom $0 \leq z_{pri} \leq \zeta_{pri}$ (predstavljaju izbore vlasnika resursa), tako da važi:

$$\begin{pmatrix} x_{des} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{des} \\ A_{int} \\ A_{pri} \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{pri} \end{pmatrix}.$$

Uslov dalje implicira da izbori proizvođača, predstavljeni pomoću ξ, određuju preostale izbore x_{des} i z_{pri} pomoću:

$$x_{des} = A_{des}\xi \qquad z_{pri} = -A_{pri}\xi.$$

Sada je jednostavnije da govorimo o ostvarivim kombinacijama aktivnosti kao što je vektor ξ tako da važi:

$$A_{des}\xi \geqq 0 \qquad A_{int}\xi = 0 \qquad -\zeta_{pri} \leqq A_{pri}\xi \leqq 0 \tag{4.2.4}$$

Tada se koncept Pareto optimuma prevodi u efikasnu kombinaciju aktivnosti. Ne proizvodi se ništa manje bilo kog željenog dobra nego što je kompatibilno sa količinom svih drugih proizvedenih dobara i sa datom tehnologijom i ograničenjima resursa. Formalno, efikasna kombinacija aktivnosti je ostvariva kombinacija aktivnosti ξ, takva da ne postoji ostvariva kombinacija $\overline{\xi}$, za koju je:

$$A_{des}\overline{\xi} \geqq A_{des}\xi \quad i \quad (A_{des}\overline{\xi})_i > (A_{des}\xi)_i, \quad za \quad neko \quad i. \tag{4.2.5}$$

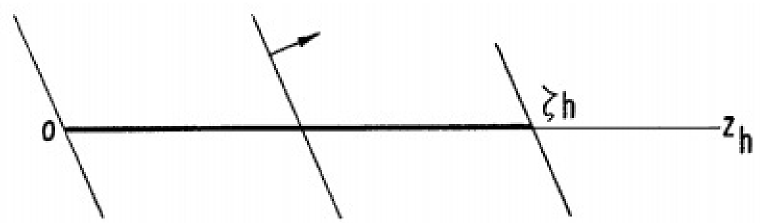
Rezultujuća tačka izlaza $y = A\xi$ se zove **efikasna tačka** za Y.

Ovim je predstavljen pojam o produktivnoj efikasnosti u preobraćanju dostupnih resursa u željena dobra. Ako postoji jedno željeno dobro, onda je produktivna efikasnost jednaka maksimiziranju izlaza tog dobra.

Konkurentna ravnoteža se sada naziva raspodela uslovljena cenom. Da bismo proučavali ovaj pojam u trenutnom kontekstu, prvo ispitujemo maksimizaciju profita na nabavnom skupu, na osnovu datog vektora cena p.

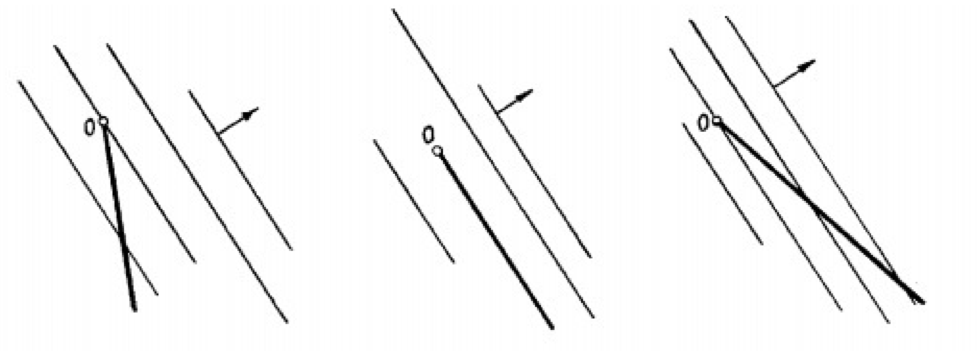
Svrha vektora cena p je da odredi familiju "paralelnih" hiper-ravni $py = k$, (gde je $p = (p_1, ..., p_n)$ i py je unutrašnji proizvod) gde je na svakoj hiper-ravni ukupan profit konstantan.

Na skupu resursa, ako je odgovarajuća koordinata vektora cena pozitivna, maksimalan profit za imaoce resursa znači upotrebu resursa do njihove granice dostupnosti; ako je negativna, nema upotrebe uopšte, a ako je nula, vlasnik radi ono što smatra da je najbolje za njega (hiper-ravni su tada "paralelne" sa linijom koja sadrži skup). To je predstavljeno sledećim grafikom:



Slika 4.5

Proizvodni proces može biti neprofitabilan (maksimalan profit kada proces nije uopšte iskorišten) ili profitabilan (maksimum nije moguć) ili je možda poništen (profit je uvek nula, nezavisno od nivoa aktivnosti). Grafički prikazujemo:



Slika 4.6

Raspodela uslovljena cenom je tada vektor cena p i intenzitet vektora ξ, takav da:

(1) Nijedan proces u tehnologiji nije profitabilan $pa^j \leq 0, \ \forall j$.

(2) Svi procesi koji se vrše sa pozitivnim intenzitetom se poništavaju: $pa^j = 0$ kad god je $\xi_j > 0$.

(3) Sva primarna dobra pozitivnih cena su iskorištena u potpunosti: $z_h = \zeta_h$, ako je $p_h > 0$ i h je primarno, dok primarna dobra negativnih cena nisu iskorištena: $z_h = 0$, ako $p_h < 0$ i h primarno.

(4) Sva željena dobra imaju pozitivne cene: $p_i > 0$, ako je i željeno.

Upoređivanje konkurentne ravnoteže i raspodele uslovljene cenom pokazuje da se ovim uslovima konkurentna ravnoteža prevodi u specijalne uslove modela linearne aktivnosti. Ovde uslov (4) ne važi za izbor x^i, $i-$tog potrošača. Postoje dva razloga za to: prvo ako je (4) zadovoljen, onda bilo koji izbor $x^i \in X^i$ zadovoljava uslov 4.1.1 u definiciji konkurentne ravnoteže; drugo ako (4) nije zadovoljen, nijedan izbor ne zadovoljava taj uslov.

Pošto je pojam Pareto optimuma zamenjen pojmom efikasnih kombinacija aktivnosti, a pojam konkurentne ravnoteže zamenjen pojmom raspodele uslovljene cenom, sada prilagođavamo i teoreme, vezane za Pareto optimum i konkurentnu ravnotežu, novim pojmovima.

Teorema 4.2.1. *(Specijalizacija teoreme 4.1.1)*
Dat je vektor cena p takav da je:

$$p_{des} > 0 \quad i \quad pA \leq 0. \tag{4.2.6}$$

Tada je efikasna kombinacija aktivnosti bilo koji ostvariv vektor intenziteta ξ takav da važi:

$$(pA)_j = 0 \quad kad \quad god \quad je \quad \xi_j > 0 \tag{4.2.7}$$

$$(A\xi)_h = \left\{ \begin{array}{ccc} \zeta_h & ako & p_h > 0 \\ 0 & ako & p_h < 0 \end{array} \right\} \quad za \quad h \quad primarno. \tag{4.2.8}$$

Treba napomenuti da ako je $pA < 0$, onda trivijalno $\xi = 0$ predstavlja efikasnu kombinaciju. Zato u interesantnijim primerima postoje neki $j-$ovi za koje je $(pA)_j = 0$.

Teorema 4.2.2. *(Specijalizacija teoreme 4.1.3)*
Vektor p se može kombinovati sa bilo kojom efikasnom kombinacijom aktivnosti ξ tako da važe (4.2.6), (4.2.7) i (4.2.8).

Teorema 4.2.1 je direktna specijalizacija teoreme 4.1.1, ali teorema 4.2.2 govori malo više od teoreme 4.1.3. Ona tvrdi da je $p_{des} > 0$, umesto $p_{des} \geq 0$.

Zbog poliedarskog karaktera skupova koji se ovde spominju, moguće je pojačati rezultate na sledeći način.

U dokazu teoreme 4.1.3, imali smo:

$$Y \cap X^{\circ}(x^1, ..., x^n) = \emptyset.$$

Sada se za ovu implikaciju, umesto Y uzima W, a $x^1, ..., x^n$ predstavljaju izbore potrošača.

Zbog (4.2.3), svaki takav izbor x^i je sada jedinstveno određen pomoću njihove sume:

$$x \equiv \sum_{i \in I} x^i = \begin{pmatrix} x_{des} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gde je I skup oznaka željenih dobara, pa možemo pisati:

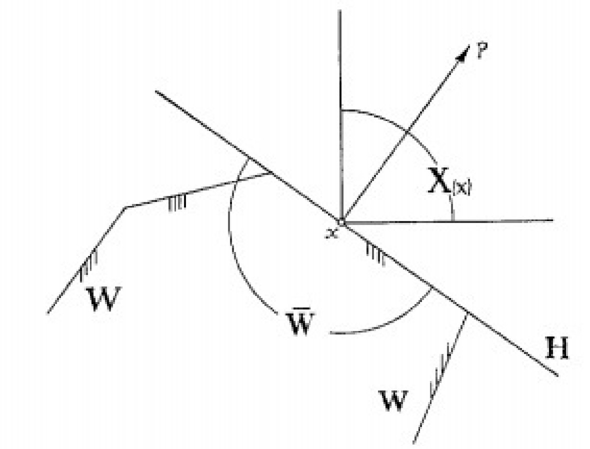
$$W \cap X^{\circ}(x) = \emptyset,$$

gde je:

$$X^{\circ}(x) = \{\overline{x} \mid \overline{x} \geq x\} \quad \text{i} \quad X(x) = \{\overline{x} \mid \overline{x} \geqq x\}.$$

Zbog toga:

$$W \cap X(x) = \{x\}. \tag{4.2.9}$$



Slika 4.7

gde je $X(x)$ izmešten oktant u potprostoru željenih dobara (zbog toga je to konveksni poliedarski konus).

Skup W je konveksni poliedarski skup, koji može da se proširi najmanje do konusa sa vrhom u x, ako definišemo skup:

$$\overline{W} \equiv \{\varpi \mid \varpi = x + \lambda(\omega_0 - x)\}, \text{ za } \quad \text{neko } \omega_0 \in W \text{ i neko } \lambda \geq 0. \tag{4.2.10}$$

Na osnovu toga važi:

$$\overline{W} \cap X(x) = \{x\}. \tag{4.2.11}$$

A to važi zato što, ako $\varpi \in \overline{W} \cap X(x)$ tako da je $\varpi \neq x$, takođe važi $\omega_0 \in W \cap X(x)$ gde je $\omega_0 \neq x$ zbog konstrukcije (4.2.10) skupa $\overline{W}$ i konveksnosti skupa $X(x)$. Ali ovo dovodi do kontradikcije sa (4.2.9), pa zbog toga važi (4.2.11).

Ako modifikujemo posledicu 3.2.2 u glavi 3. dobijamo hiper-ravan H koja razdvaja $\overline{W}$ i $X(x)$, tako da $X(x)$ ima jedino tačku x zajedničku sa H. To jest, vektor cena p definisan pomoću ove hiper-ravni, sa odgovarajućim izborom znaka, zadovoljava uslov da je $p_{des} > 0$.

Mnoge primene imaju ili jedno željeno dobro (često profit) ili jedno primarno dobro (troškove). U prvom slučaju problem je maksimizirati izlaz jednog željenog dobra pod ograničenjima dostupnosti primarnog dobra (ili pod ograničenjem nultog ukupnog izlaza za srednja dobra).

U drugom slučaju se može razmatrati minimizacija ulaza jednog primarnog dobra za određene izlaze željenih dobara. U oba slučaja postoji problem linearnog programiranja i teoreme 4.2.1 i 4.2.2 su ekvivalentne sa tvrđenjem da su problem linearnog programiranja i njegov dual ili oba rešiva ili nijedan.

Razmatramo primer prve vrste problema linearnog programiranja iz [9].

PRIMER 11. *Fabrika automobila i kamiona ima:*

- *kapacitet pečatiranja lima za* 25000 *automobila ili* 35000 *kamiona za mesec dana,*
- *kapacitet sklapanja motora za* 33333 *automobila ili* 16667 *kamiona za mesec dana,*
- *kapacitet sastavljanja automobila od* 22500 *za mesec dana i*
- *kapacitet sastvaljanja kamiona od* 15000 *kamiona za mesec dana.*

Treba maksimizirati prihod dobiti. Bruto profit po automobilu (profit pre naplate za korištenje ovih kapaciteta) je 300 *dolara, a bruto profit za kamione je* 250 *dolara.*

Ovo je problem linearnog programiranja. Treba maksimizirati funkciju:

(a)
$$300\xi_1 + 250\xi_2 = y_1$$
prodaje automobila ξ_1 i prodaje kamiona ξ_2, gde su ograničenja predmeta prodaje $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ i ograničenja kapaciteta:

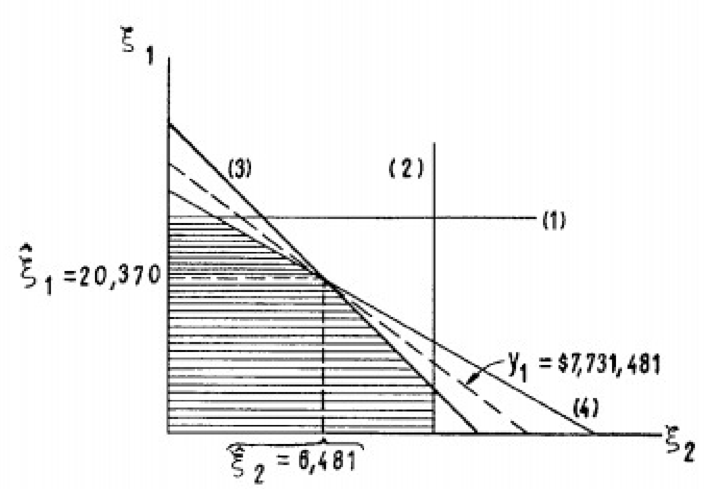
(b)
$$\xi_1 \leq 22500$$

(c)
$$\xi_2 \leq 15000$$

(d)
$$\frac{\xi_2}{35000} + \frac{\xi_1}{25000} \leq 1$$

(e)
$$\frac{\xi_2}{16667} + \frac{\xi_1}{33333} \leq 1$$

Rešenje je prikazano na sledećem grafiku:



Slika 4.8

Pre nego što se postave pitanja vezana za analizu aktivnosti odgovarajućeg proizvodnog procesa, modifikujemo prethodne relacije tako da upotreba kapaciteta bude izražena u procentima dostupnih kapaciteta umesto u apsolutnim iznosima, dok su nivoi prodaje zamenjeni nivoima proizvodnje izraženim u jedinicama od 1000 automobila ili kamiona. Konvertujemo prethodne nejednakosti u jednačine uvodeći nenegativne nivoe $\xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8$ raspoloživih aktivnosti.

Sada odgovarajuća tehnologija ima jedno željeno dobro (prihod), dva srednja dobra (automobile i kamione) i četiri primarna dobra (četiri kapaciteta).

Umesto (b), (c), (d), (e), pored (a), imamo:

(a')

$$\xi_1 = 1000\xi_3, \quad \xi_2 = 1000\xi_4$$

(b')

$$4.44\xi_3 + \xi_7 = 100$$

(c')

$$6.67\xi_4 + \xi_8 = 100$$

(d')

$$4\xi_3 + 2.86\xi_4 + \xi_5 = 100$$

(e')

$$3\xi_3 + 6\xi_4 + \xi_6 = 100$$

Postoji osam procesa (četiri za odstranjenje neiskorištenih frakcija kapaciteta), kako je naznačeno u sledećoj tabeli, gde praznine predstavljaju koeficijente jednake nuli. Iz ove tabele možemo očitati matricu tehnologije. A iz ranijih relacija (a)-(e) i iz Dorfmanove grafičke rasprave znamo da je intenzitet vektora za maksimiziranje profita:

$$\widehat{\xi} = (20370; 6481; 20.37; 6.48; 0; 0; 9.55; 56.8)^T.$$

Proizvod matrice tehnologije i inteniziteta vektora $\widehat{\xi}$ daje vektor neto izlaza:

$$\widehat{y} = A\widehat{\xi} = (7731000; 0; 0; -100; -100; -100; -100)^T.$$

	Prodaja		Proizvodnja		Rashodovanje				ζ	p
	1	2	3	4	5	6	7	8		
1. prihod	300	250								1
2. automobili	-1		1000							300
3. kamioni		-1		1000						250
4. % kap. peč.			-4	-2.86	-1				100	68093
5. % kap. skl. mot.			-3	-6		-1			100	9209
6. % kap. skl. aut.			-4.44				-1		100	0
7. % kap. skl. kam.				-6.67				-1	100	0
$\hat{\xi}$	20370	6481	20.37	6.48	0	0	9.55	56.8		

Efikasna kombinacija aktivnosti $\widehat{\xi}$ iskorištava sve resurse, proizvodi 7731000 dolara bruto profita i nema srednjih dobara.

Da bismo potvrdili Dorfmanovo rešenje, koristimo cene koje on uračunava za svako od sedam dobara, dodeljujući $p_1 = 1$ proizvoljno i tako daje cene u dolarima.

Cene su određene iz uslova da je svaka aktivnost jednako iskorištena, to jest, ima nula profit. Zbog toga:

$$300p_1 + (-1)p_2 = 0 \quad pa \quad je \quad p_2 = 300$$

$$250p_1 + (-1)p_3 = 0 \quad pa \quad je \quad p_3 = 250$$

$$-1p_6 = 0 \quad pa \quad je \quad p_6 = 0$$

$$-1p_7 = 0 \quad pa \quad je \quad p_7 = 0$$

$$1000p_2 + (-4)p_4 + (-3)p_5 = 0$$

$$1000p_3 + (-2.86)p_4 + (-6)p_5 = 0$$

$$pa \quad je \quad p_4 = 68093 \quad i \quad p_5 = 9209.$$

Cene p_4 i p_5 tako dobijene nisu povezane sa tržištem u kom se nije trgovalo tim dobrima. To su sredstva procene vrednosti trenutnog programa za 1% svakog od dva deficitarna kapaciteta. Napominjemo da su za isti program ostala dva kapaciteta besplatna (to jest, ne vredi proširivati kad nisu iskorišteni do svojih granica u ovom programu).

Takođe možemo koristiti izračunate cene da razmotrimo želju, recimo, za ulaskom u proizvodnju i prodaju džipova (pretpostavljajući da se kapacitet sastavljanja kamiona može iskoristiti za njihovo sastavljanje). Uvodimo nove dve kolone 2' i 4' i novu vrstu 3', sa elementima koji nisu jednaki nuli. To je detaljnije objašnjeno u [6], a nije značajno za naše dalje istraživanje, pa ga ovde nećemo objašnjavati.

5

Analiza aktivnosti u ekosistemu

U ovoj glavi će biti predstavljena rasprava izneta u [8]. Navešćemo metod koji izvodi cene za prirodna dobra, na osnovu informacija o kretanjima materijala i energije u okviru ekosistema.

Izvođenje je zasnovano na analogiji između ekoloških i ekonomskih sistema, zato što su oba sistema okarakterisana tokovima materijala i energije.

Da bi se izvele cene ekosistema, primenjuje se matematička struktura Kupmanovog modela ekonomske linearne proizvodnje, njegove analize aktivnosti na model tokova materijala u ekosistemima.

Algoritam za izračunavanje cena je izveden i predstavljen numeričkim primerom. Na kraju se razmatra da li cene ekosistema mogu biti pogodne kao surogati za ekonomsku procenu prirodnih dobara.

5.1 Upoznavanje sa procesom

Procena prirodnih dobara je jedan od glavnih problema ekološke ekonomije. Sudeći po standardnoj neoklasičnoj ekonomskoj teoriji, procene dobara su određene preferencijama pojedinaca, a te preferencije su određene njihovim ekonomskim odlukama na tržištima. Ipak se ne može očekivati da ljudi analiziraju ponašanje ekosistema kada donose ekonomske odluke. Na osnovu toga sledi da preferencije pojedinaca sigurno ne utiču na sve što su naučnici otkrili o funkcionisanju ekosistema.

Bilo bi ipak korisno, da se naučna otkrića uvrste u ekonomsku procenu prirodnih dobara, a način kako to da se ostvari se razmatra u ovom poglavlju.

Ideja je da se izvedu cene prirodnih dobara na osnovu informacija o tokovima materijala i energije u okviru ekosistema. Ovo proizvodi surogate za ekonomske cene koje ćemo zvati "cene ekosistema". U slučaju da pouzdane ekonomske cene nisu dostupne, mogu se iskoristiti cene ekosistema, da bi se dobile ukupne informacije o proizvodnji u ekosistemu.

Ovde ćemo razviti model ekosistema koji uzima matematičku strukturu teorije ekonomskih cena i primenjuje je na ekosisteme. Neophodno je da se matematička struktura ekonomskog modela može predstaviti i ekološki na verodostojan način.

Tokovi materijala i energije su nešto što je zajedničko i za ekološki i za ekonomski sistem. Jedina razlika je u tome što su u ekosistemima ti tokovi izazvani prisilnim davanjem, dok je kod ekonomskih sistema reč o dobrovoljnoj razmeni.

Ova razlika između ekonomskih i ekoloških sistema ometa potragu za ekonomskim modelom cena pogodnim za odgovarajuću ekološku interpretaciju, jer je pojam razmene jako bitan za teoriju ekonomskih cena.

Ipak, postoje teorije o ekonomskim cenama koje nisu bazirane na razmeni, nego na dualnosti količine i vrednosti. Do sada postoje dva pristupa u literaturi, koji se eksplicitno bave izvođenjem cena u ekosistemima, zasnovanim na dualnosti:

1. Hanon, kako je navedeno u [8], koristi ulaz-izlaz analizu

2. Amir, takođe navedeno u [8], je bazirao svoj model ekosistema na modelu opšte linearne proizvodnje.

Hanon prikazuje da cene mogu biti izvedene u ekosistemu ako se pretpostavlja ravnoteža sektorskog bilansa, to jest, vrednost izlaza u svakom sektoru jednaka je vrednosti ulaza.

Razvijena je, takođe i dinamična verzija, gde se cene izvode iz empirijskih ekosistemskih podataka. Ali ni ova verzija modela nije potpuna, jer se pretpostavlja da postoji samo jedan tip ne-proizvodnih ulaza, a mnogi ekosistemi zavise, recimo, ne samo od uložene sunčeve svetlosti, već i od kiše ili određenih hranljivih materija, koje ne proizvode ti ekosistemi. Takođe se pretpostavlja da svaka komponenta ekosistema proizvodi samo jedan izlaz. To znači da, ako biljke predstavljaju komponente ekosistema u određenom modelu, ne bi bilo moguće razlikovati izlaze "drvo", "materijal mrtvih biljaka", "voće", itd.

U poređenju sa pristupom ulaz-izlaz, model opšte linearne proizvodnje, ima izvesnu prednost, jer u tom modelu svaka komponenta može imati nekoliko izlaza, a ekosistem može imati nekoliko ne-proizvodnih ulaza. Ipak, i ovaj model opšte linearne proizvodnje ima neke nedostatke, na primer nije istraženo koji predmet na odgovarajući način opisuje ponašanje ekosistema. Koji podaci su potrebni za izračunavanje cena i kako se izračunavanje izvodi i na kraju, kako se cene mogu numerički izračunati iz empirijskih podataka.

Da bi svi nedostaci, navedeni u prethodnim modelima, bili uklonjeni razvija se novi model.

Cilj tog modela je da kritički proceni podobnost cena ekosistema, koje su surogati ekonomske procene prirodnih dobara. Struktura modela pretpostavlja:

-Prvo će se objasniti osnovne strukture modela i posebno kako se matematička struktura može proračunati ekološki.

-Zatim se koriste rezultati Kupmana da se izvedu cene u predstavljenom modelu ekosistema.

-Razmotra se značaj izvedenih cena i jedinstvenost cenovnog sistema.

-Razvija se algoritam za izračunavanje cena i demonstrira izračunavanje numeričkim primerom.

-Konačno, razmatra se novi model ekosistema i upoređuje sa tradicionalnim metodama procene. I predstavljaju se ograničenja i mogućnost uvođenja pojma cena ekosistema s obzirom na procenu prirodnih dobara.

5.2 Izvođenje cena u ekosistemima

Model ekosistema, koji je predstavljen, se zasniva na modelu opšte linearne proizvodnje, koji je zahtevao vezu između efikasnosti i cena, korišten u opštoj teoriji jednakosti. Za razliku od opšte teorije jednakosti, Kupmanov model u pogledu potrošnje ima jednostavnu strukturu. On koristi efikasnost proizvodnje kao jedini kriterijum za raspodelu. Ovo omogućava da se cene izvedu koristeći jedino strukturu proizvodnje. To je na primer, mreža tokova materijala i energije između sektora ekonomije.

Dakle, posmatramo ekosistem kao mrežu gde su čvorovi komponente ekosistema, a veze između čvorova su tokovi usluga. Postoji nekoliko mogućnosti šta sve možemo smatrati komponentama, a šta uslugama.

Prvo posmatramo usluge:

-Mogu biti više ili manje ukupne: energija, pojedinačna hemijska jedinjenja (kiseonik, ugljen-dioksid, voda, itd.) i agregati (biljna biomasa i životinjska biomasa).

-Ekonomski pandan uslugama, koje se kreću između komponenata ekosistema su dobra.

Komponente ekosistema su mesta gde se usluge koje ulaze u čvorove koriste u proizvodnji, a usluge za druge komponente, koje izlaze iz čvorova se proizvode. Živa bića ili grupe živih bića se posmatraju kao komponente ekosistema.

Ekonomski pandan komponentama ekosistema su ekonomski učesnici ili grupe ekonomskih učesnika, na primer, ekonomski sektor. U ovom modelu komponente ćemo zvati aktivnostima, da bi se poklopilo sa Kupmanovom notacijom.

Dalje će se objasniti kako je modelirana proizvodnja, na primer kako su tokovi usluga transformisani među aktivnostima.

Pod uslugama podrazumevamo:

1. Primarne faktore (sunčeva svetlost, voda i neke hranljive materije) okarakterisani činjenicom da je više uvezeno nego izvezeno.

2. Konačne proizvode (na primer, biomasa) čija je proizvodnja predmet procesa transformacije.

Izvođenje cena usluga u ekosistemu zahteva da se ekosistem ponaša tako da maksimizira neto izlaze konačnih proizvoda. Konačni proizvodi su, u stvari, željene usluge. Mogu postojati još neželjene usluge ili neutralne usluge.

U ovom modelu zanemaruje se postojanje neželjenih usluga.

Dakle, usluge su ili primarni faktori i neutralna dobra ili konačni proizvodi, odnosno željena dobra, koja smo definisali u poglavlju 3.2.

Pretpostavljamo homogenost i separabilnost usluga. Pošto je ovaj model ekosistema statičan, nema potrebe da vremenski period bude određen. Sa y_i će se označiti cela mrežu izlaza usluge i ekosistema u jednom periodu. Ako je y_i negativna, onda neto izvoz usluge i prelazi količinu proizvedenu u ekosistemu.

Postoji n usluga, gde usluge sa indeksom $i = 1, ..., r$ predstavljaju konačne proizvode, a usluge sa indeksom $i = r + 1, ..., n$ su primarni faktori. Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ označava vektor neto-izlaza ekosistema, a pišemo:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y_1}, ..., \mathbf{y_r}, \mathbf{y_{r+1}}, ..., \mathbf{y_n})^\mathbf{T} = (\mathbf{y^{fin}}, \mathbf{y^{pri}})^\mathbf{T}$$

Formulacija procesa transformacije primarnih faktora u konačne proizvode u biotičkoj i abiotičkoj prirodi je najbitnija u našem modelu ekosistema.

Aktivnosti predstavljaju osnovne jedinice transformacije. Određena kombinacija usluga tokom perioda dolazi do aktivnosti i tu se konvertuje u izlaze.

To se može pokazati kroz primer, ako je komponenta biljka, ona uzima vodu i hranljive materije iz zemljišta i iz sunčeve svetlosti i razvija biomasu kroz fotosintezu. Biomasa se kasnije, možda, distribuira među biljojede.

Pretpostavimo strukturu linearne proizvodnje: aktivnosti neto-izlaza su proporcionalne sa svojim nivoom proizvodnje, pa a_{ij} predstavlja neto količinu usluge koja se proizvodi po jednom periodu, aktivnošću j, $j = 1, ..., m$ po jedinici nivoa proizvodnje.

Nivo proizvodnje $j-$te aktivnosti se označava sa x_j, gde je $x_j \geq 0$. Neto-izlaz $j-$te aktivnosti usluge i y_i^j je izražen sa $y_i^j = a_{ij}x_j$. Kako se isti izlaz može proizvesti pomoću različitih aktivnosti, neto-izlaz y_i čitavog ekosistema je:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j.$$

Ako su koeficijenti a_{ij} uređeni u matrici $A = [a_{ij}]$ dimenzije $m \times n$, može se onda napisati da je $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, gde je $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_m})^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{m}}$.

Neto-izlaz ekosistema je tada linearna funkcija nivoa proizvodnje. Ova jednačina opisuje sve moguće procese transformacija u ekosistemu. Da bi se odredilo koji neto-izlazi su ostvarivi, moramo uzeti u obzir restrikcije primarnih faktora. U ovom modelu pretpostavlja se da je uvoz primarnih faktora potpuno ograničen. Ova pretpostavka je tačna. Recimo da količinu sunčeve svetlosti koju koriste biljke, ne može odrediti ekosistem, već egzogeni faktori kao što je intenzitet zračenja sunca, kao i oblast i ugao tog zračenja. Ograničenja primarnih faktora su:

$\eta_i \leq y_i$ za $i = r + 1, ..., n$, gde je η_i negativno.

Kako su primarni faktori identični sa neto-uvozima ekosistema za $i = r + 1, ..., n$, onda važi $y_i \leq 0$, dok za sve druge usluge koje predstavljaju konačne proizvode $i = 1, ..., r$ važi $y_i \geq 0$.

Da bismo pojednostavili obeležavanje, definišemo:

$$\eta = (\mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \eta_{\mathbf{r+1}}, ..., \eta_{\mathbf{n}})^{\mathbf{T}} = (\mathbf{0}^{\mathbf{fin}}, \eta^{\mathbf{pri}})^{\mathbf{T}}, \ \ \textbf{gde je } \eta \leq \mathbf{0},$$

pa se ograničenja primarnih faktora mogu sumirati kao $\eta \leq \mathbf{y}$.

Sada se može definisati skup ostvarivih neto-izlaza, odnosno skup neto-izlaza koji se mogu proizvesti datom linearnom tehnologijom i ograničenjima primarnih faktora.

Definicija 5.2.1. *Neto-izlaz $y \in \mathbb{R}^n$ je ostvariv ako:*

1. *Postoji nivo proizvodnje $x \geq 0$ tako da se neto-izlaz može proizvesti datom tehnologijom, to jest, $y = Ax$.*
2. *Ograničenja primarnih faktora $y^{pri} \geq \eta^{pri}$ važe.*
3. *Nijedan konačan proizvod se ne koristi kao neto-ulaz. To jest, $y^{fin} \geq 0$.*

Skup $Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax, \ x \geq 0, \ y \geq \eta = (0^{fin}, \eta^{pri})^T\}$ predstavlja skup ostvarivih neto-proizvoda.

Skup ostvarivih neto-proizvoda je konveksan.

Centralni pojam modela ekosistema je efikasnost. Pojam efikasnost u ovom modelu se koristi uz pojam efikasnost proizvodnje, koji se razlikuje od pojma Pareto efikasnosti.

Definicija 5.2.2. *Ostvariva tačka $y \in Y$ se zove efikasna ako ne postoji ostvariva tačka $y' \in Y$, koja sadrži u svim komponentama konačnih proizvoda dovoljno veliku količinu i u bar jednoj komponenti konačnih proizvoda propisno veću količinu u odnosu na y. To jest, $y'^{fin} - y^{fin} \geq 0$.*

U ovom modelu, pretpostavka za izvođenje cena ekosistema je da je cilj ekosistema proizvodnja što je više moguće konačnih proizvoda. Jedan način određivanja cilja ekosistema je pojam efikasnosti. Ali umesto pojma efikasnosti, cilj raspodele ekosistema se može okarakterisati pomoću funkcije cilja, koja svakom neto-izlazu dodeljuje određenu vrednost, predstavljajući želju za njim.

Koristiće se ponderisana suma neto-izlaza konačnih proizvoda kao funkciju cilja. Efikasnost i maksimizacija funkcije cilja su usko povezani u modelu ekosistema. Ako funkcija cilja pokazuje da je više izlaza bolje nego manje, onda je efikasnost neophodan uslov da ostvarivi neto-izlaz maksimizira funkciju cilja. Efikasnost je čak i dovoljan uslov ako se pretpostavlja određena funkcija cilja. Tačnije, ako su ponderi konačnih proizvoda funkcije cilja odgovarajuće definisani i ako ostvarivi neto-izlaz maksimizira funkciju cilja, onda taj neto-izlaz mora biti efikasan. Ekvivalencija efikasnosti i maksimizacije odgovarajuće definisane funkcije cilja je vrlo važna za sledeću teoremu. Teorema dozvoljava da se formulišu uslovi za tumačenje pondera konačnih proizvoda funkcije cilja kao cene ekosistema. Pre teoreme još treba navesti razliku između oskudnih i besplatnih primarnih faktora.

Neka je:

$$y = (y^{fin}, y^{pri})^T$$

ostvariv neto-izlaz. Možemo zapisati i na drugi način:

$$y = (y^{fin}, y^{pri}_{=}, y^{pri}_{>})^T,$$

gde $y^{pri}_{=}$ sumira oskudne faktore, a $y^{pri}_{>}$ sumira besplatne faktore. Ovu podelu ćemo iskoristiti i za vektore cena određenih neto-izlaza. U ekonomiji, cena za besplatne primarne faktore je nula, a cena za oskudne primarne faktore je pozitivna, ali nula u ekstremnim slučajevima. Cene u našem modelu će imati iste osobine. Vektor cena sa tim osobinama se zove **dopustiv**.

Definicija 5.2.3. *Vektor cena koji je dodeljen ostvarivom neto-izlazu je dopustiv ako važe sledeći uslovi:*

$$p^{fin} > 0, \;\; p^{pri}_{=} \geq 0 \;\; i \;\; p^{pri}_{>} = 0.$$

Teorema 5.2.1. *Neto-izlaz $y*\in Y$ je efikasan ako i samo ako postoji dopustiv vektor cena $p \in \mathbb{R}^n$ tako da je y^* rešenje problema optimizacije:*

$$\max_{y \in Y} \; p^{fin\,T} y^{fin}.$$

Dokaz

Da bi se razumeo ovaj model ekosistema, dovoljno je dati osnovnu ideju dokaza teoreme.

Neka je y^* efikasan neto-izlaz. Glavni zadatak je da se nađe dopustiv vektor p takav da je y^* rešenje problema optimizacije.

S tim u vezi, razmatramo skup C svih tačaka $y \in \mathbb{R}$, koje imaju znatno veći neto-izlaz konačnih proizvoda u odnosu na y^* i takođe zadovoljavaju ograničenja primarnih faktora:

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n | y^{fin} - y^{*\,fin} \geq 0 \;\; i \;\; y \geq \eta\}.$$

Skup C nije zatvoren i $y^* \notin C$, zato sto ne važi $y^{*fin} \geq y^{fin}$. Zatvaranje $\overline{C}$ skupa C je konveksni konus čije je teme tačka y^*. Ivice konusa $\overline{C}$ leže paralelno sa osom grafika u pozitivnom smeru (figura 1). Skup C, kao i skup dopustivih neto-izlaza Y su konveksni. Pošto je y^* efikasan, skupovi C i Y su disjunktni. Zbog toga, postoji hiper-ravan H koja razdvaja skupove C i Y. Ova hiper-ravan je jedinstveno određena pomoću normalnog vektora p na neto-izlaz y^* usmerenog ka C:

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid p^T y = p^T y^*\} \text{ (Slika 5.1).}$$

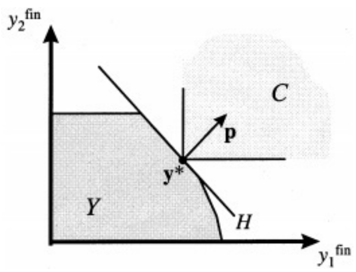
Videćemo da je p željeni vektor cena. Pretpostavimo na momenat da je p dopustiv vektor cena, na osnovu definicije 5.2.3. Svi $y \in Y$ se sadrže u poluprostoru $H_Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid p^T(y - y^*) \leq 0\}$. Pošto je $p_>^{pri} = 0$ i po definiciji $y_=^{*pri} = \eta_=^{pri}$, za sve $y \in Y$ važi:

$$0 \geq p^T(y - y^*) = p^{finT}(y^{fin} - y^{*fin}) + p_=^{priT}(y_=^{pri} - y_=^{*pri}) + p_>^{priT}(y_>^{pri} - y_>^{*pri}) = p^{finT}(y^{fin} - y^{*fin}) + p_=^{priT}(y_=^{pri} - \eta_=^{pri}).$$

Ali nijedan $p_=^{pri}$, ni $y_=^{pri} - \eta_=^{pri}$ nisu negativni, tako da je

$$0 \geq p^{finT}(y^{fin} - y^{*fin}), \text{ za sve } y \in Y.$$

Zbog toga je y^* zaista rešenje problema optimizacije. Još ostaje da se dokaže da se hiper-ravan može izabrati tako da je normalan vektor p dopustiv. Ovaj deo dokaza je od manjeg značaja za razumevanje cena ekosistema.



Slika 5.1

Željeni dopustiv vektor cena p je normalan vektor na hiper-ravan koja razdvaja skup svih ostvarivih neto-izlaza Y i skup C. □

Ova teorema se može primeniti na ekosisteme da bi se izvele cene pod određenim okolnostima. Potreban uslov, za izvođenje cena ekosistema je da pretpostavljena struktura linearne proizvodnje i ograničenja primarnih faktora, opisuju procese transformacije u razmatranom ekosistemu. Pretpostavke treba da se provere od strane ekoloških studija. Nakon ovoga, potrebno je potvrditi da li je empirijski posmatran neto-izlaz ekosistema y^* efikasan. Ovo će biti pokazano u sledećem poglavlju. Ako se pokaže da je efikasan, onda se cene mogu izvesti.

Sudeći po teoremi, efikasnost posmatranog neto-izlaza je ekvivalentna tvrđenju: "Ekosistem ostvaruje neto-izlaz sa najvišom ukupnom vrednošću, pomoću linearne tehnologije i sa ograničenjima primarnih faktora."

Ukupna vrednost neto-izlaza se računa najpre dodavanjem vrednosti p_i tokovima usluga, a onda njihovim sabiranjem. Ponderi funkcije cilja se mogu tumačiti kao cene tokova usluga.

Ako usluga i ima cenu p_i, to znači da će dodatna jedinica usluge i voditi do povećanja funkcije cilja jačine p_i. Cene ekosistema su jedinstveno određene strukturom procesa transformacije u okviru ekosistema i ograničenjima primarnih faktora.

Opšte je prihvaćeno da je ukupna vrednost neto-izlaza funkcije cilja više ili manje pokazatelj društvenog bogatstva.

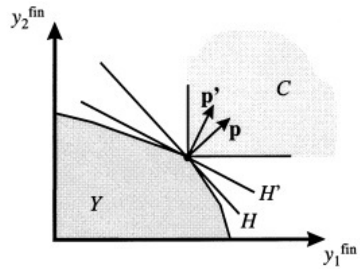
Da bi se koristile cene ekosistema kao surogati za ekonomsku procenu prirodnih dobara, interpretacija pondera se mora zasnivati na sličnoj bazi: empirijske ekološke studije treba da provere da li je pretpostavka tačna, odnosno da li postoji korespodencija između funkcije cilja i dobrobiti posmatranog ekosistema. Odavde je jasno da će se cenovni sistem nekog drugog ekosistema znatno razlikovati i neće biti uporediv.

Za izvođenje cena potrebno je da postoji ostvarivi neto-izlaz. Postojanje se može pokazati pretpostavkom "nema zemlje Dembelije", odnosno nije moguće dobro proizvoditi bez ulaza. Pretpostavka isključuje nerealan slučaj proizvodnje bez ulaza, a to je da ne postoji nivo proizvodnje $x \geqq 0$ takav da je $y = Ax \geq 0$. A na osnovu prethodnog, vidimo da se uzima u obzir, bar delimično, Prvi zakon termodinamike, odnosno princip očuvanja mase i energije.

U svom modelu, Kupman ipak ne isključuje mogućnost "ulaz bez izlaza". Ova pretpostavka "besplatnog odlaganja" je u kontradikciji sa principom očuvanja mase i energije. Problem koji može nastati je dvosmislenost vektora cena, a to istražujemo u nastavku.

Jedinstvenost vektora cena bi bilo željeno dobro, ako recimo želimo da iskoristimo cene za sastavljanje različitih prirodnih usluga u jedinstvenu vrednost ukupne proizvodnje. Ali se može desiti da cene izvedene iz ovog modela nisu jedinstvene.

Slika 5.2. pokazuje situaciju gde postoji beskonačno mnogo mogućnosti da se smesti hiper-ravan između skupa Y i skupa C i na osnovu toga, i mnogo različitih vektora cena.



Slika 5.2

Ipak, za datu situaciju se može proveriti da li postoji jedinstven cenovni sistem. Ako posmatramo tokove usluga između komponenti ekosistema, možemo izračunati početak i neke delove poliedra ostvarivih tačaka. Ako posmatrani neto-izlaz y^* ne leži u početku ili na ivici poliedra, već u unutrašnjosti nekih delova, cenovni sistem je jedinstven. U ovom slučaju normalan vektor na neki od tih delova (usmeren ka C) je jedinstven vektor cena.

5.3 Računanje cena ekosistema

Primenjivost modela ekosistema, koji je razvijen u prethodnom poglavlju usko zavisi od toga da li se cene mogu izvesti iz posmatranih podataka. Pretpostavimo da je moguće posmatrati neto-izlaz pojedinačnih aktivnosti.

U ovom poglavlju će se razviti algoritam za određivanje cena. Prvo će se opisati princip računanja cena koristeći jednostavan primer. Dalje će se pojasniti opšti pristup za računanje cena i razmatrati teškoće koje mogu da se jave.

PRIMER 12. *Razmatramo ekosistem sa tri aktivnosti i tri vrste usluga. Sve tri aktivnosti su populacije biljaka koje proizvode biomasu koristeći sunčevu svetlost i hranljive materije. Biomasa je u ovom slučaju konačan proizvod, dok su sunčeva svetlost i hranljive materije primarni ulazi. Posmatramo sledeće neto-izlaze:*

	Biljka 1	Biljka 2	Biljka 3	Ukupno
Sunčeva svetlost	-2	-1	-1	-4
Hranljive materije	-4	-3	-1	-8
Biomasa	4	3	1	8

Srednje kolone predstavljaju neto-izlaze y^1, y^2, y^3, a to su aktivnosti biljke 1, biljke 2 i biljke 3.

Poslednja kolona odgovara neto-izlazu y^* celog ekosistema i predstavlja sumu izlaza y^1, y^2, y^3.

Prvi korak u računanju cena je da se izvede matrica transformacije A ekosistema, iz ovih podataka. Koeficijenti matrice a_{ij} se računaju formulom

$$y_i^j = a_{ij}x_j.$$

Ako pretpostavimo da je nivo proizvodnje jednak 1 za sve aktivnosti, onda je $y_i^j = a_{ij}$ i važi za sve i i j. Na osnovu toga, posmatrani podaci se mogu sumirati koristeći sledeću jednakost:

$$Ax^* = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} = y^*.$$

Matrica $A = [a_{ij}]$ opisuje procese transformacije koji su u principu mogući, uzimajući u obzir pretpostavku o linearnosti. Skup:

$$\overline{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax \text{ za neko } x \geqq 0\}$$

svih neto-izlaza koji se mogu proizvesti pomoću ove tehnologije (zanemarujući ograničenja primarnih faktora), formira konveksni konus koji se prostire po vektorima kolona $a^1, ..., a^m$ matrice A. Vrh konusa leži u koordinatnom početku grafika.

Nisu svi neto-izlazi mogući. Na primer, oni koji leže u konusu $\overline{Y}$ su zaista ostvarivi, pošto je dostupnost primarnih faktora ograničena.

Pretpostavimo da neto-izlaz y^*, u našem primeru u potpunosti koristi oba primarna faktora, sunčevu svetlost i hranljive materije. Zbog toga se ograničenja faktora mogu opisati vektorom $\eta = (-4, -8, 0)^T$. Skup ostvarivih izlaza Y se tada sastoji od onih tačaka y konveksnog konusa $\overline{Y}$ koje zadovoljavaju uslov $y \geq \eta$:

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax \text{ za neko } x \geq 0 \; i \; y \geq \eta\}.$$

Naredni korak izračunavanja cena je određivanje početka poliedra Y. Željeni vektor cena je normalan vektor na hiper-ravan između skupa:

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^{end} - y^{*end} \geq 0, \; y \geq \eta\}$$

i konveksnog poliedra Y u posmatranom neto-izlazu y^*.

Ako je tačka y^* efikasna i leži na stranici F poliedra Y, tada ta stranica određuje hiper-ravan (slika 5.1). Normalan vektor na stranicu F je tada normalan vektor na hiper-ravan i zbog toga vektor cena ekosistema. Da bi se izračunao vektor cena, prvo se moraju odrediti početak i stranice poliedra

Y. Stranica kojoj pripada y^* se onda mora ispitati. Odgovarajući normalni vektori predstavljaju odgovarajući cenovni sistem.

U našem primeru, za temena poliedra važi činjenica da aktivnost vrši proizvodnju na najvišem mogućem nivou. Maksimalan nivo proizvodnje aktivnosti j rešava problem optimizacije:

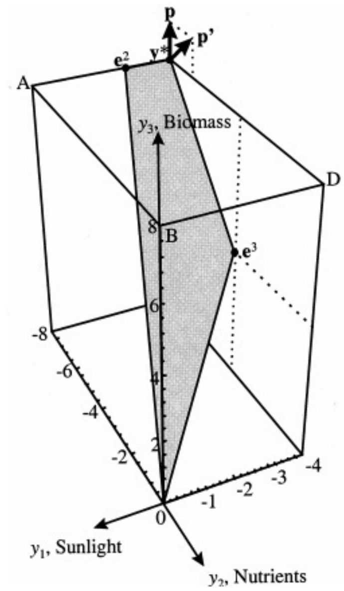
$$\max_x \; x_j \text{ zavisno od } Ax \geq \eta.$$

Dobijamo za prvu, drugu i treću aktivnost maksimalne nivoe proizvodnje: $x^1 = (2,0,0)^T, x^2 = (0, \frac{8}{3}, 0)^T, x^3 = (0,0,4)^T$. Odatle računamo temena e^1, e^2 i e^3 poliedra Y:

$$e^1 = Ax^1 = (-4,-8,8)^T, \;\; e^2 = Ax^2 = (-\tfrac{8}{3}, -8, 8)^T \text{ i}$$
$$e^3 = Ax^3 = (-4,-4,4)^T.$$

Četvrto teme je koordinatni početak grafika $0 = (0,0,0)^T$. Teme e^1 je identično sa posmatranim neto-izlazom y^*. Figura 3 prikazuje poliedar Y kao i tačku y^*. Sva četiri elementa su smeštena u ravni, pa je tako trodimenzionalni poliedar sveden na dvodimenzionalni četvorougao.

Da bi se ovo razumelo, mora se shvatiti da slučaj $y^* = e^1$ može biti određen aktivnošću 1, sa nivoom proizvodnje 2 (to jest, $x = (2,0,0)^T$), kao i sa sve tri aktivnosti na jediničnom nivou proizvodnje (to jest, $x = (1,1,1)^T$). Zbog toga su aktivnosti a^1, a^2, a^3, one koje određuju poliedar Y linearno zavisne, to jest, pripadaju istoj biljci.



Slika 5.3

Ovde je izabran primer sa tri usluge, da bi bilo moguće grafički prikazati poliedar. Da bi se izbegao problem, postavljeno je da su aktivnosti linearno zavisne. Ako imamo primer sa dva primarna faktora i jednim konačnim dobrom, poželjno je da su aktivnosti linearno zavisne, jer u suprotnom, posmatrani neto-izlaz ne može biti efikasan, pa se zbog toga ne bi mogao izvesti sistem cena.

Kako se vidi na slici, svi efikasni neto-izlazi leže na liniji koja povezuje e^1 sa e^2, zato što jedino ti neto-izlazi dostižu biomasu sastavljenu od osam jedinica. Zbog toga se potvrđuje da je $y^* = e^1$ efikasan.

Sada postoje sve informacije koje su potrebne da bi se odredili dopustivi vektori cena. Na slici 5.3. se takođe može smatrati da je vektor $p = (0, 0, 1)^T$, takođe dopustiv vektor cena, jer ravan H_p, definisana pomoću p, razdvaja u tački y^* poliedar Y od skupa C. Hiper-ravan H_p je paralelna sa osama koje predstavljaju "sunčevu svetlost" i "hranljive materije" u četvorougaonoj ravni $ABDy^*$. U numeričkom primeru, vektor cena nije jedinstven, zato što efikasni neto-izlaz y^* leži u temenu e^1. Nije moguće naći primer sa tri usluge gde je posmatrani neto-izlaz efikasan i njemu odgovarajući sistem cena jedinstven, zato što jedinstvenost zahteva linearnu nezavisnost aktivnosti, a iz toga dalje sledi neefikasnost.

Ravan koja se prostire između tačaka $0, e^1, e^2$ i e^3, takođe razdvaja skup Y od skupa C. Odgovarajući vektor cena p' je normalan na vektore e^1 i e^2, to jest, vrednost vektora p' je rešenje $(0, 1, 1)^T$, sistema linearnih jednačina:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4, & -8, & 8 \\ -\frac{8}{3}, & -8, & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor p' je takođe dopustiv vektor. Cena primarnih hranljivih materija je na p' (za razliku od p), a ne u nuli.

Svi dopustivi vektori cena su predstavljeni konveksnom kombinacijom vektora p i p', to jest, mogu se napisati u formi $(0, \theta, 1)^T$, gde je $0 \leq \theta \leq 1$. Cena primarnog faktora sunčeve svetlosti je 0, a pošto je to besplatni faktor, to znači marginalno smanjenje korištene sunčeve svetlosti, neće voditi do smanjenja proizvedene biomase.

Opšti algoritam za izračunavanje cena iz datih podataka je sledeći:

Prvi korak: Neto-izlaz y^* celog sistema se izračunava iz posmatranih neto-izlaza pojedinačnih aktivnosti.

Drugi korak: Ograničenja primarnih faktora η se moraju odrediti na bazi ekoloških znanja ekosistema. Na primer, ograničenja primarnog faktora "kiše" se može odrediti količinom posmatranih padavina. Pošto bi bilo teže konstatovati ostala ograničenja (na primer, količinu uvezenih hranljivih materija), korisnije je pretpostaviti da posmatrani neto-izlaz y^* u potpunosti iscrpi takva ograničenja.

Treći korak: Temena i ravni poliedra Y se moraju izračunati i normalni vektori se moraju odrediti za svaku ravan. Kada se to izračuna, onda su vektori dopustivi, na osnovu definicije 5.2.3 i moraju se izvesti iz konačnog skupa normalnih vektora $\{p^1, ..., p^r\}$

Četvrti korak: Sada se mora proveriti da li je posmatrani neto-izlaz y^* efikasan, jer se postavlja pitanje da li samo u ovom slučaju postoji hiperravan koja razdvaja skup Y i efikasni konus C u tački y^*. Na osnovu teoreme 5.2.1, y^* je efikasan ako i samo ako postoji dopustiv vektor cena, takav da je y^* rešenje problema

$$\max_{y \in Y} p^{fin} y^{fin}.$$

Da bi se proverilo da li je y^* efikasan, dovoljno je proveriti konačni skup dopustivih normalnih vektora $\{p^1, ..., p^r\}$. Tada su moguća tri slučaja:

1. Ne postoji vektor u skupu $\{p^1, ..., p^r\}$ takav da y^* rešava problem optimizacije. Tada y^* nije efikasan i ne može se izvesti sistem cena.

2. Postoji tačno jedan vektor p^k u skupu $\{p^1, ..., p^r\}$ takav da y^* rešava problem optimizacije. Tada je p^k jedinstven dopustiv vektor cena.

3. y^* rešava problem optimizacije za vektore $p^{k_1}, ..., p^{k_l}$ u skupu $\{p^1, ..., p^r\}$. Tada su svi vektori iz konveksnog skupa $p^{k_1}, ..., p^{k_l}$ dopustivi sistemi cena za y^*.

Prvi slučaj u kom y^* nije efikasan je delimično nepouzdan. Ovaj slučaj se može isključiti dodatnom pretpostavkom: ako svaka aktivnost proizvede samo jedan konačan proizvod, koji nije proizveden nijednom drugom aktivnošću i ako su sva ograničenja primarnih faktora potpuno iskorištena, tada je y^* uvek efikasan. Ako je nivo proizvodnje bilo koje aktivnosti povećan, tada se, zbog ograničenja faktora, nivo proizvodnje nekih aktivnosti nužno mora smanjiti i zbog toga se izlaz odgovarajućeg konačnog proizvoda smanjuje. Ipak, da li ekosistem ima smisla zavisi od verodostojnosti ove pretpostavke.

Glavni rezultat predstavljenog modela, je da se cene za usluge ekosistema mogu izvesti, ako je posmatrani neto-izlaz efikasan. Cene ekosistema su određene jedino strukturom procesa transformacije ekosistema i ograničenjima primarnih faktora. Ako je empirijski potvrđeno da je posmatrani neto-izlaz efikasan, po opisanoj metodi i ako se pokaže da su pretpostavke modela ekološki pouzdane, masa empirijskih podataka se može transformisati u prikupljene informacije o sveukupnom stanju ekosistema. Takve prikupljene informacije o ekosistemima mogu podržati donošenje odluka u politici zaštite životne sredine.

Predstavljeni model trenutno sadrži broj ograničenja i mana, koje će biti ispravljene u daljem istraživanju:

1. Postoje pretpostavke: funkcija cilja, koja ovde ima naziv "ukupna vrednost neto-izlaza" predstavlja dobrobit ekosistema i struktura linearne prozivodnje i ograničenja primarnih faktora predstavljaju procese prirodne transformacije. Ako su ovde dve pretpostavke tačne, tada cene ekosistema predstavljaju doprinos neto-izlaza za dobrobit ekosistema.

2. Postoji slučaj da posmatrani neto-izlaz nije efikasan, pa se sistem cena ne može izvesti. Pod određenim uslovima, takav slučaj se može izbeći, ali primenjeni model tada mora biti ekološki verodostojan.

3. Može se desiti da izvedeni cenovni sistem nije jedinstven. Ako su cene ekosistema iskorištene da procene probleme životne sredine, drugačiji cenovni sistemi mogu dovesti do kontradiktornih situacija.

4. Može se desiti da se model tumači kao kvazi-statičan. To znači da je funkcija cilja kratkoročna i zavisi jedino od tokova trenutnog perioda. Međtim, ovakva analiza ne dozvoljava da se istraže posledice promena koeficijenata tokom vremena. Na primer, jedna takva posledica je da se akcije prirodnog kapitala ne mogu reflektovati na model, ali je njihova izgradnja i eksploatacija važna za opis prirodnih procesa.

5. Mogu se desiti i strukturne promene u modelu, kao što su pojava ili nestanak komponenata, migracije novih vrsta i lokalno istrebljenje drugih. Ako se struktura ekosistema promeni, odgovarajući cenovni sistemi se ne mogu uporediti.

I pored svega ovoga, neoklasične metode procene prirodnih dobara se susreću sa ozbiljnim teškoćama i teoretskim slabostima, te je bitno razmotriti pitanja do kog stepena su cene ekosistema, izvedene ranije, odgovarajuće za procenu prirodnih dobara. Isto tako, bitno je pitanje koje su prednosti, a koje mane upoređivanja cena ekosistema sa metodama procene iz neoklasične teorije?

Da bi se odgovorilo na ova pitanja, mora se shvatiti da cene, izvedene u modelima ekosistema, nisu bazirane na istom kriterijumu procene kao neoklasična teorija, već na metodološkom individualizmu. To znači, da jedino ljudi, a ne država, zajednica ili priroda, određuju vrednost i donose odluke. Suprotno tome, cene ekosistema se ne mogu direktno pratiti sve do procena pojedinaca. Ako su odluke donešene koristeći samo cene ekosistema, to bi naškodilo principu metodološkog individualizma. Zbog toga, cene ekosistema nisu sredstvo procene u tradicionalnom ekonomskom smislu. Procene su izvedene nezavisno od ljudi. Ipak, ne postoji direktna veza između cena ekosistema i procena od strane pojedinaca. To znači da cene ekosistema ne mogu biti direktno upoređene sa ekonomskim cenama. Šta više, cene ekosistema ne mogu dati direktne preporuke za aktivnosti društva, pošto one odražavaju funkcionalne veze u ekosistemu, a ne direktno želje društva. Ipak, prikupljene informacije o funkcionalnim vezama svakako olakšavaju proces donošenja odluka.

Cene koje se izvedu na ovaj način, mogu se koristiti kao surogati za ekonomske cene. Ovo se posebno mora uzeti u obzir, ako ne postoji tržište za prirodna dobra i ako su odgovarajuće neoklasične metode procene preskupe ili su rezultati nezadovoljavajući.

Da zaključimo, veruje se da je izvođenje cena u ekosistemu od pomoći za donošenje odluka, ako tradicionalne metode ekonomske procene nisu uspešno primenjene. Ipak, potrebno je više istraživanja pre nego što se cene ekosistema puste u praktičnu upotrebu. Posebno, ekosistemske studije se moraju preduzeti da bi se empirijski potvrdilo da model pozitivno opisuje ponašanje sistema i da cene pozitivno prikazuju funkcionisanje ekosistema.

Zaključak

Analiza aktivnosti podrazumeva rešavanje problema linearnog programiranja. Rešava se problem optimalne proizvodnje. Da bi se to na adekvatan način predstavilo, u prvom delu rada je uvedena glavna teorema funkcionalne analize, Han-Banahova teorema i u obliku proširenja i u obliku separacije. Uz nju su predstavljene ostale teoreme funkcionalne analize, u drugoj glavi rada.

Posebno interesantna primena funkcionalne analize na analizu aktivnosti koristi Han-Banahovu teoremu u obliku separacije. Dakle, u trećoj glavi se povezuje teorema separacije sa Minkovski-Farkaš Lemom. Traže se rešenja problema linearnog programiranja i kao najpoželjniji rezultat se može dobiti tačka efikasnosti.

Detaljan problem linearnog programiranja je opisan u četrtom delu rada, pri čemu se koristi proizvodni skuo, data su ograničenja resursa i za efikasan neto-izlaz (tačku efikasnosti) traži se vektor cena. Taj vektor cena je normalan na hiperravan, koja razdvaja proizvodni skup od skupa potrošača, a dolazi u tačku efikasnosti.

Na kraju rada, na savremenom konkretnom primeru je predstavljen algoritam izračunavanja cena. Zaključeno je da se sistem cena može izvesti u slučaju da je vektor cena jedinstven, a uslov za to je da aktivnosti u proizvodnom procesu budu linearno zavisne.

Literatura

[1] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, Birkhauser, Boston, 2011.

[2] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, TEMPUS CD JEP 17017-2002, 2006.

[3] Lj. Gajić, *Teorija optimizacije*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1988.

[4] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, 1996.

[5] Akira Takayama, *Mathematical Economics*, The Dryden Press, Hinsdale, Illinois, 1974.

[6] T. C. Koopmans and A. F. Bausch, *Selected Topics in Economics Involving Mathematical Reasoning*, SIAM Review, Vol. 1, No. 2(1959.), pp. 79-148.

[7] S. H. Kulharni, *Hahn-Banach Theorems*, *http://www.mat.iitm.ac.in/home/shk/public_html/hahn.pdf*

[8] Bernd Klauer, *Ecosystem prices: activity analysis applied to ecosystems*, ELSEVIER, Ecological Economics 33(2000.), pp. 473-486.

[9] Dorfman Robert, [1953], *Mathematical or 'linear' programming: a nonmathematical exposition*, American Economic Review, December 1953. pp. 797-825.

Biografija

Jelena Petričević je rođena 21. avgusta 1987. godine u Bijeljini. Završila je Osnovnu školu "Sveti Sava" i gimnaziju "Filip Višnjić" u Bijeljini. 2006. godine je upisala osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Studije je završila u junu 2010. godine sa prosečnom ocenom 8,13. Iste godine je upisala master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, na istom fakultetu. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2011. godine, položila je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 8,35. U periodu od septembra 2011. do januara 2013. godine, radila kao profesor matematike u gimnaziji "Filip Višnjić" u Bijeljini.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Jelena Petričević
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Osnovne teoreme funkcionalne analize i primene u analizi aktivnosti
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2013
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/106/0/3/1/26/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalana analiza i Optimizacija
ND

Ključne reči: tačka efikasnosti, razdvajajuća hiper-ravan, analiza aktivnosti, Pareto optimum, konkurentna ravnoteza
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi određivanjem hiperravni koja razdvaja dva skupa i na njoj tačku efikasnosti u koju dolazi vektor cena pod pravim uglom.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 27.03.2012.
DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Jelena Petričević
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: Fundamental theorems of Functional Analysis and applications in activity analysis
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2013
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (5/106/0/3/1/26/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional analysis and Optimization
SD

Subject/Key words: efficiency point, separating hiperplane, activity analysis, Pareto optimum, competitive equilibrium
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis is about determination of hiperplane and efficiency point, in which comes normal price vector
AB

Accepted by the Scientific Board on: 27.03.2012.
ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ljiljana Gajić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Zorana Lužanin, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad