UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Gordana Miljanić

VaR i upravljanje kreditnim rizikom

- završni rad -

Novi Sad, 2010

Sadržaj

1. Uvod

Na savremenim finansijskim tržištima finansijske organizacije izložene su brojnim rizicima. Razlozi mogu biti različiti: nedovoljna diversifikacija poslovanja, sklonost ka ulaženju u rizične, a profitabilne aranžmane, potresi na berzama i globalne finansijske krize. Finansijski rizik se ispoljava na dva načina, u materijalnom i nematerijalnom obliku. Materijalna komponenta predstavlja gubitak dela ili celog iznosa ulaganja, a nematerijalna predstavlja gubitak poslovnog ugleda.

Rizik se uopšteno definiše kao neizvesnost budućeg ishoda, nestabilnost zbog neočekivanih rezultata. Rizici mogu biti različiti, a jedna od širih podela je na poslovne i neposlovne rizike. Poslovni rizici su posledica faktora poslovnog okruženja, uključujući tehnološke inovacije, razvoj proizvoda i marketing, dok su neposlovni rizici vezani za ekonomsko i političko okruženje i finansijske institucije ne mogu da ih kontrolišu. Dakle, u finansijskom poslovanju, rizik bi se mogao definisati kao mogućnost da plasirana sredstva neće zaraditi očekivanu stopu prinosa, odnosno da će nastati gubitak u konkretnom poslu.

Očekivani gubici su kolebanja u vrednosti koja se mogu predvideti na osnovu raspoloživih informacija, dok su neočekivani gubici moguća odstupanja od očekivanih gubitaka (ili dohodaka) i oni su razlog nastajanja rizika. Na primer, neočekivani gubici nastaju usled: neočekivanih kolebanja cena na tržištu, neočekivanih padova kreditnog rejtinga i stopa neizvršenja vraćanja zajmova koja je veća od očekivane (npr. koja nastaje kao rezultat ekonomske krize), neočekivano veliki broj grešaka pri obradi zahteva koje prouzrokuju ozbiljnu štetu.

Finansijski rizici su rizici povezani sa mogućim gubitkom na finansijskom tržištu. Mogu se klasifikovati u pet kategorija:

- tržišni rizik – rizik zbog nestabilnosti tržišnih cena finansijskih instrumenata usled promene kamatnih stopa, deviznih kurseva i cene akcija,
- kreditni rizik – rizik da partner u finansijskoj transakciji neće ispuniti svoju ugovorom preuzetu finansijsku obavezu,
- rizik likvidnosti – rizik da finansijska organizacija ne poseduje dovoljno likvidnih sredstava za izmirenje dospelih obaveza ili da dođe do neočekivanih odliva likvidnih sredstava,
- operativni rizik – rizik koji se javlja usled grešaka ili nepredviđenih događaja u toku izvršavanja poslovnih aktivnosti čiji uzrok mogu biti ljudski ili tehnički faktori,
- zakonski rizik – rizik usled neodgovarajućih zakona za rešavanje pravnih pitanja koja se odnose na bankarsko poslovanje.

Jedan od najznačajnijih i najčešće pominjanih finansijskih rizika u teoriji i praksi jeste rizik u bankarstvu. Rizici u poslovanju banaka su karakteristika svakog bankarskog posla. Bankarstvo je ušlo u proces ubrzanih promena, naročito na planu bankarskog menadžmenta i tehnologije poslovanja, što je dovelo do jačanja bankarskih rizika. Takođe, na razvoj rizika uticala je i nestabilnost na finansijskim tržištima. Rizik predstavlja svaku neizvesnu situaciju u poslovanju banaka, odnosno verovatnoću gubitka (smanjenje dobitka) nastalu kao rezultat neizvesnih događaja u poslovanju banaka. Da bi se rizik izbegao ili barem doveo u prihvatljive granice, potrebno je analizirati ga i upravljati njime. Analiza treba da ukaže na ključne tačke i procese nastanka rizika. Upravljanje rizicima je proces kojim se identifikuju, mere, prate i kontrolišu izloženosti različitim vrstama rizika. Regulisanje rizika, kao krajnji cilj celog procesa proučavanja rizika, zahteva poznavanje faktora koji određuju visinu i prirodu rizika sa kojim se u svom poslovanju sreću finansijske organizacije.

U uslovima povećane konkurencije i rasta rizika bankarski menadžment ima zadatak da stvori poslovnu politiku s ciljem da se obezbedi kontrola ukupnih rizika i ostvari profit. Upravljanje rizicima predstavlja deo poslovne politike banke, prati sve poslovne aktivnosti koje imaju rizičan profil i može se definisati kao funkcija osiguranja banke od rizika. Pod uprvljanjem rizikom podrazumeva se skup aktivnosti:

- identifikacija izloženosti riziku uz procenu potencijalnih gubitaka;
- procena rizika koja obuhvata merenje i analizu gubitaka u prošlosti, kako bi se procenile promenljive koje će uticati na budućnost;
- kontrola rizika u smislu smanjenja ili eliminisanja rizika gubitka primenom svih vrsta obezbeđenja;
- finansiranje rizika obezbeđenjem rezervi, uključujući i osiguranje;
- razvoj administrativnih tehnika i korišćenje stručnih znanja.

Identifikacija je najbitniji korak u upravljanju rizikom i zato postoji snažna potreba za preciznom definicijom svih izvora rizika. Kada se jednom identifikuju faktori rizika, može se proceniti izloženost riziku kao i uticaj i posledice te izloženosti riziku na poslovanje banke. Procena se odnosi na definisanje statističkih modela za kvantifikovanje mogućih dobitaka ili gubitaka koji nastaju kao rezultat kretanja faktora rizika. Ovaj model se zasniva na povezanom skupu pretpostavki. Pod kontrolom rizika podrazumeva se obnavljanje informacija i izveštavanje o procenama, dok smanjenje rizika ima za cilj da se dostigne optimalan odnos između rizika i prihoda.

Osnovni ciljevi upravljanja bankarskim rizikom su optimizacija odnosa rizika i prinosa, da bi se izbegla nesolventnost banke i da se maksimizira stopa prinosa na kapital uz korekciju rizika. Ukoliko bi rizici banke bili potcenjeni, to bi negativno uticalo na profitabilnost banke jer bi stvarni gubici obarali stopu prinosa na kapital ispod očekivanog nivoa.

Banke uvećavaju prihode preuzimanjem rizika i upravljanjem njime. Stoga je za profitabilnost banke od presudnog značaja upravljanje odnosom rizika i prihoda. Premije rizika koje se ostvare u svakodnevnom poslovanju služe za amortizovanje očekivanih gubitaka, dok vlastiti kapital banke služi za pokrivanje neočekivanih gubitaka. U upravljanju rizikom možemo reći da ključni cilj unutar jedne finansijske institucije predstavlja jasno razumevanje rizika i izloženosti riziku i to tako da monetarni gubici uvek budu prihvatljivi za banku. Prihvatljivost bilo kojeg gubitka treba da se zasniva na takvim pojedinačnim gubicima koje očekujemo da će izrasti iz svake pojedinačne poslovne aktivnosti. Ako bankarska institucija efikasno upravlja rizikom neće biti preteranih reagovanja na bilo koje neočekivane gubitke.

Značajnu ulogu u upravljanju rizicima međunarodnog bankarskog i ostalog finansijskog sektora ima Bazelska komisija za nadzor banaka (*Basel Committee on Banking Supervision*). Svojim Sporazumima (kratko nazvanim Bazel) [1], Komisija je uspostavila jedinstven i čvrst sistem za ocenu poslovne politike i rizika banaka. Bazel je postao opšte prihvaćen standard od značaja za finansijske tokove i investicionu politiku. Ovim sporazumom uvodi se i definiše pojam minimalnog zahtevanog kapitala koji mora biti ispunjen kako bi se banke zaštitile od rizika.

U ovom radu najpre će biti opisane metode koje Bazelska komisija definiše za merenje cene ukupnog rizika banke. Najviše pažnje biće posvećeno alternativnoj metodi za računanje minimalnog zahtevanog kapitala, koju nudi Bazelski sporazum, a koja je zasnovana na meri rizika VaR (V*alue at Risk*). Detaljno će biti definisan VaR kao mera rizika i objašnjene najznačajnije metode za njeno izračunavanje. Akcenat će biti na primeni VaR metodologije u upravljanju kreditnim rizikom, jer je kreditni rizik najznačajniji rizik kome je banka izložena u svom poslovanju.

1.1 Lista oznaka

R	skup realnih brojeva
$\varnothing$	prazan skup
N	skup prirodnih brojeva
K	kapital
A_r	rizikom ponderisana aktiva
C_c	cena kreditnog rizika
C_t	ukupna cena rizika
C_m	cena tržišnog rizika
O_p	očekivani prinos
A_i	vrednost *i*-te aktive
Φ	funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$
R_p	prinos portfolija
S_o	vrednost sredstava obezbeđenja
$P(X \leq x)$	verovatnoća da slučajna promenljiva X uzima vrednost manju od x

1.2 Pregled definicija i teorema

Definicija 1. Funkcija P: $\mathcal{A} \to [0,1]$ za koju važi da je

i. $P(S) = 1$, gde je S skup mogućih ishoda;

ii. $P(A) \geq 0$ za svaki slučajan događaj $A \in \mathcal{A}$;

iii. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ za događaje $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,2,\ldots,n,\ldots$ takve da je $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ za svako $i \neq j$, $i, j = 1,2,\ldots,n,\ldots$

je funkcija verovatnoće, a $P(A)$ je verovatnoća slučajnog događaja A.

Definicija 2. Neka je $\mathcal{A}$ podskup partitivnog skupa Ω. Skup $\mathcal{A}$ je σ-algebra nad Ω ako su zadovoljeni uslovi:

i. $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii. ako $S \in \mathcal{A}$, tada i $\overline{S} \in \mathcal{A}$,

iii. ako je $\{S_i\}_{i \in \mathrm{N}} \subseteq \mathcal{A}$, tada $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{A}$.

Definicija 3. Neka je skup S skup mogućih ishoda, skup događaja $\mathcal{A}$ σ-algebra događaja nad S i P funkcija verovatnoće. Uređena trojka (S, $\mathcal{A}$, P) je prostor verovatnoće.

Definicija 4. Slučajna promenljiva U nad prostorom verovatnoće (S, $\mathcal{A}$, P) je funkcija $U : S \to \mathbf{R}$ za koju važi da je za svako $u \in \mathbf{R}$

$$\{s | U(s) \leq u\} \in \mathcal{A}.$$

Definicija 5. Funkcija raspodele slučajne promenljive U nad prostorom verovatnoće (S, $\mathcal{A}$, P), u oznaci F_U, je preslikavanje skupa $\mathbf{R}$ u skup $[0,1]$ definisano sa $F_U = P(U \leq u)$.

Definicija 6. Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive definišemo sa:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

Definicija 7. Neka su U_1 i U_2 slučajne promenljive nad prostorom verovatnoće (S, $\mathcal{A}$, P) i neka su σ_1 i σ_2 njihova standardna odstupanja. Koeficijent korelacije U_1 i U_2 je

$$\rho = \frac{E(U_1U_2) - E(U_1)E(U_2)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Definicija 8. Normalna raspodela $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sa očekivanjem $\mu \in \mathbf{R}$ i standardnim odstupanjem $\sigma > 0$ je određena gustinom raspodele

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

gde je $x \in \mathbf{R}$.
Ako je $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ onda je to standardna normalna raspodela.

Definicija 9. Neka je X slučajna promenljiva sa matematičkim očekivanjem $E(X)$. Varijansa ili disperzija slučajne promenljive X se definiše kao matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promenljive X od matematičkog očekivanja,

$$D(X) = E(X - E(X))^2.$$

Kvadratni koren iz varijanse naziva se standardnom devijacijom

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Definicija 10. Neka je data slučajna promenljiva X i naka je $F(x)$ njena funkcija raspodele. Neka je q realan broj iz intervala $(0,1)$. Kvantil reda q je svaki broj $x_0 \in \mathbf{R}$ za koji važe nejednakosti $F(x) \leq q$ i $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) \geq q$.

Definicija 11. Neka je X diskretna slučajna promenljiva i r strogo pozitivan broj. Tada ja:
- r-ti momenat: $\mu_r = E(X^r)$, ukoliko $E(X^r)$ postoji;
- r-ti centralni momenat: $m_r = E((X - E(X))^r)$, ukoliko $E(X^r)$ postoji.

Definicija 12. Matematičko očekivanje slučajne promenljive X je prvi momenat.

Definicija 13. Drugi centralni momenat nazivamo varijansom (disperzijom) slučajne promenljive X.

Teorema 1. (Čebiševljeva nejednakost) Neka je X slučajna promenljiva sa konačnim očekivanjem $E(X)$ i disperzijom $D(X)$. Tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Teorema 2. (Centralna granična teorema) Neka je (X_n) niz slučajnih promenljivih sa istom raspodelom, matematičkim očekivanjem $E(X_n) = m$, i konačnom disperzijom $D(X_n) = \sigma^2 > 0$. Ako je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ onda za svako $x \in$ **R,** kada $n \to \infty$, važi:

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt .$$

Ovo se može formulisati i ovako:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

Definicija 14. Stohastički proces je familija slučajnih promenljivih $\{X(t), t \in T\}$ definisana na datom prostoru verovatnoće.

Definicija 15. Stohastički proces $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ je stacionaran ako za svako $n \in \mathcal{N}$, za svaki izbor trenutka $t_1, \dots, t_n$ i svako $u \in \mathrm{R}$, slučajne promenljive $X(t_1), \dots, X(t_n)$ i $X(t_1 + u), \dots, X(t_n + u)$ imaju jednake funkcije raspodele.

Definicija 16. Braunovo kretanje je stohastički proces $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ koji ima sledeće osobine:

- $X(0) = 0$,
- za svako $t = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n$, priraštaji $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ su nezavisne slučajne promenljive,
- $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ je stacionaran proces,
- za svako $0 \le s \le t$, slučajna promenljiva $X(t) - X(s)$ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, t - s)$

2. Rizik i Bazelski standardi

Tokom sedamdestih i osamdesetih godina prošlog veka mnogi događaji uticali su na nestabilnost finansijskog tržišta, [2]. Ustaljen sistem devizih kurseva je narušen 1971. godine i zamenjen je fleksibilnim i promenljivim kursevima. Cena nafte je porasla 1973. godine praćena visokom inflacijom i velikim oscilacijama u kamatnim stopama. Na tzv. Crni ponedeljak, 19. oktobra 1987. godine cene američkih akcija su pale za 23%, što je uzrokovalo smanjenje kapitala za 1 bilion dolara.

Svi ovi i slični događaji motivisali su Bazelsku komisiju za nadzor banaka da 1988. godine sastavi i objavi međunarodni sporazum o kapitalu banaka (*Basel Capital Accord*) poznat kao Bazel I. Svrha Bazel I standarda bila je uvođenje uniformnog načina za računanje adekvatnosti kapitala, a u cilju jačanja finansijske stabilnosti. Jedan od razloga za uvođenje ovog sporazuma bio je da se izjednače uslovi pod kojima banke posluju na globalnom tržištu. Sporazum je zaključen 15. jula 1988. godine između centralnih banaka iz Grupe 10 zemalja (Belgija, Kanada, Francuska, Nemačka, Italija, Japan, Holandija, Švedska, Velika Britanija i SAD). U njemu su definisani jedinstveni principi i standardi koji se odnose na sigurnost poslovanja banaka. Najvažnija primena ovog sporazuma je jačanje stabilnosti međunarodnog bankarskog sistema uvođenjem minimalnog zahtevanog kapitala koji mora biti ispunjen kako bi se banke zaštitile od rizika.

Prema Bazelskom sporazumu pokazatelj adekvatnosti kapitala banke, odnosno zahtevani kapital za zaštitu od rizika, treba da iznosi najmanje 8% od ukupne rizične aktive banke,

$$\frac{K}{A_r} \geq 8\% . \qquad (2.1)$$

Cena kreditnog rizika (*credit risk charge*) je definisana na sledeći način:

$$C_c = 8\% \cdot A_r = 8\% \cdot \sum_i w_i \cdot A_i , \qquad (2.2)$$

gde je w_i ponder rizika za aktivu *i*. Da bi se dobila ukupna cena rizika (*total risk charge*), potrebno je da banka ceni kreditnog rizika doda i cenu tržišnog rizika (*market risk charge*).

$$C_t = C_c + C_m . \qquad (2.3)$$

Bazel II predlaže dve metode za merenje rizika i računanje zahtevanog kapitala:

1) Standardizovani metod (*the standardized method – STD)* – obično ga koriste male i srednje banke koje maju nedostatak složene tehnološke infrastrukture potrebne za dnevno praćenje i računanje izloženosti riziku,

2) Interni metod (*internal models aproach – IMA*) – koristi se ukoliko je regulatorno telo dozvolilo banci da koristi sopstvene modele za merenje rizika.

Tržišni rizik se računa za portfolio koji je izložen riziku kamatnih stopa, promene kursa, riziku kapitala i riziku cene robe. Prema standardizovanom metodu cena tržinog rizika je suma svih individualnih cena tržišnog rizika u portfoliju:

$$C_m^{STD} = \sum_i C_{m,i} \,. \tag{2.4}$$

Sumiranjem svih ovih različitih kategorija rizika dobija se ukupni rizik banke. Dakle, zahtevani kapital se računa za svaku pojedinačnu jedinicu rizika, a njihov zbir predstavlja ukupan zahtevani kapital za zaštitu od rizika. Osnovna ideja za računanje mogućih gubitaka se dobija pretpostavljajući linearnu zavisnost između faktora rizika i finansijskih instrumenata. Kretanje aktive odgovara proizvodu vrednosti aktive, osetljivosti aktive na faktore rizika i mogućih promena u faktorima rizika:

$$\Delta_W = W \cdot W_S \cdot \Delta_S \,, \tag{2.5}$$

gde je Δ_W promena u vrednosti aktive, W vrednost aktive, W_S osetljivost aktive na faktor rizika i Δ_S promena u faktoru rizika.

Ovde se javlja problem kada je portfolio izložen nekim nestandardnim uslovima (refinansiranje, produženje roka dospeća, itd.). Takođe, ovaj metod se ne primenjuje kada postoji diversifikacija između rizika - zamena pojedinačnog rizika većim brojem manjih nepovezanih rizika. Mala korelacija (nepovezanost) je znak da rizik portfolija može biti mnogo manji nego suma individualnih pojedinačnih rizika.

Kao odgovor na kritike ovog standardizovanog metoda, Bazelski komitet je kasnije ponudio alternativni metod, dopustio je bankama da koriste svoje sopstvene modele za merenje rizika kako bi odredile cenu kapitala - pristup internih modela (*internal models aproach – IMA*). Da bi banke mogle da koriste svoje interne modele moraju da zadovoljavaju različite kvalitativne zahteve. One moraju pokazati da imaju čvrsto razvijen sistem za upravljanje rizicima, potrebno je da sprovedu redovna testiranja i da imaju nezavisnu kontrolu rizika, kao što je eksterna revizija. Ovaj pristup je zasnovan na formiranju parametara koji su osnova za računanje zahtevanog kapitala.

Za određivanje cene kapitala interni modeli banke koriste VaR metodologiju. VaR (*Value at Risk* - vrednost pod rizikom) je mera za procenu rizika, odnosno statistička procena vrednosti, sa datom određenom verovatnoćom, koju bi banka mogla da izgubi u određenom vremenskom periodu zbog promena na finansijskim tržištima. VaR sumira sve najveće gubitke u posmatranom periodu sa datim stepenom poverenja. Za izračunavanje VaR-a su prema Bazelskom sporazumu u osnovi potrebni jedinstveni parametri:

a) vremenski period od 10 radnih dana ili dve kalendarske nedelje
b) interval poverenja od 99%
c) istorijski podaci za jednu godinu koji su ažurirani najmanje svakog kvartala.

Dakle, ukoliko je na primer, $\text{VaR} = \$100$ za vremenski period od 10 radnih dana i interval poverenja od 99%, to nam kazuje da gubitak portfolija ne bi trebalo da pređe \$100 u sledećih 10 radnih dana sa verovatnoćom od 99%. Drugim rečima, VaR procena nam daje informaciju o tome da će u narednih 10 radnih dana gubitak portfolija biti veći od \$100 sa verovatnoćom od 1%.

Za cenu tržišnog rizika može se uzeti najveća vrednost VaR-a za prethodni dan ili prosečna vrednost VaR-a za najmanje 60 radnih dana unazad pomnožena koeficijentom *k* koji služi kao dodatna zaštita u slučaju da dođe do lošijih uslova na finansijskom tržištu u odnosu na istorijske podatke. Cena tržišnog rizika prema pristupu internih modela na bilo koji dan *t* određuje se prema sledećoj formuli:

$$C_{m.t}^{IMA} = \max\left(k \frac{1}{60} \sum_{i-1}^{60} VaR_{t-i,} VaR_{t-1} \right) + C_{s,t}\,, \tag{2.6}$$

gde je C_s specijalna cena rizika (*specific risk charge*). Bazelska komisija je predložila da se za kojeficijent dodatne zaštite uzme $k = 3$.

Prednosti internog pristupa su u tome što on dozvoljava diversifikaciju između izvora rizika, meri rizik celog portfolija banke, uzima u obzir nestabilnost kapitala i može se koristiti za računanje zahtevanog kapitala.

3. VaR kao mera rizika

Danas se banke suočavaju sa mnoštvom rizika koji se sve više šire i razvijaju. Planiranje ekonomskog kapitala pomaže u identifikaciji tih rizika, povezivanju rizika sa određenom poslovnom aktivnošću i tokom tog procesa. Banke imaju za cilj ne samo da izračunaju visinu prihoda od određenih poslova, već i stepen rizika i ekonomski kapital potreban za taj posao. One nikada ne mogu u potpunosti biti sigurne u pogledu budućih prinosa. Najčešće dolazi do raskoraka između stvarnog prinosa i onog koji očekujemo. Što je veličina i verovatnoća tog odstupanja veća, veći je i rizik. Zato je od velikog značaja za banku i ostale finansijske institucije da mere rizike kojima su izložene, da ih kontrolišu i na taj način se obezbede od mogućih velikih gubitaka.

3.1 Mere rizika

Raspodela verovatnoća mogućih prinosa predstavlja osnov za procenu rizika. Ona pokazuje na koji način je ukupna verovatnoća raspodeljena na pojedinačne vrednosti mogućeg prinosa. Pri tom je zbir svih verovatnoća nastupanja pojedinačnih prinosa jednak 1. Obično se koristi normalna raspodela, jer je ona najlakša za razumevanje i sa njom je najjednostavije raditi.

Normalnu raspodelu opisuju dva parametra: očekivani prinos i standardna devijacija. Očekivanje je kod slučajne promenljive sa normalnom raspodelom definisano sa

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{3.1}$$

gde je $f(x)$ funkcija gustine za normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.2}$$

Pretpostavićemo da postoji konačno mnogo vrednosti za moguće prinose, pa ćemo za procenu očekivanog prinosa koristiti očekivanje za diskretnu slučajnu promenljivu. Očekivani prinos je prosečan prinos koji očekujemo da će se najverovatnije ostvariti, [3]. On se izračunava kao ponderisana aritmetička sredina mogućih prinosa, pri čemu su ponderi upravo verovatnoće nastupanja određenih prinosa.

$$O_p = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i. \tag{3.3}$$

Varijabilnost (promenljivost) prinosa, tj.odstupanje od očekivanog prinosa meri se standardnom devijacijom. Ona prikazuje prosečno odstupanje od očekivanog prinosa.

Što je odstupanje veće, to je veća neizvesnost u pogledu mogućeg prinosa, i obrnuto. Formula za izračunavanje standardne devijacije je:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(p_i - O_p\right)^2} \;. \tag{3.4}$$

Odluke je moguće donositi i kroz međuzavisnost očekivanog prinosa i standardne devijacije. U tom smislu postoje dva osnovna pravila odlučivanja. Prvo pravilo je da se između hartija od vrednosti sa istim očekivanim prinosom bira ona koja ima manju standardnu devijaciju, tj. ima manji rizik, jer veću korisnost ima ona hartija od vrednosti koja ima manji rizik. Drugo pravilo se odnosi na situaciju kada biramo između hartija od vrednosti sa istom standardnom devijacijom. Tada biramo onu koja ima veći očekivani prinos, tj. sada veću korisnost ima ona hartija od vrednosti koja obećava viši prinos.

3.2 VaR

Problem izbora optimalnog portfolija investicija je jedan od najvažnijih problema u finansijama. Budući prinos portfolija nije poznat u trenutku donošenja odluke, pa svaka odluka donosi određeni rizk. Koristeći različite mere rizika možemo proceniti koliki je rizik određene odluke. Sredinom dvadesetog veka, u Markowitz – ovom modelu za izbor optimalnog portfolija, javila se ideja da varijansa bude mera rizika, [4].

Vrednost pod rizikom, VaR, definiše maksimalni očekivani gubitak na nekoj aktivi u određenom vremenskom intervalu i sa datim intervalom poverenja. To je najveći gubitak portfolija koji se može očekivati pod tim uslovima. VaR je samo ocena mogućeg gubitka, što znači da se utvrđuje na bazi statističkih metoda i modela, uz postavljanje određenih pretpostavki o stohastičkim procesima kojima se opisuje kretanje veličina na tržištu kao i o rasporedu verovatnoće prinosa finansijskih instrumenata. Učešće pozicija u portfoliju je fiksno, što znači da nam VaR daje mogućnost samo da procenimo potencijalni gubitak ukoliko se struktura portfolija ne bude menjala. VaR se uvek računa s obzirom na neki vremenski period i onda nam sama vrednost govori o potencijalnom gubitku u datom vremenskom horizontu. Budući da je u pitanju ocena koja se računa sa određenim nivoom poverenja, o procenjenom gubitku možemo govoriti samo kao o potencijalnom, nikako ne možemo reći da je to broj koji nam pokazuje koliki je maksimalno mogući i siguran gubitak. Dakle, VaR ne prikazuje potencijalne gubitke u slučaju nekih vanrednih okolnosti. Na primer, ako je interval poverenja zadat na nivou 95%, izračunati pokazatelj nam govori o tome da ne bi trebalo da izgubimo više od navedene cifre u 95% slučajeva, ali nam ne kaže šta bi moglo da se desi u preostalih 5% slučajeva.

VaR modeli za merenje rizika zasnivaju se na nekoliko pretpostavki. Jedna od njih se odnosi na oblik stohastičkog procesa za koji verujemo da se nalazi u osnovi kretanja ključnih vrednosti na finansijskim tržištima (cena/prinos). Cilj je doći do modela koji najbliže opisuje realno stanje stvari. Često ovi modeli polaze od pojednostavljenih pretpostavki koje u praksi nisu zadovoljene (pretpostavka da su prinosi normalno raspoređeni). Druga pretpostavka se odnosi na fiksna učešća finansijskih instrumenata u portfoliju za koji se računa VaR. Ovo je moguće tvrditi samo u slučaju kratkih vremenskih intervala, dok sa produženjem horizonta za koji se računa VaR ova pretpostavka nije zadovoljena.

VaR se može posmatrati sa dve tačke gledišta, posmatrajući prinos ili posmatrajući gubitak investicije, [5]. Definisana preko gubitka investicije, VaR mera rizika investicije na nivou poverenja α, gde je $\alpha \in (0,1)$, je definisana sa α-kvantilom gubitka investicije *Y*.

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) = \inf\{y \in \mathrm{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\}. \tag{3.5}$$

Dakle, VaR je gubitak investicije koji neće biti prevaziđen u $\alpha \cdot 100\%$ slučajeva.

Definisana preko prinosa investicije, VaR mera rizika investicije na nivou poverenja α je:

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(Y) = \sup\{y \in \mathrm{R} \mid P(Y < y) \leq 1-\alpha\}. \tag{3.6}$$

Ovo znači da je VaR prinos investicije koji će biti prevaziđen u $\alpha \cdot 100\%$ slučajeva.

Mera rizika se može posmatrati kao funkcija raspodele portfolija. Za VaR meru rizika važe sledeće osobine:

1. invarijantnost na translaciju, $\mathrm{VaR}(Y+c) = \mathrm{VaR}(\mathrm{Y}) + c$, gde je c proizvoljna konstanta,
2. pozitivna homogenost, $\mathrm{VaR}(cY) = c \cdot \mathrm{VaR}(Y)$, gde je $c > 0$,
3. monotonost, ako je $X \leq Y$, tada je $\mathrm{VaR}(X) \leq \mathrm{VaR}(Y)$.

Mera rizika R je subaditivna ako je $R(X+Y) \leq R(X) + R(Y)$, gde su X i Y dve investicije, a $X+Y$ portfolio dobijen spajanjem tih investicija.

VaR nije subaditivna mera rizika i to će na sledećem primeru biti i prikazano.

Primer: Posmatrajmo investiciju x_1 koja predstavlja ulaganje u akciju A_1 i investiciju x_2 koja predstavlja ulaganje u akciju A_2. Neka su raspodele gubitaka investicija x_1 i x_2

$$Y_1 : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.98 & 0.02 \end{pmatrix} \text{ i } Y_2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.96 & 0.04 \end{pmatrix},$$

respektivno. VaR mera rizika investicije x_1 sa nivoom poverenja od 95% je

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(Y_1) = 0,$$

a investicije x_2

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(Y_2) = -1.$$

Posmatrajmo sada portfolio x sa 50% akcija A_1 i 50% akcija A_2, odnosno $x = (0.5, 0.5)$. Raspodela gubitka portfolija x je

$$Y:\begin{pmatrix} x^T(0,-1) & x^T(0,1) & x^T(2,-1) & x^T(2,1) \\ 0.9408 & 0.0392 & 0.0192 & 0.008 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(Y)=(0.5,0.5)^T(0,1)=0.5\,.$$

Dobili smo da je

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(Y_1)+\mathrm{VaR}_{0.95}(Y_2)=-1<0.5=\mathrm{VaR}_{0.95}(Y),$$

što znači da ne važi subaditivnost za VaR meru rizika. Vidimo da sa sigurnošću od 95% znamo da investicije x_1 i x_2 neće imati gubitak, dok portfolio x može imati gubitak do veličine 0.5. Znači spajanjem investicija x_1 i x_2 u jedan portfolio, dobija se portfolio koji je rizičniji od investicija pojedinačno.

Markowitz je u svom modelu za izbor optimalnog portfolija pokazao da je varijansa portfolija manja od zbira varijansi pojedinačnih aktiva u tom portfoliju. Kako je mera rizika predstavljena varijansom, kada su prinosi normalno raspoređeni, VaR mera rizika zasnovana na standardnoj devijaciji zadovoljava osobinu subaditivnosti.

3.3 Izbor kvantitativnih faktora

Faktori koji utiču na VaR meru rizika su dužina posmatranog vremenskog intervala i nivo poverenja. VaR mera rizika raste sa dužim vremenskim periodom, a tako i sa većim nivoom poverenja. Dakle, VaR je direktno proporcionalan u odnosu na ove faktore, tj. rast jednog ili drugog faktora dovešće do porasta VaR-a.

Prva, najopštija funkcija VaR-a je da pruži široko rasprostranjenim finansijskim institucijama merilo za poređenje rizika na različitim tržištima. U takvim slučajevima, izbor faktora je proizvoljan. Dugo je korišćen 99%-tni VaR sa periodom od godinu dana za poređenje rizika različitih pojedinačnih jedinica. Institucije često žele da znaju da li je današnja vrednost VaR-a u liniji sa jučerašnjom. Ukoliko nije odmah se vrši analiza da bi se videlo da li je današnji VaR veći zbog porasta volatilnosti ili zbog većih ulaganja. U ovom slučaju, izbor nivoa poverenja i vremenskog perioda nema veliki značaj sve dok je održana konzistentnost.

Primena VaR-a je i u davanju ideje o tome koliki najveći gubitak finansijska institucija može da napravi. Vremenski period je određen prirodom portfolija. Prvo tumačenje je da je vremenski period posmatranja definisan periodom likvidacije. Komercijalne banke zbog brzih preokreta u portfoliju računaju svoj tržišni VaR na dnevnoj bazi. Pošto period posmatranja odgovara najdužem potrebnom periodu likvidacije za portfolio, on može biti povezan sa likvidnošću hartija od vrednosti.

Suprotno, period posmatranja odgovara periodu u kojem se portfolio održava relativno konstantnim. Pošto VaR predviđa da je portfolio „zamrznut" u nekom vremenskom periodu, ova mera postepeno gubi na značajnosti ako se vremenski period produžava.

Izbor kvalitativnih faktora (vremenski period posmatranja i nivo poverenja) je veoma važan ukoliko se VaR koristi za određivanje kapitala finansijske institucije. Tako da ukoliko se desi gubitak, tj. dođe do prekoračenja VaR-a, kapital će biti izbrisan i doći će do bankrotstva. Zbog toga, u slučaju da se VaR koristi za ovu svrhu, moramo pretpostaviti da on adekvatno obuhvata sve rizike kojima je institucija izložena i koji mogu i da se prošire. Zbog toga mera rizika mora da obuhvata tržišni rizik, kreditni, operativni i ostale rizike.

Izbor nivoa poverenja odražava stepen averzije prema riziku i ukupnu cenu mogućeg gubitka. Velika averzija prema riziku ili visoka cena gubitka nagoveštava da će veći iznos kapitala pokriti moguće gubitke, dakle dovodi do izbora većeg nivoa poverenja. U isto vreme, izbor vremenskog perioda posmatranja može odgovarati vremenu potrebnom za preduzimanje akcija ukoliko dođe do gubitka. Akcije koje se mogu preduzeti su smanjenje rizika institucije ili uvođenje novog kapitala.

Prema Bazelskom sporazumu u internom pristupu za merenje cene kapitala koristi se VaR i to sa nivoom poverenja od 99% i periodom posmatranja od 10 radnih dana. VaR pomnožen sa koeficijentom dodatne zaštite 3 daje minimalni zahtevani kapital. Bazelski komitet je izabrao period od 10 radnih dana jer on u isto vreme sadrži i troškove učestalog posmatranja i omogućava rano otkrivanje potencijalnih problema. Takođe, izbor nivoa poverenja od 99% obuhvata i želju za sigurnim i „zdravim“ finansijskim sistemom i nepovoljan uticaj zahtevanog kapitala na prihode banke, u smislu viška kapitala. Regulatorna tela ne dopuštaju velikim bankama da često „padaju“, što objašnjava koeficijent k = 3 sa kojim se množi VaR, čime se dobija veće osiguranje protiv bankrotstva.

U ovom trenutku, izbor parametara za cenu kapitala bi trebalo da je proizvoljan jer postoje mnoge kombinacije nivoa poverenja, vremenskog perioda posmatranja i faktora dodatne zaštite koji dovode do iste cene kapitala. Faktor dodatne zaštite se takođe računa za mnoge dodatne rizike koji nisu obuhvaćeni uobičajenom primenom VaR-a, a koji su uključeni u modelovanje rizika. Na primer, za banke to mogu biti rizici prouzrokovani kratkim vremenskim periodom uzorka, nestabilnom korelacijom, ili jednostavno činjenicom da se koristi aproksimacija normalne raspodele za neku koja nije odgovarajuća.

Izbor koeficijenta dodatne zaštite k zasnovan je na Čebiševljevoj nejednakosti, [2]. Za svaku slučajnu promenljivu x sa konačnom varijansom, verovatnoća ispadanja iz određenog intervala je:

$$P\left(|x-\mu| > r\sigma\right) \le 1/r^2 , \tag{3.7}$$

uz pretpostavku da znamo standardu devijaciju σ. Pretpostavićemo da je raspodela simetrična. Za vrednost x izvan očekivanja važi:

$$P\left((x-\mu) < -r\sigma\right) \le \frac{1}{2}\cdot 1/r^2 . \tag{3.8}$$

Sada ćemo postaviti desnu stranu ove nejednakosti na željeni nivo od 1%.

$$\frac{1}{2r^2} = 1\% \Rightarrow r \approx 7.071 . \tag{3.9}$$

Stoga je maksimalni VaR:

$$\mathrm{VaR}_{\max} = r \cdot \sigma = 7.071 \cdot \sigma . \tag{3.10}$$

Banka predstavlja svoj 99%-tni VaR koristeći normalnu raspodelu. Ukoliko se koriste kvantili standardne normalne raspodele imamo:

$$\mathrm{VaR}_N = r_N \cdot \sigma = 2.326 \cdot \sigma . \tag{3.11}$$

Ako stvarna raspodela nije određena, faktor dodatne zaštite (množenja) je tada:

$$k = \frac{\mathrm{VaR}_{\max}}{\mathrm{VaR}_N} = \frac{7.071 \cdot \sigma}{2.326 \cdot \sigma} = 3.03 , \tag{3.12}$$

što opravdava faktor koji se koristi po Bazelskim standardima.

3.4 Backtesting

VaR modeli za merenje rizika su korisni ukoliko razumno predviđaju rizik. Zato tačnost ovih modela uvek mora biti proverena. To se može uraditi na različite načine, uključujući i *backtesting* koji predstavlja postupak za potvrđivanje da li su stvarni gubici u liniji sa projektovanim. *Backtasting* uključuje poređenje istorijskih predviđanja VaR-a sa prihodima portfolija i veoma je bitan za menadžere u smislu preispitivanja grešaka u pretpostavkama, pogrešnim parametrima ili netačnom modeliranju. To je metod za upoređivanje dnevnih dobitaka i gubitaka sa procenama VaR modela, u cilju merenja njihove tačnosti i preciznosti. Takođe, *backtesting* prema Bazelskom sporazumu ima značajnu ulogu u odlučivanju o dopuštanju internih VaR modela bankama za određivanje zahtevanog kapitala.

Kada je model potpuno ispravan, broj stvarnih gubitaka odgovara nivou poverenja, tj. ukoliko je nivo poverenja 99% onda je stvarni gubitak nastao u 1% slučajeva. Na primer, ako je dnevni VaR $100 i nivo poverenja 99%, prema VaR modelu očekujemo da se gubitak veći od $100 dogodi samo u 1% slučajeva, tj. u 2.5 dana od ukupno 250 radnih dana u godini. Ako je broj dana u kojima je gubitak veći od $100 manji, jednak ili malo veći od 2.5 model je ispravan, ali ako je broj dana kada gubitak prevazilazi $100 značajno veći od predviđanja na osnovu nivoa poverenja (2.5 dana) model nije ispravan.

Broj situacija u kojima dolazi do gubitka, tj. broj onih prihoda koji su izvan intervala poverenja VaR-a, poznat je kao broj izuzetaka. Ukoliko postoji mnogo izuzetaka model je potcenio rizik i ovo je veliki problem jer je malo kapitala dodeljeno rizičnim jedinicama. Takođe je i mali broj izuzetaka problem jer dovodi do viška ili neefikasne raspodele kapitala između pojedinačnih jedinica.

Pretpostavimo da banka obezbeđuje VaR sa nivoom poverenja od 99%, tj. osigurava se od gubitka koji nastaje u 1% slučajeva ($p = 1 - c$) za ukupno T dana, [2]. Primenom *backtesting* metoda računa se koliko puta je stvarno došlo do toga da prihodi nisu u intarvalu poverenja za VaR vrednost od prethodnog dana.

Definisaćemo N kao broj izuzetaka (broj nastalih gubitaka) i N/T kao stopu neuspeha. Idealno bi bilo da stopa neuspeha daje objektivnu meru za p, koja mora da konvergira ka p kako se povećava veličina uzorka. Ono što želimo da znamo, sa datim nivoom poverenja, je da li je N previše mali ili preveliki broj s obzirom na hipotezu da je $p = 0.01$ u uzorku veličine T. Prvi test koji posmatramo ne pravi pretpostavke o raspodeli prinosa i zbog toga je ovaj pristup neparametarski. Podešavanje za ovaj test je klasično i sastoji se od niza uspeha i neuspeha. Gubitak može da nastane ili ne, pa zbog toga broj izuzetaka x prati binomnu raspodelu verovatnoće:

$$f(x) = \binom{T}{x} p^x (1-p)^{T-x}. \tag{3.13}$$

Takođe znamo da x ima očekivanu vrednost $E(\mathrm{X}) = pT$ i varijansu $V(\mathrm{X}) = p(1-p)T$. Kada je T veliko, možemo koristiti centralnu graničnu teoremu i aproksimirati binomnu raspodelu pomoću normalne raspodele:

$$z = \frac{x - pT}{\sqrt{p(1-p)T}} \approx N(0,1). \tag{3.14}$$

Ovu binomnu raspodelu možemo koristiti za testiranje da li je broj izuzetaka prihvatljivo mali. Ukoliko prilikom testiranja posmatramo veliki uzorak, tj. duži vremenski period T i malu verovatnoću p nastajanja izuzetaka, model je ispravan ali postoji stopa odbacivanja ovog modela koja predstavlja verovatnoću izvršenja greške tipa 1. Ako povećamo verovatnoću nastajanja izuzetaka, model neće biti ispravan i sa određenom stopom ga nećemo odbaciti. Ovo neodbacivanje neispravnog modela predstavlja grešku tipa 2. Za *backtasting* potrebno je da korisnici VaR modela naprave balans između grešaka tipa 1 i tipa 2, tj. ravnotežu između ispravnog i neispravnog modela i onda donesu odluku.

Prema Bazelskom sporazumu *backtesting* internih modela se dobija direktno iz testiranja stopa neuspeha. Da bismo napravili takav test potrebno je da prvo izaberemo stopu greške tipa 1, koja predstavlja verovatnoću odbacivanja modela kada je ispravan. U takvim situacijama banka neće biti kažnjena neopravdano i zbog toga bismo mogli odabrati test sa malom stopom greške tipa 1. Međutim, ukoliko banka tako odluči, nadzorno telo koje pravi i greške tipa 2, potpuno će prevariti VaR izveštavanje banke. Trenutna provera procedure sastoji se od dnevnog zapisivanja izuzetaka od VaR-a sa nivoom poverenja od 99% u poslednjih godinu dana. U takvim okolnostima očekuje se da u proseku u 1% od 250 slučajeva dođe do izuzetka, tj. 2.5 izuzetka u toku godine.

4. Metode za izračunavanje VaR-a

4.1 Parametarski metod

Vrednost pod rizikom (VaR) je postao jedan od suštinskih alata za upravljanje rizicima. U praksi, suština je da se dobije razumna i tačna procena rizika sa razumnom cenom. Najjednostavniji način za određivanje VaR vrednosti imamo ukoliko pretpostavimo da se radi o normalnoj raspodeli. U tom slučaju VaR se može dobiti direktno iz standardne devijacije portfolija koristeći koeficijent dodatne zaštite koji zavisi od nivoa poverenja. Ovakav pristup se često naziva parametarski jer obuhvata i ocenu parametara, umesto da samo posmatra kvantile empirijske raspodele.

Da bismo izračunali VaR portfolija potrebno je da definišemo W_0 kao početna ulaganja i R kao stopu prinosa, [2]. Očekivani prinos i volatilnost za R su μ i σ. Vrednost portfolija na kraju definisanog perioda posmatranja je $W = W_0(1+R)$, dok je najmanja vrednost portfolija sa datim nivoom poverenja c data sa $W^* = W_0(1+R^*)$. VaR koji se odnosi na očekivanu vrednost gubitka se dobija na sledeći način:

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{m}} = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu). \tag{4.1}$$

Ponekad VaR možemo definisati i kao apsolutni VaR koji ne uzima u obzir očekivanu vrednost:

$$\mathrm{VaR}_0 = W_0 - W^* = -W_0 R^*. \tag{4.2}$$

U oba slučaja, VaR je određivanje minimalne vrednosti W^* ili odsecanja (*cutoff*) prinosa R^*. U najopštijem obliku, VaR se dobija iz raspodele verovatnoće buduće vrednosti portfolija $f(w)$. Sa datim nivoom poverenja c želimo da nađemo najlošiju moguću realizaciju za W^*, takvu da je verovatnoća prekoračenja te vrednosti jednaka c:

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw, \tag{4.3}$$

ili takvu da je verovatnoća da se dostigne vrednost manja od W^*, $p = P(w \le W^*)$, jednaka $1-c$:

$$1-c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \le W^*) = p. \tag{4.4}$$

Broj W^* se naziva kvantil raspodele, što predstavlja vrednost odsecanja sa stalnom verovatnoćom da će doći do prekoračenja. Za računanje VaR-a pretpostavljamo da su dnevni prihodi nezavisni i sa istom raspodelom.

Prvo je potrebno raspodelu $f(w)$ transformisati u oblik standardne normalne raspodele $\Phi(e)$, gde e ima očekivanje nula i standardnu devijaciju 1.

Kao što je već rečeno, veza između W^* i odsecanja (*cuttof-a*) prinosa R^* data je na sledeći način $W^* = W_0(1+R^*)$. Uopšteno, R^* je negativno (gubitak) i može se zapisati kao $-\left|R^*\right|$. Dalje, možemo povezati R^* sa standardnom normalnom devijacijom $\alpha > 0$

$$-\alpha = \frac{-\left|R^*\right| - \mu}{\sigma}. \tag{4.5}$$

To je ekvivalentno sa

$$1-c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-\left|R^*\right|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} \Phi(e)de. \tag{4.6}$$

Dakle, problem pronalaženja VaR-a je ekvivalentan traženju devijacije (odstupanja) α takve da je oblast levo od nje jednaka $1-c$. Ovo je moguće odrediti pomoću tablice funkcije kumulativne standardne normalne raspodele, oblast levo od standardne normalne promenljive koja ima vrednost *d*

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \Phi(e)de. \tag{4.7}$$

Da bismo našli VaR standardne normalne promenljive, odredićemo željeno levo ograničenje, nivo poverenja. Zatim ćemo na osnovu gornje jednačine (4.5) odrediti odsecanje (*cuttoff*) prinosa R^*,

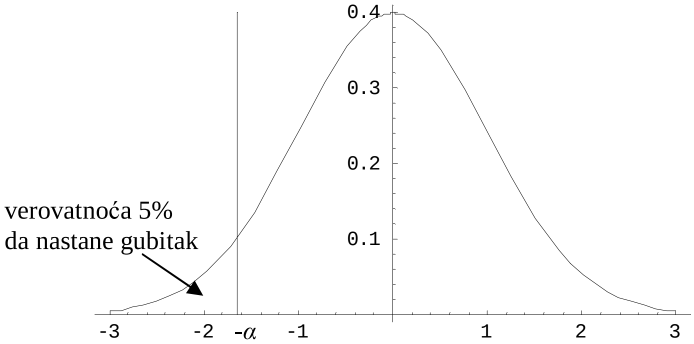
$$R^* = -\alpha\sigma + \mu. \tag{4.8}$$

Da bismo uopštili ovo, pretpostavićemo da su parametri *μ* i *σ* dati na godišnjem nivou i da ne postoji korelacija između prihoda u vremenskom intervalu Δt. Možemo odrediti VaR na sledeći način:

$$\mathrm{VaR_m} = -W_0(R^* - \mu) = W_o\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}, \tag{4.9}$$

$$\mathrm{VaR_0} = -W_0 R^* = W_o(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t). \tag{4.10}$$

Drugim rečima, VaR je proizvod standardne devijacije, vremena i dodatnog faktora koji je direktno povezan sa nivoom poverenja i intervalom posmatranja.



Grafik 1. Funkcija standardne normalne raspodele sa odstupanjem 5%

4.2 Delta – normalan metod

Za izračunavanje VaR-a možemo odrediti vrednost portfolija samo u početnom položaju, pretpostaviti normalnu raspodelu i uz pomoć lokalnih izvoda doći do zaključka o mogućim kretanjima vrednosti portfolija. Delta – normlan metod koristi linearne izvode, lak je za implementaciju, sastoji se od analitičkih aproksimacija prvog i drugog izvoda i najprikladniji je za portfolio sa ograničenim izvorima rizika.

Prvo ćemo se zadržati na delta vrednosti, koja uzima u obzir samo prvi izvod, [2]. Da bismo prikazali ovaj pristup, uzećemo jedan finansijski instrument čija vrednost zavisi od jednog faktora rizika *S*. Prvi korak se sastoji od vrednovanja portfolija u početnoj tački:

$$V_0 = V(S_0). \tag{4.11}$$

Definišemo Δ_0 kao prvi parcijalni izvod, ili kao osetljivost portfolija na promene cena, vrednovano na trenutnoj poziciji V_0. Ovo ćemo nazvati promena trajnosti portfolija. Mogući gubitak u vrednosti dV se može izračunati:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}\Big|_0 dS = \Delta_0 \cdot dS\ , \tag{4.12}$$

što uključuje moguće promene u ceni rizika dS. Ovo je linearna povezanost, i najveći gubitak za V se dobija za velike vrednosti S. Ukoliko je raspodela normalna, portfolio VaR se može dobiti kao proizvod izloženosti i VaR-a za osnovnu promenljivu S:

$$\mathrm{VaR} = |\Delta_0| \cdot \mathrm{VaR}_S = |\Delta_0| \cdot (\alpha\sigma\, S_0), \tag{4.13}$$

gde je α standardna normalna devijacija koja odgovara određenom nivou poverenja, npr. 1.645 za nivo poverenja od 95%. Ovde uzimamo $\sigma(dS/S)$ kao standardnu devijaciju stope promene cene. Pretpostavka je da stope promena cena imaju normalnu raspodelu.

Ovaj metod se naziva analitički. Napomenimo, da je VaR meren računajući vrednost porfolia samo jednom, u početnoj poziciji V_0. Faktor rizika je prinos y i veza između cene i prinosa je:

$$dV = -D^* V dy\,, \tag{4.14}$$

gde je D^* promena trajnosti portfolija. U ovom slučaju portoflio VaR je

$$\mathrm{VaR} = (D^* V)\cdot(\alpha\sigma), \tag{4.15}$$

gde je $\sigma(dy)$ sada volatilnost promene u nivou prinosa. Pretpostavka je da su promene u prinosu normalno raspoređene, iako je ovo emrpirijski slučaj.

Postoji mogućnost proširenja Delta-normalnog metoda sa uslovima višeg reda. Možemo poboljšati linearnu aproksimaciju razvijajući je u Tejlorov red:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_2} dS^2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \ldots = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 + \Theta dt + \ldots \tag{4.16}$$

gde je Γ drugi izvod vrednosti portfolija, a Θ *time drift* (promena vremena), koja je deterministička. Sada je veza između cene i prinosa u portfoliju sa stalnim prihodima:

$$dV = -\left(D^* V\right)dy + \frac{1}{2}\left(CV\right)dy^2 + \ldots \qquad (4.17)$$

Koeficijent C naziva se konveksnost i povezan je sa Γ.

Ukoliko se portfolio sastoji jedino od hartija od vrednosti sa zajedničkom normalnom raspodelom, merenje VaR-a bi trebalo da je relativno jednostavno. Prihod portfolija je:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} R_{i,t+1} , \qquad (4.18)$$

gde su $w_{i,t}$ pokazatelji vremena za raspoznavanje dinamike trgovanja. Kako je prinos portfolija linearna kombinacija promenljivih sa normalnom raspodelom, on takođe ima normalnu raspodelu. Koristeći matrični zapis, varijansa portfolija je data sa

$$\sigma^2\left(R_{p,t+1}\right) = w_t' \Sigma_{t+1} w_t . \qquad (4.19)$$

Σ_{t+1} predstavlja predviđanja kovarijanse matrice za VaR period posmatranja.

Problem je u tome što VaR mora da se meri za velike i kompleksne portfolije koji se razvijaju s vremenom. Mapiranjem linearnih izloženosti svih instrumenata u portfoliju na različite faktore rizika dobija se skup izloženosti $x_{i,t}$ i tada je VaR portfolija:

$$\text{VaR} = \alpha\sqrt{x_t' \Sigma_{t+1} x_t} . \qquad (4.20)$$

Unutar klasa modela, postoje dve metode za merenje varijanse i kovarijanse matrice Σ. Može se bazirati potpuno na istorijskim podacima koristeći, na primer, model koji dopušta vremenom varijacije u riziku. Drugi način uključuje podrazumevani rizik meren pomoću opcija. Takođe se može koristiti i kombinacija ova dva modela.

4.3 Monte – Karlo simulacija

U nekim situacijama Delta-normalan metod nije odgovarajući za merenje rizika. U slučaju da cena aktive nije linearna u odnosu na faktor rizika koristi se metod potpunog vrednovanja, u kojem se portoflio vrednuje u svim situacijama (u zavisnosti od promene faktora rizika).

$$dV = V(S_1) - V(S_0). \tag{4.21}$$

Nova vrednost faktora rizika S_1 se može dobiti pomoću metoda simulacije. Ove metode aproksimiraju ponašanja finansijskih cena rizika koristeći simulacije da bi generisali slučajne putanje cena. Koriste se za simuliranje promene različitih scenaria za vrednost portfolija na posmatrani dan. Scenario može biti generisan u slučajnom obliku, što je slučaj kod Monte – Karlo simulacije, ili pomoću istorijskih podataka. Portfolio VaR se tada može direktno pročitati iz raspodele simuliranih vrednosti portfolija.

U osnovi Monte – Karlo pristupa je simulacija slučajnog procesa finansijske promenljive, čime se pokriva širok opseg mogućih situacija. Ove promenljive imaju predefinisanu raspodelu verovatnoće za koju se pretpostavlja da je poznata. Simulacije potpuno rekonstruišu raspodelu vrednosti portfolija.

Da bismo opisali Monte – Karlo metod posmatraćemo jednostavan slučaj sa samo jednom slučajnom promenljivom (jednim faktorom rizika). Prvi korak u simulaciji sastoji se od izbora stohastičkog modela za ponašanje procesa cene rizka. Obično se koristi model geometrijskog Braunovog kretanja. Model pretpostavlja da su inovacije u ceni nekorelirane u vremenu i da mala kretanja cena mogu biti opisana na sledeći način:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz, \tag{4.22}$$

gde je $dz = \mathcal{N}(0, dt)$. Ona opisuje slučajne udare na cenu i ne zavisi od informacija iz prošlosti. Ona je Braunova u smislu da njena varijansa neprekidno opada sa vremenom, $V(dz) = dt$. Takođe, proces ja geometrijski jer su svi parametri skalirani sa trenutnom cenom S_t.

Parametri μ_t i σ_t predstavljaju trenutni drift i volatilnost u vremenu t, koje se tokom vremena mogu menjati. Da bismo uprostili, pretpostavićemo da su ovi parametri konstantni. U praksi, proces sa beskonačno malim priraštajem dt može se aproksimirati pomoću diskretnih promena u veličini Δt. Definisaćemo t kao sadašnji trenutak, T kao posmatramo vreme, i $\tau = T - t$ kao period posmatranja za VaR. Da bismo geenrisali niz slučajnih promenljivih S_{t+i} u intervalu τ, prvo ćemo taj interval podeliti na n koraka, $\Delta t = \tau / n$. Integral dS/S nad konačnim intervalom daje nam približno

$$\Delta S_t = S_{t-1}\left(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}\right), \tag{4.23}$$

gde je ε standardna normalna slučajna promenljiva, tj. ima očekivanje 0 i varijansu 1. Možemo potvrditi da ovaj proces generiše očekivanje $E(\Delta S/S) = \mu\Delta t$, koje raste sa vremenom, i varijansu $V(\Delta S/S) = \sigma^2 \Delta t$.

Da bismo simulirali putanju cene S počećemo od S_t i generišemo stadardne normalne slučajne promenljive ε za $i = 1,2,\ldots,n$. Tada je

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= S_t + S_t\left(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_1\sqrt{\Delta t}\right), \\
S_{t+2} &= S_{t+1} + S_{t+1}\left(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_2\sqrt{\Delta t}\right), \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

i tako dalje za sve buduće vrednosti, dok se ne dostigne posmatrano ciljano vreme gde je cena $S_{t+n} = S_T$.

Monte – Karlo simlacija se zasniva na slučajnim realizacijama ε promenljive sa željenom raspodelom verovatnoće. Za stvaranje slučajnih brojeva koristi se uniformna raspodela na intervalu $[0,1]$, koja nam daje slučajnu promenljivu x. Sledeći korak je transformisanje slučajnih brojeva x u željenu raspodelu preko inverzne kumulativne funkcije raspodele verovatnoće. Posmatraćemo normalnu raspodelu. Prema definiciji, kumulativna funkcija raspodele verovatnoće $N(y)$ je uvek između 0 i 1. Dakle, da bismo generisali slučajnu promenljivu sa normalnom raspodelom, odredićemo y tako da je $x = N(y)$, ili $y = N^{-1}(x)$.

Kada jednom simuliramo putanju cene, možemo odrediti raspodelu portfolija na kraju posmatranog perioda. Simulacija se obavlja preko sledećih koraka:

1. izbor stohastičkog procesa i parametara,
2. generisanje niza slučajnih promenljivih $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sa uniformnom raspodelom pomoću kojih računamo cene $S_{t+1}, S_{t+2}, \ldots, S_{t+n}$,
3. izračunavanje vrednosti aktive (portfolija) $F_{t+n} = F_T$ pomoću ovog niza cena i perioda posmatranja,
4. ponavljanje 2. i 3. koraka onoliko puta koliko je potrebno, npr. $K = 10000$.

Ovaj proces određuje raspodele za vrednosti portfolija $F_T^1, \ldots, F_T^{10000}$. Možemo izračunati očekivanje $E(F_T)$ i kvantil $Q(F_T, c)$ koji predstavlja vrednost prekoračenja c puta u 10000 ponavljanja. Vrednost pod rizikom (VaR) je tada

$$
\mathrm{VaR}(c,T) = E(F_T) - Q(F_T, c). \tag{4.25}
$$

4.4 Metod istorijskih simulacija

Ukoliko ne želimo da pravimo procene za raspodelu prinosa portfolija možemo koristiti neparametarski pristup za procenu VaR-a koji se zasniva na istorijskim simulacijama. Ovaj metod se sastoji od vraćanja nazad u prošlost, npr. poslednjih $T = 250$ dana, i primenjuje trenutne težine na prinose iz posmatrane istorije.

$$R_{p,k} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} R_{i,k} \ , \ k = 1, \dots, t \tag{4.26}$$

Primetimo da su težine w_t zadržane sa njihovom trenutnom vrednošću. Ovaj prinos ne predstavlja prinos aktuelnog portfolija, već rekonstuiše istoriju portfolija koristeći trenutno važeće uslove.

Pretpostavimo da se portfolio sastoji od jedne aktive koja zavisi od n faktora rizika $S_1, S_2, \dots, S_n$. Vrednost te aktive ćemo predstaviti kao funkciju koja zavisi od promena tih faktora rizika $V = f(S_1, S_2, \dots, S_n)$. Prinos usled moguće promene za svaki pojedinačni faktor rizika S_k se može odrediti sa:

$$R_t^k = \frac{S_t^k - S_{t-1}^k}{S_{t-1}^k} \ , \tag{4.27}$$

gde je $k = 1, \dots, n$ i $t = -T + 1, \dots, -1, 0$.

Na osnovu trenutnih vrednosti za različite faktore rizika $S^1(0), S^2(0), \dots, S^n(0)$, raspodela budućih vrednosti zasnovana na istorijskim vrednostima prinosa je:

$$S_t^k(1) = S^k(0) \cdot \left(1 + R_t^k\right), \tag{4.28}$$

$k = 1, \dots, n$ i $t = -T + 1, \dots, -1, 0$. Odatle sledi da se buduća cena aktive može dobiti kao:

$$V_t(1) = f\left(S_t^1(1), S_t^2(1), \dots, S_t^n(1)\right). \tag{4.29}$$

Raspodela promene prinosa je suštinska za VaR procenu rizika, i ona se određuje na sledeći način:

$$R_\tau = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}, \tag{4.30}$$

$t = -T + 1, \dots, -1, 0$ i $\tau = 1, \dots, T$.

Da bismo odredili VaR za portfolio koji se sastoji od N različitih aktiva i ukoliko postoji n faktora rizika, u jednačini (4.26) težine w_t ćemo predstaviti vektorom ω:

$$\omega = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \ , \tag{4.31}$$

a prinose u zavisnosti od vremena matricom $\boldsymbol{R}$, koja sadrži n kolona i T redova:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_{1,-T} & R_{2,-T} & \cdots & R_{n,-T} \\ R_{1,-T+1} & R_{2,-T+1} & \cdots & R_{n,-T+1} \\ R_{1,-T+2} & R_{2,-T+2} & \cdots & R_{n,-T+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{1,0} & R_{2,0} & \cdots & R_{n,0} \end{bmatrix}. \qquad (4.32)$$

Tada je prinos portfolija $\boldsymbol{R_p}$ određen sa:

$$\boldsymbol{R_p} = \boldsymbol{R} \cdot \omega \qquad (4.33)$$

$$\boldsymbol{R_{p,t}} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k R_{k,t} \ . \qquad (4.34)$$

Ovaj metod je relativno jednostavan za implementaciju ako se istorijski podaci sakupljaju za dnevno vrednovanje na tržištu i ti isti podaci se kasnije mogu koristiti za procenu VaR-a. Takođe ovo je direktno povezano sa izborom vremenskog intervala za merenje VaR-a. Zarade se mere na osnovu intervala koji odgovaraju dužini perioda za merenje VaR-a. Na primer, da bismo dobili mesečni VaR, moramo rekonstruisati istorijske mesečne zarade portfolija za poslednjih 5 godina. Ovaj metod se zasniva na aktuelnim cenama, pa dopušta i nelinearnost i raspodele koje nisu normalne. Postoje i loše strane ovog modela, a jedna od njih je i da se ovde pretpostavlja da imamo dovoljnu istoriju za promene cena. Da bismo imali 1000 nezavisnih simulacija za svakodnevne promene, potrebni su nam istorijski podaci za 4 godine, a neka imovina ima kratku istoriju ili se ne može pratiti u tom periodu.

5. **Kreditni rizk i VaR**

Banka je u svom poslovanju izložena različitim tipovima rizika. Jadan od najznačajnijih je kreditni rizik. Za njega se može reći da postoji od kad postoji i samo bankarstvo, jer pozajmljivanje novca drugoj ugovornoj strani uvek je sa sobom nosilo opasnost da pozajmljena sredstva neće biti vraćena. Pojam kredita predstavlja dužničko – poverilački odnos u kome poverilac ustupa pravo raspolaganja novcem dužniku na izvesno vreme i pod izvesnim uslovima. Sam izraz kredit potiče od latinske reči *credo* što znači verovati. Rizik gubitka nastaje kao posledica mogućnosti da plasirana sredstva ne budu vraćena.

Kreditni rizik predstavlja rizik da u finansijskoj transakciji partner neće ispuniti svoju ugovorom preuzetu keditnu obavezu zbog čega potraživanje neće biti realizovano na dan dospeća po njegovoj punoj knjigovodstvenoj vrednosti. U skladu sa uobičajenom i široko prihvaćenom definicijom rizika, kreditni rizik se može izraziti verovatnoćom da dužnik neće izvršiti svoju ugovorom preuzetu obavezu. Prema ovom shvatanju rizika, gubitak koji može pri tom nastati izražava se verovatnoćom nepovoljnog ishoda.

Kreditni rizik se definiše kao verovatnoća da banka neće biti u stanju da naplati svoja ukupna potraživanja od dužnika, kako po osnovu glavnice tako i po osnovu svih pripadajućih kamata. Kako bi se sprečile negativne posledice po bankarski posao javlja se potreba za upravljanjem ovim rizikom. Sistemi za upravljanje kreditnim rizikom su sve složeniji jer se finansijsko tržište razvija velikom brzinom, stvaraju se novi instrumenti i bankarski proizvodi. Cilj je da se na adekvatan način kontroliše izloženost riziku i da se preduzmu mere kako bi se sprečile nepovoljne situacije.

5.1 Rizik nenaplativosti

Kreditni rejting je skup svojstava tražioca kredita, kao što su položaj, imovina, poslovi i perspektiva, na temelju koje je moguće doneti ocenu o njegovoj kreditnoj sposobnosti, tj. sposobnosti i mogućnosti izvršenja preuzetih obaveza. Kreditno sposobnim dužnikom smatra se onaj koji osigurava vraćanje kredita u roku, koji ima ažurno i uredno knjigovodstvo, koji iskazuje svoju imovinu i obaveze po stvarnoj vrednosti i koji ima sređeno financijsko poslovanje, te odgovara uredno svojim obavezama.

Najznačajniji deo modelovanja kreditnog rizika sastoji se od procene verovatnoće nenaplativosti. Ta procena može biti zasnovana na aktuarskim modelima ili na tržišnim cenama, [1]. Aktuarski modeli predviđaju objektivne verovatnoće nenaplativosti analizirajući faktore koji su u vezi sa istorijskim stopama nenaplativosti. Jedan takav pristup je onaj koji koriste agencije za kreditne rejtinge, koje klasifikuju slučajeve pomoću procenjene učestalosti nenaplativosti (*estimated* *default frequencies* – EDF). Ovakva klasifikacija može se dovesti u vezu sa stvarnim stopama nenaplativosti.

Prema Bazelskom komitetu za superviziju banaka, kao što je već rečeno, predviđeno je da se za potrebe računanja zahtevanog kapitala bankama ostavi mogućnost izbora između dva principa:

1. standardizovani pristup i
2. pristup internog merenja rejtinga.

Standardizovani princip omogućava da se na izračunate izloženosti banke primenjuju ponderi rizika u skladu sa ocenom rejtinga eksternih agencija (*Standard&Poor's*, *Moodey's* i *Fitch*), dok pristup internog merenja rejtinga polazi od pretpostavke da banke same odaberu na koji će način meriti rejting svojih dužnika. Pristup internog merenja mora biti odobren od supervizora banke.

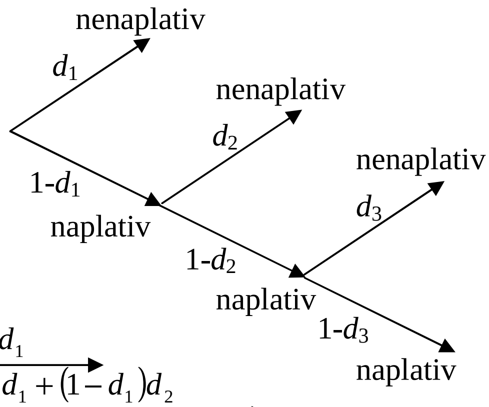
U tabeli 1. su prikazane istorijske stope nenaplativosti za 10 godina iz izveštaja *Standard&Poor's* agencije za različite kreditne rejtinge.

	Godine									
Rejting	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0.00	0.00	0.05	0.11	0.17	0.31	0.47	0.76	0.87	1.00
AA	0.00	0.02	0.07	0.15	0.27	0.43	0.62	0.77	0.85	0.96
A	0.04	0.12	0.21	0.36	0.56	0.76	1.01	1.34	1.69	2.06
BBB	0.24	0.54	0.85	1.52	2.19	2.91	3.52	4.09	4.55	5.03
BB	1.01	3.40	6.32	9.38	12.38	15.72	17.77	20.03	22.05	23.69
B	5.45	12.36	19.03	24.28	28.38	31.66	34.73	37.58	37.58	42.24
CCC	23.69	33.52	41.13	74.43	54.25	56.37	57.94	58.40	58.40	60.91

Tabela 1. Izveštaj agencije Standard&Poor's o stopama nenaplativosti za 10 godina

Dužnik sa početnim kreditnim rejtingom *BBB* ima u proseku stopu nenaplativosti 0.24% u toku sledeće godine i 5.03% za 10 godina. Tabela pokazuje da dužnici koji imaju niži kreditni rejting imaju veću stopu nenaplativosti. Prema tome, možemo koristiti ovu informaciju kao procene rizka nenaplativosti. Međutim, ovi brojevi su samo procene i mogu biti prilično neprecizne, posebno za bolje kreditne rizike. U ovoj tabeli su prikazane kumulativne stope nenaplativosi c_n koje predstavljaju ukupnu verovatnoću nenaplativosti u bilo kom trenutku od danas pa do godine n. Koristeći njih možemo dobiti marginalne ili godišnje stope nenaplativosti d_i u toku godine i. To predstavlja srazmeran deo dužnika koji su nenaplativi u godini i iz skupa koji su na kraju prethodne godine bili još uvek „živi“.

Na sledećoj slici je prikazano da ukoliko je neki dužnik preživeo godinu n, potrebno je da je on preživeo sve prethodne n - 1 godine i da nije postao nenaplativ u godini n.



$$c_1 = d_1$$
$$c_2 = d_1 + (1 - d_1)d_2$$
$$c_3 = d_1 + (1 - d_1)d_2 + (1 - d_1)(1 - d_2)d_3$$

Slika 1. Proces nenaplativosti

Dakle, možemo napisati stopu preživljavanja do godine *n* rekurzivno po d_i :

$$(1 - c_n) = (1 - c_{n-1})(1 - d_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - d_i). \qquad (5.1)$$

Na primer, za prvu godinu za kreditni rejting *BBB* iz tabele 1. imamo $c_1 = d_1 = 0.24$. Za sledeću godinu imamo:

$$(1 - 0.54\%) = (1 - 0.24\%)(1 - d_2), \qquad (5.2)$$

odakle dobijamo $d_2 = 0.302$, itd.

Takođe, možemo izračunati ukupnu verovatnoću nenaplativosti konkretno za godinu *i*, počevši od sad, $k_i = (1 - c_{i-1})d_i$.

Kao alternativa za korišćenje standardnih i sopstvenih ocena, bankama može biti dozvoljeno da koriste VaR model da izraze volatilnost izloženosti riziku, [1]. Pristup VaR modela raspoloživ je bankama koje su dobile priznanje supervizora za interni model merenja rizika. Računanje izloženosti banke riziku tada će izgledati ovako:

$$E^* = \max\{0, [(\sum E - \sum C) + \text{VaR}]\}, \qquad (5.3)$$

gde je

E^* - vrednost izloženosti banke riziku,
E - tekuća vrednost izloženosti,
C – vrednost primenjenog kolaterala (sredstva obezbeđenja).

Za računanje minimalnog zahtevanog kapitala banka treba da koristi VaR broj prethodnog radnog dana. Osnovni elementi VaR mere rizika su: procena maksimalnog iznosa gubitka u vrednosti aktive banke koja bi mogla da se pojavi na specifičnom nivou rizika (obično 1%), procena vremenskog perioda u kojem bi aktiva bila smanjena ako bi došlo do pogoršanja uslova na tržištu i nivo pouzdanosti sa kojom menadžeri procenjuju verovatnoće gubitaka u bilo kojem vremenskom periodu (95% ili 99% su najčešće korišćeni nivoi).

Duga kompomenta rizika nenaplativosti je stopa oporavka (*recovery rate*). Ona predstavlja deo koji će se oporaviti, ili 1 – gubitak u slučaju neplaćanja. Ovo zavisi od toga da li je dug osiguran ili ne i od statusa poverioca u bankrotstvu.

Alternativni izvor informacija za rizik nenaplativosti je tržišni prinos na obveznice izdate od klijenta. Po dospeću obveznica može biti naplativa ili nenaplativa. Uzmimo da je vrednost obveznice \$100. Ukoliko dođe do nenaplativost njena vrednost će biti $f \cdot \$100$ ili \$100 ako obveznica po dospeću bude naplativa. Definisaćemo $c = \pi$ kao kumulativnu stopu nenaplativosti do roka dospeća, verovatnoća da obveznica po dospeću bude nenaplativa. Ako cena opcije donosi nerizičnu premiju, sadašnja cena mora biti matematičko očekivanje diskontovane vrednosti. Dalje ćemo definsati y^* i y kao prinose od obveznice koja je izložena kreditnom riziku i sa druge strane od obveznice koja je bez rizika. Dakle,

$$P^* = \frac{\$100}{1+y^*} = \frac{\$100}{1+y} \cdot (1-\pi) + \frac{f \cdot \$100}{1+y} \cdot \pi \,. \tag{5.4}$$

Primetimo da smo diskontovali po stopi prinosa bez rizika *y*, jer smo pretpostavili da ne postoji rizk premije. Nakon sređivanja izraza dobijamo:

$$1 + y = (1 + y^*)[1 - \pi(1 - f)] \,. \tag{5.5}$$

Da bismo uprostili, izbacićemo uslov drugog reda i tada dobijamo,

$$y^* \approx y + \pi(1 - f) \,. \tag{5.6}$$

Alternativa ovome je da baziramo modele za rizik nenaplativosti na cene akcije. Takvi modeli su pristupačni za veliki broj kompanija i akcijama se aktivnije trguje nego korporativnim obveznicama. U takvom modelu kapital se posmatra kao kupovna opcija na imovinu dužnika. Ukoliko je vrednost imovine manja od obećanih plaćanja, tada je dužnik nenaplativ. Sadašnja cena akcije, dakle, predviđa verovatnoću nenaplativosti.

Kao dodatak za merenje pojedinačnog rizika nenaplativosti, takođe je potrebno da izmerimo i korelacije između nenaplativosti. Kreditna matrica, na primer, ukršta svakog dužnika sa njegovim kreditnim rejtingom, sa indeksom zemlje i izvodi zaključak o korelaciji nenaplativosti koristeći izloženost i korelacije faktora rizika.

5.2 Kreditna izloženost

Da bi rizik nenaplativosti stvorio gubitke dva uslova moraju biti zadovoljena. Prvo, dužnik kora biti kreditno izložen, i drugo, mora doći do situacije da dužnik ne izvršava svoje obaveze. Kreditni rizik se obično primenjuje na kredite i obveznice, čija je izloženost nominalna vrednost investicije. Finansijski derivati mogu imati pozitivnu ili negativnu vrednost. U tom slučaju kreditna izloženost postoji kada ugovor ima pozitivnu vrednost, tj. kada je u poziciji *in–the-money*. U suštini, gubitak koji nastaje zbog ne izvršavanja obaveza je sličan kao kod opcije.

Definišimo V_t kao sadašnju vrednost imovine solventnog dela, [2]. Pretpostavljajući da nema plaćanja u slučaju neizvršavanja obaveza, gubitak (*Loss* - *L*) je trenutna izloženost V_t ukoliko je pozitivna:

$$L_t = \max(V_t, 0). \tag{5.7}$$

Ako rejting dužnika postane nenaplativ dok ugovor ima negativnu vrednost, solventni deo ne može da napusti ugovor. Gubitak se može pojaviti kada dužnik koji je nenaplativ bankrotira, i tada je plaćanje samo deo sredstava koje duguje.

Kreditni rizik ne uključuje samo sadašnju vrednost nego i potencijalne buduće gubitke zbog nenaplativosti. Maksimum kreditne izloženosti (*peak credit exposure* - E^*) se često meri kao:

$$E_t^* = \max(V_t + \Delta V_\tau, 0), \tag{5.8}$$

gde je ΔV_τ maksimalni porast vrednosti u vremenu τ sa određenim nivoom poverenja c. Dobra osobina ovog pristupa je jednostavnost. Na žalost, ovde se ne gleda promena kreditne izloženosti sa vremenom. Kreditna izloženost se tokom vremena menja i takođe za dužnika sa visokim kreditnim rejtingom sada postoji mali rizik da dođe do nenaplativosti ali kasnije taj rizik može da poraste.

Mnogo bolji metod se zasniva na potencijalnom prikazu izloženosti, koji opisuje najgore moguće gubitke, merene sa nekim nivoom poverenja na skupu budućih vremena (npr. mesečni intervali). Uzorak dinamičke kreditne izloženosti se može kombinovati sa verovatnoćom buduće nenaplativosti da bi se dobio izgled kreditne izloženosti kroz vreme. Takođe je potrebno uzeti u obzir i interakcije između promena na tržištu.

Kreditna izloženost je definisana kao zamena vrednosti za aktivu, ukoliko je pozitivna, na posmatrani dan. To je takođe i tržišna cena. Njenu raspodelu je korisno okarakterisati pomoću očekivane vrednosti i najlošije vrednosti sa nekim nivoom poverenja. U slučaju rizične obaveze, kreditna izloženost je po roku dospeća glavnica. Pre dospeća izloženost se može menjati ako dođe do promene u tržišnoj ceni aktive, ali uglavnom je blizu glavnice. Kod finansijskih derivata kreditna izloženost je mnogo složenija. Izloženost predstavlja pozitivnu vrednost ugovora koja je mnogo manja nego željena vrednost. Očekivana kreditna izloženost (*Expected credit* *exposure* – $\overline{E}$) je očekivana vrednost zamenjujuće vrednosti x za aktivu na posmatrani datum:

$$\overline{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \max(x,0) f(x) dx\,, \tag{5.9}$$

gde je $f(x)$ funkcija raspodele za x. Primetimo da je kreditna izloženost isprepletana sa tržišnim rizikom. Takođe, ova formula je veoma srodna sa opcijama.

Najlošija kreditna izloženost je najveća kreditna izloženost sa nekim nivoom poverenja c. Ona se ponekad naziva i kredit pod rizikom (*credit at risk* – CaR). Kao i VaR, ovo se definiše kao najveća vrednost takva da je

$$1 - c = \int_{CaR}^{\infty} f(x) dx\,. \tag{5.10}$$

Veoma važan metod za kontrolu rizika kreditne izloženosti je *netting*. Primena *netting*-a je da izjednači transakcije između dve strane i da pokrije sve razlike u novčanim tokovima svih ugovora. *Netting* smanjuje kreditni rizik tako što snižava kreditnu izloženost. U slučaju nenaplativosti, dužnik ne može da prestane sa plaćanjem ugovora koji ima negativnu vrednost. U ovom slučaju *net* gubitak (*Net loss* – L^n) je pozitivna suma tržišne vrednosti svih ugovora:

$$L^n = \max(V,0) = \max\left(\sum_{i=1}^{N} V_i, 0\right). \tag{5.11}$$

Suprotno od ovoga, bez *netting*-a mogući gubitak je suma svih pozitivnih vrednosti ugovora:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \max(V_i, 0), \tag{5.12}$$

što je uvek veće nego gubitak usled primene *netting*-a. Ova dva načina računanja gubitka bi davala isti rezultat jedino ukoliko bi sva plaćanja bila odlično korelirana.

Efekat *netting*-a je najlakše pokazati na trenutnoj izloženosti. Bez *netting*-a ili sredstava obezbeđenja bruto vrednost zamene (*gross replacement value* - G) je zbir svih najvećih gubitaka za sve klijente:

$$G = \sum_{k=1}^{K} L_k = \sum_{k=1}^{K} \left[\sum_{i=1}^{N_k} \max(V_i, 0) \right]. \tag{5.13}$$

Sa *netting*-om i sredstvima obezbeđenja izloženost je definisana kao neto vrednost zamene (*net replacement value* - N^*):

$$N^* = \sum_{k=1}^{K} L_k^n = \sum_{k=1}^{K} \left[\max\left(\sum_{i=1}^{N_k} V_{i,}\, 0 \right) - S_{O,k} \right]. \tag{5.14}$$

Neto vrednost zamene sabira sve moguće gubitke ukoliko svi dužnici postanu nenaplativi u isto vreme. Računa se u dva koraka. Prvo banka računa bruto vrednost zamene njenih aktiva, što je suma pozitivnih cena za sve pojedinačne izloženosti u portfoliju. Ovo predstavlja najgori mogući scenario gde su svi pojedinačni dužnici sa pozitivnom izloženošću nenaplativi. U drugom koraku banka primenjuje *netting* i sredstva obezbeđenja. Ovim se redukuje izloženost i tada nenaplativost uključuje samo neto vrednost zamene umanjenu za sredstva obezbeđenja ukoliko ih ima.

Izloženost se može posmatrati i kombinovanjem nenaplativosti i stope oporavka da bismo dobili očekivani i neočekivani kreditni gubitak.

Očekivani kreditni gubitak (*expected credit loss* – $\overline{L}$) je definisan u svakom trenutku *t* na sledeći način:

$$\overline{L}_t = \overline{E}_t \cdot p_t \cdot (1 - f) \tag{5.15}$$

gde je f stopa oporavka i p_t verovatnoća nenaplativosti u toku godine završno sa trenutkom t koja se dobija kao $(1 - c_{t-1}) \cdot d_t$. $\overline{L}$ se može koristiti kao osnova za računanje kreditnih zaliha. Potrebno je oduzeti $\overline{L}$ od prihoda prilikom računanja zarada od kapitala koja je prilagođena riziku.

Neočekivani kreditni gubitak (*unexpected credit loss* – L^*) je definisan kao:

$$L_t^* = CaR_t \cdot p_t \cdot (1 - f). \tag{5.16}$$

To je maksimalni gubitak usled nenaplativosti sa izabranim nivoom poverenja. L^* je takođe poznat i kao VaR nenaplativosti (*default VaR* – dVaR), i može se koristiti za definisaće potrebnog kapitala za podršku transakcije.

Ukoliko je početna vrednost izloženosti nula, vrednost pod rizikom biće budući profit. Ako pretpostavimo da je stopa oporavka takođe nula, tada je VaR nenaplativosti:

$$\text{dVaR} = \text{VaR} \cdot p_t. \tag{5.17}$$

Obično menadžeri kreditnog rizika uzimaju period od jedne godine jer ostavljaju klijentima dovoljno prostora da poprave svoje stanje i da počnu sa rešavanjem problema. Potrebno je da posmatramo ukupni kreditni gubitak za vreme trajanja aktive, što uključuje promenljivost izloženosti u vremenu, kao i promene u verovatnoći nenaplativosti i diskontovanje. Definisaćemo $\overline{V}_t$ kao sadašnju vrednost dolara u trenutku *t*. Sadašnja vrednost očekivanog kreditnog gubitka ($\overline{L}_p$) se dobija kao zbir svih diskontovanih očekivanih gubitaka:

$$\overline{L}_p = \sum_t \overline{L}_t \cdot \overline{V}_t = \sum_t \left[\overline{E}_t \cdot p_t \cdot (1 - f)\right] \cdot \overline{V}_t. \tag{5.18}$$

Ovo možemo i na drugi način izračunati, uzimanjem prosečne vrednosti verovatnoće nenaplativosti i prosečne izloženosti.

Sadašnja vrednost neočekivanog kreditnog gubitka (L_p^*) se dobija kao suma diskontovanih neočekivanih kreditnih gubitaka:

$$L_p^* = \sum_t L_t^* \cdot \overline{V}_t. \tag{5.19}$$

Ono što je zajedničko za verovatnoću nenaplativosti i stopu oporavka i kreditnu izloženost za sve aktive u portfoliju je da je raspodela gubitka koji nastaje zbog kreditnog rizika opisana na sledeći način:

$$L = \sum_{i=1}^{N} C_i \cdot (1 - f_i) \cdot b_i , \qquad (5.20)$$

gde je C_i kreditna izloženost, f_i stopa oporavka i b_i slučajna promenljiva koja uzima vrednost 1 sa verovatnoćom p_i ukoliko se pojavi nenaplativost, inače 0.

Kreditna zaliha (*credit reserve* – C_r) je broj koji se izdvaja od predviđanja očekivanih kreditnih gubitaka. Može se dobiti iz sadašnje vrednosti očekivanih kreditnih gubitaka. Zaliha kapitala (*equity reserve*) predstavlja vrednost koja se koristi za ublažavanje i pokrivanje neočekivanih kreditnih gubitaka. Ona se može dobiti kao razlika između L_p^* i kreditne zalihe za ceo portfolio.

6. Implementacija

Zahtevi za adekvatnost kapitala koji se odnose na kreditni rizik su zasnovani na subjektivnom mišljenju regulatora o verovatnoćama nenaplativosti. Na primer, državne obveznice zemalja iz grupe koje su članice Bazelskog sporazuma dobile su ponder nula za izloženost riziku. Teško je razumeti da sve privatne kompanije iz ovih zemalja imaju istu izloženost riziku, ili da je neka državna obveznica manje rizična od kredita datog korporativnom klijentu koji ima rejting *AAA*. Prema Bazelu, ukupan kreditni rizik je zbir pojedinačnih kreditnih rizika za svaki pojedinačan element portfolija banke. Zbog toga se dozvoljava diversifikacija rizika za portfolio. Ekvivalentno ovome je pretpostavka da različiti izvori kreditnog rizika imaju koefiijent korelacije 1.

J.P.Morgan, vodeća finansijska institucija, je 1997. predložila novi pristup merenju kreditnog rizika, koji je unapređenje starog Bazelskog sporazuma. Izraz Kreditna matrica se koristi pri opisivanju ove nove metodologije i koristi se za računanje ukupnog kredita pod rizikom (CaR).

Kreditni rizik je zamena za vrednost portfolija pod uticajem promena u kreditnoj sposobnosti klijenata. Na primer, neka imamo obveznice firme X, [6]. Ukoliko ta firma očekuje da će se do kraja godine njen kreditni rejting promeniti iz *AAA* u *BBB*, tada će vrednost obveznice firme X biti verovatno manja zbog smanjenja kreditne sposobnosti. Sa druge strane, za obveznicu firme Y za koju se očekuje da joj poraste kreditni rejting iz *CCC* u *BBB*, porašće joj i vrednost. Ukoliko postoji manje nego perfektna korelacija između dve pojedinačne investicije sa njihovim kreditnom rejtinzima, tada je ukupan kreditni rizik manji ako imamo obveznice obe firme i X i Y, nego njihov pojedinačan kreditni rizik, i to zbog efekta diversifikacije.

Kreditni rejtinzi se često koriste kao mera za kreditni rizik. Na primer, agencija *Standard&Poor* ima osam kreditnih rejtinga, *AAA*, *AA*, *A*, *BBB*, *BB*, *B*, *C* i *D* (nenaplativost). Promena u vrednosti nije dobro prikazana standardnom devijcijom raspodele. Drugi veliki problem je nedostatak adekvatnih istorijskih podataka za merenje prelazaka iz jednog u drugi kreditni rejting. Na primer, pretpostavimo da imamo 10000 firmi i njihove kreditne rejtinge za obveznice od 1980. do 2000. godine. Posmatraćemo da su sve obveznice inicijalno ocenjene sa *CCC*. Za svaku godinu iz našeg primera možemo izračunati verovatnoću promene rejtinga iz *CCC* u *D*, $p(CCC \to D)$, koja se obično naziva marginalna stopa smrtnosti (*marginal mortality rate* – M_1):

$$M_1 = \frac{CCC_d}{CCC_o}, \tag{6.1}$$

gde je CCC_d vrednost onih klijenata čiji je rejting iz *CCC* prešao u *D* posle jedne godine, a CCC_o je ukupna vrednost klijenata sa rejtingom *CCC* na početku godine. Možemo izračunati prosek svih stopa smrtnosti za sve godine i označiti ga sa M_1^a:

$$p(CCC \to D) \equiv M_1^a = \sum_{1980}^{2000} w_i M_{1i} \text{ i } \sum w_i = 1, \qquad (6.2)$$

gde je w_i vrednost svih pojedinačnih slučajeva sa rejtingom *CCC* za godinu *i* proporcionalno u odnosu na ukupnu vrednost slučajeva sa rejtingom *CCC* u toku svih godina. To je faktor koji se koristi za određivanje verovatnoće prelaska iz *CCC* u *D*, $p(CCC \to D)$. Možemo ponoviti ovo i za prelaske iz rejtinga *CCC* u sve druge moguće rejtinge, da bismo dobili ostale verovatnoće prelaza, npr. $p(CCC \to AAA)$. Slično uradimo i za sve ostale inicijalne rejtinge, da bismo dobili ukupno 64 ($= 8 \cdot 8$) empirijskih verovatnoća prelaza. Kreditna matrica dakle koristi bezuslovne (ili istorijske) verovatnoće i uzima prosečne vrednosti. Model pretpostavlja da je verovatnoća prelaska u bilo kojoj godini nezavisna od verovatnoća u prethodnim godinama.

Zamislimo da imamo obveznicu koja trenutno ima rejting *B*, i da se na kraju godine mogu desiti tri situacije. Može se poboljšati rejting i preći u *A*, može doći u stanje nenaplativosti ili zadržati rejting *B*. Verovatnoća svih ovih događaja je p_i ($i = 1,2,3$). Dalje ćemo pretpostaviti da je vrednost obveznice na kraju godine u ove tri različite situacije data sa V_i ($i = 1,2,3$). Tada je očekivana vrednost i standardno odstupanje (na kraju prve godine) obveznice:

$$V_m = \sum_{i=1}^{3} p_i V_i \qquad (6.3)$$

$$\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} p_i (V_i - V_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} p_i V_i^2 - V_m^2} \qquad (6.4)$$

Standardno odstupanje određuje meru kreditnog rizika ove obveznice u periodu od jedne godine. Međutim, u ovom slučaju ne možemo reći da je CaR u petom percentilu $V_m - 1.65\sigma_V$ jer kreditna izloženost nema normalnu raspodelu. Ipak, promene u σ_V iz godine u godinu pokazuju pravac kretanja kreditnog rizika sve dok se rep raspodele ne promeni iz korena i bude nezavisan od σ_V.

Sada ćemo ovo prikazati detaljnije za jednu obveznicu, a kasnije i za portfolio od dve obveznice. Da bismo pojednostavili analizu pretpostavićemo da su moguće tri realizacije obveznice u budućnosti, *A* rejting, *B* rejting i potpuna nenaplativost *D*.

Pretpostavimo da finansijska institucija ima neobezbeđenu obveznicu sa kuponom 6%, periodom dospeća 7 godina i da ima rejting *A*. Period za računanje kreditnog rizika je 1 godina. Možemo koristiti istorijske podatke da izračunamo proporcije za ostanak obveznice u *A* rejtingu, prelazak u *B* ili *D* rejting. Na primer, za 1000 obveznica sa *A* rejtingom u perdiodu od 10 godina možemo videti da u proseku 92% ostaje sa rejtingom *A*, 7% prelazi u rejting *B* i 1% postaje nenaplativo (prelazi u rejting *D*). U tabeli 2. je prikazana matrica prelaza koja prikazuje ove verovatnoće (p_i).

Inicijalni rejting	Verovatnoće za rejting na kraju godine (%)		
	A	*B*	*D*
A	$p_{A,A} = 92$	$p_{A,B} = 7$	$p_{A,D} = 1$

Tabela 2. Matrica prelaza (jedna obveznica)

Jasno je da je najgora moguća situacija da dođe do nenaplativosti. U tom slučaju imaoci obveznice dobijaju izvesne isplate, a koliko, to zavisi od klase kojoj pripadaju. U tabeli 3. prikazane su stope naplate (oporavka) i vidimo da su prosečne stope naplate 53% za nadređni osigurani dug, dok je za mlađi podređeni dug stopa naplate 17%. Primetimo veliku neizvesnost koja postoji u ovim stropama naplate, koja se vidi iz njihovih standardnih devijacija. Na primer, ukoliko je obveznica sa *A* rejtingom starije podređena tada je njena srednja stopa naplate 51% od njene nominalne vrednosti (=\$100) i stoga je iznos naplate $V_{A,D} = \$51$.

Klase nadređenosti	Očekivana vrednost (%)	Standardno odstupanje (%)
Nadređeni osigurani dug	53	27
Nadređeni neosigurani dug	51	25
Starije podređeni dug	38	24
Podređeni dug	33	20
Mlađi podređeni dug	17	11

Tabela 3. Stope naplate posle stanja nenaplativosti (% od vrednosti)

Tržišna vrednost obveznice na kraju prve godine je sadašnja vrednost njenih budućih kupona (anuiteta) i njena vrednost na dospeću. Terminske stope h_{ij} su ugovorene cene za određivanje budućih vrednosti aktive od kraja *i*-te godine do kraja *j*-te godine. Skup terminskih stopa je prikazan u tabeli 4. i one predstavljaju najbolja predviđanja tržišta za buduće spot stope. Vidimo da su terminske stope za obveznice sa rejtingom *A* ispod onih za obveznice sa rejtingom *B*, što predstavlja manji kreditni rizik obveznica sa rejtingom *A* u odnosu na obveznice sa rejtingom *B*. Dakle, manji kreditni rizik imaju obveznice sa boljim rejtingom.

Kreditni rejting	h_{12}	h_{13}	h_{14}
A	3.7	4.3	4.9
B	6.0	7.0	8.0

Tabela 4. Kretanje godišnjih terminskih stopa

Inicijalna obveznica sa rejtingom *A* ima 7 godina do dospeća. Pretpostavićemo da se njen rejting ne menja do kraja godine. Koja je vrednost te obveznice na kraju godine? Pretpostavka je da dužnik za datu obveznicu plaća kupon u iznosu 6% od nominalne vrednosti na kraju prve godine, i dalje ostalih 6 kupona plus nominalnu vrednost od \$100.

$$V_{A,A} = \$6 + \frac{\$6}{1.037} + \frac{\$6}{(1.043)^2} + \frac{\$6}{(1.049)^3} + \cdots + \frac{\$106}{(1+h_{17})^6} \qquad (6.5)$$

gde su stope diskontovanja $h_{12} = 3.7\%$, $h_{13} = 4.3\%$, itd. Međutim, ako pretpostavimo da je došlo do promene u *B* rejting, tada će njena vrednost biti:

$$V_{A,B} = \$6 + \frac{\$6}{1.06} + \frac{\$6}{(1.07)^2} + \frac{\$6}{(1.08)^3} + \cdots + \frac{\$106}{(1+h_{17})^6}, \tag{6.6}$$

gde su terminske stope one koje se odnose na obveznice sa rejtingom *B* iz tabele 4. Ako dođe do pomeranja iz *A* u *B* rejting, njena vrednost će pasti zbog većih faktora diskontovanja (terminskih stopa). Pretpostavićemo da gornji izrazi daju prinose:

$$V_{A,A} = \$109 \text{ i } V_{A,b} = \$107. \tag{6.7}$$

Sada za inicijalnu obveznicu sa rejtingom *A* imamo podatke o njenim verovatnoćama prelaza p_i i odgovarajućim vrednostima na kraju godine koje označavamo sa V_i .

Rejting na kraju godine	Verovatnoća (%)	Vrednost ($)
A	$p_{A,A} = 92$	$V_{A,A} = 109$
B	$p_{A,B} = 7$	$V_{A,B} = 107$
D	$p_{A,D} = 1$	$V_{A,D} = 51$

Tabela 5. Verovatnoće i vrednost obveznice za inicijalni A rejting

Možemo računati CaR na nekoliko načina. Prvo ćemo posmatrati upotrebu standardnog odstupanja.

$$V_{m,A} = \sum_{i=1}^{3} p_i V_i = 0.92 \cdot \$109 + 0.07 \cdot \$107 + 0.01 \cdot \$51 = \$108.28 \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{V,A} &= \sqrt{\sum p_i V_i^2 - V_{m,A}^2} = \\ &= \left(0.92 \cdot \$109^2 + 0.07 \cdot \$107^2 + 0.01 \cdot \$51^2 - \$108.28^2\right)^{1/2} = \$5.78 \end{aligned} \tag{6.9}$$

gde $i = 1,2,3$ odgovara rejtinzima *A*, *B* i *D*. (Primetimo da smo određivali standardno odstupanje od očekivane buduće vrednosti $V_{m,A}$. Alternativa ovome je da merimo rizik pod pretpostavkom da obveznica zadržava rejting *A*, koristeći očekivanu vrednost $V_{A,A} = \$109$.)

Gornja kalkulacija pretpostavlja da je vrednost obveznice sa sigurnošću poznata u svakoj realizaciji događaja, dok u praksi postoji raspodela mogućih vrednosti unutar svake situacije. Kako postoji nesigurnost u vrednost obveznice u svakoj od posmatrane tri situacije označićemo ih sa σ_i i gornja formula će biti zamenjena sa:

$$\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} p_i \left(V_i^2 + \sigma_i^2\right) - V_m^2}. \tag{6.10}$$

Analiza stopa naplate za obveznice koje su u stanju nenaplativosti daje nam procene za standardno odstupanje od očekivane stope naplate i to je prikazano u tabeli 3. Za nadređenu neosiguranu obveznicu sa rejtingom *A* to je $\sigma_3 = 25\%$. Zbog nedostatka podataka za standardno odstupanje od vrednosti obveznice koja ne uključuje nenaplativost, moramo postaviti $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Mnogo ispravnija mera za σ_V bi bila data ukoliko bi zamenili $0.01 \cdot \$51^2$ u gornjoj jednačini sa $0.01 \cdot \left(\$51^2 + \$25^2\right)$ da se prikaže nesigurnost u vrednost obveznice kada je u stanju nenaplativosti.

Standardno odstupanje nije posebno dobra mera za rizik ako raspodele ishoda nisu normalne. Tada se pravi histogram raspodele i koriste se pojedinačni percentili kao mera za CaR. Na primer, pretpostavimo da smo odabrali percentil od 5% kao odsecanje za CaR. U tabeli 5. pomeramo se iz rejtinga *D* (sa 1% verovatnoće) u *B* rejting (sa verovatnoćom 7%). Kombinovana verovatnoća da je obveznica u stanju nenaplativosti ili da ima rejting *B* je 8% (=1% + 7%), što prelazi našu tačku odsecanja od 5%. Dakle, ovde je najbliža ocena za CaR \$107, što je \$1.28 ispod očekivane vrednosti na kraju godine, $V_{m,A} = \$108.28$. Naravno, naša aproksimacija tačke odsecanja u 5% je prilično gruba jer mi posmatramo samo tri slučaja. Primetimo da je odsecanje u tački od 5% uzeto iz stvarne raspodele različito od $1.65 \cdot \sigma_{V,A}$ jer prinosi portfolija nisu normalno raspoređeni. Možemo ponoviti gornju računicu uzimajući obveznicu sa inicijalnim rejtingom *B*, čije su verovatnoće prelaza i vrednosti na kraju godine dati u tabeli 6. Time ćemo dobiti očekivanje i standardno odstupanje za vrednost obveznice sa inicijalnim rejtingom *B* na kraju godine:

$$V_{m,B} = \$95.01 \text{ i } \sigma_{V,B} = \$12.19. \qquad (6.11)$$

Rejting na kraju godine	Verovatnoća (%)	Vrednost (\$)
A	$p_{B,A} = 3$	$V_{B,A} = 108$
B	$p_{B,B} = 90$	$V_{B,B} = 98$
D	$p_{B,D} = 7$	$V_{B,D} = 51$

Tabela 6. Verovatnoće i vrednost obveznice za inicijalni B rejting

Sada ćemo proširiti našu analizu na portfolio sa dve obveznice, i to:

- starije podređena obveznica sa inicijalnim rejtingom *A* (6% kupon, 7 godina do dospeća) i
- starije podređena obveznica sa inicijalnim rejtingom *B* (5% kupon, 6 godina do dospeća).

Ponovo ćemo zbog pojednostavljivanja pretpostaviti da su moguće samo tri situacije na kraju prve godine, *A*, *B* i nenaplativost (*D*). Vrednost obe obveznice za rejting na kraju svake godine može se izračunati koristeći odgovarajuće terminske stope. U tabelama 5. i 6. prikazane su vrednosti za oba inicijalna rejtinga. Postoji 9 mogućih vrednosti na kraju godine za ovaj portfolio od 2 obveznice. Na primer, ukoliko obe obveznice ostanu sa njihovim inicijalnim rejtinzima, vrednost portfolija će biti \$207 ($= V_{A,A} + V_{B,B} = \$109 + \$98$). Na sličan način mogu se izračunati iz tabele 5. i 6. ostali mogući prihodi i rezultati su prikazani u tabeli 7.

Dužnik 1 (inicijalni rejting *A*)		Dužnik 2 (inicijalni rejting *B*)		
		A	*B*	*D*
		$V_{B,A}=108$	$V_{B,B}=98$	$V_{B,D}=51$
A	$V_{A,A}=109$	217	207	160
B	$V_{A,B}=107$	215	205	158
D	$V_{A,D}=51$	159	149	102

Tabela 7. Moguće vrednosti na kraju godina (dve obveznice)

Verovatnoće pomeranja kreditnog rejtinga za svaku obveznicu pojedinačno mogu se pročitati u odgovarajućem redu matrice prelaza u tabeli 8. Otuda obveznica sa inicijalnim rejtingom *B* ima 3% šanse da pređe u rejting *A*, 90% da ostane rejtinga *B* i 7% šanse da na kraju godine bude nenaplativa. Problem sa kojim se suočavamo je izračunavanje zajedničkih verovatnoća za ovaj portfolio. Za obe obveznice postoji mogućnost menjanja rejtinga na kraju godine, pa imamo 9 različitih situacija u kojima se može naći portfolio. Ako pretpostavimo da je verovatnoća da jedna obveznica (sa inicijalnim rejtingom *A*) završi godinu u bilo kojoj pojedinačnoj situaciji nezavisna od toga u kojoj situaciji će druga obveznica (sa inicijalnim rejtingom *B*) završiti godinu, tada je izračunavanje zajedničkih verovatnoća jednostavno. Na primer (iz tabele 8.) šansa da obe obveznice ne menjaju svoje rejtinge na kraju godine je:

$$p_{A,A;B,B} = p_{A,A} \cdot p_{B,B} \tag{6.12}$$

$$0.828 = 0.92 \cdot 0.90$$

Inicijalni rejting	Verovatnoće za rejting na kraju godine		
	A	*B*	*D*
A	92	7	1
B	3	90	7
D	0	0	100

Tabela 8. Matrica prelaza: p_{ij}(%)

Označićemo obveznicu sa inicijalnim rejtingom *A* kao obveznicu 1 i tada ćemo verovatnoće kretanja njenog rejtinga u situacijama $j=1,2,3$ označiti sa $p_{1j}\left(j=1,2,3\right)$. Slično, za obveznicu sa inicijalnim rejtingom *B*, obveznicu 2, verovatnoće označavamo sa p_{2j}. Sa π_{ij}, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, ćemo označiti zajedničke verovatnoće za ovaj portfolio, gde i predstavlja situaciju u kojoj se obveznica 1 nalazi na kraju godine, a j situaciju u kojoj se obveznica 2 nalazi na kraju godine. Ostale zajedničke verovatnoće, pod pretpostavkom nezavisnih kretanja rejtinga, mogu se izračunati na sličan način i date su u tabeli 9, gde je naravno pretpostavljena korelacija 0 između svih mogućih kretanja kreditnog rejtinga.

Dužnik 1 (inicijalni rejting *A*)		Dužnik 2 (inicijalni rejting *B*)		
		A	*B*	*D*
		$p_{21} = p_{B,A} = 3$	$p_{22} = p_{B,B} = 90$	$p_{23} = p_{B,D} = 7$
A	$p_{11} = p_{A,A} = 92$	2.76	82.8	6.44
B	$p_{12} = p_{A,B} = 7$	0.21	6.3	0.49
D	$p_{13} = p_{A,D} = 1$	0.03	0.9	0.07

Tabela 9. Zajedničke verovatnoće kretanja rejtinga: $\pi_{ij}(\%)$

Pojedinačni brojevi u 3×3 centralnoj matrici su jednostavno proizvodi brojeva u odgovarajućem redu i koloni. Na primer, koristeći gornju jednačinu zajednička verovatnoća dve obveznice koje završavaju godinu u statusu nenaplativosti, tj. u situaciji 3, je $\pi_{33} = p_{13}\cdot p_{23} = 0.01\cdot 0.07\cdot 100\% = 0.07\%$. Ključne osobine zajedničkih verovatnoća kretanja su:

- najverovatniji ishod je da obveznice ostanu u inicijalnom rejtingu, tj. da dužnik 1 bude u stanju 1, a dužnik 2 u stanju 2, $\pi_{12} = p_{11}\cdot p_{22} = p_{A,A}\cdot p_{B,B} = 82.8\%$.
- verovatnoća kretanja u drugo stanje je manja kako se udaljavamo od inicijalnog stanja.
- zbir svih vrednosti u koloni ili redu mora biti jednak verovatnoći kretanja u slučaju da dužnika posmatramo samog.

Sada ćemo izmeriti CaR za portfolio sa dve obveznice. Računanje očekivanja i standardnog odstupanja mogućih ishoda je isto kao i kad imamo samo jednu obveznicu, ali sada imamo 9 mogućih situacija. Dakle, formule su sledeće:

$$V_{m,p} = \sum_{i,j=1}^{3} \pi_{ij} V_{i,j} = \$203.29 \tag{6.13}$$

$$\sigma_{V,p} = \left[\sum_{i,j=1}^{3} \pi_{ij} V_{i,j}^{2} - V_m^{2} \right]^{1/2} = \$13.49 \tag{6.14}$$

gde π_{ij} odgovara zajedničkim verovatnoćama iz centralne 3×3 matrice u tabeli 8. i $V_{i,j}$ su vrednosti pridružene portfoliju za ove moguće ishode na kraju godine. Primetimo da su zajedničke verovatnoće π_{ij} različite, ali povezane sa verovatnoćama kretanja. Očekivana vrednost portfolija $V_{m,p} = \$203.29$ se može dobiti i kao suma pojedinačnih očekivanih vrednosti za obveznice A i B posmatrane posebno (tj. $V_{m,p} = V_{m,\mathrm{A}} + V_{m,\mathrm{B}}$), ali sada je $\sigma_{V,p} = \$13.49$ što je manje nego zbir standardnih odstupanja pojedinačnih obveznica $\sigma_{V,\mathrm{A}} + \sigma_{V,\mathrm{B}} = \$5.78 + \$12.19 = \$17.97$ i to zbog uticaja diversifikacije.

Ponovo možemo koristiti $\sigma_{V,p}$ kao grubu meru za CaR portfolija. Međutim, ako posmatramo raspodelu koja nije normalna, bolji način merenja CaR-a je da koristimo posebne percentile. U Kreditnoj matrici se obično koristi prvi percentil. Potrebno je da pronađemo takve vrednosti portfolija čije su verovatnoće manje od 1%. Dakle, poređamo vrednosti $V_{\mathrm{A+B}}$ iz tabele 7. od najmanje do najveće i dodamo im njihove zajedničke verovatnoće iz tabele 9.

$$V_{\mathrm{A+B}} = \{\$102, \$149, \$158, \$159, \ldots, \$217\} \tag{6.15}$$

$$\pi_{ij} = \{0.07, 0.9, 0.49, 0.03, \ldots, 2.76\} \tag{6.16}$$

Dakle kritičnu vrednost najbližu nivou od 1% daje vrednost \$149 koja daje CaR \$54.29 $\left(= V_{m,p} - \$149 = \$203.29 - \$149\right)$. Primetimo da je CaR meren tako da bude u vezi sa očekivanom vrednošću na kraju godine a ne sa inicijalnom vrednošću u trenutku $t = 0$.

Kada poznajemo inicijalni kreditni rejting, da bismo izračunali CaR računamo sledeće:

- verovatnoće kretanja kreditnog rejtinga;
- vrednost dužnika (obveznice) kada se nađe u stanju nenaplativosti (što zavisi od klase nadređenosti obveznice);
- vrednost obveznice u bilo kojem novom kreditnom rejtingu (gde se vrednost kupona ponovo procenjuje koristeći jednogodišnju terminsku stopu) i
- primenjujemo standardno odstupanje na kraju godine ili percentile, koji su korisniji, za izračunavanje CaR-a.

Možemo zaključiti da CaR portfolija korporativnih obveznica zavisi od zajedničkih verovatnoća kretanja rejtinga u svakoj mogućoj situaciji i vrednosti obveznica u tim situacijama. Uopšteno, CaR portfolija bi bio manji od zbira pojedinačnih vrednosti CaR-a obveznica i to zbog uticaja diversifikacije.

7. Literatura i reference

[1] Basel Committee on Banking Supervision, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, Bank for International Settlements, Press & Communications, 2006

[2] Philipee Jorion, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw – Hill, 1997

[3] Dr Slobodan Slović, *Teorija investiranja*, Beograd, 2005

[4] Harry M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Limited, London, 1959

[5] P. Embrechts, H. Furrer, R. Kaufmann, *Different Kinds of Risk*, in Handbook of Financial Time Series, Edc. Andersen, Davis, Kreiss, Mikosch, 2008

[6] Keith Cuthbertson, Dirk Nitzsche, *Financial Engineering: Derivatives and Risk Management*, John Wiley & Sons, Ltd, 2001

[7] Paul Glasserman, Philip Heidelberger, Perwez Shahabuddin, *Research Report: Efficient Monte Carlo Methods for Value-at-Risk*, Risk Management Report 2000

[8] Darryll Hendricks, *Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data*, FRBNY Economic Policy Review, 1996

[9] Michael Minnich, *A Primer on Value at Risk*, Capital Market Risk Advisors, 1998

Biografija

Rođena sam 29. novembra 1983. godine u Vrbasu. Završila sam Osnovnu školu „Isa Bajić” u Kuli, a potom i Gimnaziju “Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu. Odmah po završetku gimnazije, 2002. godine, upisala sam studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, smer matematika finansija. U februaru 2008. godine sam diplomirala sa prosečnom ocenom 8,45 i stekla stručni naziv diplomirani matematičar – matematika finansija. Iste godine, u oktobru upisala sam master studije primenjene matematike na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom.

Novi Sad, 29.06.2010. Gordana Miljanić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master teza
VR
Autor: Gordana Miljanić
AU
Mentor: Dr Nataša Krejić
MN
Naslov rada: VaR i upravljanje kreditnim rizikom
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s/e
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2010
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (7, 44, 0, 9, 1, 1,0)
(broj poglavlja, br. strana, br. literarnih citata, br. tabela, br. slika, br. grafika, br. priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Finansijska matematika
ND
Ključne reči: rizik, mera rizika, očekivani prinos, standardna devijacija, backtesting, portfolio, kreditni rejting, nenaplativost, kreditna izloženost,
PO
UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod:
IZ
U ovom radu je definisan rizik u poslovanju finansijskih institucija, pojam minimalnog zahtevanog kapitala koji je uveo Bazelski sporazum i koji mora biti ispunjen kako bi se banke zaštitile od rizika. Prikazan je značaj upravljanja rizikom i opisane su metode za merenje rizika (parametarski metod, Delta – normalan metod, Monte – Karlo simulacija i metod istorijskih simulacija). Najveća pažnja posvećena je VaR meri rizika i kreditnom riziku kao najznačajnijem riziku u poslovanju banaka.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 02.06.2010.
DP
Datum odbrane: 09.2010.
DO
Članovi komisije:
KO
Dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Dora Seleši, docent Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Gordana Miljanić
AU
Mentor: PhD Nataša Krejić
MN
Title: VaR and credit risk management
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2010
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of mathematics and informatics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (7, 44, 0, 9, 1, 1,0)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Mathematics of Finance
SD
Key words: risk, measure of risk, expected return, standard deviation, backtesting, portfolio, credit rating, default, credit exposure
SKW

UC:
Holding data: In library of Department of Mathematics
HD
Note:
N
Abstract:
AB
In this thesis, we defined the risk exposure of financial institutions, minimum capital requirements, which was introduced by Basel Capital Accord, and that must be met by commercial banks to guard against risk. There is shown the importance of risk management and described methods for measuring risk (parametric method, Delta – Normal method, Monte – Carlo simulation and historical simulation method). Attention is on VaR measure of risk and credit risk as the most significant risk in banking.
Accepted by the Scientific Board on: 02.06.2010.
ASB
Defended: 09.2010.
DE
Thesis defend board:
DB
Dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Dr Zorana Lužanin, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Dr Dora Seleši, Assistant Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad