UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODN0-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Eva Jungabel

O homomorfizam-homogenim geometrijama ranga 2

-završni rad-

Novi Sad, oktobar 2009.

Predgovor

Za strukturu kažemo da je *homogena* ako se svaki izomomorfizam između dve konačno generisane podstrukture može proširiti do automorfizma strukture. Teorija prebrojivih homogenih struktura je počela intenzivno da se razvija nakon 1953. godine kada je R. Fraïssé u svom radu [5] dokazao da je slučajni graf homogen i dao opštu strategiju konstrukcije drugih prebrojivih homogenih struktura. Danas je teorija homogenih struktura čvrsto ukorenjena matematička teorija sa dubokim posledicama ne samo unutar matematike, već i, recimo, u razumevanju socio-tehnoloških fenomena kao što je world-wide web.

Homogeni objekti su opisani u mnogim značajnim klasama struktura. Na primer, prebrojiva homogena parcijalna uređenja opisana su u [12], prebrojivi homogeni grafovi su opisani u [8], dok su konačni homogeni grafovi opisani u [6]. Prebrojivi homogeni digrafovi su opisani u [2], a konačni i prebrojivi homogeni turniri u [7]. Za predmet izučavanja ovog rada od posebnog interesa su konačne geometrije: homogeni linearni prostori su opisani u [4], a homogeni semilinearni prostori u [3].

U svom radu [1] iz 2006. godine P. Cameron i J. Nešetřil su uopštili koncept homogenosti tako što su razmatrali razne tipove morfizma među strukturama. Iz te grupe pojmova posebno izdvajamo pojam *homomorfizam-homogenosti*:

Definicija. (Cameron, Nešetřil [1]) Za strukturu kažemo da je *homomorfizam-homogena* ako se svaki homomorfizam između dve konačno generisane podstrukture može proširiti do endomorfizma strukture.

O homomorfizam-homogenim objektima se veoma malo zna. Osim rada [1] do sada su objavljena samo dva rada: u [9] su opisani homomorfizam-homogeni parcijalno uređeni skupovi, a u [10] konačni homomorfizam-homogeni turniri.

Geomertiju ranga 2 čine konačna kolekcija tačaka i konačna kolekcija pravih koje zadovoljavaju sledeće dve aksiome:

- svaka prava ima bar dve tačke; i
- svake dve različite tačke leže na najviše jednoj pravoj.

Geometriju ranga 2 ćemo u daljem tekstu nazivati kombinatorna ravan.

Za pravu sa bar tri tačke kažemo da je *regularna*, dok za prave sa tačno dve tačke kažemo da su *singularne*. U radu [11] opisani su konačne homomorfizam-homogene kombinatorne ravni koje sadrže dve regularne prave koje se seku, a u radu [13] opisane su konačne homomorfizam-homogene kombinatorne ravni koje sadrže tačno dve regularne prave koje se ne seku i svaka tačka pripada nekoj od tih regularnih pravih. Da bi se kompletirala karakterizacija homomorfizam-homogenih kombinatornih ravni potrebno je još opisati homomorfizam-homogene kombinatorne ravni kod koje ne postoje regularne prave koje se seku. Ovaj rad predstavlja jedan originalan doprinos u tom smeru.

U ovom radu se bavimo kombinatornim ravnima koje imaju sledeću osobinu:

- ne postoje dve regularne prave, *a* i *b*, koje se seku

Glavni rezultat rada je Teorema 4.1 koja trvdi da prostor koji ima tri regularne prave *a*, *b*, *c* takvih da je prava *c* je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*, je homomorfizam-homogen ako i samo ako pripada jednoj od sledećih klasa prostora:

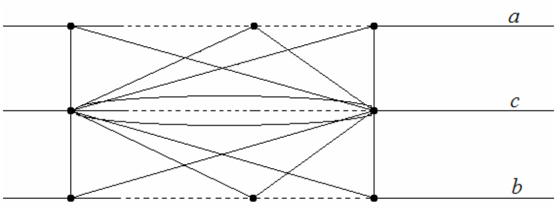
1. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 0-tanak i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$.

2. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 0-tanak i postoje tačno dve tačke $X \in a$ i $Y \in c$ za koje važi da *X* nije kolinearna sa *Y*, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$.

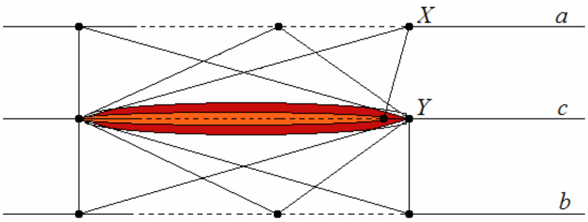
3. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 0-tanak i postoji tačno jedna tačka $Y \in c$ za koju važi da *Y* nije kolinearna sa $X \in a$ i $Z \in b$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b \setminus \{Z\}$ i $Z \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$. Takav prostor je homomorfizam-homogen.

4. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 1-tanak i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$.

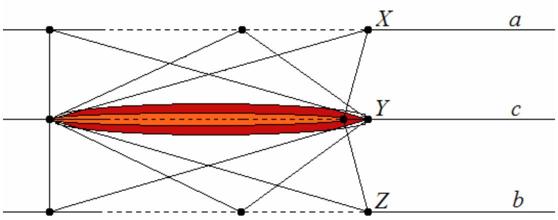
1.



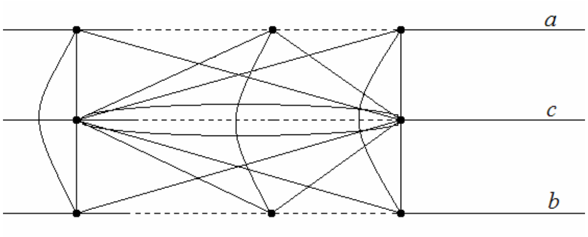
2.



3.



4.



U Glavi 1 ćemo definisati kombinatorne ravni, homomorfizam, homomorfizam-homogenost i dati pregled poznatih rezultata.

U Glavi 2 ćemo se baviti kombinatornim ravnima gde ne postoje dve regularne prave koje se seku i gde postoje tačke koje ne pripadaju ni jednoj regularnoj pravoj.

U Glavi 3 ćemo se baviti kombinatornim ravnima gde ne postoje dve regularne prave koje se seku i gde svaka tačka pripadaju jednoj regularnoj pravoj.

U Glavi 4 ćemo navesti opštu teoremu koja daje karakterizaciju za podklasu kojom se bavimo u ovom radu.

Ovim putem bih želela da se zahvalim profesoru dr Draganu Mašuloviću - izvanrednom mentoru i u sručnom i u ljudskom smislu - za veliku pomoć koju mi je pružio prilikom izrade mog rada. Za pet godina mog studiranja svi profesori i asistenti su ostavili veliki utisak na mene, ali bih ipak izdvojila dva profesora, dr Ivicu Bošnjaka i dr Sinišu Crvenkovića, koji su prihvatili da budu i članovi komisije.

Sadržaj

1 Osnovni pojmovi

Kombinatorna ravan je uređen par (X, L) gde je X konačan skup čije elemente zovemo tačke, a $L \subseteq P(X)$ je skup čije elemente zovemo prave i važi da:

1. svaka prava sadrži bar dve tačke,
2. svake dve različite tačke pripadaju najviše jednoj pravoj.

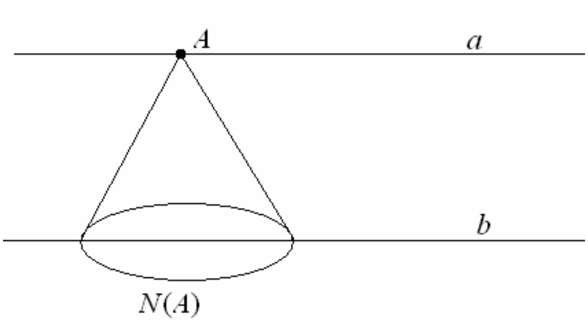
Linearan prostor je kombinatorna ravan gde svake dve različite tačke pripadaju tačno jednoj pravoj.

Za pravu ćemo reći da je *regularna* ako ima bar tri tačke. Za ostale prave kažemo da su *singularne*. Za tačke $A, B \in X$ sa $A \sim B$ ćemo označiti činjenicu da su tačke A i B *kolinearne*.

Izolovana tačka kombinatorne ravni je tačka koja ne pripada nijednoj pravoj kombinatorne ravni.

Ako drugačije nije naglašeno, regularne prave u prostoru ćemo označiti malim slovima sa *a, b,...* Za tačku $A \in a$, sa $N_b(A)$ ćemo označiti skup svih tačaka prave *b* koje su kolinearne sa *A* (Slika 1.1).

$$N_b(A) = \{B \in b \mid B \sim A\}$$



Slika 1.1

Trakasti prostor je kombinatorna ravan koja ima tačno dve disjunktne regularne prave i pri tome svaka tačka leži na jednoj od ove dve prave.

Za trakasti prostor (X, L) ćemo reći da je *tanak* ako je $|N_a(A)| \leq 1$ za sve $A \in b$ i $|N_b(A)| \leq 1$ za sve $A \in a$.

Za trakasti prostor kažemo da je *pun* ako važi sledeće:

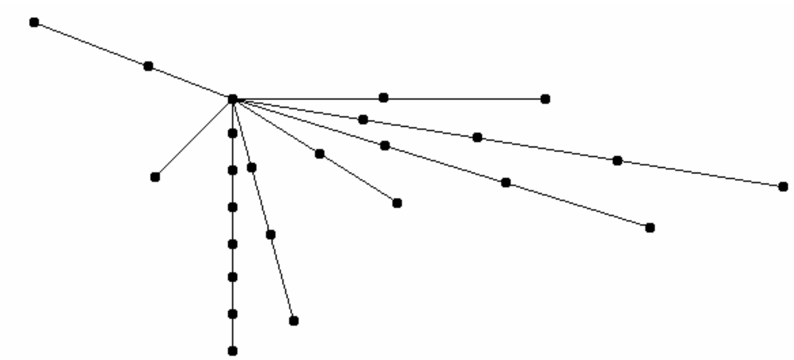
- $N_a(B) \neq \phi$ i $N_b(A) \neq \phi$ za sve $A \in a$, $B \in b$ i
- Ako je $|N_b(A)| = 1$, recimo $N_b(A) = \{B\}$, onda je $|N_a(B)| \geq 2$.

Za trakasti prostor (X, L) kažemo da je *mešovitog tipa* ako nije ni tanak ni pun. To znači da postoji $A \in a$ sa osobinom $|N_b(A)| \geq 2$ i uz to postoji $B \in b$ takvo da je:

- $N_a(B) = \phi$, ili
- $|N_a(B)| = 1$ i pri tome ako je $N_a(B) = \{C\}$, onda je $N_a(C) = \{B\}$.

Singularitet prve vrste trakastog prostora (X, L) je tačka $B \in b$ sa osobinom $N_a(B) = \phi$. *Singularitet druge vrste* trakastog prostora (X, L) je par tačaka (B, C) sa osobinom $N_b(B) = \{C\}$ i $N_a(C) = \{B\}$.

Pramen pravih je kombinatorna ravan gde svaka prava prelazi kroz jednu zajedničku tačku (Slika 1.2). Tačku koja pripada svakoj pravoj zovemo *centar* od pramena.



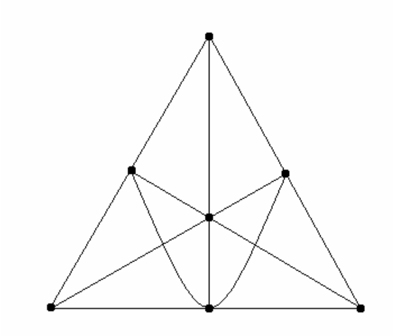
Slika 1.2

Kombinatorna ravan je *regularna* ako sadrži dve regularne prave koje se seku, inače je *singularna*.

Kombinatorna ravan je *projektivna* ako svake dve različite prave u geometriji imaju zajedničku tačku.

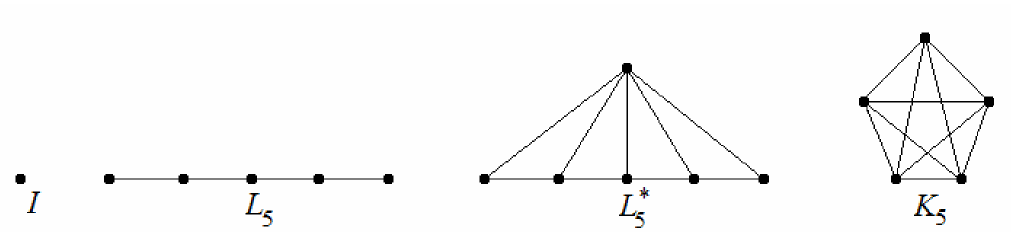
Primer 1.1 Svaki graf je kombinatorna ravan.

Primer 1.2 Fano ravan je kombinatorna ravan (Slika 1.3):



Slika 1.3

Primer 1.3 Prostori I, L_n, L_n^* i K_n su linearni prostori. (Slika 1.4)

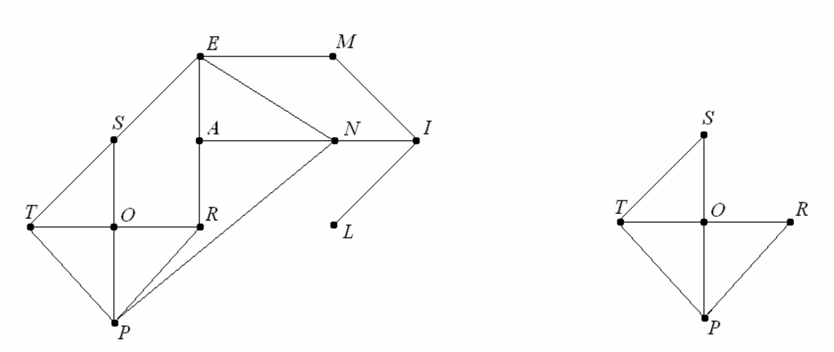


Slika 1.4

Kombinatorna ravan (Y, L_Y) je potprostor kombinatorne ravni (X, L_X) ako važi

1. $Y \neq \phi$
2. $Y \subseteq X$
3. $L_Y = \{l \bigcap Y | l \in L_X, |l \bigcap Y| \geq 2\}$

Primer 1.4 Evo primera jedne kombinatorne ravni i njenog potprostora (Slika 1.5):



Slika 1.5

Šetnja u kombinatornoj ravni je niz tačaka i pravih $A_0 l_1 A_1 l_2 A_2 ... l_k A_k$ gde $A_{i-1} A_i \in l_i$ za sve *i*.

Put u kombinatornoj ravni je šetnja u kojoj su sve tačke različite i sve prave različite. *Dužina* puta je broj pravih na tom putu.

Kombinatorna ravan je *povezana* ako za svake dve tačke u toj ravni postoji šetnja koja ih spaja.

Komponenta povezanosti kombinatorne ravni je maksimalna povezana podstruktura te strukture.

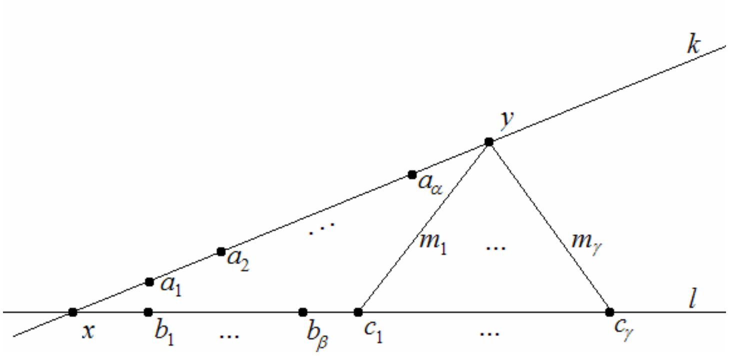
Za dve regularne prave *a, b* kombinatorne ravni (X, L) kažemo da su *povezane* ako postoje tačke $A \in a$ i $B \in b$ takve da je $A \sim B$.

Za pozitivne cele brojeve α, β, i γ, neka je $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ kombinatorna ravan (X, L) sa $2 + \alpha + \beta + \gamma$ tačaka $x, y, a_1, ..., a_\alpha, b_1, ..., b_\beta, c_1, ..., c_\gamma$ i $2 + \gamma$ pravih $k, l, m_1, ..., m_\gamma$ (Slika 1.6) gde

$$k = \{x, y, a_1, ..., a_\alpha\}$$

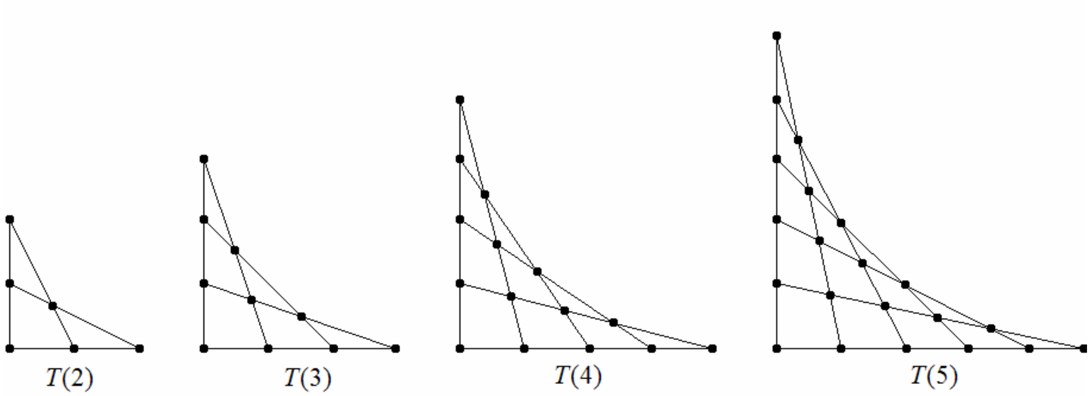
$$l = \{x, b_1, ..., b_\beta, c_1, ..., c_\gamma\}$$

$$m_i = \{y, c_i\},\ i \in \{1, ..., \gamma\}$$



Slika 1.6

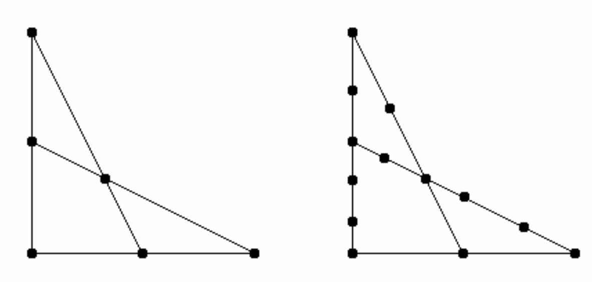
Trougaoni prostor, u oznaci $T(q)$, jeste konačna projektivna kombinatorna ravan gde svaka tačka leži na tačno dve prave. U ovom prostoru svaka prava ima isti broj tačaka. Sa q ćemo označiti red trougaonog prostora, tj. $q = |l| - 1$. Trougaoni prostori su parametrom q jednoznačno određeni do na izomorfizam. (Slika 1.7)



Slika 1.7

Kombinatorna ravan (Y, L_Y) je *potpodela* kombinatorne ravni (X, L_X) ako je $X \subseteq Y$ i postoji funkcija $f : Y \setminus X \to L_X$ tako da važi (Slika 1.8)

$$L_Y = \left\{ l \bigcup f^{-1}(l) \middle| l \in L_X \right\}.$$



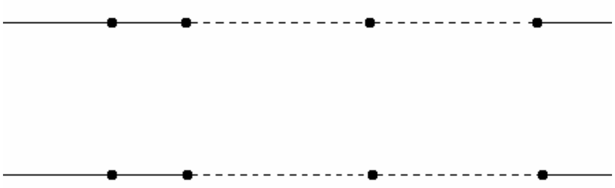
Slika 1.8

Neka su (X, L) i (Y, M) dve kombinatorne ravni. Funkcija $f : X \to Y$ je *homomorfizam* ako važi $(\forall l \in L)(\exists m \in M) f(l) \subseteq m$, tj. kolinearne tačke se preslikavaju na kolinearne tačke.

Za homomorfizam između dve konačno generisane podstrukture prostora (X, L) reći ćemo da je *lokalni homomorfizam* prostora (X, L).

Definicija 1.1 Kombinatorna ravan (X, L) je *homomorfizam-homogena* ako za svake dve konačne podstrukture (Y_1, L_1) i (Y_2, L_2), svaki homomorfizam $f : Y_1 \to Y_2$ može da se proširi do endomorfizma $f^* : X \to X$ strukture (X, L).

Primer 1.5 Sledeća kombinatorna ravan je očigledno homomorfizam-homogena (Slika 1.9):



Slika 1.9

U ovom radu opisujemo homomorfizam-homogene kombinatorne ravni u kojima ne postoje dve regularne prave, *a* i *b*, koje se seku. Dokazaćemo da opisivanje homomorfizam-homogenih ravne gde postoje tačke koje ne leže ni na jednoj regularnoj pravoj, jeste coNP-kompletan problem. To, dalje, znači da ne postoji prihvatljiv katalog ovakvih struktura (za neki katalog struktura kažemo da je prihvatljiv ako je to konačan spisak polinomno odlučivih klasa struktura). Zato se u radu ne razmatra klasa kombinatornih ravni u kojima postoje tačke koje ne leže na regularnim pravim.

Sledeća lema daje veoma korisnu karakterizaciju homomorfizam-homogenih kombinatornih ravni. Za lokalni homomorfizam $f : S \to T$ prostora (X, L) kažemo da može da se proširi za jednu tačku ako postoji $A \in X \setminus S$ i lokalni homomorfizam $f' : S \bigcup \{A\} \to T'$ koji proširuje *f*, tj. za koga važi $f'(P) = f(P)$ za sve $P \in S$.

Lema 1.1 Kombinatorna ravan (X, L) je homomorfizam-homogena ako i samo ako svaki lokalni homomorfizam $f : S \to T$ tog prostora može da se proširi za jednu tačku.

Dokaz.

$(\Leftarrow)$ Uzmimo proizvoljan lokalni homomorfizam $f : S \to T$. Prema pretpostavci, postoji tačka $A_1 \in X \setminus S$ i lokalni homomorfizam $f_1 : S \bigcup \{A_1\} \to T_1$ koji proširuje *f*. Na isti način, postoji $A_2 \in X \setminus S_1$, gde je $S_1 = S \bigcup \{A_1\}$, i lokalni homomorfizam $f_2 : S_1 \bigcup \{A_2\} \to T_2$ koji proširuje f_1. Itd. Nakon konačno mnogo koraka (preciznije, nakon $|X \setminus S|$ koraka) na ovaj način dobijamo lokalni homomorfizam $f_k : S_{k-1} \bigcup \{A_k\} \to T_k$ za koga je $S_{k-1} \bigcup \{A_k\} = X$. Dakle, to je endomomorfizam prostora koji proširuje *f*.

$(\Rightarrow)$ Neka je (X, L) homomorfizam-homogen, i neka je $f : S \to T$ proizvoljan lokalni homomorfizam tog prostora. Tada postoji $f^* : X \to X$ koji proširuje *f*. Uzmimo proizvoljno $A \in X \setminus S$ i za f' stavimo $f^*\big|_{S \bigcup \{A\}}$. □

1.2 Pregled poznatih rezultata

U ovom poglavlju navodimo osnovne rezultate vezane za dve klase kombinatornih ravni:

- konačne homomorfizam-homogene kombinatorne ravni koje sadrže dve regularne prave koje se seku,
- konačne homomorfizam-homogene kombinatorne ravni koje sadrže tačno dve regularne prave koje se ne seku i svaka tačka pripada nekoj od tih regularnih prava,

Karakterizacija kombinatornih ravne gde postoje dve regularne prave koje se seku, data u radu [11], jeste sledeća:

Teorema 1.1 Konačan linearan prostor je homomorfizam-homogen ako i samo ako je singularan linearan prostor (uključujući i trivijalne linearne prostore kao *I*, L_n ili K_n) ili Fano ravan.

Teorema 1.2 Neka je (X, L) konačna kombinatorna ravan sa barem dve komponente povezanosti. Tada je (X, L) homomorfizam-homogena ako i samo ako pripada jednoj od ovih klasa:

1. $L = \phi$, tj. svaka tačka je izolovana tačka, ili
2. svaka komponenta povezanosti od (X, L) generiše jedan singularan linearan prostor sa najviše dve tačke, ili
3. svaka komponenta povezanosti od (X, L) je izomorfna sa sledećim prostorima:
    - Fano ravan,
    - L_n za neko $n \geq 2$, ili
    - L_n^* za neko $n \geq 2$ (znajući da je $L_2^* \cong K_3$).

Teorema 1.3 Neka je (X, L) konačna povezana regularna kombinatorna ravan. Tada je (X, L) homomorfizam-homogena ako i samo ako pripada jednoj od ovih klasa kombinatorne ravni:

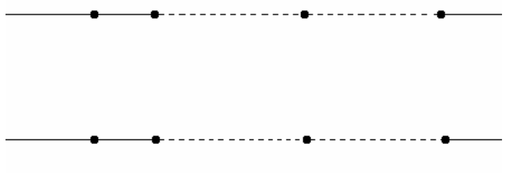
1. pramen pravih,
2. Fano ravan,
3. podpodela od $T(q)$ za neko $q \geq 1$,
4. $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, za neke $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$.

Karakterizacija kombinatornih ravne gde postoje tačno dve regularne prave koje su disjunktne i svaka tačka pripada nekoj od tih regularnih prava, data u radu [13], jeste sledeća:

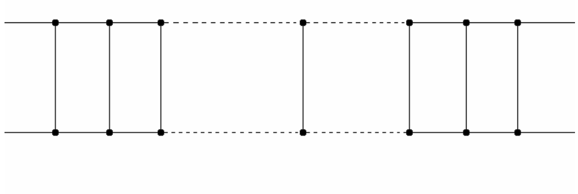
Teorema 1.4 Prostor je homomorfizam-homogen ako i samo ako pripada jednoj od sledećih klasa trakastih prostora (Slika 1.10):

I. $|N(A)| = 0$ za sve $A \in X$, (prostore zovemo 0-tanki prostori)
II. $|N(A)| = 1$ za sve $A \in X$, (prostore zovemo 1-tanki prostori)
III. (X, L) je pun prostor i $(\{N(A) | A \in a\}, \subseteq)$ je totalno uređen skup,
IV. (X, L) je prostor mešavitog tipa sa tačno jednim singularitetom i sa osobinom $N(A) = N(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \sum$, gde je $\sum$ skup singularnih tačaka.

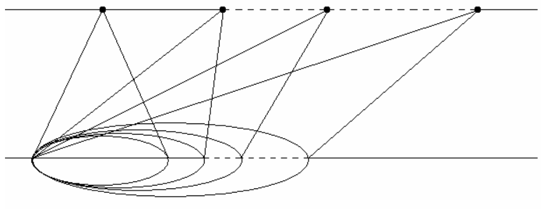
I.



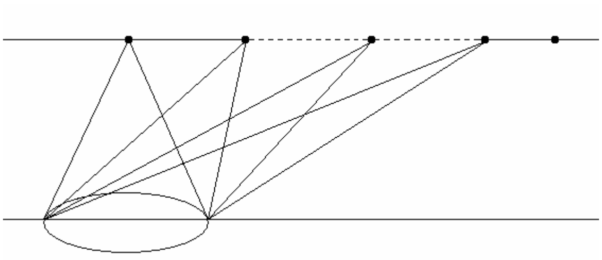
II.



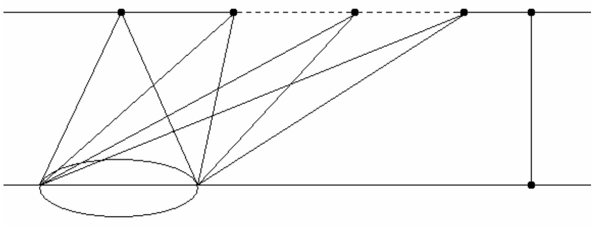
III.



IV.



V.



Slika 1.10

2 Kombinatorne ravni gde ne postoje dve regularne prave koje se seku

Takve prostore takođe možemo da podelimo na dve klase:

1. Postoje tačke koje ne leže na nekoj regularnoj pravoj,
2. Svaka tačka leži na nekoj regularnoj pravoj.

U prvom slučaju kada postoje tačke koje ne leže na nekoj regularnoj pravoj, problem je coNP-kompletan, što je prikazano u sledećoj teoremi:

Teorema 2.1 Problem određivanja homomorfizam-homogenosti konačne kombinatorne ravni (X, L) gde ne postoje dve regularne prave koje se seku i postoje tačke koje ne leže na nekoj regularnoj pravoj, jeste coNP-kompletan.

Dokaz. Da je ovaj problem coNP-kompletan, dokazaćemo tako što ćemo problem *k*-INDIPENDENT SET, $(k \geq 2)$, da svedemo na problem provere homomorfizam-homogenosti kombinatornih ravni.

Neka je $G = (V, L)$ proizvoljan graf. Neka je data regularna prava l i skupovi $I = \{q_0, q_1, ..., q_k\}$, $S = \{s_0, s_1, ..., s_k\}$ tako da su *V*, *l*, *I* i *S* po parovima disjunktni, i formiramo kombinatornu ravan G_k na sledeći način (Slika 2.1):

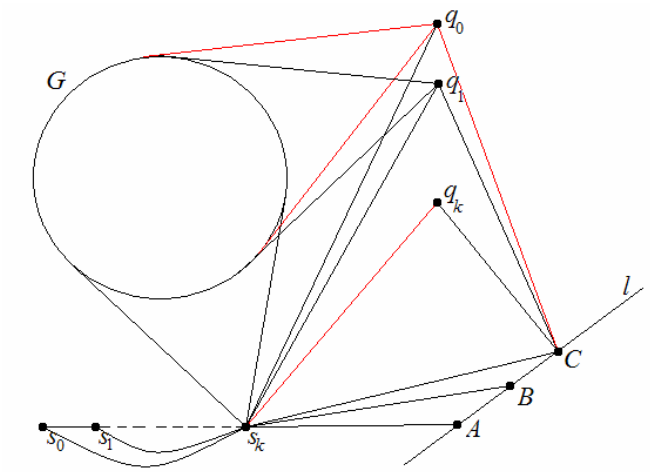
Tačke su:

- tačke grafa G,
- $k+1$ nezavisan čvorovi $q_0, q_1, ..., q_k$,
- $k+1$ čvorovi $s_0, s_1, ..., s_k$
- tačke prave *l*.

Prave su:

- sve grane grafa G,
- sve grane $s_i \sim s_j$,
- prava l,
- $v \sim q_i$ za sve $i > 0$ i sve $v \in V$,
- $v \sim s_i$ za sve $i \geq 0$ i sve $v \in V$,
- $s_i \sim q_j$ za sve $i \neq j$,
- sve tačke sa prave l su kolinearne sa svim tačkama skupa V,
- sve tačke sa prave l su kolinearne sa svim tačkama skupa S,
- sve tačke sa prave l su kolinearne sa tačkama q_i, gde $i > 0$.

Ravan G_k je konačna kombinatorna ravan gde ne postoje dve regularne prave koje se seku i postoje tačke koje ne leže na nekoj regularnoj pravoj. (Slika 2.1)



Slika 2.1

U nastavku ćemo dokazati da graf G ima k-nezavisan skup čvorova ako i samo ako ravan G_k nije homomorfizam-homogena.

$(\Rightarrow)$ Neka graf *G* ima *k*-nezavisan skup čvorova $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je ravan G_k homomorfizam-homogena.

Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{k-1} & q_0 \\ q_0 & \cdots & q_{k-1} & q_k \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, *f* može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke s_1.

Zbog $s_1 \sim x_0$, …, $s_1 \sim x_{k-1}$, $s_1 \sim q_0$ mora biti $f^*(s_1) \sim q_0$, $f^*(s_1) \sim q_1$, …, $f^*(s_1) \sim q_{k-1}$, $f^*(s_1) \sim q_k$, što je nemoguće.

Znači, ravan G_k nije homomorfizam-homogena.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo da graf *G* nema *k*-nezavisan skup tačaka. Dokazaćemo da je ravan G_k homomorfizam-homogena.

Neka je $f : G_k[U] \to G_k[W]$ lokalni homomorfizam, gde je $W = f(U)$.

I. $I \not\subset W$. Tada za tačku $q_i \notin W$ tačka s_i je kolinearna sa svim tačkama u prostoru $G_k \setminus \{q_i\}$. Funkciju *f* proširimo na sledeći način: $f^*(x) = s_i$, za $x \in G_k \setminus U$.

II. $I \subseteq W$. Postoje tačke $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k \in U$ tako da važi $f(x_i) = q_i$, za $0 \le i \le k$.

Skup $X = \{x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k\}$ je nezavisan skup tačaka.

- $X \bigcap S = \phi$.

  Pretpostavimo suprotno, tj. $X \bigcap S \neq \phi$. Sigurno važi $\left| X \bigcap S \right| \le 1$, jer je *X* nezavisan skup tačaka, a u skupu *S* nema dve nezavisne tačke.

  Neka je $X \bigcap S = \{s_i\}$. Tada je $X \bigcap V = \phi$, jer je svaka tačka iz skupa *V* kolinearna sa svakom tačkom iz skupa *S*, a *X* je nezavisan skup tačaka. Isto važi i za pravu *l*, tj. $X \bigcap l = \phi$, jer je svaka tačka iz skupa *l* kolinearna sa svakom tačkom iz skupa *S*, a *X* je nezavisan skup tačaka. Tada je $\left|X \bigcap I\right| \geq 2$ i postoji tačka q_j, $j \neq i$, $q_j \in X \bigcap I$. U tom slučaju važi da je q_j kolinearna sa tačkom s_i, što je nemoguće, jer je *X* nezavisan skup tačaka.

- $X \bigcap V = \phi$.

  Pretpostavimo suprotno, tj. $X \bigcap V \neq \phi$. Neka je $v \in X \bigcap V$. Pošto *G* nema *k*-nezavisan skup tačaka sledi da je $\left|X \bigcap V\right| \leq k-1$. Dalje sledi da je $X \bigcap l = \phi$, jer je tačka *v* kolinearna sa svakom tačkom prave *l*, a *X* je nezavisan skup tačaka. Sledi da je $\left|X \bigcap I\right| \geq 2$ i postoji tačka q_i, $i > 0$. U tom slučaju važi da je q_i kolinearna sa tačkom *v*, što je nemoguće, jer je *X* nezavisan skup tačaka.

- $X \bigcap l = \phi$.

  Pretpostavimo suprotno, tj. $X \bigcap l \neq \phi$. Neka je $A \in X \bigcap l$. Pošto prava *l* nema *k*-nezavisan skup tačaka sledi da je $\left|X \bigcap l\right| \leq k-1$. Dalje sledi da je $\left|X \bigcap I\right| \geq 2$ i postoji tačka q_i, $i > 0$. U tom slučaju važi da je q_i kolinearna sa tačkom *A*, što je nemoguće, jer je *X* nezavisan skup tačaka.

Dobili smo da je $X = I$, tj. postoji permutacija π od $\{0,1,\ldots,k\}$ takva da važi da je $f(q_i) = q_{\pi(i)}$, $0 \leq i \leq k$.

1. $V \not\subset U$. Neka je $v \in V \setminus U$. Funkciju *f* proširimo tako što uzmemo da je $f^*(v) = s_{\pi(0)}$.

2. $V \subseteq U$.

   i. $S \not\subset U$. Neka je $s_i \in S \setminus U$. Funkciju *f* proširimo tako što uzmemo da je $f^*(s_i) = s_{\pi(i)}$, tj.

$$f:\left(\begin{array}{ccccccccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{I}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{V}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{U\bigcap S}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{U\bigcap l}} & \\ q_0 & \ldots & q_k & v_1 & \ldots & v_n & s_{j_1} & \ldots & s_{j_t} & A_{m_1} & \ldots & A_{m_p} & s_i \\ q_{\pi(0)} & \ldots & q_{\pi(k)} & x_1 & \ldots & x_n & y_1 & \ldots & y_t & z_1 & \ldots & z_p & s_{\pi(i)} \end{array}\right)$$

Ukoliko važi da je $s_i \sim q_j$ za neko *j*, po konstrukciji je $i \neq j$ i važi da je $\pi(i) \neq \pi(j)$ i $s_{\pi(i)} \sim q_{\pi(j)}$.

Pošto je tačka $q_{\pi(i)}$ jedina tačka koja nije kolinearna sa tačkom $s_{\pi(i)}$ treba pokazati da $q_{\pi(i)} \notin \{x_1,...,x_n, y_1,...,y_t, z_1,...,z_p\}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da važi da je $q_{\pi(i)} \in \{x_1,...,x_n, y_1,...,y_t, z_1,...,z_p\}$. Neka je $q_{\pi(i)} = x_j$, za neko *j*. Neka je $q_l \in I \setminus \{q_0, q_i\}$. Pošto važi da je $v_j \sim q_l$ sledi da je $q_{\pi(i)} \sim q_{\pi(l)}$ što je nemoguće.

Analogno za tačke y_j, z_j.

ii. $S \subseteq U$. Tada je $l \not\subset U$. Neka je $A_i \in l \setminus U$.

a. $l \bigcap U = \phi$.

Funkciju *f* proširimo tako što uzmemo da je $f^*(A_i) = s_{\pi(0)}$.

$$f:\left(\begin{array}{cccccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{I}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{V}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{S}} & \\ q_0 & \ldots & q_k & v_1 & \ldots & v_n & s_0 & \ldots & s_k & A_i \\ q_{\pi(0)} & \ldots & q_{\pi(k)} & x_1 & \ldots & x_n & y_0 & \ldots & y_k & s_{\pi(0)} \end{array}\right).$$

Ukoliko važi da je $A_i \sim q_j$, po konstrukciji je $s_{\pi(0)} \sim q_{\pi(j)}$.

Pošto je tačka $q_{\pi(0)}$ jedina tačka koja nije kolinearna sa tačkom $s_{\pi(0)}$ treba da važi $q_{\pi(0)} \notin \{x_1,...,x_n, y_1,...,y_t\}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da važi da je $q_{\pi(0)} \in \{x_1,...,x_n, y_1,...,y_t, z_1,...,z_p\}$. Neka je $q_{\pi(0)} = x_j$, za neko j. Neka je $q_l \in I \setminus \{q_0\}$. Pošto važi da je $v_j \sim q_l$ sledi da je $q_{\pi(0)} \sim q_{\pi(l)}$ što je nemoguće.

Analogno za tačku y_j.

b. $l \bigcap U \neq \phi$, ali $\left| f\left(l \bigcap U\right) \right| = 1$.

Neka je $f\left(l \bigcap U\right) = \{z_1\}$.

$$f : \left(\begin{array}{cccccccccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{q_0 \ \cdots \ q_k}}^{I}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{v_1 \ \cdots \ v_n}}^{V}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{s_0 \ \cdots \ s_k}}^{S}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{A_{m_1} \ \cdots \ A_{m_p}}}^{U \bigcap l}} & \\ q_0 & \cdots & q_k & v_1 & \cdots & v_n & s_0 & \cdots & s_k & A_{m_1} & \cdots & A_{m_p} & A_i \\ q_{\pi(0)} & \cdots & q_{\pi(k)} & x_1 & \cdots & x_n & y_0 & \cdots & y_k & z_1 & \cdots & z_1 & s_{\pi(0)} \end{array} \right)$$

Funkciju f proširimo tako što uzmemo da je $f^*(A_i) = s_{\pi(0)}$.

Analogno kao u prethodnom slučaju i još treba dokazati da $z_1 \neq q_{\pi(0)}$, ali to važi jer bi u suprotnom za neko $j \neq 0$ $A_{m_r} \sim q_{\pi(j)}$ pa sledilo bi da je $q_{\pi(j)} \sim q_{\pi(0)}$.

c. $l \bigcap U \neq \phi$ i $\left| f\left(l \bigcap U\right) \right| \geq 2$.

Prava $l \bigcap U$ je preslikana na neku pravu $f\left(l \bigcap U\right)$, i postoji prava m tako da je $f\left(l \bigcap U\right) \subseteq m$, tj. postoje tačke $z_1, z_2, ..., z_p$ tako da važi $\{z_1, z_2, ..., z_p\} \subseteq m$.

$$f : \left(\begin{array}{cccccccccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{q_0 \ \cdots \ q_k}}^{I}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{v_1 \ \cdots \ v_n}}^{V}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{s_0 \ \cdots \ s_k}}^{S}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{A_{m_1} \ \cdots \ A_{m_p}}}^{U \bigcap l}} & \\ q_0 & \cdots & q_k & v_1 & \cdots & v_n & s_0 & \cdots & s_k & A_{m_1} & \cdots & A_{m_p} & A_i \\ q_{\pi(0)} & \cdots & q_{\pi(k)} & x_1 & \cdots & x_n & y_0 & \cdots & y_k & z_1 & \cdots & z_p & z_i \end{array} \right)$$

Tačku A_i preslikamo na neku tačku $z_i \in \{z_1, z_2, ..., z_p\}$.

Ukoliko važi da je $A_i \sim q_j$, po konstrukciji je $z_i \sim q_{\pi(j)}$, pošto je tačka A_{m_i} kolinearna sa tačkom $q_{\pi(j)}$.

Pošto je tačka $q_{\pi(0)}$ jedina tačka koja nije kolinearna sa tačkom z_i treba da važi da $q_{\pi(0)} \notin \{x_1,...,x_n, y_1,...,y_t\}$, ali to je posledica konstrukcije funkcije *f*.

Dalje se bavimo prostorima gde svaka tačka leži na nekoj regularnoj pravoj.

3 Podklasa kombinatornih ravni gde ne postoje dve regularne prave koje se seku

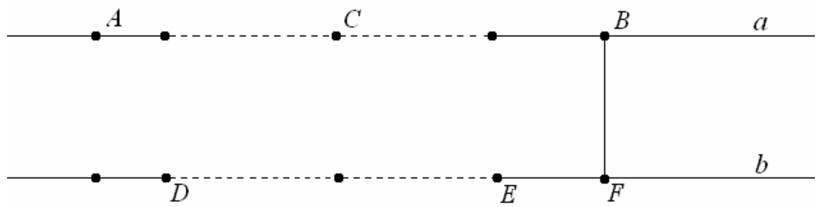
U ovom poglavlju izučavaju se kombinatorne ravni gde ne postoje dve regularne prave koje se seku i svaka tačka leži na nekoj regularnoj pravoj.

Teorema 3.1 Ako je ravan homomorfizam-homogena onda su i tanke i pune trakaste podstrukture homomorfizam-homogene.

Dokaz. Pretpostavićemo suprotno, tj. da je cela struktura homomorfizam-homogena ali da postoji tanka ili puna trakasta podstruktura koja nije homomorfizam-homogena. Neka je ona indukovana sa $a \bigcup b$ gde su *a* i *b* regularne prave.

Slučajevi:

I. Struktura je tanka. Na osnovu teoreme 1.4 znamo koje strukture su homomorfizam-homogene. Pretpostavimo da tanak prostor nije homomorfizam-homogen.
Tada bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da postoje tačke $A, B \in a$ takve da je $N_b(A) = 0$ i $N_b(B) = 1$. Ako je *B* jedina tačka na pravoj *a* sa osobinom $|N(B)| = 1$, tj. ako se radi o postoru (Slika 3.1)



Slika 3.1

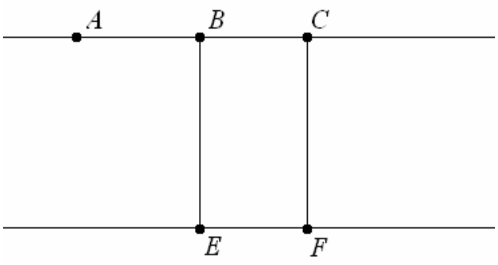
posmatrajmo preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} A & B & D & E \\ A & C & D & E \end{pmatrix},$$

gde je *C* tačka na *a*, *F* je tačka na *b* kolinearna sa *B*, a *D* i *E* su još dve tačke na *b*.

Ovo je lokalni homomorfizam koji se, prema pretpostavci, proširuje do endomorfizma f^*. Potražimo sliku tačke *F*. Zbog $F \in ED$ je $f^*(F) \in ED = b$. S druge strane, $B \sim F$ pa je $C = f^*(B) \sim f^*(F)$. Dakle, tačka *C* je kolinearna sa tačkom $f^*(F)$ na pravoj *b*, što nije tačno i ne možemo da proširimo van ovog trakastog prostora da bi ceo prostor bila homomorfizam-homogen.

Dakle, osim tačke *B*, na pravoj *a* postoji bar još jedna tačka *C* takva da je $|N(C)| = 1$. Neka je *E* tačka na *b* kolinearna sa *B*, a *F* tačka na *b*, kolinearna sa *C* (Slika 3.2):



Slika 3.2

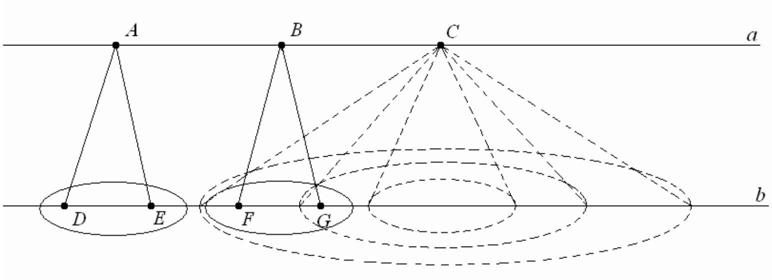
Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} A & B & F \\ E & F & A \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, *f* može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *C*. Zbog $C \in AB$ je $f^*(C) \in EF$. Dalje, $C \sim F$ pa zato mora biti $f^*(C) \sim A$. Dakle, $f^*(C)$ je tačka na pravoj *EF* koja je kolinearna sa tačkom *A*, što je nemoguće i ne možemo da proširimo van ovog trakastog prostora da bi ceo prostor bio homomorfizam-homogen.

II. Struktura je puna. Na osnovu teoreme 1.4 znamo koje strukture su homomorfizam-homogene.

1. Neka je (X, L) trakast prostor i neka postoje dve različite tačke $A, B \in a$ takve da je $|N_b(A)| \geq 2$, $|N_b(B)| \geq 2$, $N_b(A) \bigcap N_b(B) = \phi$, postoji $C \in a \setminus \{A, B\}$ tako da važi $N_b(C) \bigcap N_b(A) = \phi$ ili $N_b(C) \bigcap N_b(B) = \phi$. (Slika 3.3)



Slika 3.3

Pretpostavimo recimo $N_b(A)\bigcap N_b(C)=\phi$.

Uočimo $D,E\in N_b(A)$ i $F,G\in N_b(B)$. (Slika 3.3)

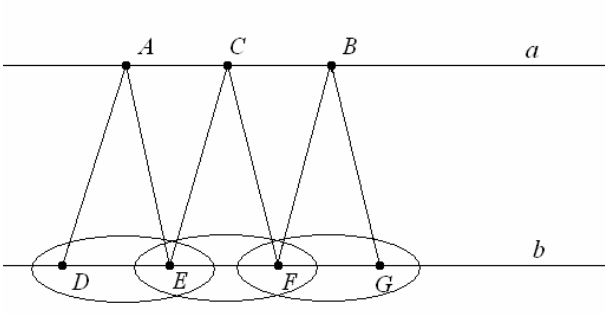
Posmatrajmo preslikavanje:

$$f:\begin{pmatrix} B & C & D & E \\ F & G & A & B \end{pmatrix}.$$

To je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke A.

Zbog $A\in BC$ je $f^*(A)\in FG$. Dalje, $A\sim D$ pa zato mora biti $f^*(A)\sim A$ i $A\sim E$ pa zato mora biti $f^*(A)\sim B$. Dakle, $f^*(A)$ je tačka na pravoj FG koja je kolinearna sa tačkama A i B, što je nemoguće, jer po pretpostavci $N(A)\bigcap N(B)=\phi$ i ne možemo da proširimo van ovog trakastog prostora da bi ceo prostor bio homomorfizam-homogen.

2. Neka je (X,L) trakast prostor i neka postoje dve različite tačke $A,B\in a$ takve da je $|N_b(A)|\geq 2$, $|N_b(B)|\geq 2$ i $N_b(A)\bigcap N_b(B)=\phi$ i za svako $C\in a\setminus\{A,B\}$ važi da $N_b(C)\bigcap N_b(A)\neq\phi$ i $N_b(C)\bigcap N_b(B)\neq\phi$. Odaberimo proizvoljno $C\in a\setminus\{A,B\}$ i uočimo $D,E\in N_b(A)$ i $F,G\in N_b(B)$ tako da je $C\sim E$ i $C\sim F$, tj. $E,F\in N_b(C)$. (Slika 3.4)



Slika 3.4

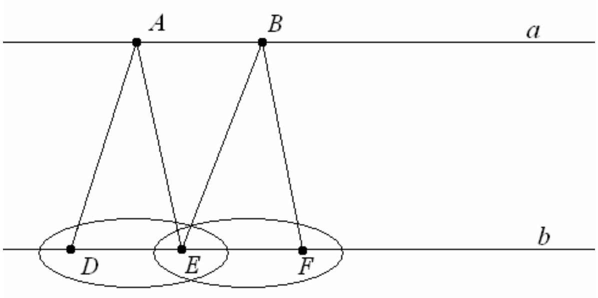
Preslikavanje

$$f:\begin{pmatrix} C & B & D & E \\ A & B & D & E \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam u bilo kom slučaju. Kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *F*.

Zbog $F \in DE$ je $f^*(F) \in DE$. Dalje, $F \sim C$ pa zato mora biti $f^*(F) \sim A$ i $F \sim B$ pa zato mora biti $f^*(F) \sim B$. Dakle, $f^*(F)$ je tačka na pravoj *DE* koja je kolinearna sa tačkama *A* i *B*, što je nemoguće, jer po pretpostavci $N(A) \bigcap N(B) = \phi$ i ne možemo da proširimo van ovog trakastog prostora da bi ceo prostor bio homomorfizam-homogen.

3. Neka je (X, L) trakast prostor i neka postoje dve različite tačke $A, B \in a$ takve da je $|N_b(A)| \geq 2$, $|N_b(B)| \geq 2$ i $N_b(A) \bigcap N_b(B) \neq \phi$ ali ne važi $N_b(A) \subseteq N_b(B)$ ili $N_b(B) \subseteq N_b(A)$. Uočimo tačke *D* i *F* tako da važi $D \in N_b(A)$, $D \notin N_b(B)$, $F \in N_b(B)$ i $F \notin N_b(A)$. Neka je $E \in N_b(A) \bigcap N_b(B)$ (Slika 3.5).



Slika 3.5

Preslikavanje

$$f:\begin{pmatrix} A & B & D & F \\ A & D & B & F \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke E.

Zbog $E \in DF$ je $f^*(E) \in BF$. Dalje, $E \sim A$ pa zato mora biti $f^*(E) \sim A$ i $E \sim B$ pa zato mora biti $f^*(E) \sim D$. Dakle, $f^*(E)$ je tačka na pravoj BF koja je kolinearna sa tačkama A i D, što je nemoguće da proširimo van ovog trakastog prostora da bi ceo prostor bio homomorfizam-homogen, jer u suprotnom bi imali dve prave sa više od tri tačaka koje se seku.

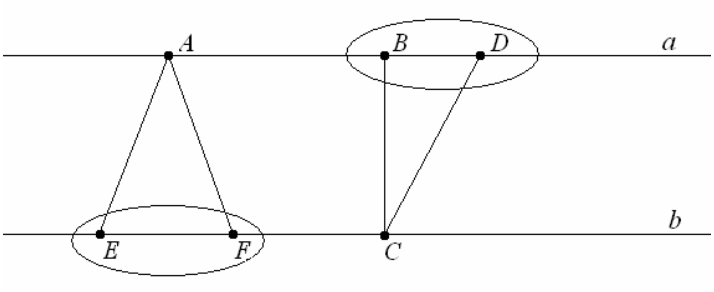
4. Neka je (X, L) trakast prostor i neka su $A, B \in a$ i $C \in b$ takve da je $|N_b(A)| \geq 2$, $N_b(B) = \{C\}$, $|N_a(C)| \geq 2$ i tačka A nije kolinearna sa tačkom C. Zbog $|N_a(C)| \geq 2$ postoji $D \in N_b(C)$ takva da je $D \neq B$. Neka je $E, F \in N_b(A)$.

   i. Slučaj: $|N_b(D)| = 1$ (Slika 3.6). Preslikavanje

   $$f:\begin{pmatrix} B & D & F & E \\ B & C & F & A \end{pmatrix}$$

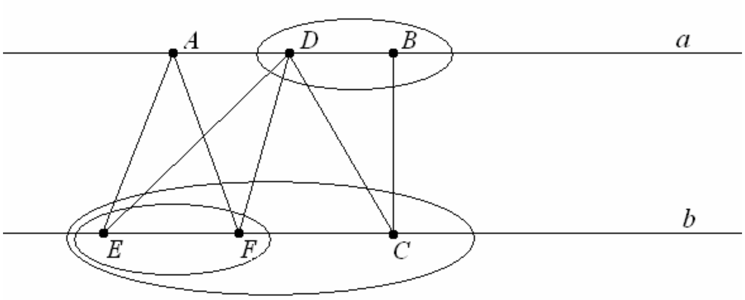
   je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke A.

Zbog $A \in BD$ je $f^*(A) \in BC$. Dalje, $A \sim E$ pa zato mora biti $f^*(A) \sim A$ i $A \sim F$ pa zato mora biti $f^*(A) \sim F$. Dakle, $f^*(A)$ je tačka na pravoj *BC* koja je kolinearna sa tačkama *A* i *F*, što je nemoguće da proširimo van ovog trakastog prostora da bi ceo prostor bio homomorfizam-homogen, jer u suprotnom bi imali dve prave sa više od tri tačaka koje se seku.



Slika 3.6

ii. Slučaj: $|N_b(D)| \geq 2$. Prema predhodnim razmatranjima znamo da dobijemo negativan odgovor osim ako su $N_b(A)$ i $N_b(D)$ uporedivi. Neka to važi. Kako $C \notin N_b(A)$ mora biti $N_b(A) \subseteq N_b(D)$ (Slika 3.7).



Slika 3.7

Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} A & B & D & E & F \\ A & B & A & E & F \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, *f* može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *C*.

Zbog $C \in EF$ je $f^*(C) \in EF$. Dalje, $C \sim B$ pa zato mora biti $f^*(C) \sim B$ i $C \sim D$ pa zato mora biti $f^*(A) \sim A$. Dakle, $f^*(C)$ je tačka na pravoj *EF* koja je kolinearna sa tačkama *A* i *B*, što je nemoguće da proširimo van ovog trakastog prostora da bi ceo prostor bio homomorfizam-homogen.

Zbog Teoreme 3.1 uvodimo sledeću pretpostavku:

Dodatna pretpostavka: u svakom potprostoru generisanom sa $a \bigcup b$ gde su *a* i *b* regularne prave, ne postoji singularna tačka prve i druge vrste.

Lema 3.1 Neka su (X, L_X) i (Y, L_Y) dve kombinatorne ravni sa osobinom da su svake dve tačke u *X* kolinearne i svake dve tačke u *Y* kolinearne. Neka je $S \subseteq X$, $T \subseteq Y$ i funkcija $f : S \to T$ lokalni homomorfizam. Tada se funkcija *f* može proširiti do homomorfizma $f^* : X \to Y$.

Dokaz. Neka su (X, L_X) i (Y, L_Y) dve kombinatorne ravni sa osobinom da su svake dve tačke u *X* kolinearne i svake dve tačke u *Y* kolinearne. Neka je $S \subseteq X$, $T \subseteq Y$, funkcija $f : S \to T$ lokalni homomorfizami i neka je $A \in X \setminus S$. Neka prostor ima *k* regularnih pravih. Tačka *A* pripada nekoj regularnoj pravoj a_i. Neka su $U_1 = a_1 \bigcap S$, $U_2 = a_2 \bigcap S$, …, $U_k = a_k \bigcap S$. Postoje prave $m_j \subseteq Y$, $0 \le j \le k$ tako da važi $f(U_j) \subseteq m_j$, $j \ne i$.

1. Neka je $U_i = \phi$. Tačka *A* je kolinearna sa svim tačkama iz skupa U_j. Tada tačku *A* preslikamo na neku tačku neke prave m_j, $j \ne i$.

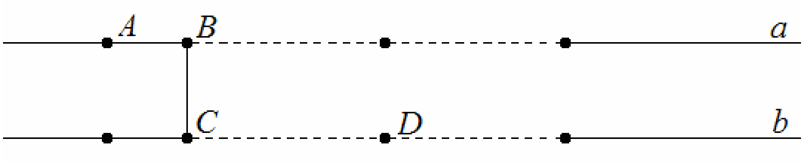
2. Neka je $|U_i| = 1$, i neka $U_i = \{P\}$. Tada tačku *A* preslikamo na tačku $f(P)$.

3. Neka je $|U_i| \ge 2$. Tada tačku *A* preslikamo na neku tačku prave m_i.

Posledica 3.1 Neka je (X,L) kombinatorna ravan u kojoj važi da je svaka tačka kolinearna sa svakom tačkom. Tada je taj prostor homomorfizam-homogen.

Lema 3.2 Neka je (X,L) homomorfizam-homogen prostor. Tada između svake dve tačke postoji put dužine najviše dva.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji struktura (Slika 3.8)



Slika 3.8

gde ne postoji tačka *Q* takvo da je $A \sim Q \sim D$.

Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} B & D \\ A & D \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, *f* može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *C*.

Zbog $C \sim B$ mora biti $f^*(C) \sim A$. Dalje, $C \sim D$ pa zato mora biti $f^*(C) \sim D$ Dakle, $f^*(C)$ je kolinearna sa tačkama *A* i *D*, što je nemoguće.

Teorema 3.2 Neka je (X,L) kombinatorna ravan kod koje postoje barem dve komponente povezanosti. Tada je (X,L) homomorfizam-homogena ako i samo ako je u svakoj komponenti svaka tačka kolinearna sa svakom drugom tačkom.

Dokaz.

($\rightarrow$) Neka je (X,L) je homomorfizam-homogen prostor i pretpostavimo suprotno, tj. da postoji komponenta gde postoje dve tačke koje nisu kolinearne. Označimo ih sa *B* i *C*. One su na dve različite regularne prave. Pošto su u istoj komponenti, postoji put između njih. U drugoj komponenti uočimo neku tačku *A*.

Preslikavanje:

$$f:\begin{pmatrix} B & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Pošto postoji put između tačaka B i C, to bi značilo da postoji bi i put između tačaka B i A, što je nemoguće.

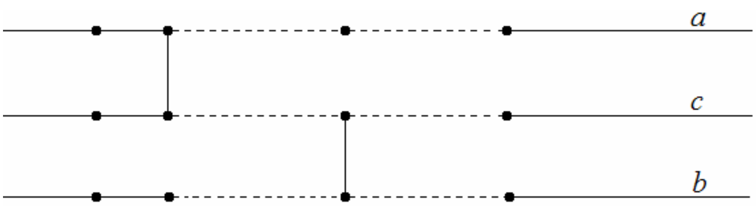
$(\Leftarrow)$ Posledica Leme 3.1.

Dalje posmatramo samo strukture gde postoji samo jedna komponenta povezanosti.

3.1 Slučaj dve regularne prave koje indukuju 0-tanak potprostor

Pretpostavimo da u prostoru (X, L) postoje regularne prave a i b koje nisu povezane.

Teorema 3.3 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Tada za svake dve regularne prave a i b koje nisu povezane važi da postoji treća regularna prava c koja je povezana i sa jednom i sa drugom. (Slika 3.9)



Slika 3.9

Dokaz. Posledica Leme 3.2.

Lema 3.3 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Neka u prostoru (X, L) postoji treća regularna prava c koja je povezana i sa pravom a i sa pravom b. Tada ne postoje četiri različite tačke $A, B \in a$ i $E, F \in c$ za koje važi da tačka A nije kolinearna sa tačkom E, a tačka B sa tačkom F.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. tačke postoje četiri različite tačke $A, B \in a$ i $E, F \in c$ za koje važi da tačka A nije kolinearna sa tačkom E, a tačka B sa tačkom F.

1. $A \sim F$ i $B \sim E$. Prostor ne može biti pun samo tanak.

    a. Potprostor indukovan sa $a \bigcup c$ je 1-tanak na osnovu Teoreme 3.1, i neka je $D \in c$, $G, H \in b$.

    Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} E & D & A \\ G & H & A \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *F*.

Zbog $F \in ED$ pa zato mora biti $f^*(F) \in GH$. Dalje, $F \sim A$ pa zato mora biti $f^*(F) \sim A$. Dakle, $f^*(F)$ je na pravoj *GH* koja koja je kolinearna sa tačkom *A*, što je nemoguće.

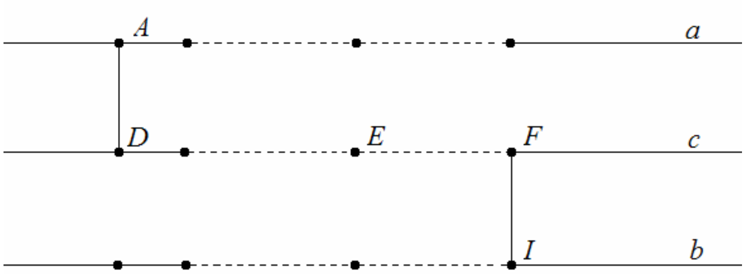
2. *A* nije kolinearna sa tačkom *F* ili *B* nije kolinearna sa tačkom *E* ili oba. Neka *A* nije kolinearna sa tačkom *F*. *A* nije singularitet prve vrste, zato postoji $D \in c$ tako da važi $A \sim D$. Pošto tačka *F* nije singularitet prve vrste, postoji tačka $I \in b$ tako da važi $F \sim I$. (Slika 3.10)

   Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} E & F & A \\ F & I & A \end{pmatrix}$$

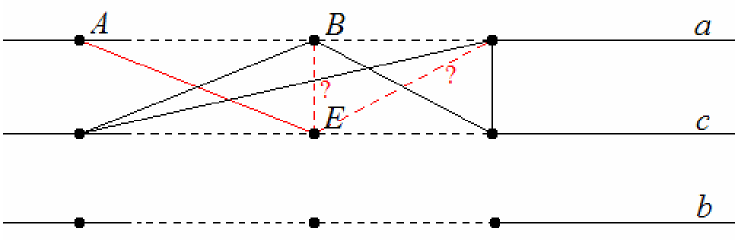
   je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *D*.

   Zbog $D \in EF$ pa zato mora biti $f^*(D) \in FI$. Dalje, $D \sim A$ pa zato mora biti $f^*(D) \sim A$ Dakle, $f^*(D)$ je na pravoj *FI* i kolinearna sa tačkom *A*, što je nemoguće.



Slika 3.10

Posledica 3.2 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Neka u prostoru (X, L) postoji treća regularna prava *c* koja je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*. Ako postoje dve tačke $A \in a$ i $E \in c$ za koje važi da tačka *A* nije kolinearna sa tačkom *E*, tada svaka druga tačka *B* prave *a* je nekolinearna najviše sa tačkom *E*. (Slika 3.11)



Slika 3.11

Lema 3.4 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Neka u prostoru (X, L) postoji treća regularna prava *c* koja je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*. Tada ne postoje tri različite tačke $A, B \in a$ i $F \in c$ za koje važi da *A* i *B* nisu kolinearne sa tačkom *F*.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoje tri različite tačke $A, B \in a$ i $F \in c$ za koje važi da *A* i *B* nisu kolinearne sa tačkom *F*. Pošto tačka *F* nije singularitet prve vrste, postoji tačka $C \in a$ da je $C \sim F$, i postoji tačka $I \in b$ tako da je $F \sim I$.

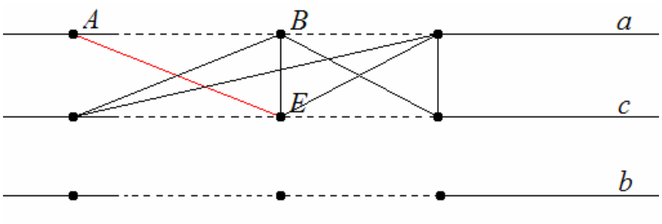
Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} A & B & F \\ F & I & A \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, *f* može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *C*.

Zbog $C \in AB$ pa zato mora biti $f^*(C) \in FI$. Dalje, $C \sim F$ pa zato mora biti $f^*(C) \sim A$. Dakle, $f^*(C)$ je na pravoj *FI* koja koja je kolinearna sa tačkom *A*, što je nemoguće.

Posledica 3.3 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Neka u prostoru (X, L) postoji treća regularna prava *c* koja je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*. Ako postoje dve tačke $A \in a$ i $E \in c$ za koje važi da tačka *A* nije kolinearna sa tačkom *E*, tada svaka druga tačka *B* prave *a* je kolinearna sa svakom tačkom prave *c*. (Slika 3.12)



Slika 3.12

Lema 3.5 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Neka u prostoru (X, L) postoji treća regularna prava *c* koja je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*. Tada ne postoje tri različite tačke $A \in a$ i $E, F \in c$ tako da tačka *A* nije kolinearna ni sa tačkom *E* ni sa tačkom *F*.

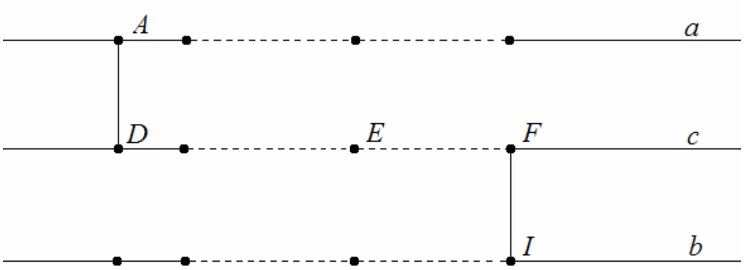
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. za tačke $E, F \in c$ važi da tačka *A* nije kolinearna ni sa tačkom *E* ni sa tačkom *F*. Pošto tačka *A* nije singularitet prve vrste, sledi da postoji tačka $D \in c$ tako da važi $A \sim D$. Pošto tačke *E* i *F* nisu singulariteti prve vrste, neka za tačku *F* postoji tačka $I \in b$ tako da važi $F \sim I$. (Slika 3.13)

Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} E & F & A \\ F & I & A \end{pmatrix}$$

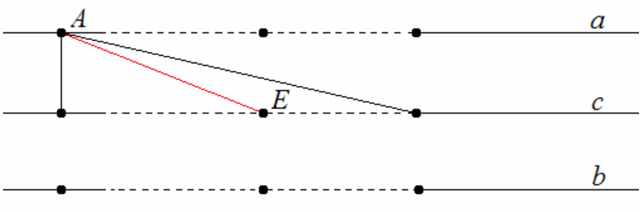
je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, *f* može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *D*.

Zbog $D \in EF$ pa zato mora biti $f^*(D) \in FI$. Dalje, $D \sim A$ pa zato mora biti $f^*(D) \sim A$ Dakle, $f^*(D)$ je na pravoj *FI* i kolinearna sa tačkom *A*, što je nemoguće.



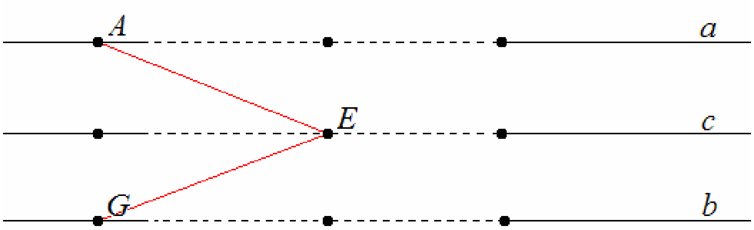
Slika 3.13

Posledica 3.4 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Neka u prostoru (X, L) postoji treća regularna prava *c* koja je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*. Ako postoje dve tačke $A \in a$ i $E \in c$ za koje važi da tačka *A* nije kolinearna sa tačkom *E*, tada je tačka *A* kolinearna sa svakom drugom tačkom prave *c*. (Slika 3.14)



Slika 3.14

Lema 3.6 Neka je (X, L) homomorfizam-homogen prostor. Neka u prostoru (X, L) postoji treća regularna prava *c* koja je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b* i postoje četiri različite tačke $A \in a$, $E, F \in c$ i $G \in b$ tako da tačka *A* nije kolinearna sa tačkom *E*, a tačka *G* nije kolinearna sa tačkom *F*. Tada $E \equiv F$. (Slika 3.15)



Slika 3.15

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $E \neq F$. Na osnovu Posledice 3.2, 3.3, 3.4 sledi da svake tačke iz prostora indukovan sa $a \bigcup c$ su kolinearne, osim tačke *A* i *E*, i svake tačke iz prostora indukovan sa $b \bigcup c$ su kolinearne, osim tačke *G* i *F*, zato sigurno postoji tačka $X \in c$ tako da važi da je $X \sim A$ i $X \sim G$.

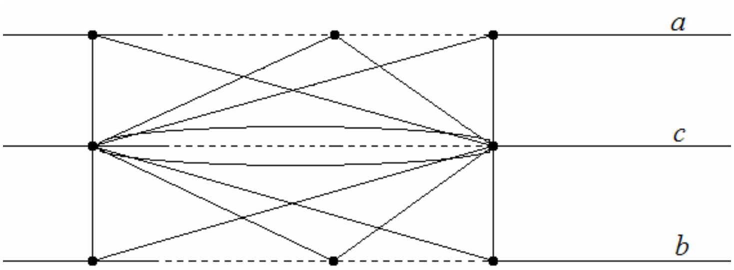
Preslikavanje

$$f:\begin{pmatrix} F & E & A & G \\ F & B & A & G \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke X.

Zbog $X \in FE$ pa zato mora biti $f^*(X) \in FB$. Dalje, $X \sim A$ pa zato mora biti $f^*(X) \sim A$. I još važi da je $X \sim G$ pa zato mora biti $f^*(X) \sim G$. Dakle, $f^*(X)$ je na pravoj FB i kolinearna sa tačkama A i G, što je nemoguće.

Lema 3.7 Neka je (X, L) kombinatorna ravan sa tri regularne prave a, b i c sa osobinom da prave a i b nisu povezane međusobno, prava c je povezana i sa pravom a i sa pravom b, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve tačke $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve tačke $A, B \in b$. Takav prostor je homomorfizam-homogen. (Slika 3.16)



Slika 3.16

Dokaz.

Dokažimo da je (X, L) homomorfizam-homogen tako što ćemo dokazati da se svaki lokalni homomorfizam može proširiti za jednu tačku.

Neka je $f : S \to T$ lokalni homomorfizam i neka je $A \in X \setminus S$ proizvoljna tačka.

I. Neka je $A \in a$ (analogno za tačku $A \in b$). Neka je $U = S \bigcap N_c(A)$.
   1. Slučaj: $U = \phi$.
      i. Slučaj: $a \bigcap S = \phi$. Proširimo f tako što stavimo $f'(A) = A$.

ii. Slučaj: $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|=1$, recimo $f\left(a\bigcap S\right)=\{P\}$. Neka je A' proizvoljna tačka kolinearna sa *P*, pa proširujemo *f* tako što stavimo $f'(A)=A'$.

iii. Slučaj: $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|\geq 2$. Tada je $f\left(a\bigcap S\right)$ sadržano u nekoj pravoj *l*. Uzmimo proizvoljno $A'\in l$ i proširimo *f* tako da je $f'(A)=A'$.

2. Slučaj: $U\neq\phi$. Zbog $U\subseteq c$ je $f(U)$ skup kolinearnih tačaka, pa neka je *m* prava takva da je $f(U)\subseteq m$.

i. Slučaj: $a\bigcap S=\phi$. Uočimo proizvoljno $A'\in m$ i proširimo *f* tako da je $f'(A)=A'$.

ii. Slučaj: $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|\geq 1$. Pošto su tačke sa prave $a\bigcap S$ i iz skupa *U* kolinearne, a *f* lokalni homomorfizam, ne može da se desi slučaj da funkcija *f* neke tačke preslika na pravu *a*, a druge na pravu *b*. Zato, imamo da funkcija *f* tačke sa prave $a\bigcap S$ i iz skupa *U* preslika na potprostor indukovan sa $a\bigcup c$ ili na potprostor indukovan sa $b\bigcup c$. Tada za svaku pravu $l\in L$ i svaki skup kolinearnih tačaka $U\subseteq X$ postoji $A\in l$ takva da je $A\sim B$ za sve $B\in U$. Neka je *l* prava koja sadrži $f\left(a\bigcap S\right)$. Za pravu *l* i skup $f(U)$ postoji $A'\in l$ koja je kolinearna sa svakom tačkom iz skupa $f(U)$. Sada proširimo *f* tako da je $f'(A)=A'$.

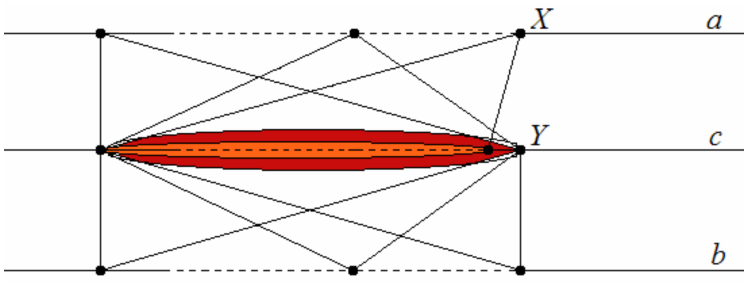
II. Neka je $A\in c$. Neka je $U=S\bigcap N_a(A)$ i $V=S\bigcap N_b(A)$.

1. Slučaj: $U=\phi$ i $V=\phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 1.
2. Slučaj: $U\neq\phi$ i $V=\phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 2.
3. Slučaj: $U=\phi$ i $V\neq\phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 2.
4. Slučaj: $U\neq\phi$ i $V\neq\phi$.

i. Slučaj: $c\bigcap S=\phi$. Tačku *A* preslikamo u sebe.

ii. Slučaj: $\left|f\left(c\bigcap S\right)\right|\geq 1$. Pošto su tačke sa prave $c\bigcap S$ i iz skupa *U* kolinearne, a *f* lokalni homomorfizam, ne može da se desi slučaj da funkcija *f* neke tačke preslika na pravu *a*, a druge na pravu *b*. Zato, imamo da funkcija *f* tačke sa prave $c\bigcap S$ i iz skupa *U* preslika na potprostor indukovan sa $a\bigcup c$ ili na potprostor indukovan sa $b\bigcup c$. Isto to važi za tačke sa prave $c\bigcap S$ i za skup *V*. Tada sve tačke su preslikane ili na potprostor indukovan sa $a\bigcup c$ ili na potprostor indukovan sa $b\bigcup c$ ili je skup $c\bigcap S$ preslikana na pravu *c*. U prvim dva slučaja koristimo dokaz pod I. 2. ii. U trećem slučaju tačku *A* preslikamo na neku tačku prave *c*.

Lema 3.8 Neka je (X, L) kombinatorna ravan sa tri regularne prave *a*, *b* i *c* sa osobinom da prave *a* i *b* nisu povezane međusobno, prava *c* je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*, postoje tačno dve tačke $X \in a$ i $Y \in c$ za koje važi da *X* nije kolinearna sa *Y*, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$. Takav prostor je homomorfizam-homogen. (Slika 3.17)



Slika 3.17

Dokaz.

Dokažimo da je (X, L) homomorfizam-homogen tako što ćemo dokazati da se svaki lokalni homomorfizam može proširiti za jednu tačku.

Neka je $f : S \to T$ lokalni homomorfizam i neka je $A \in X \setminus S$ proizvoljna tačka.

I. Neka je $A \in a$. Neka je $U = S\bigcap N_c(A)$.
   1. Slučaj: $U = \phi$.
      i. Slučaj: $a\bigcap S = \phi$. Proširimo *f* tako što stavimo $f'(A) = A$.
      ii. Slučaj: $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right| = 1$, recimo $f\left(a\bigcap S\right) = \{P\}$. Neka je A' proizvoljna tačka kolinearna sa *P*, pa proširujemo *f* tako što stavimo $f'(A) = A'$.
      iii. Slučaj: $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right| \geq 2$. Tada je $f\left(a\bigcap S\right)$ sadržano u nekoj pravoj *l*. Uzmimo proizvoljno $A' \in l$ i proširimo *f* tako da je $f'(A) = A'$.

2. Slučaj: $U \neq \phi$. Zbog $U \subseteq c$ je $f(U)$ skup kolinearnih tačaka, pa neka je m prava takva da je $f(U) \subseteq m$.

   i. Slučaj: $a \bigcap S = \phi$. Uočimo proizvoljno $A' \in m$ i proširimo f tako da je $f'(A) = A'$.

   ii. Slučaj: $a \bigcap S = 1$. A preslikamo na neku tačku prave c različito od Y.

   iii. Slučaj: $a \bigcap S \geq 2$. Pošto postoje tačke sa prave $a \bigcap S$ i iz skupa U koje su kolinearne, a f lokalni homomorfizam, ne može da se desi slučaj da funkcija f neke tačke preslika na pravu a, a druge na pravu b. Zato, imamo da funkcija f tačke sa prave $a \bigcap S$ i iz skupa U preslika na potprostor $a \bigcup c$ ili na potprostor $b \bigcup c$ i tako da je funkcija f lokalni homomorfizam. Tada za svaku pravu $l \in L$ i svaki skup kolinearnih tačaka $U \subseteq X$ postoji $A \in l$ takva da je $A \sim B$ za sve $B \in U$. Neka je l prava koja sadrži $f(a \bigcap S)$. Za pravu l i skup $f(U)$ postoji $A' \in l$ koja je kolinearna sa svakom tačkom iz skupa $f(U)$. Sada proširimo f tako da je $f'(A) = A'$.

II. Neka je $A \in c$. Neka je $U = S \bigcap N_a(A)$ i $V = S \bigcap N_b(A)$.

1. Slučaj: $U = \phi$ i $V = \phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 1.
2. Slučaj: $U \neq \phi$ i $V = \phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 2.
3. Slučaj: $U = \phi$ i $V \neq \phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 2.
4. Slučaj: $U \neq \phi$ i $V \neq \phi$.

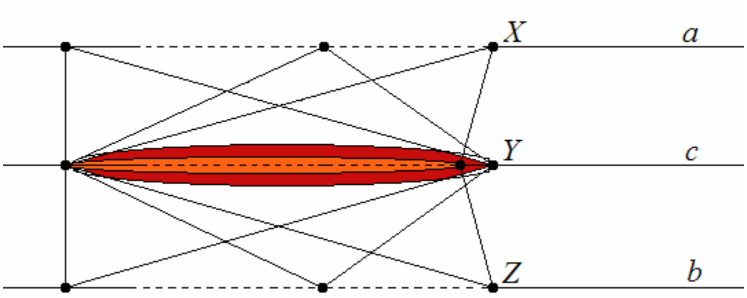
   i. Slučaj: $c \bigcap S = \phi$. Tačku A preslikamo na neku tačku prave c različito različito od Y.

   ii. Slučaj: $c \bigcap S = 1$. A preslikamo na neku tačku prave c različito od Y.

   iii. Slučaj: $c \bigcap S \geq 2$. Pošto su tačke sa prave $c \bigcap S$ i iz skupa U kolinearne, a f lokalni homomorfizam, ne može da se desi slučaj da funkcija f neke tačke preslika na pravu a, a druge na pravu b. Zato, imamo da funkcija f tačke sa prave $c \bigcap S$ i iz skupa U preslika na potprostor $a \bigcup c$ ili na potprostor $b \bigcup c$. Isto to važi za tačke sa prave $c \bigcap S$ i za skup V. Tada sve tačke su preslikane ili na potprostor $a \bigcup c$ ili na $b \bigcup c$ ili je skup $c \bigcap S$ preslikana na pravu c. U prvim dva slučaja koristimo dokaz pod I. 2. ii. U trećem slučaju tačku A preslikamo na neku tačku prave c različito od Y.

III. Neka je $A \in b$. Koristimo dokaz I kod Leme 3.7.

Lema 3.9 Neka je (X, L) kombinatorna ravan sa tri regularne prave *a*, *b* i *c* sa osobinom da prave *a* i *b* nisu povezane međusobno, prava *c* je povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*, postoji tačno jedna tačka $Y \in c$ za koju važi da *Y* nije kolinearna sa $X \in a$ i $Z \in b$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b \setminus \{Z\}$ i $Z \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$. Takav prostor je homomorfizam-homogen. (Slika 3.18)



Slika 3.18

Dokaz.

Dokažimo da je (X, L) homomorfizam-homogen tako što ćemo dokazati da se svaki lokalni homomorfizam može proširiti za jednu tačku.

Neka je $f : S \to T$ lokalni homomorfizam i neka je $A \in X \setminus S$ proizvoljna tačka.

I. Neka je $A \in a$ (analogno za tačku $A \in b$). Neka je $U = S \bigcap N_c(A)$.
   1. Slučaj: $U = \phi$. Koristimo prethodni dokaz pod I. 1. pod Leme 3.8.
   2. Slučaj: $U \neq \phi$. Koristimo prethodni dokaz pod I. 2. pod Leme 3.8.

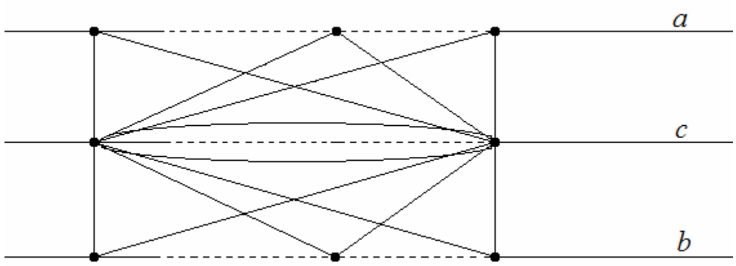
II. Neka je $A \in c$. Neka je $U = S \bigcap N_a(A)$ i $V = S \bigcap N_b(A)$.
   1. Slučaj: $U = \phi$ i $V = \phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 1.
   2. Slučaj: $U \neq \phi$ i $V = \phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 2.
   3. Slučaj: $U = \phi$ i $V \neq \phi$. Analogno kao u ovom dokazu pod I. 2.
   4. Slučaj: $U \neq \phi$ i $V \neq \phi$.
      i. Slučaj: $c \bigcap S = \phi$. Tačku *A* preslikamo na neku tačku prave *c* različito od *Y*.
      ii. Slučaj: $c \bigcap S = 1$. *A* preslikamo na neku tačku prave *c* različito od *Y*.

iii. Slučaj: $c\bigcap S \geq 2$. Pošto su tačke sa prave $c\bigcap S$ i iz skupa U kolinearne, a f lokalni homomorfizam, ne može da se desi slučaj da funkcija f neke tačke preslika na pravu a, a druge na pravu b. Zato, imamo da funkcija f tačke sa prave $c\bigcap S$ i iz skupa U preslika na potprostor $a\bigcup c$ ili na potprostor $b\bigcup c$. Isto to važi za tačke sa prave $c\bigcap S$ i za skup V. Tada sve tačke su preslikane ili na potprostor $a\bigcup c$ ili na $b\bigcup c$ ili skup $c\bigcap S$ je preslikana na pravu c. U prvim dva slučaja koristimo dokaz pod I. 2. ii. U trećem slučaju tačku A preslikamo na neku tačku prave c različito od Y.

Teorema 3.4 Neka je (X, L) kombinatorna ravan sa tri regularne prave a, b, c gde prave a i b nisu povezane. Ravan je homomorfizam-homogena ako i samo ako pripada jednoj od sledećih klasa prostora:

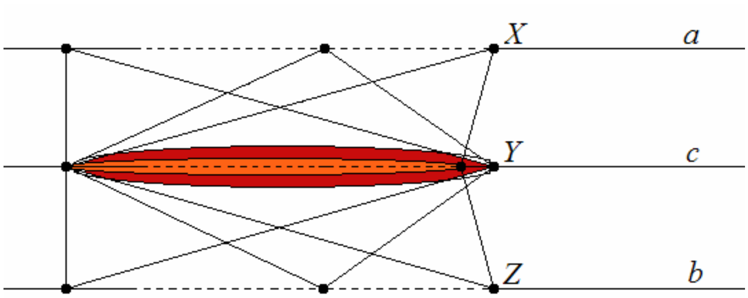
1. $N_c(A) = N_c(B)$ za sve tačke $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve tačke $A, B \in b$. (Slika 3.19)
2. postoje tačno dve tačke $X \in a$ i $Y \in c$ za koje važi da X nije kolinearna sa Y, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$. (Slika 3.20)
3. postoji tačno jedna tačka $Y \in c$ za koju važi da Y nije kolinearna sa $X \in a$ i $Z \in b$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b \setminus \{Z\}$ i $Z \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$. (Slika 3.21)

1.



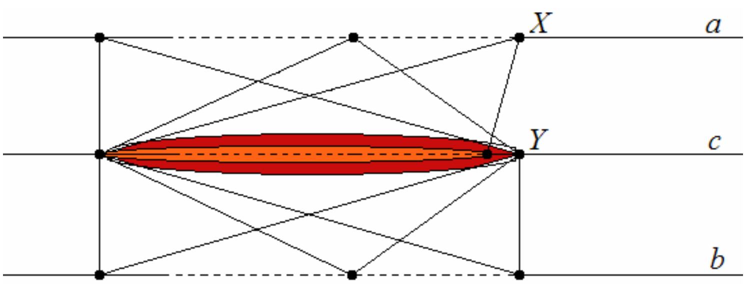
Slika 3.19

2.



Slika 3.20

3.



Slika 3.21

3.2 Slučaj dve regularne prave koje indukuju 1-tanak potprostor

Pretpostavimo da u prostoru (X, L) postoje regularne prave a i b koje indukuju 1-tanak potprostor.

Lema 3.10 Prostor (X, L) je homomorfizam-homogen prostor. Tada za svaku treću regularnu pravu c koja je povezana sa jednom od prave a ili b, povezana je i sa drugom.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. ne postoji treća prava koja je povezana sa obe istovremeno. Neka je prava c povezana sa pravom a. Neka je $A \sim G$, gde je $G \in b$. Tada sa svim ostalim tačkama prave b tačka A nije kolinearna. Zbog jednostavnosti, neka $B, C \in a$, $H, I \in b$ tako da važi $B \sim H$ i $I \sim C$. (Slika 3.22)

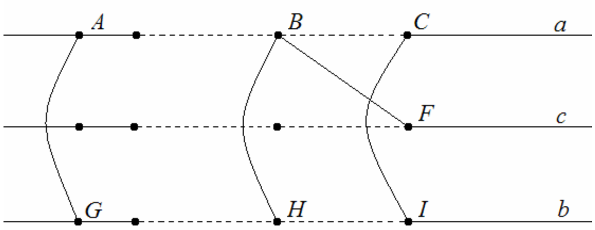
Pošto su prave a i c povezane, sledi da postoji tačka F kolinearna sa nekom tačkom prave a. Neka je to tačka B.

Preslikavanje

$$f: \begin{pmatrix} A & B & I \\ F & B & I \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke C.

Zbog $C \in AB$ pa zato mora biti $f^*(C) \in FB$. Dalje, $C \sim I$ pa zato mora biti $f^*(C) \sim I$. Dakle, $f^*(C)$ je na pravoj FB i kolinearna sa tačkom I, što je nemoguće.



Slika 3.22

Lema 3.11 Prostor (X, L) je homomorfizam-homogen prostor. Tada za svaku treću regularnu pravu koja je povezana i sa pravom a i sa pravom b važi da je $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$.

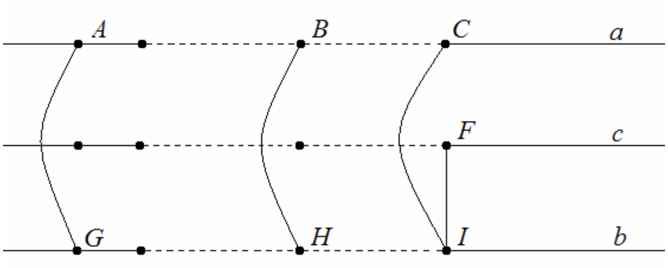
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji tačka $F \in c$ tako da tačka *A* koja nije kolinearna sa tačkom *F*. Neka je $A \sim G$, gde je $G \in b$. Tada sa svim ostalim tačkama prave *b* tačka *A* nije kolinearna. Zbog jednostavnosti, neka $B, C \in a$, $H, I \in b$ tako da važi $B \sim H$ i $I \sim C$.

1. Postoji prava *FX*, gde je $X \in b \setminus \{G\}$. Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} H & X & A \\ F & X & A \end{pmatrix}$$

je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke *G*.

Zbog $G \in HX$ pa zato mora biti $f^*(G) \in FX$. Dalje, $G \sim A$ pa zato mora biti $f^*(G) \sim A$ Dakle, $f^*(G)$ je na pravoj *FX* i kolinearna sa tačkom *A*, što je nemoguće. (Slika 3.23)



Slika 3.23

2. Za sve tačke $X \in b \setminus \{G\}$ ne postoji prava *FX*.

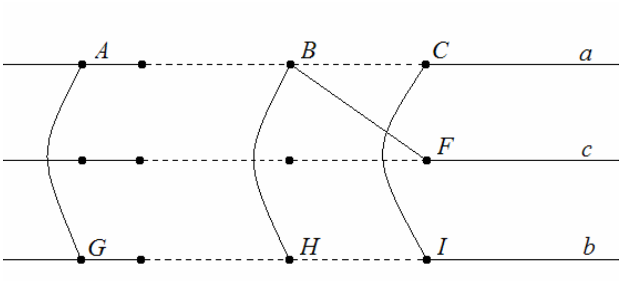
Postoji tačka $B \in a$ za koju važi $B \sim F$.

Preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} A & B & I \\ F & B & I \end{pmatrix}$$

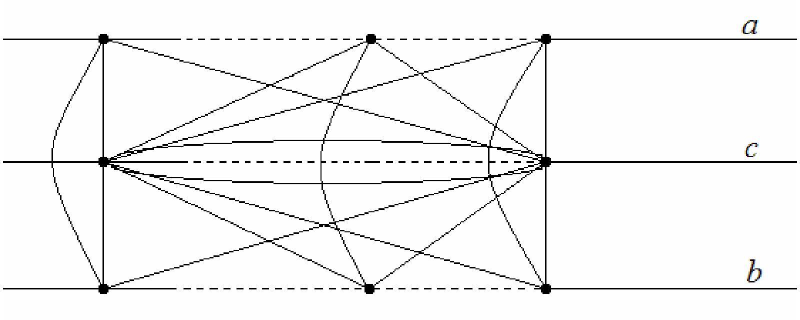
je lokalni homomorfizam, pa kako je prostor homomorfizam-homogen, f može da se proširi do endomorfizma. Potražimo sliku tačke C.

Zbog $C \in AB$ pa zato mora biti $f^*(C) \in FB$. Dalje, $C \sim I$ pa zato mora biti $f^*(C) \sim I$. Dakle, $f^*(C)$ je na pravoj FB i kolinearna sa tačkom I, što je nemoguće. (Slika 3.24)



Slika 3.24

Teorema 3.5 Neka prostor (X, L) ima tri regularne prave a, b, c i neka je potrpostor indukovan sa $a \bigcup b$ 1-tanak. Tada (X, L) je homomorfizam-homogen ako i samo ako $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$. (Slika 3.25)



Slika 3.25

Dokaz.

$(\Rightarrow)$ Na osnovu Leme 3.10 i 3.11.

$(\Leftarrow)$Dokažimo da je (X, L) homomorfizam-homogen tako što ćemo dokazati da se svaki lokalni homomorfizam može proširiti za jednu tačku.

Neka je $f:S\to T$ lokalni homomorfizam i neka je $A\in X\setminus S$ proizvoljna tačka.

I. $A\in a$ (analogno za tačku $A\in b$). Neka je $U=S\bigcap N_c(A)$ i tačka $B\in b$ za koju važi $B\sim A$.

1. $U=\phi$.

   i. $B\in S$ i $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|\geq 2$. Tada je $f\left(a\bigcap S\right)$ sadržan u nekoj pravoj a'. Neka je $B'=f(B)$, a $A'\in pr_{a'}(B')$. Lokalni homomorfizam f proširimo tako što tačku *A* preslikamo na A'.

   ii. $B\notin S$ i $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|\geq 2$. Neka je a' prava koja sadrži $f\left(a\bigcap S\right)$. Odaberimo proizvoljno $A'\in a'$ i lokalni homomorfizam *f* proširimo tako što tačku *A* preslikamo na A'.

   iii. $B\in S$ i $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|=1$. Uzmimo da je $f\left(a\bigcap S\right)=\{P\}$. Neka je a' regularna prava kroz *P*, $B'=f(B)$ i $A'\in pr_{a'}(B')$. Lokalni homomorfizam *f* proširimo tako što tačku *A* preslikamo na A'.

   iv. $B\notin S$ i $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|=1$. Uzmemo $A'\in a'$ proizvoljno i lokalni homomorfizam *f* proširimo tako što tačku *A* preslikamo na A'.

   v. $B\in S$ i $a\bigcap S=\phi$. Neka je $A'=f(B)$. Lokalni homomorfizam f proširimo tako što tačku *A* preslikamo na A'.

   vi. $B\notin S$ i $a\bigcap S=\phi$. Tada $f'(A)=A$.

2. $U\neq\phi$.

   i. $B\notin S$ i $a\bigcap S=\phi$. Lokalni homomorfizam *f* proširimo tako što tačku *A* preslikamo na neku tačku prave $f(U)$.

   ii. $B\in S$ i $a\bigcap S=\phi$. Lokalni homomorfizam *f* proširimo tako što tačku *A* preslikamo na neku tačku prave $f(U)$.

   iii. $B\notin S$ i $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|=1$. Lokalni homomorfizam *f* proširimo tako što tačku *A* preslikamo na neku tačku prave $f(U)$.

   iv. $B\in S$ i $\left|f\left(a\bigcap S\right)\right|=1$. Lokalni homomorfizam *f* proširimo tako što tačku *A* preslikamo na neku tačku prave $f(U)$.

v. $B \notin S$ i $\left| f\left(a \bigcap S\right) \right| \geq 2$. Neka je a' prava koja sadrži $f\left(a \bigcap S\right)$. Odaberimo proizvoljno $A' \in f\left(a \bigcap S\right)$ i lokalni homomorfizam f proširimo tako što tačku A preslikamo na A'.

vii. $B \in S$ i $\left| f\left(a \bigcap S\right) \right| \geq 2$. Tada je $f\left(a \bigcap S\right)$ sadržan u nekoj pravoj a'. Neka je $B' = f(B)$, a $A' \in pr_{a'}(B')$. Lokalni homomorfizam f proširimo tako što tačku A preslikamo na A'.

II. Neka je $A \in c$. Korstimo dokaz II. kod Leme 3.7.

4 Karakterizacija

U ovom poglavlju ćemo samo sakupiti rezultate prethodnih poglavlja.

Teorema 4.1 Neka prostor (X, L) ima tri regularne prave *a*, *b*, *c* takve da je prava *c* povezana i sa pravom *a* i sa pravom *b*. Tada prostor (X, L) je homomorfizam-homogen ako i samo ako pripada jednoj od sledećih klasa (Slika 4.1):

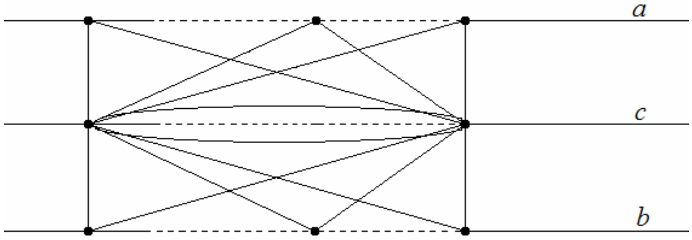
1. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 0-tanak i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$.

2. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 0-tanak i postoje tačno dve tačke $X \in a$ i $Y \in c$ za koje važi da *X* nije kolinearna sa *Y*, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$.

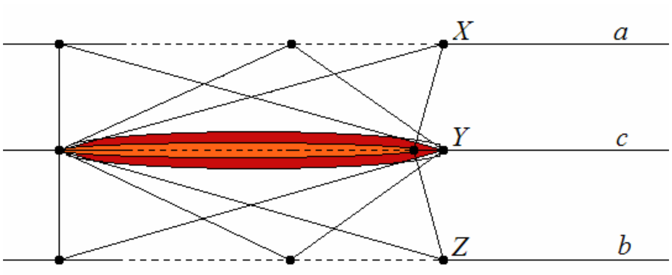
3. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 0-tanak i postoji tačno jedna tačka $Y \in c$ za koju važi da *Y* nije kolinearna sa $X \in a$ i $Z \in b$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a \setminus \{X\}$, $X \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$, $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b \setminus \{Z\}$ i $Z \sim C$ za sve $C \in c \setminus \{Y\}$. Takav prostor je homomorfizam-homogen.

4. Prostor indukovan sa $a \bigcup b$ je 1-tanak i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in a$ i $N_c(A) = N_c(B)$ za sve $A, B \in b$.

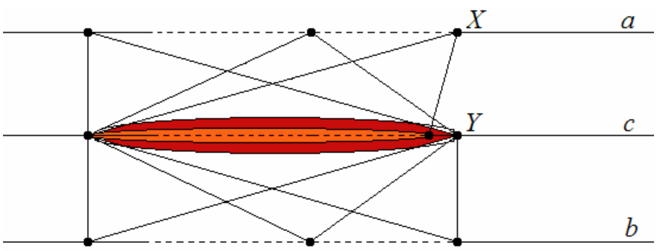
1.



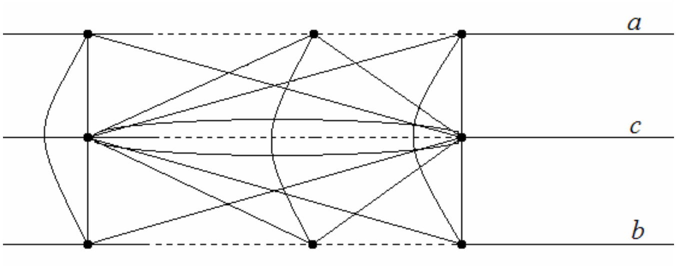
2.



3.



4.



Slika 4.1

Literatura

[1] Cameron, P. J., Nešetřil, J.: Homomorphism-homogeneous relational structures. Combinatorics, Probability and Computing 15 (2006), 91-103

[2] Cherlin G. L.: The classification of countable homogenous directed graphs and countable homogenous *n*-tournaments. Memoirs of the American Mathematical Society Vol. 621 (1998)

[3] Devillers A.: Ultrahomogenous semilinear spaces. Proc. London Math. Soc. (3) 84 (2002), 35-58

[4] Devillers A., Doyen J.: Homogenous and Ultrahomogenous Linear Spaces. Journal of Combinatorial Theory, series A 84 (1998), 236-241

[5] Fraïssé, R.: Sur certains relations qui généralisant l'ordre des nombres rationnels. C. R. Acad. Sci. Paris 237 (1953), 540-542

[6] Gardiner, A. D.: Homogenous graphs. Journal of Combinatorial Theory (B) 20 (1976), 94-102

[7] Lachlan, A. H.: Countable Homogenous Tournaments. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 284, No. 2 (1984), 431-461

[8] Lachlan, A. H., Woodrow, R. E.: Countable Ultrahomogenous undirected graphs. Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 262 (1980), 51-94

[9] Mašulović D.: Homomorphism-homogenous partially ordered sets. Order Vol. 24, No. 4, 2007, 215-226

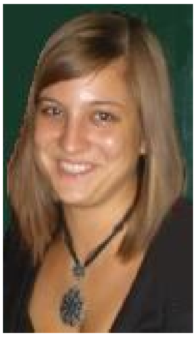
[10] Ilić A., Mašulović D., Rajković U.: Finite homomorphism-homogenous tournaments with loops. Journal of Graph Theory, Vol. 59, No. 1, 2008, 45-58

[11] Mašulović D.: On a class of homomorphism-homogenous point-line geometries (rukopis)

[12] Schmerl, J. H.: Countable homogenous partially ordered sets. Algebra Universalis ((19979), 317-321

[13] Jungabel, E.: Jedna klasa homomorfizam-homogenih semilinearnih prostora (diplomski rad)

Biografija



Eva Jungabel je rođena 03.06.1985 godine u Subotici. Pohađala je osnovnu školu ”Ivan Goran Kovačić” u Subotici, koju je završila 2000 godine sa odličnim uspehom i dodeljena joj je Vukova diploma. Obrazovanje je nastavila u gimnaziji ”Svetozar Marković” u Subotici, na prirodno matematičkom smeru. Gimnaziju završava 2004 godine sa odličnim uspehom. Jeseni iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Diplomirani Matematičar - Primenjena Matematika. Fakultet završava u oktobru 2008 godine sa prosečnom ocenom 9.94. Iste godine nastavja studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Primenjena Matematika - Tehnomatematika. Master studije završava u oktobru 2009 godine sa prosečnom ocenom 9.87. U novembru 2007 i 2008 godine učestvovala je na Vojvođanskoj mađarskoj naučnoj konferenciji studenata.

Novi Sad, *Oktobar 2009.*

(Eva Jungabel)

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:	
RBR	
Identifikacioni broj:	
IBR	
Tip dokumentacije:	Monografska dokumentacija
TD	
Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
TZ	
Vrsta rada:	Završni rad
VR	
Autor:	Eva Jungabel
AU	
Mentor:	dr Dragan Mašulović
MN	
Naslov rada:	O homomorfizam-homogenim geometrijama ranga 2
NR	
Jezik publikacije:	srpski (latinica)
JP	
Jezik izvoda:	s/en
JI	
Zemlja publikovanja:	R. Srbija
ZP	
Uže geografsko područje:	Vojvodina
UGP	
Godina:	2009
GO	
Izdavač:	autorski reprint
IZ	
Mesto i adresa:	Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA	
Fizički opis rada: (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)	(4/56/0/0/39/0/0)
FO	

Naučna oblast: Matematičke nauke
NO
Naučna disciplina: Diskretna matematika
ND
Predmetne odrednica, Ključne reči: Kombinatorna ravan, homomorfizam-homogenost
PO
UDK

Čuva se:
ČU
Važna napomena: nema
VN
Izvod: Danas je teorija homogenih struktura čvrsto ukorenjena matematička teorija sa dubokim posledicama ne samo unutar matematike, već i, recimo, u razumevanju socio-tehnoloških fenomena kao što je world-wide web. O homomorfizam-homogenim objektima se veoma malo zna. Ranije su opisane konačni homomorfizam-homogene kombinatorni ravni koje sadrže dve regularne prave koje se seku. Da bi se kompletirala karakterizacija homomorfizam-homogenih ravni potrebno je još opisati homomorfizam-homogene ravne kod koje ne postoje regularne prave koje se seku. Ovaj rad predstavlja jedan originalan doprinos u tom smeru.

IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: ??? 2009.
DP
Datum odbrane: oktobar 2009.
DO
Članovi komisije:
(Naučni/stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)
KO
Predsednik: dr Siniša Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Dragan Mašulović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Ivica Bošnjak, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:	
ANO	
Identification number:	
INO	
Document type:	Monograph documentation
DT	
Type of record:	Textual printed material
TR	
Contents code:	Master thesis
CC	
Author:	Eva Jungabel
AU	
Mentor:	Dr Dragan Mašulović
MN	
Title:	On homomorphism-homogeneous rank 2 geometries
TI	
Language of text:	Serbian (Latin)
LT	
Language of abstract:	en/s
LT	
Country of publication:	R. Srbija
CP	
Locality of publication:	Vojvodina
LP	
Publication year:	2009
PY	
Publisher:	Author's reprint
PU	
Publ. place:	Novi Sad, Trd D. Obradovića 4
PP	
Physical description:	(4/56/0/0/39/0/0)
PD	
Scientific field:	Mathematics

SF
Scientific discipline: Discrete Mathematics
SD
Subject Key words: Point-line geometry, homomorphism-homogeneity
SKW

UC
Holding data:
HD
Note:
N

Abstract: Nowadays the theory of homogenous structures is a very deep mathematical theory with consequences in both mathematics and other disciplines such as word-wide web. Not much is know about homomorphism-homogenous objects. The homomorphism-homogenous point-line geometry containing two regular line intersecting have been described. In order to complete to characterization it is necessary to describe homomorphism-homogenous point-line geometries where regular lines are disjoint. This thesis presents one step in this direction.
AB

Accepted on Scientific board on: ???, 2009
AS
Defended: October 2009
DE
Thesis Defend board:
DB

President: Dr Siniša Crvenković, full profesor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Mentor: Dr Dragan Mašulović, associate professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Dr Ivica Bošnjak, assistant professor, Faculty of Sciences, Novi Sad