UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Čongor Mičiz

Efikasni portfoliji sa neizvesnim vremenskim periodom

Master rad

Novi Sad, 2013

Sadržaj

Predgovor

U radu je razmatrana optimizacija portfolija uz pretpostavku da je vreme izlaska investitora sa tržišta neizvesno. Predstavljena su dva pristupa problemu: očekivanje-varijansa okvir i optimizacija pomoću WCVaR vrednosti. Osnovno pitanje glasi ovako: Kako se definišu i određuju efikasni portfoliji i koje osobine imaju uzimajući u obzir različite pristupe kao i efikasne portfolije sa unapred poznatim vremenom izlaska?
Očekivanje - varijansa pristup se većinom temelji na radu [1], a osnovu WCVaR optimizacije čini izvor [2].

Uvodni deo rada sadrži spisak definicija i teorema koje zajedno čine teorijsku osnovu neophodnu za razumevanje materije izložene u narednim poglavljima. Pored toga, data je i motivacija, koja služi kao tačka polazišta za naredne delove. Drugo poglavlje obuhvata optimizaciju portfolija u očekivanje-varijansa okviru. Prvo se analizira slučaj kada je vreme izlaska unapred poznato, zatim se prelazi na problem određivanja efikasnih portfolija sa neizvesnim vremenom izlaska. Treće poglavlje rezervisano je za optimizaciju pomoću WCVaR vrednosti, a dobijeni algoritmi testirani su na realnim podacima u četvrtom poglavlju. Peto poglavlje sadrži upoređivanje dobijenih rezultata. Ovde se formulišu pitanja i kritike u vezi gore opisanih načina optimizacije i navedene su neke sugestije vezane za proširivanje i unapređivanje predstavljenih modela.

Ovom prilikom zahvaljujem se svom mentoru, dr Nataši Krejić na prenetom znanju tokom studija kao i na korisnim savetima i sugestijama prilikom pisanja ovog rada. Ona za mene nije samo mentor, već je i pravi uzor, koji svojom profesionalnošću i stilom usmerava na put kritičkog mišljenja i argumentovanog, zrelog načina izlaganja stavova.

Takođe, želim da se zahvalim i svojoj porodici na neprestanoj moralnoj i materijalnoj podršci koju su mi pružali tokom studiranja a i pre toga.

Čongor Mičiz

1

Uvod

1.1 Pregled oznaka, definicija i teorema

U radu se koriste sledeće oznake:

^{T} - oznaka za transponovanje
$P(\cdot)$ - oznaka za verovatnoću
$E[\cdot]$ - očekivanje
$Var[\cdot]$ - varijansa
$[0, \tau]$ - vremenski interval, period ulaganja
D_i - i-ta aktiva
π - oznaka za portfolio
S_t^i - cena i-te aktive u trenutku $\tau = t$
$R_{o,\tau}^i$ - stopa prinosa i-te aktive za period $[0, \tau]$
R - vektor stopa prinosa
R^π - vektor stopa prinosa portfolija π
μ_i - očekivana stopa prinosa i-te aktive
μ - vektor očekivanih stopa prinosa
μ_π - vektor očekivanih stopa prinosa portfolija π
σ_i - standardno odstupanje i-te aktive
ω - vektor udela aktiva u portfoliju
$\sigma_{i,j} = cov[R^i, R^j]$ - kovarijansa i-te i j-te aktive
σ_π^2 - varijansa portfolija π
$V = [\sigma_{i,j}]$ - kovarijansna matrica portfolija
e - vektor jedinica
$L(\cdot)$ - Lagranžova funkcija
η_i - i-ti Lagranžov množitelj
$\rho_{i,j}$ - koeficijent korelacije i-te i j-te aktive

$N(\cdot)$ - funkcija raspodele standardne $\mathcal{N} : (0, 1)$ raspodele
τ - trenutak izlaska sa tržišta, slučajna promenljiva
$G(t)$ - funkcija raspodele slučajne promenljive τ
$g(t)$ - gustina raspodele slučajne promenljive τ
$f(\omega, R)$ - funkcija gubitka
Ψ - funkcija raspodele gubitka $f(\omega, R)$ $\mathcal{R}$ - operator
$p(\cdot)$ - bezuslovna gustina raspodele prinosa
$p_t(\cdot)$ - uslovna gustina raspodele prinosa τ
E_i^{exo} - događaj - izlaz u trenutku $\tau = t_i$ prouzrokovan egzogenim faktorom
E_i^{end} - događaj - izlaz u trenutku $\tau = t_i$ prouzrokovan endogenim faktorom
$\alpha, \beta, \varsigma, \bar{\varsigma}, \underline{\varsigma}, \gamma$ - konstnte
λ_i^{exo} - verovatnoća egzogenog izlaska u trenutku $\tau = t_i$
λ_i^{end} - verovatnoća endogenog izlaska u trenutku $\tau = t_i$

Definicija 1.1.1 (**Pozitivno semidefinitnost matrice**). *Kvadratna matrica A je pozitivno semidefinitna ako za svaki nenula vektor x važi $x^T Ax \geq 0$.*

Definicija 1.1.2 (**Pozitivno definitnost matrice**). *Kvadratna matrica A je pozitivno definitna ako za svaki nenula vektor x važi $x^T Ax > 0$.*

Definicija 1.1.3 (**σ-polje**). *σ-polje ili σ-algebra nad skupom Ω je podskup $\mathcal{F}$ partitativnog skupa $\mathcal{P}$ ukoliko važe sledeći uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $B \in \mathcal{F}, \Rightarrow B^C \in \mathcal{F}$ *(klasa $\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na operaciju komplementiranja)*
3. $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow U_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$ *(klasa $\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na operaciju prebrojive unije) Skup Ω sa σ-poljem $\mathcal{F}$, u oznaci $(\Omega, \mathcal{F})$, se zove prostor sa σ-poljem. Elemente skupa Ω zovemo događajima.*

Definicija 1.1.4 (**Borelovo σ-polje**). *Borelovo σ-polje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je najmanje σ-polje koje sadrži sve zatvorene skupove skupa realnih brojeva.*

Definicija 1.1.5 (**Verovatnoća**). *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor sa σ-poljem. Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako važe sledeći uslovi:*

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, B_i \cap B_j \neq 0, i \neq j, i, j = 1, 2, ... \Rightarrow$

   $P(\sum_{i=j}^{\infty} B_i) = \sum_{i=j}^{\infty} P(B_i)$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se naziva prostor verovatnoća.

Definicija 1.1.6 (**Slučajna promenljiva**). *Funkcia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se zove slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako za svako $B \in \mathcal{B}$ važi $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}$ Borelovo σ-polje. Ekvivalentno, kažemo da je X $\mathcal{F}$-merljivo.*
Jedna od najjednostavnijih slučajnih promenljivih jeste indikator događaja $B \in \mathcal{F}$, u oznaci I_B, koji se definiše na sledeći način:

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 1 & ako\ \omega \in B, \\ 0 & ako\ \omega \in B^C \end{cases}$$

Slučajna promenljiva $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ se naziva prosta slučajna promenljiva ako postoji konačno mnogo realnih brojeva $x_1, ..., x_n$, tako da važi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

U tom slučaju važi $\Omega = \sum_{i=1}^{n} B_i$, gde je $B_i = \{\omega | X(\omega) = x_i\}$ i $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{B_i}$. Integral proste slučajne promenljive X se definiše sa

$$\int X dP = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).$$

Definicija 1.1.7 (**Funkcija raspodele**). *Funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definisana kao*

$$F(x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) < x),$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Definicija 1.1.8 (**Gustina raspodele**). *Slučajna promenljiva X ima gustinu raspodele verovatnoća $\varphi(x), x \in \mathbb{R}$, gde je φ nenegativna, integrabilna funkcija, ako važi*

$$P(X \in B) = \int_B \varphi(x) dx$$

za svaki skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definicija 1.1.9 (**Normalna raspodela**). *Slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ako je njena gustina raspodele*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Normalna raspodela sa parametrima $m = 0$ i $\sigma^2 = 1$ zove se standardizovana normalna raspodela i obeležava se sa $\mathcal{N}(1, 0)$.

Definicija 1.1.10 (Očekivanje). *Očekivanje slučajne promenljive X sa funkcijom raspodele $F(x) = P(X \leq x)$, u oznaci $E(X)$, definiše se sa*

$$E(X) = \int_{\Omega} XdP = \int_{\mathbb{R}} xdF(x).$$

Za prostu slučajnu promenljivu X tada važi

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Definicija 1.1.11 (Disperzija). *Disperzija ili varijansa slučajne promenljive X se definiše na sledeći način:*

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X].$$

Definicija 1.1.12 (Standardna devijacija). *Standardna devijacija ili standardno odstupanje slučajne promenljive X se definiše sa $\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$.*

Definicija 1.1.13 (Kovarijansa). *Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y) se definiše na sledeći način:*

$$\sigma_{XY} = cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Definicija 1.1.14 (Koeficijent korelacije). *Koeficijent korelacije slučajne promenljive (X, Y) je*

$$\begin{aligned}\rho_{XY} = cov\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}, \frac{Y - E[Y]}{\sqrt{Var[Y]}}\right) &= \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} \\ = \frac{cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.\end{aligned}$$

Za koeficijent korelacije važi $|\rho_{XY}| \leq 0$. X i Y su pozitivno korelisane ako $\rho_{XY} > 0$, negativno korelisane ako je $\rho_{XY} < 0$ i nisu u korelaciji ako je $\rho_{XY} = 0$.

Definicija 1.1.15 (Konveksnost funkcije). *Funkcija f definisana nad konveksnim skupom U je konveksna na U ako za svaka dva elementa $u, v \in U$ i svaki realan broj $\alpha \in (0, 1)$ važi*

$$f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v).$$

Dva puta diferencijabilna funkcija f je konveksna na U ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za $x \in U$.

Definicija 1.1.16 (**Priroda ekstrema funkcije**). *Ako je funkcija f dva puta neprekidno diferencijabilna i ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, ($f''(x_0) < 0$), onda funkcija u tački x_0 ima minimum (maksimum).*

Definicija 1.1.17 (**Problem optimizacije**). *Traži se minimum funkcije $f(x)$ po $x = (x_1, ..., x_n)$ tako da uslovi $g_i(x) = b_i, \ \ i = 1, ..., m$ budu zadovoljeni. Pretpostavlja se da su $f(x)$ i $g_i(x) = b_i, \ \ i = 1, ..., m$ date diferencijabilne funkcije.*
Najpre se formira Lagranžova funkcija

$$L(x, \eta) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \eta_i (g_i(x) - b_i).$$

gde je $\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ vektor Lagranžovih množitelja.
Potrebni uslovi za optimalno rešenje Lagranžove funkcije su

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \eta_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \ \ j = 1, ..., n, \\ \frac{\partial L}{\partial \eta_j} &= g_i(x) - b_i = 0, \ \ i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

i nazivaju se KKT uslovi optimalnosti (Karush, Kuhn, Tucker).

Definicija 1.1.18 (**Uslovna verovatnoća**). *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $A, B \in \mathcal{F}$ i $P(B) > 0$. Verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B, odnosno uslovna verovatnoća $P(A|B)$, je data sa*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Definicija 1.1.19 (**Uslovno očekivanje**). *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je $\mathcal{G}$ σ-polje takvo da je $\mathcal{G} < \mathcal{F}$. Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabilna slučajna promenljiva, uslovno očekivanje $E(X|\mathcal{G})$ se definiše kao slučajna promenljiva takva da*

1. *$E(X|\mathcal{G})$ je $\mathcal{G}$-merljiva*
2. *$\int_B X dP = \int_B E(X|\mathcal{G}) dP$ za svako B iz $\mathcal{G}$.*

Definicija 1.1.20 (**Stohastički proces**). *Familija slučajnih promenljivih $\{X(k, \omega), \ \ k \in K, \ \ \omega \in \Omega\}$ definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zove se stohastički proces. Stohastički proces je funkcija dve promenljive: $k \in K$ i $\omega \in \Omega$. Skup K se naziva parametarski skup. Za fiksirano $k \in K$ dobija se jedna slučajna promenljiva X_k, a ukoliko se fiksira elementarni događaj $\omega \in \Omega$, dobija se realna funkcija (trajektorija) $X(\omega)$ definisana na skupu K.*

Definicija 1.1.21 (Proces prebrajanja). *Stohastički proces* $\{X(k,\omega),\ k \in K,\ \omega \in \Omega\}$ *je proces prebrajanja ako* $X(k,\omega)$ *predstavlja ukupan broj događaja koji su se desili do trenutka* t*, uključujući i trenutak* t*, pri čemu važe sledeće osobine:*

1. $X(k,\omega) \geq 0$
2. *za fiksirano* k *slučajna promenljiva* $X(\omega)$ *uzima vrednosti iz* $\mathbb{N}_0$
3. *ako je* $s < k$*, onda* $X(s,\omega) \leq X(k,\omega)$
4. *za* $s < k$*,* $X(k,\omega) - X(s,\omega)$ *predstavlja broj događaja koji su se desili u vremenskom intervalu* $(s,k]$*.*

Definicija 1.1.22 (Poasonova raspodela). *Diskretna slučajna promenljiva* X *sa skupom vrednosti* $\{1,2,3,...\}$ *i parametrom* λ *ima Poasonovu raspodelu ako važi*

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Definicija 1.1.23 (Poasonov proces). *Proces prebrajanja* $\{X(k,\omega),\ k \in K,\ \omega \in \Omega\}$ *se zove Poasonov proces sa stopom rasta* $\lambda > 0$ *ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $X(0,\omega) = 0$
2. *proces* $X(k,\omega)$ *ima nezavisne priraštaje*
3. *broj događaja u proizvoljnom intervalu dužine* k *ima Poasonovu raspodelu sa parametrom* λk*, tj.*

$$P(X(k+s) - X(s) = n) = \frac{\lambda k^n}{n!}e^{-\lambda k}$$

za svako $s,k \geq 0$ *i* $n = 0,1,....$

Definicija 1.1.24 (Braunovo kretanje). *Za stohastički proces* $\widetilde{W}_k,\ k \geq 0$ *kaže se da je Braunovo kretanje sa driftom* μ *i volatolnosti* σ *ako:*

1. $\widetilde{W}_0 = 0$
2. $\widetilde{W}_k$ *ima nezavisne priraštaje, to jest za* $0 < k_1 < ... < k_n < ...$ *slučajne promenljive* $\widetilde{W}_{k_1} - \widetilde{W}_{k_0}, \widetilde{W}_{k_2} - \widetilde{W}_{k_1}, ..., \widetilde{W}_{k_n} - \widetilde{W}_{k_{n-1}}, ...$ *su nezavisne*
3. $\widetilde{W}_k - \widetilde{W}_t : \mathcal{N}(\mu(k-t), \sigma^2(k-t)),\ \ k \geq t > 0.$

Ako se specijalno izabere $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ dobija se Braunovo kretanje W_k koje se zove standardizovano Braunovo krentanje. Iz osobina normalne raspodele sledi:

$$\widetilde{W}_k = \mu k + \sigma W_k.$$

Definicija 1.1.25 (**Stohastička dominacija prvog reda**). *Neka su X i Y slučajne promenljive sa funkcijama raspodele $F_X(x)$ i $F_Y(y)$ redom. Kaže se da slučajna promenljiva X ima stohastičku domincaiju prvog reda u odnosu na Y, u oznaci $X \prec_{sd1} Y$, ako za svako $x \in \mathbb{R}$ važi:*

$$P(X \geq x) \geq P(Y \geq x)$$

odnosno

$$F_X(x) \leq F_Y(x).$$

Definicija 1.1.26 (**Stohastička dominacija drugog reda**). *Neka su X i Y slučajne promenljive sa funkcijama raspodele $F_X(x)$ i $F_Y(y)$ redom. Kaže se da slučajna promenljiva X ima stohastičku domincaiju drugog reda u odnosu na Y, u oznaci $X \prec_{sd2} Y$, ako za svako $x \in \mathbb{R}$ važi:*

$$\int_{-\infty}^{x} [F_Y(t) - F_X(t)]dt \geq 0.$$

odnosno ako i samo ako važi

$$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$$

za sve neopadajuće konkavne funkcije korisnosti $u(x)$.

Definicija 1.1.27 (**Prostor $\mathcal{L}^2$**). *Prostor $\mathcal{L}^2$ je skup svih kvadratno integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$, odnosno važi:*

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{C}; \ \int_b^a |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Teorema 1.1.1. *Neka su X i Y slučajne promenljive. Tada važi*

$$\begin{aligned} E(X) =& E[E(X|Y)], \\ V(X) =& E[V(X|Y)] + V[E(X|Y)]. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.2 (**Primal-dual u linearnom programiranju**). *Neka je dat primalni problem linearnog programiranja:*

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ s.t. \ \ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

gde je $c \in \mathbb{R}^n$*,* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *i* $b \in \mathbb{R}^m$*. Tada je njemu odgovarajući dualni problem dat sa:*

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \\ s.t.\ \ A^T y \geq c \\ y \geq 0. \end{aligned}$$

1.2 Motivacija

Optimizacija kao pojava nije karakteristična samo za svet finansija. U mnogim sferama života postoji primena optimizacije, počevši od industrijske proizvodnje, organizacije saobraćaja, sve do ličnih motiva kao što su na primer potrošnja dohotka ili planiranje šetnje iz jednog dela grada u drugi. Neformalno definisano, optimizacija predstavlja jedan proces u kojem iz skupa mogućih rešenja biramo ono rešenje, koje po nekim kriterijumima najviše odgovara. Na formiranje skupa mogućih rešenja takođe utiču mnogi faktori. Ako uzmemo primer šetnje, cilj optimizacije može biti nalaženje najkraćeg puta između dve lokacije, a kriterijum prolazak kroz određenu ulicu ili slično.

Osnovni problem u svetu finansija je optimalan izbor aktiva za unapred određenu količinu kapitala. Pri tome se pod investicijom podrazumeva svako ulaganje u cilju ostvarivanja profita. Investicija može biti kupovina hartija od vrednosti, nekretnina, ulaganje u proizvodnju i slično. Cilj investitora je da svoj kapital rasporedi ulagajući u različite aktive, koje zajedno formiraju portfolio. Kretanje cene aktiva nije unapred poznato, zato se ovaj izvor neizvesnosti modelira slučajnom promenljivom.
Neka je S_τ oznaka za cenu neke aktive u trenutku $\tau = t$, a S_0 je početna cena. Ako se sa

$$R_{0,\tau} = \frac{S_\tau - S_0}{S_0}$$

označi stopa prinosa neke aktive, jasno je da se slučajnost vezana za buduću cenu prenosi i na ovu veličinu. Stopa prinosa kao slučajna promenljiva, ima svoju očekivanu vrednost i varijansu. Pošto investitor ne zna unapred cenu aktive na kraju perioda ulaganja, on tu veličinu može samo da proceni pomoću očekivane stope prinosa. Mera odstupanja stope prinosa od očekivane vrednosti izražava se varijansom, pa se varijansa intuitivno može shvatiti kao mera rizika.

U okviru očekivanje-varijansa optimizacije u opštem slučaju investitor želi da postigne određeni dogovor između željenog nivoa očekivanih prinosa i rizika koji oni nose sa sobom. Optimalnost se može shvatiti kao maksimizacija očekivanog prinosa ili minimizacija rizika ili kombinacija ova dva kriterijuma.

Drugi pristup prilikom optimizacije predstavlja korišćenje VaR, odnosno CVaR vrednosti kao mere rizika. VaR kao najveći mogući gubitak na nekom nivou poverenja uspešno prevazilazi probleme sa kojima se tradicionalniji očekivanje-varijansa pristup suočava. Još više informacija o gubicima portfolija obezbeđuje CVaR pristup, jer vrednost CVaR predstavlja očekivanu vrednost gubitaka koji prelaze vrednost VaR na nekom nivou poverenja. Takođe, CVaR modeli su znatno jednostavniji za praktičnu primenu.

U klasičnoj portfolio-analizi rizik potiče od stohastičke stope prinosa i smatra se da je investitorov trenutak izlaza sa tržišta unapred određen. Međutim, realnije je pretpostaviti da investitor u početnom trenutku ne zna sa sigurnošću kad će napustiti tržište. Razlozi za izlaz mogu biti različite prirode. Ako se smatra da je vreme izlaska nepoznato, matematički model postaje složeniji jer se uvodi nova slučajna promenjiva - vreme, odnosno trenutak izlaza. Glavna motivacija ovog rada je da se razmatra optimizacija portfolija pod ovakvim okolnostima i da se dobijeni rezultati uporede sa modelima bez slučajnog vremena izlaska.

2

Očekivanje - varijansa okvir za optimizaciju portfolija

2.1 Uvod

Osnovna ideja ovog pristupa je da se analiziraju stopa očekivanih prinosa i varijansa portfolija i da se teži ka uspostavljanju određenog balansa između prinosa i rizika. Investitor, kao racionalni učesnik na tržištu, želi da postigne što veći prinos, a sa druge nastoji da minimizira rizik. Različite aktive donose različite prinose a istovremeno u sebi nose i različite nivoe rizika, koji potiče od buduće cene. Intuitivno je jasno da veći prinos znači i veći rizik.

U narednom delu razmatra se standardni Markovicov model, koji za unapred zadati očekivani prinos želi da minimizira rizik, odnosno varijansu portfolija. Treba naglasiti da se ovde optimizacija vrši na konačnom vremenskom intervalu i da strukturu portfolija nije moguće promeniti u međuvremenu. To znači da je trenutak izlaza unapred definisan i problem je statički.

2.2 Standardni Markovicov portfolio

Neka je dato n aktiva D_i sa stopama prinosa R^i i standardnim odstupanjima σ_i, $i = 1, ..., n$ i neka je $\mu_i = E[R^i]$ očekivana stopa prinosa i-te aktive. Portfolio se definiše kao linearna kombinacija aktiva:

$$\pi = \omega_1 D_1 + ... + \omega_n D_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i D_i$$

pri čemu su $\omega_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ težinski koeficijenti odgovarajućih aktiva u portfoliju. Neka je ω oznaka za vektor težinskih koeficijenata. Vektor ω se često zove i vektorom odluke, jer sadrži informaciju u kojoj meri su pojedine aktive uključene u portfolio. Ako sa R označimo vektor stopa prinosa, a sa μ vektor očekivanih stopa prinosa, stopa prinosa portfolija se može zapisati kao:

$$R^\pi = \omega_1 R^1 + ... + \omega_n R^n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R^i = \omega^T R$$

a stopa očekivanih prinosa portfolija kao:

$$\mu_\pi = \omega_1 \mu_1 + ... + \omega_n \mu_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i = \omega^T \mu$$

Ako sa σ_{ij} označimo kovarijansu i-te i j-te aktive, varijansu celog portfolija možemo dobiti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\sigma_\pi^2 = E[(R^\pi - \mu_\pi)^2] &= E[(\sum_{i=1}^{n} \omega_i R^i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i)^2] \\
&= E[\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j (R^i - \mu_i)(R^j - \mu_j)] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}
\end{aligned}$$

Ako sa V označimo matricu kovarijansi $V = [\sigma_{ij}]$, varijansu odnosno rizik portfolija možemo zapisati u obliku:

$$\sigma_\pi^2 = \omega^T V \omega.$$

Markovicov pristup se temelji na teoriji korisnosti Nojmana i Morgenšterna (videti [3]) i tvrdi da ako su preferencije investitora opisane kvadratnom funkcijom korisnosti, očekivanje - varijansa maksimizacija je konzistentna sa maksimizacijom očekivanja kvadratne funkcije korisnosti, što se može zapisati kao:

$$\begin{aligned}
\max_{\omega} \quad & k\mu_\pi - \frac{1}{2}\sigma_\pi^2 \\
s.t. \quad & e^T \omega = 1
\end{aligned}$$

gde $e \in \mathbb{R}^n$ označava vektor jedinica. Iz formulacije se jasno vidi da funkcija cilja predstavlja kombinaciju očekivanog prinosa i rizika i da se promenom

parametra $k \in \mathbb{R}$ može uticati na balans između željenog prinosa i rizika. Ograničenje $e^T\omega = 1$ predstavlja početno bogatstvo investitora i zahteva da se ceo kapital investira u portfolio.
Gornji problem se može preformulisati tako što se umesto maksimizacije očekivane korisnosti posmatra minimizacija negativne korisnosti:

Problem 1

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \frac{1}{2}\sigma_\pi^2 - k\mu_\pi \\ s.t. \quad & e^T\omega = 1. \end{aligned}$$

Ako se pretpostavi da je matrica kovarijansi V pozitivno definitna i simetrična, a μ nije skalarni umnožak od e, problem 1 će imati jedinstveno rešenje, što ilustruje sledeća teorema:

Teorema 2.2.1. *([12]) Problem 1 ima jedinstveno rešenje*

$$\omega = V^{-1}(\eta e + k\mu), \qquad \eta = \frac{1 - kB}{A}$$

a odgovarajuća stopa očekivanih prinosa portfolija je

$$\mu_\pi = \eta B + kC = \frac{B + kD}{A}$$

gde su

$$A := e^T V^{-1} e, \qquad B := e^T V^{-1}\mu, \qquad C := \mu^T V^{-1}\mu, \qquad D := AC - B^2$$

pozitivne konstante.

Dokaz:

Funkcija cilja je kvadratna a postavljeno ograničenje je linearno. Pozitivna definitnost matrice V obezbeđuje da su svih n aktiva rizične i da funkcija cilja ima minimum. V je i simetrična, pa sledi da postoji inverzna matrica V^{-1}. Pretpostavka da μ nije skalarni umnožak od e implicira da je $n \geq 2$ i da se ne dolazi do degenerisanog rešenja. Lagranžova funkcija problema 1 može se zapisati u sledećem obliku:

$$L(\omega, \eta; k) = \frac{1}{2}\omega^T V\omega - k\mu^T\omega - \eta(e^T\omega - 1).$$

Nalaženjem KKT uslova prvog reda dobija se matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} V & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ -\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\mu \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iz prvog reda može se izraziti vektor udela ω, a Lagranžov množitelj η i vektor očekivanih prinosa μ dobijaju se zamenom izraza za ω u drugi red matričnog zapisa kao i u izraz za μ. Jedinstvenost rešenja sledi iz konveksnosti kvadratne funkcije i punog ranga ograničenja.

$\square$

Postoji još jedna formulacija problema 1, u kojoj se traži minimalni nivo rizika uz zadata ograničenja:

Problem 2

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \frac{1}{2}\sigma_{\pi}^2 \\ s.t. \quad & e^T\omega = 1 \\ & \mu^T\omega = l. \end{aligned}$$

Teorema 2.2.2. *([12]) Problem 2 ima jedinstveno rešenje*

$$\omega = V^{-1}(\eta_1 e + \eta_2 \mu), \qquad \eta_1 = \frac{C - Bl}{D} \qquad \eta_2 = \frac{Al - B}{D}.$$

Dokaz

Lagranžova funkcija pridružena problemu 2 je oblika:

$$L(\omega, \eta_1, \eta_2; l) = \frac{1}{2}\omega^T V\omega - \eta_1(e^T\omega - 1) - \eta_2(\mu^T\omega - l).$$

Nakon određivanja KKT uslova optimalnosti prvog reda, dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\begin{bmatrix} V & e & \mu \\ e^T & 0 & 0 \\ \mu^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ -\eta_1 \\ -\eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ l \end{bmatrix}.$$

Izraz za optimalan portfolio i ovaj put sledi iz prvog reda matričnog zapisa. Izrazi za η_1 i η_2 se mogu dobiti zamenom izraza za ω u preostale redove matričnog zapisa, što dovodi do sledećeg sistema jednačina:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ l \end{bmatrix}$$

U problemu 2 prvi Lagranžov množitelj η_1 vezan je za budžetsko ograničenje pa se često zove i budžetski množitelj. Drugi Lagranžov množitelj je vezan za željeni nivo prinosa, te se često zove i množitelj prinosa.

$\square$

Sledeća teorema daje vezu između problema 1 i problema 2 i tvrdi da su oni međusobno ekvivalentni.

Teorema 2.2.3. *([12]) Problem 1 sa parametrom k i problem 2 sa parametrom l su ekvivalentni ako i samo ako je k jednako optimalnom množitelju η_2 iz problema 2 ili, ekvivalentno, l je jednako optimalnom očekivanom prinosu μ iz problema 1.*

Dokaz

Lako je uočiti da su potrebni uslovi međusobno ekvivalentni. Prvi uslov teoreme kaže da je $k = \eta_2$, odnosno da važi

$$k = \frac{Al - B}{D}$$

dok drugi uslov zahteva da je $l = \mu_\pi$, odnosno da važi

$$l = \frac{B + kD}{A}.$$

Odavde sledi da su odgovarajući budžetski množitelji problema 1 i problema 2 takođe jednaki:

$$\eta = \frac{1 - kB}{A} = \frac{1 - \dfrac{A - lB}{D}B}{A} = \frac{D - AlB + B^2}{AD} = \frac{A(C - lB)}{AD} = \frac{C - lB}{D} = \eta_1$$

Drugi smer dokaza je trivijalan.

$\square$

Može se uočiti da problem 2 sadrži uslov optimalnosti iz prvog problema i dodatni uslov očekivanog prinosa. Rešavanjem dobijaju se $n+2$ jednačine koje definišu jedan jednodimenzionalni potprostor sa $n+3$ promenljivih ω, η, k i l, pri čemu se u problemu 1 parametrizacija vrši pomoću k, a u problemu 2 pomoću l. Kao posledica, sledi da je optimalan rizik portfolija kvadratna funkcija od l, odnosno $\sigma_\pi^2 = \sigma_\pi^2(l)$.
Dakle, optimalan portfolio zavisi od unapred zadatog željenog nivoa očekivanog prinosa, odnosno od parametra l. Rešenja dobijena u teoremi 1 i teoremi 2 definišu efikasan portfolio, odnosno portofio sa najmanjom varijansom za unapred zadati nivo oěkivanog prinosa. Za različite vrednosti parametra l grafik funkcije σ_π^2 u $\sigma^2 - l$ ravni definiše skup efikasnih portfolija.

Teorema 2.2.4. *([12]) U problemima 1 i 2 optimalan rizik je dat izrazom*

$$\sigma_\pi^2(l) = \frac{Al^2 - 2Bl + C}{D} = \frac{k^2D + 1}{A}.$$

Globalni minimum funkcije σ_π^2 dostignut je u tački

$$l^* = \frac{B}{A}$$

i ima vrednost

$$\sigma_\pi^2(l^*) = \frac{1}{A}.$$

Odgovarajuće rešenje je

$$\omega^* = \frac{V^{-1}e}{A}, \qquad \eta^* = \frac{1}{A}, \qquad k^* = 0.$$

Dokaz

Iz definicije rizika portfolija i izraza za ω iz teoreme 2 sledi

$$\begin{aligned}\sigma_\pi^2 = \omega^T V \omega &= (\eta_1 e + \eta_2 \mu)^T V^{-1} (\eta_1 e + \eta_2 \mu) \\ &= \eta_1^2 A + 2\eta_1\eta_2 B + \eta_2^2 C \\ &= \eta_1(\eta_1 A + \eta_2 B) + \eta_2(\eta_1 B + \eta_2 C).\end{aligned}$$

Iz prethodnih teorema važi sledeće:

$$\begin{aligned}\eta = \frac{1 - kB}{A} &= \frac{C - Bl}{D} = \eta_1 \\ \mu_\pi &= \frac{B + kD}{A} \\ \eta_2 &= \frac{lA - B}{D} \\ l &= \frac{B + kD}{A}.\end{aligned}$$

Ako se u izrazu za σ_π^2 η_1 i η_2 zamene odgovarajućim vrednostima iz gornjih redova, zatim se prvo η_1 zameni izrazom za η, dobija se sledeća jednačina:

$$\sigma_\pi^2 = \frac{1 - kB}{A} + \frac{l^2 A - lB}{D} = \frac{D - kBD + l^2A^2 - lAB}{AD}.$$

Nakon zamene formule za l i sređivanja razlomka dolazi se do tvrđenja teoreme. Dokaz ostalih tvrđenja teoreme sledi direktno i trivijalno iz prethodnih delova.

$\square$

2.3 Neizvesno vreme izlaska

U prethodnom poglavlju analiziran je slučaj optimizacije portfolija uz pretpostavku da je vreme izaska investitora unapred određeno. Međutim, realnije je pretpostaviti da investitor ne zna tačno kad će napustiti tržište ili reorganizovati svoj portfolio. Izlazak sa tržišta može prouzrokovati pad ili rast cene jedne ili više aktiva u portfoliju ili neki drugi motivi kao što su na primer prodaja ili kupovina imovine, gubitak posla ili odlazak u penziju.

Pošto horizont investiranja skoro nikad nije unapred poznat u trenutku početnog ulaganja, razvijanje teorije investiranja sa neizvesnim vremenom izlaska je od teorijskog i praktičnog značaja. Neka se pretpostavi da je horizont investiranja period između trenutka 0 i trenutka τ, gde je τ pozitivna slučajna promenljiva i označava trenutak izlaska sa tržišta. U ranijim delovima naglašeno je da rizik portfolija potiče iz činjenice da buduća cena aktive nije unapred poznata. Pomoću cene definiše se stopa prinosa i neizvesnost buduće cene prenosi se i na ovu veličinu. Ako je stopa prinosa za period $[0,\tau]$ data izrazom

$$R_{0,\tau} = \frac{S_\tau - S_0}{S_0},$$

jasno je da su prisutne dve vrste neizvesnosti. Sa jedne strane, za datu realizaciju slučajne promenljive τ, buduća cena nije poznata i ova neizvesnost se zove *rizik cene*. Sa druge strane, realizacija τ sama po sebi je neizvesna, pa sa ova neizvesnost zove *rizik vremena izlaska*.
Pri određivanju efikasnih portfolija investitor mora da obrati pažnju na obe vrste rizika, kao i na vezu između ove dve slučajne promenljive. Prilikom ove analize neophodno je odrediti prva dva momenta procesa prinosa $R_{0,\tau}$, odnosno treba odrediti bezuslovno očekivanje i varijansu.
Na osnovu teoreme 1.1.1 bezuslovno očekivanje prinosa nad vremenskim horizontom $[0,\tau]$ ima sledeći oblik:

$$E[R_{0,\tau}] = E[E[R_{0,\tau}|\tau]].$$

Može se uočiti da je bezuslovni očekivani prinos težinska sredina uslovnih očekivanih prinosa. U praksi se lakše ocenjuju uslovni momenti. Bezuslovna varijansa prinosa takođe sledi iz teoreme 1.1.1:

$$Var[R_{0,\tau}] = E[Var[R_{0,\tau}|\tau]] + Var[E[R_{0,\tau}|\tau]].$$

Prvi sabirak varijanse je težinska sredina uslovnih varijansi i predstavlja meru rizika prinosa. Drugi sabirak predstavlja varijansu uslovnih očekivanih prinosa i jednak je nuli u slučaju kada je izlazak sa tržišta unapred određen.

Stoga, ovaj deo se može smatrati merom rizika vremena izlaska.
Prethodna analiza tvrdi da, ako je vreme izlaska neizvesno, rizik portfolija se može rastaviti na dva dela: rizik koji potiče od budućeg prinosa i rizik vremena izlaska.
Sledeći korak je nalaženje bezuslovnog očekivanja i varijanse prinosa celog portfolija. Neka se pretpostavi da se investiranje vrši nad vremenskim horizontom nepoznate dužine τ i da je ovaj interval isti za sve aktive u portfoliju. Ako je $R^i_{0,\tau}$ oznaka za i-tu aktivu, $i = 1, ..., n$, a ω predstavlja vektor težinskih koeficijenata, stopa prinosa portfolija data je pomoću izraza:

$$R^\pi_{0,\tau} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R^i_{0,\tau}.$$

Ako se iskoristi tvrđenje teoreme 1.1.1, bezuslovno očekivanje portfolija definiše sledeći izraz:

$$E[R^\pi_{0,\tau}] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E[R^i_{o,\tau}] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E[E[R^i_{0,\tau}|\tau]].$$

Na sličan način moguće je dobiti bezuslovnu varijansu:

$$Var[R^\pi_{0,\tau}] = E[Var[R^\pi_{0,\tau}|\tau]] + Var[E[R^\pi_{0,\tau}|\tau]].$$

Pod gore navedenim uslovima problem optimizacije portfolija sa neizvesnim vremenom izlaska ima sledeću formulaciju:

Problem 3

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\omega} & Var[R^\pi_{0,\tau}] \\ s.t & E[R^\pi_{0,\tau}] = l \\ & \omega^T e = 1. \end{array}$$

U narednim delovima precizno se definišu vrste vremena izlaska.

2.4 Vrste vremena izlaska

U zavisnosti od veze između cene aktive i trenutka izlaska mogu se razlikovati dve vrste izlaska: *endogeno* (zavisno) i *egzogeno* (nezavisno) vreme izlaska. O egzogenom vremenu izlaska se govori kada τ ne zavisi od kretanja cena aktiva u portfoliju, odnosno kad na investitorov izlazak sa tržišta ne utiču cenovne fluktacije. Primeri takvog izlaska su neplanirana potrošnja, odlazak u penziju ili neki drugi motivi.

Neka su G i g redom funkcija raspodele i gustina slučajne promenljive τ, a p_t gustina uslovne raspodele $R_{0,\tau}$ u trenutku $t = \tau$ i neka $p(\cdot)$ označava bezuslovnu gustinu za $R_{0,\tau}$. U tom slučaju važi sledeća relacija:

$$p(R) = \int_a^b p_t(R)g(t)dt \tag{2.1}$$

gde je $0 < a < t < b$.

Formalno definisano, o egzogenom odnosno nezavisnom vremenu izlaska se govori ako važi jednakost

$$p(R) = p_t(R),$$

odnosno kada su uslovna i bezuslovna raspodela prinosa $R_{0,\tau}$ međusobno jednake. U svim ostalim slučajevima radi se o zavisnom, odnosno endogenom vremenu izlaska. Generalno, neizvesan i neočekivan izlazak sa tržišta uzrokovan egzogenim faktorom može biti modeliran kao skok Poasonovog procesa. U model može biti uključeno više egzogenih motiva, jer je poznato da zbir nezavisnih Poasonovih procesa ostaje Poasonov proces.
U slučaju endogenog vremena izlaska postoje dva glavna motiva koja mogu prouzrokovati izlazak sa tržišta. Prvi razlog je neočekivani pad cena aktiva u portfoliju, što dovodi do povlačenja investitora u cilju smanjenja gubitaka. Drugi uticaj je značajno povećanje cene. U tom slučaju investitor izlazi sa tržišta misleći da je portfolio dostigao najveću moguću vrednost i da će naslediti pad u vrednosti portfolija. U praksi je vrlo teško precizno predvideti vrstu eventualnog izlaska, jer izlazak često zavisi i od egzogenih i od endogenih faktora. U ovom delu rada, prateći izvor [1], prilikom određivanja efikasnih portfolija endogeno i egzogeno vreme izlaska se posmatraju odvojeno kao dva različita slučaja. Kasnije, prilikom WCVaR optimizacije, u skladu sa [2], ovi slučajevi se posmatraju zajedno.

2.5 Generalizovani Markovicov model

U ovom delu razmatra se optimizacija portfolija nad neizvesnim vremenskim horizontom uz pretpostavku da vreme izlaska ne zavisi od kretanja cene aktive. Pred toga, dodatno se pretpostavlja da prinosi uslovno po vremenu prate slučajan hod.

Teorema 2.5.1. *([1]) Neka se pretpostavi da proces prinosa uslovno po vremenu prati slučajan hod sa očekivanjem μ i volatilnošću σ. Tada su bezuslovno očekivanje i varijansa procesa prinosa nad neizvesnim vremenskim horizontom dati sledećim izrazom:*

$$\begin{aligned} E[R_{0,\tau}] &= \mu E[\tau] \\ V[R_{0,\tau}] &= \sigma^2 E[\tau] + \mu^2 V[\tau] \end{aligned}$$

gde su $E[\tau]$ i $V[\tau]$ očekivanje i varijansa vremena izlaska τ.

Dokaz

Koeficijenti μ i σ su ograničeni i determinističke funkcije vremena. Pošto prinosi prate slučajan hod, uslovno očekivanje i varijansa prinosa su linearne funkcije vremena. Primenom nezavisnosti dobija se

$$\begin{aligned} E[R_{0,\tau}|\tau = t] = E[R_{0,\tau}] = \mu t \\ V[R_{0,\tau}|\tau = t] = V[R_{0,\tau}] = \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Na osnovu (2.1) dobijaju se bezuslovni prinos

$$E[R_{0,\tau}] = \mu E[\tau]$$

i varijansa

$$Var[R_{0,\tau}] = \int_a^b \sigma^2 t g(t) dt + \int_a^b (\mu t - \mu E[\tau])^2 g(t) dt = \sigma^2 E[\tau] + \mu^2 Var[\tau].$$

Ponovo, varijansa ima dva sabirka: meru rizika cene $\sigma^2 E[\tau]$ i meru rizika vremana izlaska $\mu^2 Var[\tau]$. Može se uočiti da za $E[\tau] = T$ i $Var[\tau] = 0$ dobija se slučaj sa fiksnim vremenom izlaska.

□

Na osnovu gornjeg tvrđenja ako prinosi prate slučajan hod i kada je vreme izlaska nezavisno od prinosa (egzogeno), prinos i-te aktive zadovoljava sledeće:

$$E[R^i_{0,\tau}] = \mu_i E[\tau]$$
$$Var[R^i_{0,\tau}] = \sigma_i^2 E[\tau] + \mu_i^2 Var[\tau]$$

gde su μ_i i σ_i^2 redom očekivani prinos i varijansa i-te aktive.
Kovarijansa i-te i j-te aktive je

$$cov[R^i_{0,\tau}, R^j_{0,\tau}] = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} E[\tau] + \mu_i \mu_j Var[\tau]$$

gde je ρ_{ij} koeficijent korelacije dve aktive uz pretpostavku da sve aktive imaju isto vreme izlaska.
Očekivani prinos portfolija je dat sledećim izrazom:

$$E[R^\pi_{0,\tau}] = E[\tau] \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i = E[\tau] \mu_\pi$$

a varijansa portfolija je

$$\begin{aligned} Var[R^\pi_{0,\tau}] &= E[\tau] \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + Var[\tau] \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \\ &= \sigma_\pi^2 E[\tau] + \mu_\pi^2 Var[\tau]. \end{aligned}$$

Ako prinosi uslovno po vremenu prate slučajan hod, tada za bilo koju raspodelu nezavisnog vremena izlaska moguće je preformulisati problem 3 sa odgovarajućim parametrima, što potvrđuje sledeće tvrđenje:

Teorema 2.5.2. *([1]) Ako prinosi prate slučajan hod i ako je vreme izlaska nezavisno od prinosa, Problem 3 je ekvivalentan sledećem problemu:*

Problem 4

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \omega^T K \omega \\ s.t. \quad & \omega^T \mu = l^* \\ & \omega^T e = 1 \end{aligned}$$

gde je

$$K_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + \frac{Var[\tau]}{E[\tau]} \mu_i \mu_j$$
$$l^* = \frac{l}{E[\tau]}.$$

Šta više, rešenje datog problema postoji i jedinstveno je.

Dokaz

Lagranžova funkcija problema 3 je data sa:

$$L = \frac{1}{2}E[\tau]\omega^T V\omega + \frac{1}{2}Var[\tau](\omega^T\mu)^2 + \eta_1(l - E[\tau]\omega^T\mu) + \eta_2 E[\tau](1 - \omega^T e)$$

jer važi da je

$$Var[R^{\pi}_{0,\tau}] = \sigma^2_{\pi}E[\tau] + \mu^2_{\pi}Var[\tau] = E[\tau]\omega^T V\omega + Var[\tau](\omega^T\mu)^2.$$

Nalaženje KKT uslova prvog reda dovodi do sledećih jednačina:

$$\begin{aligned} E[\tau]V\omega + Var[\tau](\omega^T\mu)\mu - \eta_1 E[\tau]\mu - \eta_2 E[\tau]e = 0 \\ E[\tau]\omega^T\mu = l \\ \omega^T e = 1. \end{aligned}$$

Gornji sistem jednačina može se zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} V\omega + \frac{Var[\tau]}{E[\tau]}(\omega^T\mu)\mu - \eta_1\mu - \eta_2 e = 0 \\ \omega^T\mu = l^* \\ \omega^T e = 1. \end{aligned}$$

Neka se sada odredi Lagranžova funkcija problema 4:

$$L^1 = \frac{1}{2}\omega^T V\omega + \frac{Var[\tau]}{2E[\tau]}(\omega^T\mu)^2 + \eta_1(l^* E[\tau] - \omega^T\mu) + \eta_2(1 - \omega^T e).$$

Odgovarajući KKT uslovi su redom:

$$\begin{aligned} V\omega + \frac{Var[\tau]}{E[\tau]}(\omega^T\mu)\mu - \eta_1\mu - \eta_2 e = 0 \\ \omega^T\mu = l^* \\ \omega^T e = 1. \end{aligned}$$

Ako se uzme da je $l^* = \dfrac{l}{E[\tau]}$ očigledno, L i L^1 imaće iste KKT uslove pa sledi da su i problemi 3 i 4 međusobno ekvivalentni. Preostaje da se pokaže da je K kovarijansna matrica, tj. da je simetrična i pozitivno definitna. Ako se analizira izraz

$$K_{i,j} = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} + \frac{Var[\tau]}{E[\tau]}\mu_i\mu_j$$

vidi se da je $\frac{Var[\tau]}{E[\tau]}\mu_i\mu_j, \quad i,j = 1,...n$ simetrična matrica, a prvi deo izraza za K, tj. matrica V simetrična je po pretpostavci. Sledi da je i K simetrična.
Za svaki vektor $\omega \neq 0$ važi $\omega^T V\omega > 0$ jer je V pozitivno definitna matrica. Dalje sledi

$$\omega^T K\omega = \omega^T V\omega + \frac{Var[\tau]}{E[\tau]}(\omega^T \mu)^2 \geq \omega^T V\omega > 0$$

jer su $E[\tau]$ i $Var[\tau]$ strogo pozitivni, a $(\omega^T\mu)^2$ je nenegativno. To znači da je i K pozitivno definitna, pa samim tim i regularna, što obezbeđuje dovoljan uslov za postojanje jedinstvenog rešenja.

□

U prethodnom tvrđenju kovarijansna matrica K je preformulisana i razlikuje se od V, jer ima dodatni sabirak $\frac{Var[\tau]}{E[\tau]}\mu_i\mu_j$.
Iz prethodne analize sledi da u slučaju kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa portfolija, problem optimizacije portfolija sa neizvesnim vremenom izlaska se može predstaviti u obliku standardne kvadratne optimizacije. Rešenje problema postoji i jedinstveno je.
U sledećem tvrđenju dato je eksplicitno rešenje problema 4, koje ima isti oblik kao i rešenje standardnog Markovicovog problema, samo su parametri prilagođeni.

Teorema 2.5.3. *([1]) Ako vreme izlaska τ ne zavisi od performanse portfolija i ako prinosi prate slučajan hod, rešenje kvadratnog problema 4 dato je sa*

$$\omega^* = \frac{Al^* - B}{D}V^{-1}\mu + \frac{C - Bl^*}{D}V^{-1}e$$

gde je

$$A := e^T V^{-1} e, \qquad B := e^T V^{-1}\mu, \qquad C := \mu^T V^{-1}\mu, \qquad D := AC - B^2$$

$$l^* = \frac{l}{E[\tau]}.$$

Može se uočiti da iako matrica K zavisi od količnika $\frac{Var[\tau]}{E[\tau]}$, rešenje problema ne zavisi od $\frac{Var[\tau]}{E[\tau]}$, pa time ni od raspodele vremena izlaska. Može se zaključiti, da prilikom posmatranja egzogenog vremena izlaska, odgovarajući težinski koeficijenti su nezavisni od raspodele vremena izlaska.
U nastavku se prelazi na model sa endogenim tj. zavisnim vremenom izlaska.

2.6 Zavisno vreme izlaska

U prethodnom poglavlju pokazano je da u slučaju kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa, skup dopustivih portfolija je isti kao i u slučaju unapred poznatog vremena izlaska. Međutim, ako se pretpostavi da vreme izlaska zavisi od kretanja cene jedne ili više aktiva u portfoliju, Tvrđenje 2.5.2 više nije validno i u opštem slučaju skup efikasnih portfolija nije isti za investitore sa fiksim i neizvesnim vremenom. Ovo se može pokazati posmatranjem sledećeg primera.
Neka se pretpostavi da je vreme izlaska diskretna slučajna promenljiva i da su data dva dozvoljena trenutka izlaska. Investitor izlazi sa tržišta u trenutku 1 sa verovatnoćom q ili u trenutku 2 sa verovatnoćom $1-q$.

$$\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Jedina motivacija za izlaz u trenutku 1 je pad prinosa portfolija ispod neke unapred definisane vrednosti ε, inače se izlazi u trenutku 2. Ako se pretpostavi da su prinosi uslovno po vemenu međusobno nezavisne slučajne promenljive sa istom normalnom raspodelom, verovatnoća ranijeg izlaska data je sledećim izrazom:

$$q = N\left(\frac{\varepsilon - \mu_\pi}{\sigma_\pi}\right)$$

gde je $N(.)$ funkcija standardne $\mathcal{N} : (0,1)$ raspodele.

Teorema 2.6.1. *([1]) Ako su zadovoljene gore pomenute pretpostavke, problem optimizacije portfolija kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija je sledeći:*

$$\begin{aligned} \min_\omega \quad & Var[R^\pi_{0,\tau}] = \min_\omega \left(q(1-q)\mu_\pi^2 + (2-q)\sigma_\pi^2 + 2\mu_\pi\sigma_\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_\pi)^2}{2\sigma_\pi^2}}} \right) \\ s.t. \quad & E[R^\pi_{0,\tau}] = \mu_\pi(2-q) = l \\ & \omega^T e = 1. \end{aligned}$$

Dokaz

Neka R_1 i R_2 redom označavaju prinose za prvi odnosno drugi trenutak izlaza i neka važi da prate slučajan hod, tj. $R_1 : \mathcal{N}(\mu_\pi, \sigma_\pi)$ i $R_2 : \mathcal{N}(2\mu_\pi, \sqrt{2}\sigma_\pi)$. Iz definicije uslovnog očekivanja sledi

$$E[R^\pi_{0,\tau}] = qE[R_1|R_1 < \varepsilon] + (1-q)E[R_2|R_1 > \varepsilon].$$

R_2 se može predstaviti kao $R_1 + R$ gde R ima istu raspodelu kao R_1 i nezavisno je od R_1. Tada sledi

$$E[R|R_2 > \varepsilon] = E[R_1|R_1 > \varepsilon] + E[R|R_1 > \varepsilon] = \mu_\pi + E[R|R_1 > \varepsilon].$$

Takođe važi

$$qE[R_1|R_1 < \varepsilon] + (1-q)E[R_1|R_1 > \varepsilon] = q\mu_\pi + (1-q)\mu_\pi = \mu_\pi.$$

Na osnovu prethodna dva izraza očekivani prinos portfolija se može izraziti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
E[R^\pi_{0,\tau}] &= qE[R_1|R_1 < \varepsilon] + (1-q)E[R_2|R_1 > \varepsilon] \\
&= qE[R_1|R_1 < \varepsilon] + (1-q)(\mu_\pi + E[R|R_1 > \varepsilon]) \\
&= qE[R_1|R_1 < \varepsilon] + (1-q)\mu_\pi + (1-q)E[R|R_1 > \varepsilon] \\
&= qE[R_1|R_1 < \varepsilon] + (1-q)E[R_1|R_1 > \varepsilon] + (1-q)E[R|R_1 > \varepsilon] \\
&= \mu_\pi + (1-q)E[R|R_1 > \varepsilon] \\
&= \mu_\pi + (1-q)\mu_\pi \\
&= \mu_\pi(2-q).
\end{aligned}$$

Sledi račun za varijansu portfolija.

$$\begin{aligned}
E[(R^\pi_{0,\tau})^2] &= qE[R_1^2|R_1 < \varepsilon] + (1-q)E[R_2^2|R_1 > \varepsilon] \\
&= qE[R_1^2|R_1 < \varepsilon] + (1-q)E[R_1^2 + 2R_1R + R^2|R_1 > \varepsilon] \\
&= qE[R_1^2|R_1 < \varepsilon] + (1-q)E[R_1^2|R_1 > \varepsilon] + (1-q)E[R^2|R_1 > \varepsilon] \\
&+ 2(1-q)E[R_1R|R_1 > \varepsilon] \\
&= E[R_1^2] + (1-q)E[R^2] + 2(1-q)E[R_1|R_1 > \varepsilon]\mu_\pi \\
&= (\mu_\pi^2 - \sigma_\pi^2)(2-q) + 2(1-q)\mu_\pi E[R_1|R_1 > \varepsilon].
\end{aligned}$$

Dalje važi

$$qE[R_1|R_1 > \varepsilon] = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_\pi^2}} \int_\varepsilon^\infty x e^{-\frac{(x-\mu_\pi)^2}{2\sigma_\pi^2}} dx.$$

Uvođenjem smene $u = \dfrac{(x-\mu_\pi)^2}{2\sigma_\pi^2}$ dobija se sledeći izraz:

$$\begin{aligned}
qE[R_1|R_1 > \varepsilon] &= \mu_\pi N(\frac{\mu_\pi - \varepsilon}{\sigma_\pi}) + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\frac{(\varepsilon-\mu_\pi)^2}{2\sigma_\pi^2}} e^{-u} du \\
&= \mu_\pi(1-q) + \sigma_\pi^2 \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_\pi)^2}{2\sigma_\pi^2}}.
\end{aligned}$$

Odavde sledi

$$E[(R^{\pi}_{0,\tau})^2] = (\mu^2_{\pi} + \sigma^2_{\pi})(2-q) + 2\mu^2_{\pi}(1-q) + 2\mu_{\pi}\sigma_{\pi}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_{\pi})^2}{2\sigma^2_{\pi}}}$$

Konačno, varijansa ima oblik

$$Var[R^{\pi}_{0,\tau}] = E[(R^{\pi}_{0,\tau})^2]-[E[R^{\pi}_{0,\tau}]]^2 = q(1-q)\mu^2_{\pi}+(2-q)\sigma^2_{\pi}+2\mu_{\pi}\sigma_{\pi}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_{\pi})^2}{2\sigma^2_{\pi}}}.$$

□

U gornjem primeru očekivano vreme izlaska je $E[\tau] = 2 - q$ a varijansa $Var[\tau] = q(1 - q)$. Može se uočiti da u odnosu na slučaj sa nezavisnim (egzogenim) vremenom izlaska u ovom slučaju u izrazu za varijansu postoji dodatni nekvadratni sabirak

$$2\mu_{\pi}\sigma_{\pi}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_{\pi})^2}{2\sigma^2_{\pi}}}.$$

Sledi da varijansa portfolija nije kvadratna funkcija niti je linearna funkcija težinskih koeficijenata portfolija, stoga problem nema eksplicitno rešenje, već se moraju tražiti numeričke metode za rešavanje. Takođe, funkcija cilja nije konveksna, pa se ne mogu koristiti globalne metode za rešavanje.

3

Optimizacija portfolija primenom WCVaR vrednosti

3.1 Uvod

Markovicov model optimizacije portfolija pomoću analize stope očekivanih prinosa i varijanse predstavlja osnovu moderne portfolio teorije. Ovaj pristup je toliko intuitivan i jasan, da se uveliko primenjuje ne samo u teoriji nego i u praksi. Međutim, postoje određeni nedostaci, koji su doveli do uvođenja novijih pristupa kao što su na primer VaR ili CVaR optimizacija. Naime, prema [4], sastav portfolija u velikoj meri zavisi od vektora očekivanih prinosa μ i kovarijansne matrice V. Pokazano je da čak i veoma male promene u vektoru očekivanih prinosa mogu dovesti do značajnih razlika u sastavu optimalnog portfolija.

VaR i CVaR kao mere rizika jednim delom prevazilaze gore pomenuti problem, jer ne zahtevaju izračunavanje kovarijansne matrice V. Takođe, oni su više primenljivi kod asimetričnih raspodela, pogotovo kada su repovi raspodela deblji, što je čest slučaj. Konačno, primena VaR ili CVaR modela najčešće dovodi do formulisanja konveksnih programa, koji se mogu rešiti jednostavno i globalnim metodama.

Neka $f(\omega, R)$ bude oznaka za gubitak portfolija, gde vektor $\omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ predstavlja vektor težinskih koeficijenata aktiva u portfoliju, a $R \in \mathbb{R}^n$ označava vrednost aktiva unutar portfolija na kraju perioda ulaganja. Ω je skup dopustivih portfolija. Iako su moguće i druge interpretacije, može se smatrati da R predstavlja vektor stopa prinosa koje su slučajne promenljive i u sebi nose rizik koji potiče od cene. Za svako ω iz skupa Ω gubitak $f(\omega, R)$

je slučajna promenljiva sa raspodelom u $\mathbb{R}$ koja zavisi od raspodele za R. Neka se pretpostavi da R ima gustinu $p(R) \in \mathbb{R}^n$.
Verovatnoća da gubitak $f(\omega, R)$ ne prelazi dati prag α definiše se kao

$$\Psi(\omega, \alpha) = \int\limits_{f(\omega,R)\leq\alpha} p(R)dR.$$

Za fiksirano ω, Ψ kao funkcija od α predstavlja funkciju raspodele gubitka $f(\omega, R)$.

Definicija 3.1.1 (**β-VaR**). *Za dati nivo poverenja $\beta \in (0,1)$ β-VaR funkcije gubitka $f(\omega, R)$ definiše se kao*

$$\beta\text{-}VaR = \alpha_\beta(\omega) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} \quad : \quad \Psi(\omega, \alpha) \geq \beta\}.$$

Definicija 3.1.2 (**β-CVaR**). *Za dati nivo poverenja $\beta \in (0,1)$ β-CVaR funkcije gubitka $f(\omega, R)$ predstavlja očekivanu vrednost gubitka koji prevazilazi β-VaR i dat je sledećim izrazom:*

$$\beta\text{-}CVaR = \phi_\beta(\omega) = (1-\beta)^{-1} \int\limits_{f(\omega,R)\geq\alpha_\beta(\omega)} f(\omega, R)p(R)dR.$$

Za nivo poverenja β najčešće se uzimaju vrednosti 0.9, 0.95 ili 0.99. VaR daje odgovor na pitanje: "Koliko se najviše može očekivati da će se - za nivo poverenja β - izgubiti u procentima tokom perioda ulaganja?" Drugačije, β-VaR portfolija je najniža vrednost α takva da se gubitak neće dostići α sa verovatnoćom β.
VaR poseduje mnoge korisne osobine, kao što su:

1) β-VaR$(Y - c) = \beta$-VaR$(Y) + c$ za bilo koji realan broj c (translaciona ekvivarijantnost)

2) β-VaR(cY)=c(β-VaR) za bilo koji realan broj $c > 0$ (pozitivna homogenost)

3) β-VaR$(Y) = -(1-\beta)$-VaR$(-Y)$

4) $Y_1 \prec_{sd1} Y_2 \Rightarrow \beta$-VaR$(Y_1) \leq \beta$-VaR$(Y_2)$ (stohastička dominacija prvog reda)

gde je Y proizvoljna slučajna promenljiva.
Zapravo, β-VaR predstavlja kvantil raspodele gubitaka portfolija i zato je jednostavna i razumljiva mera rizika kojem se investitor izlaže na tržištu.

Upravo zbog ove jednostavnosti krajem XX veka VaR je postao veoma popularan u upravljanju finansijskim rizicima. Međutim, postoje određeni nedostaci, koji VaR čine manje primenljivim od CVaR.
Ako se posmatra raspodela gubitaka, VaR govori samo o najvećim mogućim gubicima na datom nivou poverenja β. Posmatrajući samo VaR, investitor nema nikakvih informacija o mogućim gubicima koji su veći od praga α. Pošto se prava raspodela prinosa veoma teško određuje precizno, ne zna se da li su ti gubici samo neznatno veći od praga tolerancije α, ili pak postoje značajne razlike u odnosu na VaR. CVaR rešava ovaj problem, jer predstavlja očekivanu vrednost gubitaka koji su veći od VaR vrednosti.
Sa druge strane, VaR u opštem slučaju nema osobinu subaditivnosti, odnosno nije koherentna mera rizika u smislu [5]. U opštem slučaju, nedostatak subaditivnosti se manifestuje u većem riziku kombinacije dve investicije prema VaR-u nego svake investicije pojedinačno. Zato investitor nema podsticaja da vrši diversifikaciju rizika sastavljanjem portfolija. Suprotno od ovog, CVaR je koherentna mera rizika, što potvrđuje teorema koja sledi u nastavku.
Neka je $\mathcal{L}^2([a,b])$ skup svih kvadratno integrabilnih funkcija na intervalu $[a,b]$, odnosno neka važi:

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ f : [a,b] \to \mathbf{C}; \int_b^a |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Definicija 3.1.3. *Operator* $\mathcal{R} : \mathcal{L}^2 \to (-\infty, \infty]$ *naziva se koherentna mera rizika u širem smislu ako važi:*

(R1) $\mathcal{R}(c) = c$ *za svaku konstantu* c

(R2) $\mathcal{R}((1-h)X + hY) \leq (1-h)\mathcal{R}(X) + h\mathcal{R}(Y), \quad h \in (1,0)$
(konveksnost)

(R3) $\mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(Y)$ *kada je* $X \leq Y$
(monotonost)

(R4) $\mathcal{R}(X) \leq 0$ *ako* $\|X^k - X\|_2 \to 0$ *za* $\mathcal{R}(X^k) \leq 0$
(zatvorenost).

Operator $\mathcal{R}$ *se naziva koherentna mera rizika u užem smislu ako dodatno važi*

(R5) $\mathcal{R}(hX) = h\mathcal{R}(X)$ *za* $h > 0$
(pozitivna homogenost).

Teorema 3.1.1. *([8]) CVaR je koherentna mera rizika u užem smislu.*

Subaditivnost sledi iz kombinacije konveksnosti i pozitivne homogenosti i definiše se kao

$$\mathcal{R}(X+Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y).$$

Iz prethodne teoreme sledi da CVaR jeste subaditivna mera rizika.
Još jedna slabost VaR pristupa u odnosu na CVaR predstavljaju poteškoće pri radu sa diskretnim raspodelama, odnosno u slučaju generisanja scenarija. Može se dogoditi da se javljaju višestruki lokalni ekstremi pa je određivanje VaR problematičan. U nastavku biće pokazano kako se CVaR optimizacija i u ovakvim slučajevima može preformulisati u oblike koji su rešivi nekim od poznatih metoda konveksnog a neretko i linearnog programiranja.
CVaR kao mera rizika ima zaista pogodne osobine koje omogućavaju široku teorijsku i praktičnu primenu u mnogim oblastima. Međutim, u slučaju nedostatka nekih informacija ili neizvesnosti, često se koristi i takozvana robusna optimizacija. U ovom radu robusnost podrazumeva najgori mogući (worst-case) slučaj ili scenario i vezan je za raspodelu prinosa $p(R)$. Naime, prilikom investiranja, investitor najčešće ne zna tačnu raspodelu $p(R)$. Ona u sebi nosi dva izvora neizvesnosti: rizik koji potiče od stohastičke cene aktiva i rizik od neizvesnog vremena izlaska sa tržišta. Najviše što se može znati je da $p(R)$ pripada nekom određenom skupu raspodela $\mathcal{P}$. Robusnost vezana za minimizaciju CVaR vrednosti u ovom radu može se definisati na sledeći način:

$$\beta\text{-WCVaR}(\omega) = \sup_{p(\cdot)\in\mathcal{P}} \beta\text{-CVaR}(\omega).$$

3.2 Formulacija problema optimizacije pomoću WCVaR vrednosti

U prethodnom delu date su osnovne smernice u formulisanju problema optimizacije pomoću WCVaR vrednosti. U ovom delu sledi precizno formulisanje problema i transformisanje u oblik koji je jednoznačno rešiv poznatim numeričkim metodama.
Ako je $\omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ vektor težinskih koeficijenata aktiva u portfoliju a $R \in \mathbb{R}^n$ vektor stopa prinosa, verovatnoća da gubitak $f(\omega, R)$ ne prelazi dati prag α se definiše kao

$$\Psi(\omega, \alpha) = \int\limits_{f(\omega,R)\leq\alpha} p(R)dR.$$

Za fiksirano ω, Ψ kao funkcija od α predstavlja funkciju raspodele gubitka $f(\omega, R)$ i ona je neopadajuća u odnosu na α i neprekidna sa desne strane. Zbog mogućih skokova neprekidnost sa leve strane nije uvek obezbeđena, ali se ovde radi jednostavnosti pretpostavlja da je Ψ svuda neprekidna, tj. da nema skokove.
Za dati nivo poverenja $\beta \in (0, 1)$ β-VaR funkcije gubitka $f(\omega, R)$ se definiše kao

$$\beta\text{-VaR} = \alpha_\beta(\omega) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} \quad : \quad \Psi(\omega, \alpha) \geq \beta\}.$$

Prema definiciji $\alpha_\beta(\omega)$ predstavlja levu granicu nepraznog intervala koji sadrži sve vrednosti α za koje važi $\Psi(\omega, \alpha) = \beta$. Ovo sledi iz činnjenice da je $\Psi(\omega, \alpha)$ neprekidna i neopadajuća po α.
Za dati nivo poverenja $\beta \in (0, 1)$ β-CVaR funkcije gubitka $f(\omega, R)$ predstavlja očekivanu vrednost gubitka koji prevazilazi β-VaR i dat je sledećim izrazom:

$$\beta\text{-CVaR} = \phi_\beta(\omega) = (1-\beta)^{-1} \int\limits_{f(\omega,R)\geq\alpha_\beta(\omega)} f(\omega, R)p(R)dR.$$

Glavna ideja je da se izrazi za $\phi_\beta(\omega)$ i $\alpha_\beta(\omega)$ transformišu u oblike koji su pogodniji za dalji rad. To se postiže uvođenjem pomoćne funkcije $F_\beta \in \Omega \times \mathbb{R}$ koja se definiše na sledeći način:

$$F_\beta(\omega, \alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1} \int\limits_{R\in\mathbb{R}^n} [f(\omega, R) - \alpha]^+ p(R)dR,$$

gde

$$[d]^+ = \max\{0, d\} \quad \text{za svako} \quad d \in \mathbb{R}.$$

Funkcija $F_\beta(\omega,\alpha)$ ima niz pogodnih osobina što se vidi iz narednih tvrđenja.

Teorema 3.2.1. *([7]) Funkcija $F_\beta(\omega,\alpha)$ je konveksna i neprekidno diferencijabilna po α. Vrednost β-CVaR gubitka u odnosu na neko $\omega \in \Omega$ se može izraziti pomoću formule*

$$\beta\text{-}CVaR = \phi_\beta(\omega) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(\omega,\alpha).$$

U gornjem izrazu skup vrednosti za koje je minimum postignut je neprazan i zatvoren interval (najčešće samo jedna tačka) i definiše se kao

$$A_\beta(\omega) = \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(\omega,\alpha).$$

Vrednost β-VaR gubitka je data kao

$$\beta\text{-}VaR = \alpha_\beta(\omega) = \text{leva granica skupa } A_\beta(\omega).$$

Posebno, uvek važi

$$\alpha_\beta(\omega) \in \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(\omega,\alpha)$$

i

$$\phi_\beta(\omega) = F_\beta(\omega,\alpha_\beta(\omega)).$$

Prethodno definisana funkcija $F_\beta(\omega,\alpha)$ se lako minimizira numeričkim metodama, jer ima osobinu konveksnosti i neprekidnosti. Takođe, može se uočiti da za izračunavanje CVaR nije potrebno odrediti i VaR, što je znatno olakšanje, znajući da određivanje VaR može biti komplikovano. Zapravo, u ovom kontekstu, VaR se dobija kao dodatni proizvod i, ako nije neophodno, njegovo izračunavanje se može izostaviti.
Dodatna prednost ovog pristupa je mogućnost aproksimacije integrala u izrazu za $F_\beta(\omega,\alpha)$ na različite načine. Na primer, uzorkovanjem se može aproksimirati raspodela prinosa R. Ako su vektori $R^1,...,R^q$ dobijeni uzorkovanjem, odgovarajuća aproksimacija funkcije $F_\beta(\omega,\alpha)$ ima sledeći oblik:

$$\tilde{F}_\beta(\omega,\alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)}\sum_{k=1}^{q}[f(\omega,R^k)-\alpha]^+. \tag{3.1}$$

Funkcija $\tilde{F}_\beta(\omega,\alpha)$ je konveksna i po delovima linearna u odnosu na α i lako se minimizira.
Sledeća teorema opisuje još neke važne osobine gore definisanog pristupa minimizaciji CVaR.

Teorema 3.2.2. *([7]) Minimizacija β-CVaR gubitaka u odnosu na ω nad skupom $\omega \in \Omega$ je ekvivalentna minimizaciji funkcije $F_\beta(\omega, \alpha)$ nad svim $(\omega, \alpha) \in \Omega \times \mathbb{R}$, odnosno važi*

$$\min_{\omega \in \Omega} \phi_\beta(\omega) = \min_{(\omega,\alpha) \in \Omega \times \mathbb{R}} F_\beta(\omega, \alpha).$$

Uređeni par (ω^*, α^*) je tačka desnog minimuma ako i samo ako je ω^* ujedno i tačka levog minimuma i $\alpha^* \in A_\beta(\omega^*)$. Stoga, u slučaju da se interval $A_\beta(\omega^*)$ redukuje na jednu tačku (što je tipično), minimizacija funkcije $F_\beta(\omega, \alpha)$ produkuje par (ω^*, α^*), ne nužno jedinstven, takav da ω^* minimizira β-CVaR a α^* određuje odgovarajući β-VaR.
Dalje, $F_\beta(\omega, \alpha)$ je konveksna u odnosu na (ω, α) i $\phi_\beta(\omega)$ je konveksno u odnosu na ω. Kada je $f(\omega, R)$ konveksna po ω i ako je Ω konveksan skup, tada je prethodni problem slučaj konveksnog programiranja.

I u ovom slučaju radi se o tome, da u cilju dobijanja vektora ω koji minimizira CVaR nije neophodno direktno koristiti funkciju $\phi_\beta(\omega)$ sa kojom je teže raditi. Umesto toga, može se koristiti mnogo jednostavnija konveksna funkcija $F_\beta(\omega, \alpha)$, što znatno olakšava dalje rešavanje problema optimizacije. Preostaje još da se precizira raspodela prinosa $p(R)$. Pošto investitor skoro nikad ne zna tačnu raspodelu za R na kraju perioda ulaganja, ovde se pretpostavlja da gustina $p(R)$ pripada nekom određenom skupu gustina $\mathcal{P}$.
Na kraju, u formulaciju problema uvodi se i robusnost u smislu izbora najgoreg mogućeg (worst-case) slučaja.

Definicija 3.2.1. *Na nivou poverenja β i dato $\omega \in \Omega$ WCVaR portfolija u odnosu na skup raspodela $\mathcal{P}$ se definiše kao*

$$\beta\text{-}WCVaR(\omega) = \sup_{p(\cdot) \in \mathcal{P}} \beta\text{-}CVaR(\omega).$$

Pozivajući se na teoremu 3.2.1 jasno je da

$$\beta\text{-WCVaR}(\omega) = \sup_{p(\cdot) \in \mathcal{P}} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(\omega, \alpha),$$

odnosno minimizacija WCVaR nad $\omega \in \Omega$ je ekvivalentna sledećem min-sup-min problemu:

$$\min_{\omega \in \Omega} \sup_{p(\cdot) \in \mathcal{P}} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(\omega, \alpha).$$

U narednom delu u gore definisan problem robusne optimizacije uključuje se i problem neizvesnog vremena izlaska.

3.3 Optimizacija sa neizvesnim vremenom izlaska

Analogno slučaju optimizacije u očekivanje-varijansa okviru, i ovde se prilikom analize strukture prinosa dolazi do zaključka da se zbog definicije prinosa investitor suočava sa dve vrste neizvesnosti kada je njegovo vreme izlaska nepoznato. Ako je period ulaganja $[0, \tau]$, gde je trenutak izlaza τ slučajna promenljiva, prinos za taj period je dat sa

$$R_{0,\tau} = \frac{S_\tau - S_0}{S_0}$$

gde S_τ označava cenu u trenutku τ. Rizik investitora je ponovo kombinacija dve vrste rizika: stohastičke buduće cene aktive i stohastičkog vremena izlaska. U prethodnom delu rečeno je da se raspodela prinosa $p(R)$ u praksi teško određuje, ali ona se može predstaviti pomoću uslovne raspodele p_t i raspodele vremena izlaska $g(t)$. Sledeće tvrđenje precizno definiše ovu dekompoziciju pomoću formule uslovne verovatnoće.

Teorema 3.3.1. *([2]) Neka je $g(t)$ oznaka za gustinu raspodele vremena izlaska τ a $p_t(\cdot)$ je oznaka za gustinu raspodele prinosa uslovno po vremenu izlaska. Tada je odgovarajuća bezuslovna gustina raspodele prinosa data sa*

$$p(\cdot) = \int_0^T p_t(\cdot) g(t) dt.$$

U slučaju da vreme izlaska τ ima diskretnu raspodelu sa mogućim trenucima izlaza $t_1, ..., t_m$ i odgovarajućim verovatnoćama

$$P(\tau = t_i) = \lambda_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \quad i = 1, ...m,$$

bezuslovna gustina je data sa

$$p(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_{t_i}.$$

Iz praktičnih razloga u formulaciji problema optimizacije koristiće se diskretna verzija raspodele vremena izlaska. Sa jedne strane na ovaj način se dolazi do jednoznačno rešivog modela. Drugi razlog potiče iz činjenice da su većina uticaja koji vode do izlaska diskretne prirode, odnosno dešavaju se u diskretnim

vremenskim trenucima. Dobar primer za ovo su rad berze ili tok određenih transakcija.
Poteškoće prilikom određivanja $p(R)$ potiču iz činjenice da je tačnu raspodelu vremena izlaska $g(t)$ teško odrediti, dok se uslovna raspodela $p_t(y)$ lako može oceniti na osnovu istorijskih podataka. Jedno od mogućih rešenja je da se umesto tačne raspodele $g(t)$ zahteva da se radi sa nekim skupom, koji u sebi sadrži sve moguće scenarije izlaska.
Na osnovu gornjih pretpostavki i teoreme 3.2.2, poroblem optimizacije pomoću WCVaR sa neizvesnim vremenom ima sledeću formulaciju:

$$\min_{\omega\in\Omega} \sup_{p(\cdot)\in\mathcal{P}_M} \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \ \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int\limits_{R\in\mathbb{R}^n} [f(\omega, R) - \alpha]^+ p(R)dR \tag{3.2}$$

gde skup $\mathcal{P}_M$ predstavlja sve moguće raspodele prinosa i definiše se kao:

$$P_M = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(\cdot) \ : \ (\lambda_1, ..., \lambda_m)^T \in O \right\} \tag{3.3}$$

a skup O je kompaktan i zadovoljava meru verovatnoće:

$$O \subseteq \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_m)^T \ : \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, ..., m \right\}. \tag{3.4}$$

Neka se $F_\beta^i(\omega, \alpha)$ definiše na sledeći način:

$$F_\beta^i(\omega, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int\limits_{R\in\mathbb{R}^n} [f(\omega, R) - \alpha]^+ p_i(R)dR. \tag{3.5}$$

Teorema 3.3.2. *([2]) Neka skup O bude definisan kao u (3.4), tada za svako $\omega \in \Omega$, β-WCVaR(ω) u odnosu na $\mathcal{P_M}$ definisanog u (3.3) ekvivalentno je sa:*

$$\beta\text{-}WCVaR(\omega) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \max_{\lambda\in O} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_\beta^i(\omega, \alpha).$$

Dokaz

Za dato $\omega \in \Omega$ neka je

$$\begin{aligned} H_\beta(\omega, \alpha, \lambda) &= \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_R \in \mathbb{R}^N [f(\omega, R) - \alpha]^+ \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(R) \right] dR \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i^\beta(\omega, \alpha) \end{aligned}$$

gde je $\lambda \in O$. Prema [7] i [8] H_β je konveksna u odnosu na α i konkavna u ondosu na λ. Takođe, $\min H_{\beta_{\alpha\in\mathcal{R}}}$ je neprekidna funkcija u odnosu na λ. Na osnovu definicije i kompaktnosti skupa O može se napisati sledće:

$$\beta\text{-WCVaR}(\omega) = \max_{\lambda\in O} \min_{\alpha\in\mathcal{R}} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda) = \max_{\lambda\in O} \min_{\alpha\in\mathcal{R}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_\beta^i(\omega,\alpha).$$

Prema [7] i [8] za dato ω i svako i skup optimalnih rešenja problema

$$\min_{\alpha\in\mathcal{R}} F_\beta^i(\omega,\alpha)$$

je neprazan, zatvoren i ograničen interval, stoga neka važi

$$[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i] = \arg\min_{\alpha\in\mathcal{R}} F_\beta^i(\omega,\alpha) \;\; i = 1, ..., m.$$

Neka se pretpostavi da su $c_1(t)$ i $c_2(t)$ dve realne konveksne funkcije a $[\underline{t}_1, \bar{t_1}]$ i $[\underline{t}_2, \bar{t}_2]$ skupovi njihovih tačaka minimuma respektivno. Može se pokazati da za svako $\beta_1 \geq 0$ i $\beta_2 \geq$ takvo da je $\beta_1 + \beta_2 > 0$ važi da je $\beta_1 c_1(t) + \beta_2 c_2(t)$ takođe konveksno i da skup tačaka minimuma funkcije $\beta_1 c_1(t) + \beta_2 c_2(t)$ pripada nepraznom, zatvorenom i ograničenom intervalu

$$[\min\{\underline{t}_1, \underline{t}_2\}, \max\{\bar{t}_1, \bar{t}_2\}].$$

Na osnovu ovoga za svako $\lambda \in O$ važi

$$\arg\min_{\alpha\in\mathcal{R}} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda) \subseteq \mathcal{A}$$

gde je $\mathcal{A}$ neprazan, zatvoren i ograničen skup dat kao

$$\mathcal{A} = \left[\min_{i\in\mathcal{L}} \underline{\alpha}_i, \max_{i\in\mathcal{L}} \bar{\alpha}_i\right]$$

gde je $\mathcal{L} = 1, 2, ..., m$. Sledi

$$\min_{\alpha\in\mathcal{R}} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda) = \min_{\alpha\in\mathcal{A}} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda).$$

Na osnovu min-max teorije (videti [2]) važi sledće:

$$\max_{\lambda\in O} \min_{\alpha\in\mathcal{R}} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda) = \max_{\lambda\in O} \min_{\alpha\in\mathcal{A}} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda) = \min_{\alpha\in\mathcal{A}} \max_{\lambda\in O} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda).$$

Očigledno je da

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \max_{\lambda\in O} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda) \geq \max_{\lambda\in O} \min_{\lambda\in O} H_\beta(\omega,\alpha,\lambda).$$

Dalje sledi da

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{R}} \max_{\lambda \in O} H_\beta(\omega, \alpha, \lambda) \geq \max_{\lambda \in O} \min_{\alpha \in \mathcal{R}} H_\beta(\omega, \alpha, \lambda)$$

odnosno

$$\max_{\lambda \in O} \min_{\alpha \in \mathcal{R}} H_\beta(\omega, \alpha, \lambda) = \min_{\alpha \in \mathcal{R}} \max_{\lambda \in O} H_\beta(\omega, \alpha, \lambda).$$

Na kraju iz definicije H_β i gore navedenog važi

$$\beta\text{-WCVaR}(\omega) = \min_{\alpha \in \mathcal{R}} \max_{\lambda \in O} H_\beta(\omega, \alpha, \lambda) = \min_{\alpha \in \mathcal{R}} \max_{\lambda \in O} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_\beta^i(\omega, \alpha).$$

□

Može se uočiti da za fiksirano ω, određivanje WCVaR vrednosti dovodi do rešavanja min-max problema, koji se lako rešava zahvaljujući konveksnosti funkcije cilja po α i konkavnosti po λ. Takođe, ovde je skup O opremljen sigma-algebrom nad kojom su definisane verovatnoće koje predstavljaju frekvencije izlaska sa tržišta.
Neka se uvede sledeća oznaka:

$$F_\beta^O(\omega, \alpha) = \max_{\lambda \in O} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_\beta^i(\omega, \alpha).$$

Tada iz teoreme 3.3.2 direktno sledi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.3.3. *([2]) Minimizacija β-WCVaR(ω) nad skupom Ω može se postići minimizacijom $F_\beta^O(\omega, \alpha)$ nad $\Omega \times \mathbb{R}$, odnosno važi*

$$\min_{\omega \in \Omega} \beta\text{-}WCVaR(\omega) = \min_{(\omega,\alpha) \in \Omega \times \mathbb{R}} F_\beta^O(\omega, \alpha).$$

Ako je uređeni par (ω^*, α^*) tačka desnog minimuma u gornjem izrazu, tada je ω^* ujedno i tačka minimuma sa leve strane. Suprotno, ako je ω^* tačka minimuma sa leve strane, tada uređeni par (ω^*, α^*) predstavlja tačku desnog minimuma, gde je α^* minimizator funkcije $F_\beta^O(x^*, \alpha)$.

U daljem radu, prethodno tvđenje služiće kao osnova za formulaciju modela u zavisnosti od količine informacija o raspodeli vremena izlaska.

3.3.1 WCVaR optimizacija bez informacija o vremenu izlaska

Kada nema nikakvih informacija o raspodeli vremena izlaska, ona se generalno može predstaviti kao:

$$O_A = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_m)^T \;\; : \;\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \;\; \lambda_i \geq 0, \;\; i = 1, ..., m \right\}$$

U ovom slučaju prema [6] teorema 3.3.3 ima sledeću formulaciju:

$$\min_{\omega \in \Omega} \mathrm{WCVaR}_\beta(\omega) = \min_{(\omega,\alpha) \in \Omega \times \mathbb{R}} \max_{i \in \mathcal{L}} F_\beta^i(\omega, \alpha)$$

gde je

$$\mathcal{L} = 1, 2, ..., m.$$

Potrebno je odrediti skup dopustivih portfolija, koji je u uvom slučaju označen sa Ω_A. Neka je dat najgori očekivani prinos l, tada važi da je

$$\min_{p(\cdot) \in \mathcal{P}_M} \int\limits_{R \in \mathbb{R}^n} -f(\omega, R) p(R) dR = \min_{\lambda \in O_A} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int\limits_{R \in \mathbb{R}^n} -f(\omega, R) p_i(R) dR \right\} \geq l$$

ekvivalentno sa

$$\int\limits_{R \in \mathbb{R}^n} -f(\omega, R) p_i(R) dR \geq l, \quad i = 1, ..., m.$$

Ako je $R = (R^1, ..., R^n)^T \in \mathbb{R}^n$ vektor stopa prinosa a $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)^T$ odgovarajući vektor udela n aktiva koje čine portfolio, tada je funkcija gubitka definisana sa $f(\omega, R) = -\omega^T R$, odnosno prinos sa $\omega^T R$. Stoga, uslov

$$\int\limits_{R \in \mathbb{R}^n} -f(\omega, R) p_i(R) dR \geq l, \quad i = 1, ..., m$$

može biti napisan kao

$$\omega^T \mu^i \geq l, \quad i = 1, ..., m$$

gde μ^i označava vektor očekivanih prinosa za i-ti scenario.
Ako su sa $\underline{\omega} \geq 0$ i $\bar{\omega} \leq e$ označene donja i gornja granica vektora odluke, skup dopustivih portfolija koji zadovoljava budžetsko ograničenje i obezbeđuje željeni nivo prinosa ima sledeću formulaciju:

$$\Omega_A = \left\{ \omega : \;\; e^T \omega = 1, \;\; \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}, \;\; \omega^T \mu^i \geq l, \quad i = 1, ..., m \right\}.$$

Pošto je

$$F^i_\beta(\omega,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int\limits_{R\in\mathbb{R}^m} [f(\omega,R)-\alpha]^+ p_i(R)dR$$

neglatka funkcija sa više promenljivih, ovde se koristi njena aproksimacija

$$F^i_\beta(\omega,\alpha) \approx \alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=1}^{S^i} \varphi^i_k [f(\omega,R^i_{[k]})-\alpha]^+, \quad i=1,...,m$$

gde S^i označava obim uzorka u odnosu na i-ti scenario $p_i(\cdot)$, a $R^i_{[k]}$ je k-ti uzorak gustine $p_i(\cdot)$ i φ^i_k predstavlja odgovarajuću verovatnoću za $R^i_{[k]}$. Sada iz gore navedenog i iz teoreme 3.3.3 sledi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.3.4. *([2]) Neka važi $\varphi^i = (\varphi^i_1, ..., \varphi^i_{S^i})^T$ i $r = \sum_{i=1}^m S^i$. Tada, uvođenjem pomoćnog vektora $u = (u^1, ..., u^m)^T \in \mathbb{R}^r$ problem optimizacije 3.2 sa $O = O_A$ može se aproksimirati pomoću sledećeg problema minimizacije sa promenljivama $(\omega, u, \alpha, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:*

Problem 5

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ s.t. \quad & \omega \in \Omega_A, \\ & \alpha + \frac{1}{1-\beta}(\varphi^i)^T u^i \le \theta, \\ & u^i_k \ge f(\omega, R^i_{[k]}) - \alpha, \\ & u^i_k \ge 0, \quad k=1,...,S^i, \;\; i=1,...,m. \end{aligned}$$

Za gornji problem optimizacije važi:

- ako je $f(\omega,R)$ konveksna po ω, tada je problem 5 konveksan program
- ako je $f(\omega,R)$ linearna po ω, tada je problem 5 problem linearnog programiranja
- ako je $m=1$, odnosno kada je vreme izlaska unapred određeno, problem 5 se svodi na originalni problem minimizacije CVaR.

Na osnovu prethodnog, važi formulacija sledećeg problema robusne optimizacije sa neizvesnim vremenom izlaska i promenljivama $(\omega, u, \alpha, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Problem 6

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. \quad & e^T\omega = 1, \\
& \underline{\omega} \le \omega \le \bar{\omega}, \\
& \omega^T\mu^i \ge l, \\
& \alpha + \frac{1}{1-\beta}(\varphi^i)^T u^i \le \theta, \\
& u_k^i \ge -\omega^T R_{[k]}^i - \alpha, \\
& u_k^i \ge 0, \quad k = 1, ..., S^i, \;\; i = 1, ..., m.
\end{aligned}
$$

3.3.2 WCVaR sa delimičnim informacijama o vremenu izlaska

U ovom delu skup O je definisan na sledeći način:

$$O_B = \{\lambda \ : \ e^T\lambda = 1, \ \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}\}.$$

O_B je po komponentama ograničen skup, gde su $\underline{\lambda}$ i $\bar{\lambda}$ dva vektora konstanti. Uslov $e^T\lambda = 1$ obezbeđuje da je λ vektor verovatnoća, a uslov nenegativnosti $\lambda \geq 0$ je uključen u uslov $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$. Neka se uvede oznaka

$$\varphi u = \begin{bmatrix} (\varphi^1)^T u^1 \\ \vdots \\ (\varphi^m)^T u^m \end{bmatrix}.$$

Na osnovu teoreme 3.3.3 minimizacija WCVaR$_\beta(\omega)$ nad skupom Ω može biti postignuta rešavanjem sledećeg problema sa promenljivama $(\omega, u, \alpha, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Problem 7

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ s.t. \quad & \omega \in \Omega, \\ & \max_{\lambda \in O_B} \lambda^T \left(e\alpha + \frac{1}{1-\beta}\varphi u \right) \leq \theta, \\ & u_k^i \geq f(\omega, R_{[k]}^i) - \alpha, \\ & u_k^i \geq 0, \quad k = 1, ..., S^i, \ \ i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

Problem 7 se mora prefolmulisati radi lakšeg rešavanja. Neka se uvede

$$v = e\alpha + \frac{1}{1-\beta}\varphi u.$$

Tada, ako se posmatra sledeći linearan problem:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \quad & \lambda^T v \\ s.t. \quad & e^T\lambda = 1 \\ & \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Njemu odgovarajući dualni problem je oblika:

$$\begin{aligned}
\min_{(z,\xi,\kappa)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m} \quad & z+\bar{\lambda}^T\xi+\underline{\lambda}^T\kappa \\
s.t. \quad & ez+\xi+\kappa=v, \\
& \xi\geq 0, \\
& \kappa\leq 0.
\end{aligned}$$

Sada se na osnovu problema 7 i prethodne diskusije definiše sledeći problem optimizacije sa promenljivama $(\omega,u,z,\xi,\kappa,\alpha,\theta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

Problem 8

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. \quad & \omega\in\Omega, \\
& z+\bar{\lambda}^T\xi+\underline{\lambda}^T\kappa\leq\theta \\
& ez+\xi+\kappa=e\alpha+\frac{1}{1-\beta}\varphi u, \\
& \xi\geq 0, \\
& \kappa\leq 0, \\
& u_k^i\geq f(\omega,R_{[k]}^i)-\alpha, \\
& u_k^i\geq 0, \quad k=1,...,S^i, \;\; i=1,...,m.
\end{aligned}$$

Sledeće tvrđenje govori o tome da rešavanje problema 7 može biti zamenjeno rešavanjem problema 8 sa kojim je mnogo lakše raditi.

Teorema 3.3.5. *([2]) Ako $(\omega^*,u^*,z^*,\xi^*,\kappa^*,\alpha^*,\theta^*)$ rešava problem 8, tada i $(\omega^*,u^*,\alpha^*,\theta^*)$ rešava problem 7. Suprotno, ako je $(\tilde{\omega}^*,\tilde{u}^*,\tilde{\alpha}^*,\tilde{\theta}^*)$ rešenje problema 7, tada je $(\tilde{\omega}^*,\tilde{u}^*,\tilde{z}^*,\tilde{\xi}^*,\tilde{\kappa}^*,\tilde{\alpha}^*,\tilde{\theta}^*)$ rešenje problema 8, gde je $(\tilde{z}^*,\tilde{\xi}^*,\tilde{\kappa}^*)$ optimalno rešenje gore spomenutog duala sa $v=e\tilde{\alpha}^*+\frac{1}{1-\beta}\varphi\tilde{u}^*$.*

Ako je $f(\omega,R)$ linearna funkcija po ω i Ω je konveksan skup, tada problem optimizacije WCVaR sa neizvesnim vremenom izlaska postaje problem linearnog programiranja, kao što će biti pokazano u nastavku.
Ako je prinos portfilja definisan sa $\omega^T R$, uslov najgoreg mogućeg gubitka

$$\min_{p(\cdot)\in\mathcal{P}_M}\int\limits_{R\in\mathbb{R}^m}\omega^T Rp(R)dR=\min_{\lambda\in O_B}\left\{\sum_{i=1}^m\lambda_i\int\limits_{R\in\mathbb{R}^m}\omega^T Rp_i(R)dR\right\}\geq l$$

može biti zamenjen sa

$$\min_{\lambda \in O_B} \sum_{i=1}^{m} (\omega^T \mu^i) \geq l.$$

Ako se matrica konstruisana od uslovnih očekivanih prinosa u m trenutaka obeleži sa

$$M = \begin{bmatrix} (\mu^1)^T \\ \vdots \\ (\mu^m)^T \end{bmatrix}$$

tada na osnovu izraza za O_B skup dopustivih portfolija Ω je dat sa

$$\Omega_B = \left\{ \omega \ : \ e^T\omega = 1, \ \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}, \ \min_{(\lambda: \ e^T\lambda=1, \ \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda})} (M\omega)^T\lambda \geq l \right\}$$

Neka se posmatra sledeći problem izveden iz Ω_B:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \quad & (M\omega)^T\lambda \\ s.t. \quad & e^T\lambda = 1, \\ & \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda} \end{aligned}$$

Dual ovog problema je dat kao:

$$\begin{aligned} \max_{(\delta,\rho,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} \quad & \delta + \bar{\lambda}^T\rho + \underline{\lambda}^T v \\ s.t. \quad & e\delta + \rho + v = M\omega, \\ & \rho \leq 0, \\ & v \geq 0. \end{aligned}$$

Na osnovu veze primal-dual sledi da se Ω_B poklapa sa skupom

$$\Phi_B = \left\{ \omega \ : \ \exists(\delta, \rho, v) \ \text{što zadovoljava} \ \begin{array}{l} e^T\omega = 1, \ \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}, \ \ e\delta + \rho + v = M\omega \\ \rho \leq 0 \ \ v \geq 0 \ \ \delta + \bar{\lambda}^T\rho + \underline{\lambda}^T v \geq l \end{array} \right\}.$$

Na osnovu problema 8 i prethodne analize, problem robusne optimizacije portfolija sa parcijalnim informacijama o vremanu izlaska ima oblik linearnog problema sa promenljivama $(\omega, u, z, \xi, \kappa, \alpha, \theta, \delta, \rho, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times$:

Problem 9

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. \quad & e^T\omega = 1, \\
& \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}, \\
& \delta + \bar{\lambda}^T\rho + \underline{\lambda}^T v \geq l, \\
& e\delta + \rho + v = M\omega, \\
& \rho \leq 0, \\
& v \geq 0, \\
& z + \bar{\lambda}^T\xi + \underline{\lambda}^T\kappa \leq \theta, \\
& ez + \xi + \kappa = e\alpha + \frac{1}{1-\beta}\varphi u, \\
& \xi \geq 0, \\
& \kappa \leq 0, \\
& u_k^i \geq -\omega^T R_{[k]}^i - \alpha, \\
& u_k^i \geq 0, \quad k = 1, ..., S^i, \;\; i = 1, ..., m.
\end{aligned}$$

Specifikacija informacija o raspodeli vremena izlaska

U prvom delu rada, na osnovu [1], problem neizvesnog vremena izlaska je razmatran na način, koji odvojeno analizira uticaj endogenog i egzogenog vremena izlaska na formiranje skupa efikasnih portfolija. U ovom delu se ovi uticaji posmatarju zajedno. Pošto se verovatnoće izlaska λ ne mogu precizno odrediti, ovde se teži ka određivanju intervala koji ograničavaju te verovatnoće.
Neka za svako $i = 1, .., m$ važi

$$\begin{aligned}
E_i^{exo} &= \{\text{izlazak u trenutku } t_i \text{ izazvan je egzogenim faktorom}\} \\
E_i^{end} &= \{\text{izlazak u trenutku } t_i \text{ izazvan je endogenim faktorom}\}.
\end{aligned}$$

Pošto su endogeni i egzogeni faktori međusobno nezavisni, verovatnoću izlaska λ_i moguće je rastaviti na dve komponente na sledeći način:

$$\lambda_i = P\{\tau = t_i\} = P\{E_i^{exo} \cup E_i^{end}\} = P\{E_i^{exo}\} + P\{E_i^{end}\}.$$

Neka se za svako $i = 1, ..., m$ uvedu oznake

$$\lambda_i^{exo} = P\{E_i^{exo}\} \quad \text{i} \quad \lambda_i^{end} = P\{E_i^{end}\}.$$

Nakon određivanja granica λ_i^{exo} i λ_i^{end} za $i = 1, ..., m-1$, λ_i se može izračunati pomoću sabiranja:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].$$

Važno je naglasiti da uslov $0 \leq \lambda_i \leq 1$ uvek mora biti ispunjen.
U slučaju egzogenog vremena izlaska na investitorovu odluku o napuštanju tržišta mogu uticati različiti faktori osim cenovnih fluktacija. Uticaj ovih faktora se može izmodelirati pomoću skoka Poasonovog procesa. Zna se da zbir nezavisnih Poasonovih procesa ostaje Poasonov proces, pa se više nezavisnih uticaja može predstaviti kao jedan zajednički. Pošto vreme između dva skoka u Poasonovom procesu sa intenzitetom ς ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom ς, može se reći da je verovatnoća egzogenog izlaska definisana na sledeći način: funkcija raspodele vremena τ za pretpostavljeni period ulaganja $[0, T]$ data je sa

$$G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\varsigma t}, & 0 \leq t \leq T \\ 1, & t = T. \end{cases}$$

Ako postoji m diskretnih momenata za izlazak i važi

$$t_{i-1} < t_i, \;\; t_0 = 0, \;\; t_m = T, \;\; i = 1, ..., m,$$

tada je verovatnoća izlaska u trenutku t_i data sa

$$g(t_i) = P\{\tau = t_i\} = G(t_i) - G(t_{i-1}) = \begin{cases} 1 - e^{-\varsigma t_1}, & i = 1 \\ e^{-\varsigma t_{i-1}} + e^{-\varsigma t_i}, & i = 2, ..., m-1 \\ e^{-\varsigma t_{m-1}}, & i = m. \end{cases}$$

Zbog nedostatka informacija, pretpostavlja se da ς pripada nekom intervalu koji pokriva sve moguće intenzitete izlaska, odnosno $\varsigma \in [\underline{\varsigma}, \bar{\varsigma}]$ gde $\bar{\varsigma} > \underline{\varsigma} > 0$.
Tada se λ_i^{exo} može ograničiti sa:

$$\underline{\lambda}_i^{exo} = \min_{\varsigma \in [\underline{\varsigma}, \bar{\varsigma}]} \{e^{-\varsigma t_{i-1}} - e^{-\varsigma t_i}\}$$
$$\bar{\lambda}_i^{exo} = \max_{\varsigma \in [\underline{\varsigma}, \bar{\varsigma}]} \{e^{-\varsigma t_{i-1}} - e^{-\varsigma t_i}\}$$

gde $i = 1, ..., m-1$ i $t_0 = 0$.
Jasno, za λ_1^{exo} važi $\underline{\lambda}_1^{exo} = 1 - e^{-\underline{\varsigma} t_1}$ i $\bar{\lambda}_1^{exo} = 1 - e^{-\bar{\varsigma} t_1}$. Za $i = 2, ..., m-1$ neka je $g_i(\varsigma) = e^{-\varsigma t_{i-1}} - e^{-\varsigma t_i}$.
Rešavanjem jednačine

$$g_i^{'}(\varsigma) = t_i e^{-\varsigma t_i} - t_{i-1} e^{-\varsigma t_{i-1}} = 0$$

dolazi se do jedinstvenog rešenja

$$\varsigma^* = \frac{\ln(t_i) - \ln(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Za $0 < g_i(\varsigma) < 1$ i svako $\varsigma \in [\underline{\varsigma}, \bar{\varsigma}]$ tada važi:

$$\underline{\lambda}_i^{exo} = \begin{cases} \min\{g_i(\underline{\varsigma}), g_i(\bar{\varsigma}), g_i(\varsigma^*)\} & \text{ako } \varsigma^* \in [\underline{\varsigma}, \bar{\varsigma}] \\ \min\{g_i(\underline{\varsigma}), g_i(\bar{\varsigma})\} & \text{inače} \end{cases}$$

odnosno

$$\bar{\lambda}_i^{exo} = \begin{cases} \max\{g_i(\underline{\varsigma}), g_i(\bar{\varsigma}), g_i(\varsigma^*)\} & \text{ako } \varsigma^* \in [\underline{\varsigma}, \bar{\varsigma}] \\ \max\{g_i(\underline{\varsigma}), g_i(\bar{\varsigma})\} & \text{inače.} \end{cases}$$

U slučaju endogenog vremena izlaska motivi za napuštanje tržišta mogu biti i pad cena aktiva i nagli porast vrednosti portfolija. Zbog jednostavnosti, u ovom delu se pretpostavlja da investitor izlazi sa tržišta samo u slučaju kada prinos prelazi određeni prag γ. Neka R_i označava vektor prinosa u trenutku t_i, dok R_i^j predstavlja prinos j-te aktive u istom trenutku. Takođe, važi da je $e^T\omega = 1$ i $\omega \geq 0$. Za $i = 1$ zbog

$$\min_j\{R_1^j\} \leq \omega^T R_1 \leq \max_j\{R_1^j\}$$

sledi

$$P\{\min_j\{R_1^j\} \geq \gamma\} \leq P\{\omega^T R_1 \geq \gamma\} \leq P\{\max_j\{R_1^j\} \geq \gamma\}.$$

Stoga, donja granica verovatnoće endogenog izlaska u t_1 data je sa

$$\underline{\lambda}_i^{end} = P\{\min_j\{R_1^j\} \geq \gamma\}$$

a gornja sa

$$\bar{\lambda}_i^{end} = P\{\max_j\{R_1^j\} \geq \gamma\}.$$

Za $i = 2, ..., m-1$ iz

$$\min_j\{R_k^j\} \leq \omega^T R_k \leq \max_j\{R_k^j\} \qquad k = 2, ..., i$$

dobija se sledeći izraz:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_i^{end} &= P\{\min_j\{R_i^j\} \geq \gamma, \ \max_j\{R_k^j < \gamma, \ k = 1, ..., i-1\} \\ &\leq P\{\omega^T R_i \geq \gamma, \ \omega^T R_k < \gamma, k = 1, ..., i-1\} \\ &\leq P\{\max_j\{R_i^j \geq \gamma, \ \min_j\{R_k^j < \gamma, \ k = 1, ..., i-1\} = \bar{\lambda}_i^{end}. \end{aligned}$$

4

Numerički eksperiment

U ovom delu implementirano je nekoliko modela i izvršen je numerički eksperiment sa različitim parametrima. Osnovni cilj je da se uporede rezultati klasičnih modela sa rezultatima dobijenih iz modela koji uključuju i neizvesno vreme izlaska.

Implementacija navedenih problema rađena je u programskom paketu MATLAB. Za računanje WCVaR i običnog CVaR-a koristi se problem 6 u sekciji 3.3.1 , a Markovicov model je implementiran u standardnom obliku (problem 2 u sekciji 2.2). Podaci su uzeti sa američkih berzi i sadrže dnevne cene na zatvaranju u periodu od 1.1.2002 do 12.31.2012 godine. Portfolio čine sledeće poznate kompanije:

1. IBM (IBM)
2. Coca-Cola (KO)
3. Procter & Gamble (PG)
4. Microsoft (MSFT)
5. Wal-Mart (WMT)
6. General Electric (GE)

Pretpostavlja se da je period ulaganja 3 dana i da investitor može da napusti tržište na kraju prva dva dana. Prema tome, postoje tri moguća trenutka izlaska, odnosno $i = 1, 2, 3$. Prinosi za svaki trenutak računaju se na sledeći način:

$$R_t^1 = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \times 100, \quad t = 2, 3, 4, ...,$$
$$R_t^2 = \frac{S_t - S_{t-2}}{S_{t-2}} \times 100, \quad t = 3, 5, 7, ...,$$
$$R_t^3 = \frac{S_t - S_{t-3}}{S_{t-3}} \times 100, \quad t = 4, 7, 10, ...,$$

U gornjim formulama množenje sa 100 uvedeno je da bi se povećala tačnost dobijenih rezultata. Ako je ukupno dato 2679 istorijskih cena svake od 6 aktiva, uzorci za moguće trenutke izlaza su obima $S^1 = 2768, S^2 = 1384$ i $S^3 = 922$.
Kovarijansna matrica jednodnevnih prinosa data je sa:

$$V^1 = \begin{bmatrix} 2.4121 & 0.7899 & 0.7399 & 1.6435 & 0.9171 & 1.7564 \\ 0.7899 & 2.5040 & 0.7911 & 1.0403 & 0.6968 & 1.0792 \\ 0.7399 & 0.7911 & 2.2217 & 0.8886 & 0.7256 & 1.0886 \\ 1.6435 & 1.0403 & 0.8886 & 4.2369 & 1.1368 & 1.8992 \\ 0.9171 & 0.6968 & 0.7256 & 1.1368 & 1.8418 & 1.1978 \\ 1.7564 & 1.0792 & 1.0886 & 1.8992 & 1.1978 & 4.2287 \end{bmatrix}$$

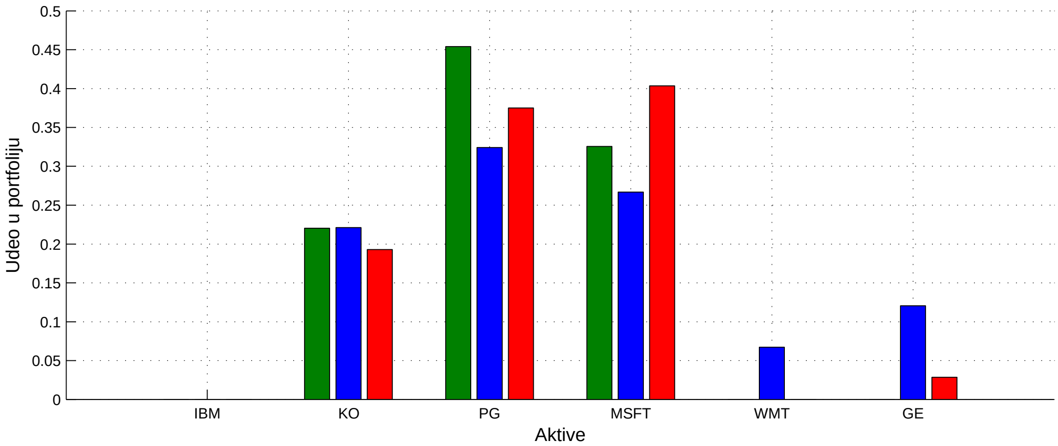
a vektor očekivanih stopa prinosa (jednodnevnih) sa:

$$\mu^1 = \begin{bmatrix} 0.0285 \\ 0.0052 \\ 0.0076 \\ -0.0099 \\ 0.0150 \\ -0.0031 \end{bmatrix}$$

Za nivo poverenja uzeto je $\beta = 0.95$ a vektori ograničenja su redom $\underline{\omega} = 0$ i $\bar{\omega} = e$, što znači da kratke pozicije nisu dozvoljene. Pošto kod klasičnog CVaR modela i Markovicovog portfolija ne posmatra se rizik ranijeg izlaska, prilikom računanja koriste se samo prinosi na kraju trećeg dana, tj. $m = 1$ i $S^3 = 922$.
Tabela 4.2 prikazuje vektore težinskih koeficijenata za sva tri implementirana modela za različite nivoe željenog prinosa. Markovicov model je označen sa M_1, klasični CVaR model sa M_2, a WCVaR model je označen sa M_3. Odgovarajući vektori težinskih koeficijenata su redom $\omega_{M_1}, \omega_{M_2}$ i ω_{M_3}. Vidi se da je Markovicov portfolio najviše diversifikovan sa 5 različitih aktiva uključenih u portfolio, dok model M_3 sadrži 4 aktive, a M_2 samo 3. Povećanje željenog prinosa ni kod jednog modela nije uticala na promenu strukture portfolija.

	Aktive					
Rešenja	IBM	KO	PG	MSFT	WMT	GE
	$l = 0.00015$					
ω_{M_1}	0.0000	0.2212	0.3243	0.2677	0.0657	0.1212
ω_{M_2}	0.0000	0.2191	0.4572	0.3238	0.0000	0.0000
ω_{M_3}	0.0000	0.1943	0.3807	0.3994	0.0000	0.0256
	$l = 0.00020$					
ω_{M_1}	0.0000	0.2212	0.3242	0.2673	0.0664	0.1209
ω_{M_2}	0.0000	0.2197	0.4556	0.3247	0.0000	0.0000
ω_{M_3}	0.0000	0.1936	0.3779	0.4015	0.0000	0.0270
	$l = 0.00025$					
ω_{M_1}	0.0000	0.2212	0.3242	0.2669	0.0672	0.1206
ω_{M_2}	0.0000	0.2203	0.4541	0.3256	0.0000	0.0000
ω_{M_3}	0.0000	0.1929	0.3751	0.4035	0.0000	0.0285
	$l = 0.00030$					
ω_{M_1}	0.0000	0.2211	0.3241	0.2664	0.0680	0.1203
ω_{M_2}	0.0000	0.2209	0.4526	0.3265	0.0000	0.0000
ω_{M_3}	0.0000	0.1922	0.3723	0.4056	0.0000	0.0299
	$l = 0.00040$					
ω_{M_1}	0.0000	0.2211	0.3240	0.2655	0.0695	0.1198
ω_{M_2}	0.0000	0.2221	0.4495	0.3284	0.0000	0.0000
ω_{M_3}	0.0000	0.1920	0.3662	0.4104	0.0000	0.0314
	$l = 0.00050$					
ω_{M_1}	0.0000	0.2211	0.3239	0.2646	0.0710	0.1192
ω_{M_2}	0.0000	0.2234	0.4464	0.3302	0.0000	0.0000
ω_{M_3}	0.0000	0.1963	0.3562	0.4148	0.0000	0.0327

Tabela 4.1: Optimalna rešenja pri različitim nivoima željenog prinosa



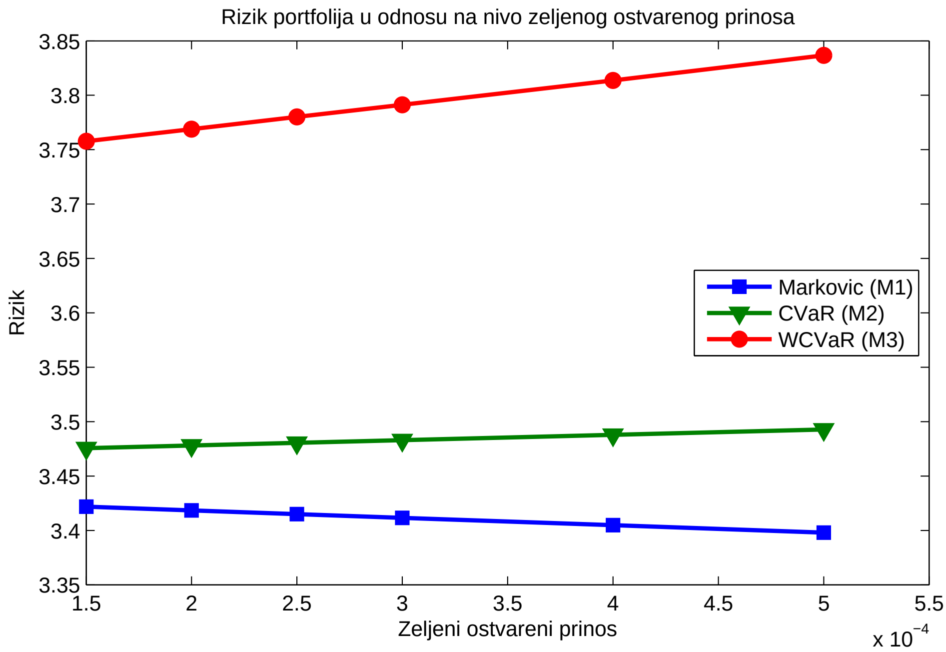
Slika 4.1: Težinski koeficijenti po modelima

Slika 4.1 prikazuje izbor aktiva sva tri modela. Tri aktive - Coca-Cola, Procter & Gamble i Microsoft su skoro podjednako prisutne kod sva tri modela. Takođe je interesantno, da IBM ne ulazi ni u jedan portfolio, dok je Wal-Mart prisutan samo kod Markovicovog izbora. Na kraju, akcije kompanije General Electric poželjne su i kod Markovicovog modela i kod modela sa neizvesnim vremenom izlaska.

	Željeni ostvareni prinos (l)					
Rizik	0.00015	0.00020	0.00025	0.00030	0.00040	0.00050
Markovic (M_1)	3.4218	3.4184	3.415	3.4116	3.4048	3.398
CVaR (M_2)	3.4756	3.4781	3.4805	3.483	3.4878	3.4927
WCVaR (M_3)	3.7578	3.7689	3.7801	3.7913	3.8136	3.8366

Tabela 4.2: Rizik pri različitim nivoima željenog prinosa

Tabela 4.2 sadrži vrednosti za rizik portfolija pri različitim vrednostima željenog prinosa. Na slici 4.2 vidi se dijagram kretanja rizika u zavisnosti



Slika 4.2: Kretanje rizika u odnosu na nivo željenog prinosa

od prinosa. Ako se posmatraju samo običan CVaR model (M_2) i unapređeni model (M_3) mogu se uočiti dve stvari:

- povećanje željenog nivoa prinosa dovodi do povećanja rizika kod oba modela. Intuitivno je jasno da veći dobitak sa sobom uvek nosi i veći rizik, što se jasno vidi na grafikonu.

- Rizik u slučaju WCVaR modela veći je od rizika koji nosi klasičan CVaR model. Ovo potiče iz činjenice da WCVaR obuhvata još jednu vrstu rizika: rizik neizvesnog vremena izlaska. Međutim, veća vrednost WCVaR-a ne znači nužno i veći nivo stvarnog rizika u odnosu na CVaR, jer investitor samo posmatra veću količinu neizvesnosti vezane za buduće scenarije i zato uzima konzervativniju strategiju.

5

Zaključak

U ovom radu predstavljeni su modeli optimizacije portfolija, koji implementiraju dve vrste neizvesnosti: buduću stopu prinosa aktiva i nepoznati trenutak izlaska sa tržišta. Pošto u praksi investitor nikada na zna sa sigurnošću kad će napustiti tŕžište, realno je posmatrati obe vrste rizika.

Prvi deo predstavlja jedan od mogućih načnina generalizacije Markovicovog modela, koji za zadati nivo prinosa minimizira rizik koji se meri varijansom celog portfolija. Prilikom generalizacije veliki značaj dobija veza između raspodele prinosa i raspodele vremena izlaska. Pokazano je da u slučaju, kada vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija, generalizacijom se dobija model po formi identičan standardnom Markovicovom modelu, samo su parametri modifikovani. Međutim, ako se pretpostavlja da postoji veza između izlaska i performanse portfolija, stvari postaju komplikovanije. Rezultirajući model je složeniji i funkcija cilja više nije kvadratna.

U drugom delu rada koristi se drugi način optimizacije - modeliranje pomoću CVaR vrednosti. Ovde se koristi robusnost u smislu biranja najgoreg mogućeg slučaja. Dobijeni modeli se mogu rešiti metodama linearnog programiranja. Eksperimentom je pokazano da generalizovani modeli daju veće vrednosti rizika jer koriste više informacija i u obzir uzimaju dve vrste rizika. Prednost ovih modela je da se najgori (worst case) očekivani prinos može postići uvek, u bilo kom trenutku izlaska.

Najveći nedostatak predstavljenih modela jeste statičnost. Iako se posmatraju različiti ishodi, investitor u početku mora odlučiti o sastavu portfolija. Jedan od mogućih načina razvijanja ove teorije je implementacija potpuno dinamičkog izbora portfolija.

Literatura

[1] Martellini, L., Urošević, B.: *Static Mean-Variance Analysis with Uncertain Time Horizon.* Management Science. 52, 955-964, (2006)

[2] Huang, D., Zhu, S., Fabozzi, F.J., Fukushima M.: *Portfolio Selection with Uncertain Exit Time: A Robust CVaR Approach.* Journal of Economic Dynamics & Control 32, 594-623, (2008)

[3] Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 3rd ed., (1953)

[4] Black, F., Litterman, R.: *Global Portfolio Optimization.* Financial Analysis Journal, 48, 28-43, (1992)

[5] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, M.J., Heath, D.: *Coherence Measures of Risk.* Mathematical Finance, 9, 203-228, (1999)

[6] Zhu, S.S, Fukushima, M.: *Worst-Case Conditional Value-at-Risk with Application to Robust Portfolio Management.* Technical Report 2005-6, Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University (2005)

[7] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.: *Optimization of Conditional Value-at-Risk.* Journal of Risk 2, 21-41 (2000)

[8] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.: *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distribution.* Journal of Banking and Finance 26, 1443-1471 (2002)

[9] Markowitz, H.M.: *Portfolio Selection.* Journal of Finance 7, 77-91 (1952)

[10] Markowitz, H.M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.* John Wiley and Sons, New York (1952)

[11] Steinbach, M.C.: *Markowitz Revisited: Single-Period and Multi-Period Mean-Variance Models* Konrad-Zuse-Zentrum fr Informationstechnik Berlin, SC 99-30, August (1999)

[12] http://finance.yahoo.com/

Kratka biografija

Čongor Mičiz je rođen 12. maja 1988. godine u Kikindi. Završio je gimnaziju "Dušan Vasiljev" u Kikindi kao nosilac Vukove diplome. Odmah po završetku gimnazije, 2006. godine upisao je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Studije je završio u septembru 2010. godine sa prosečnom ocenom 8.58. Iste godine upisao je master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, na istom fakultetu. Zaključno sa januarskim ispitnim rokom 2012. godine, položio je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 8.50.
U aprilu 2011. godine počeo je da radi u srednjoj medicinskoj školi "7. April" kao profesor matematike. Septembra 2012. godine zaposlio se u revizorskoj firmi "Deloitte" sa sedištem u Budimpešti. Od početka jula 2013. godine radi kao analitičar kredita u firmi "IBM", sa sedištem takođe u Budimpešti.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Čongor Mičiz
AU

Mentor: dr Nataša Krejić
ME

Naslov rada: Efikasni portfoliji sa neizvesnim vremenom izlaska
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2013
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/64/0/2/0/2/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Optimizacija
ND

Ključne reči: optimizacija, optimizacija portfolija, portfolio, Markovicov model, VaR, CVar, WCVaR, neizvesno vreme izlaska
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Uviverzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U radu analizirani su različiti načini optimizacije portfolija uz pretpostavku, da pored nepoznate buduće cene aktive i vreme izlaska investitora sa tržišta je neizvesno. Ovo znači da investitor, sa ciljem da maksimizira svoju korisnost uz minimalni nivo rizika, suočava se sa dve vrste neizvesnosti: prva je slučajna cena aktive (ili stopa prinosa) a druga je neizvesnost vezana za napuštanje tržišta (ili reorganizaciju portfolija). U prvom delu rada predstavljena je generalizacija Markovicovog modela u smislu uvođenja neizvesnog vremena izlaska investitora. Drugi deo rada bavi se optimizacijom pomoću CVaR vrednosti (Conditional Value at Risk) uz posmatranje

najgoreg mogućeg slučaja (worst case) i nepoznatog vremena izlaska. Na kraju rada prikazani su rezultati na osnovu numeričkog eksperimenta nekih od implementiranih modela.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 31.03.2012.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Čongor Mičiz
AU

Mentor: dr Nataša Krejić
MN

Title: Portfolio optimization with uncertain exit time
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2013
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5/64/0/2/0/2/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Optimization
SD

Subject/Key words: optimization, portfolio, portfolio optimization, Markovitz, VaR, CVaR, WCVaR, uncertain exit time
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The thesis describes various methods of portfolio optimization based on assumptions that there are two sources of uncertainty: the future price of assets and the moment of investor's exit of the market (or restructuring her portfolio). Every rational investor should take into account both types of risk: the first one is caused by asset price fluctuation and the second one is related to different moments of exiting the market. In the first part of thesis there is a generalization of standard Markowitz portfolio optimization approach while the second part is devoted to optimization techniques using VaR (Value at Risk) and CVaR (Conditional Value at Risk) models includ-

ing elements of robust optimization (worst case). Numerical experiments are presented as well.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 31.03.2011.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Zorana Lužanin, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Dora Seleši, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Nataša Krejić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad