UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Branko Marković

Vreme zaustavljanja i primena na američke opcije

- završni rad -

Novi Sad, 2009

Sadržaj

Uvod 3

1. Osnovni pojmovi 5
1.1 σ-algebra 5
1.2 Slučajna promenljiva 5
1.3 Particije 6
1.4 Algebra 9
1.5 Očekivanje i uslovno očekivanje 11
1.6 Filtracije 13
1.7 Martingali 14
1.8 Replikantne strategije 15
1.9 CRR model 17
1.10 Braunovo kretanje 17
1.11 Jednodimenziona Itova formula 18
1.12 Infinitezimalni generator 18
2. Opcije 19
2.1 Istorijski podaci 19
2.2 Definicija i osnovni tipovi opcija 19
2.2.1 Evropske opcije 21
2.2.2 Američke opcije 22
2.3 Pozicije u opciji 23
2.4 Gornje granice za cene opcija 25
2.5 Izvršavanje opcije pre datuma dospeća 26
2.6 Učesnici na tržištu 27
3. Teorija problema optimalnog zaustavljanja 29
3.1 Kratka istorija o problemima optimalnog zaustavljanja 29
3.2 Vreme zaustavljanja 29
3.3 Formulacija prostog problema optimalnog zaustavljanja 31
3.4 Rešenje problema optimalnog zaustavljanja 32
4. Neprekidni model 39
4.1 Kratka istorija američkih opcija kao problema optimalnog zaustavljanja 39
4.2 Pretpostavke modela 39
4.3 Formulacija problema 40
4.4 Rešenje problema 43
4.5 Američke put opcije koje imaju datum dospeća 49
5. Diskretni model 51
5.1 Model 52
5.2 Vreme zaustavljanja 53
5.3 Šta uraditi u trenutku t_0 55
5.4 Šta uraditi u trenutku t_k 58
5.5 Optimalno vreme zaustavljanja i Snell envelop 60
5.6 Postojanje optimalnih vremena zaustavljanja 61

5.7 Osobine koje važe za Snell envelop 62
5.8 Najmanji dominantni supermartingal 67
5.9 Doob-ova dekompozicija 68
5.10 Karakterizacija optimalnih vremena zaustavljanja 70
5.11 Optimalna vremena zaustavljanja i Doob-ova dekompozicija 72
5.12 Najmanje optimalno vreme zaustavljanja 73
5.13 Najveće optimalno vreme zaustavljanja 74

Zaključak 77

Literatura 78
Biografija 79

Uvod

Rizik je neizbežan sporedni efekat želje da zaradimo više novca od drugih. Naravno, novac možemo zaraditi i gotovo bez rizika. Sve što treba da uradimo je da kupimo državne obveznice, koje se generalno smatraju investicijom bez rizika. Ali budući da nema rizika, ni dobit nije velika. Pravi problem je taj ako bi svi investitori ostvarivali istu stopu dobiti, onda dobit služi samo tome da se očuva status kvo. Drugim rečima, ako želimo da kupimo skup auto, jahtu ili nešto slično, onda moramo zaraditi više novca od drugih, a to zahteva preuzimanje rizika.

Zaista, zadatak investitora je da zarade više novca i to jedino mogu učiniti preuzimanjem rizika (naravno, ako izuzmemo mogućnosti arbitraže). Kao što kazina u Las Vegasu uvek traže novu igru šanse da bi povećali svoj profit, investitori neprestano traže nove finansijske mogućnosti za ostvarivanje profita. Te nove mogućnosti često postaju korišćenje derivata.

Poslednjih 25 godina došlo je do ogromnog razvoja tržišta derivata. Danas je, u mnogim situacijama investitorima privlačnije da trguju derivatom čija je podloga neka aktiva nego samom aktivom.

Jedan od najjednostavnijih derivata su opcije čija podloga su akcije, a u ovom radu mi ćemo se baviti američkim opcijama. To su opcije koje se mogu izvršiti u bilo kom trenutku pre datuma dospeća. Samim tim, postaje jako bitno znati kada izvršiti opciju da bi se ostvario što veći prihod. Odluku o trenutku izvršenja opcije možemo modelirati kao slučajnu promenljivu sa specijalnim osobinama nazvanu vreme zaustavljanja.

Sam rad se sastoji iz više celina. U prvom poglavlju ćemo se upoznati sa nekim osnovnim pojmovima koji će se koristiti u radu i čije razumevanje će nam biti neophodno. U drugom poglavlju ćemo definisati evropske i američke opcije i razmotriti neke njihove osobine. Zatim, u trećem poglavlju ćemo se upoznati sa problemima optimalnog zaustavljanja. Tu ćemo formulisati prosti problem optimalnog zaustavljanja i doći do njegovog rešenja korišćenjem više uslova: smooth pasting, value matching i dr. Četvrto poglavlje proučava američke opcije kao probleme optimalnog zaustavljanja. U ovom poglavlju koristimo rezultate dobijene u trećem poglavlju. Kao rezultat ćemo dobiti optimalnu vrednost akcije za izvršenje opcije, optimalno vreme zaustavljanja i vrednost opcije. U trećem i četvrtom poglavlju vreme ćemo posmatrati kao neprekidnu promenljivu. Peto poglavlje se se razlikuje od prethodna dva po tome što će ovde vreme biti diskretna promenljiva i koristićemo potpuno drugačiji matematički aparat da bi došli do rešenja. Ovde ćemo se upoznati sa pojmovima kao što su Snell envelop, Doob-ova dekompozicija, stop proces, navešćemo teoremu koja nam govori kada je neko vreme zaustavljanja optimalno i videti kako izgledaju najmanje i najveće optimalno vreme zaustavljanja.

Rad je baziran na rezultatima datim u [1], [2] i [3].

1. Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju biće definisani neki pojmovi koji će nam olakšati razumevanje modela kojima se bavimo u ovom radu. Takođe, ovde će biti navedene neke osobine i formule na koje ćemo se često pozivati kasnije.

1.1 σ-algebra

Definicija 1.1
Neka je Ω neprazan skup. Neprazna kolekcija Σ podskupova od Ω se naziva σ-algebra ako važi:

1) $\Omega \in \Sigma$
2) Ako $A \in \Sigma$ onda i $A^c \in \Sigma$
3) Ako $A_1, A_2, ... \in \Sigma$, tada $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Definicija 1.2
Borelova σ-algebra $\mathcal{B}$ na $\mathbb{R}$ je najmanja σ-algebra na $\mathbb{R}$ koja sadrži sve otvorene intervale (a,b) gde $a,b \in \mathbb{R}$.

Prostor (Ω, Σ, P) se naziva *prostor verovatnoća* (eng. probability space), gde je Ω skup svih mogućih ishoda, Σ je σ-algebra definisana nad Ω i P je verovatnoća nad Σ.

Prostor (Ω, P) se naziva *konačan prostor verovatnoća* (eng. finite probability space), gde je Ω skup svih mogućih ishoda, a P funkcija verovatnoće. Iako smo u zapisu konačnog prostora verovatnoća izostavili σ-algebru Σ, smatraćemo da je Σ skup svih podskupova skupa Ω, odnosno partitivni skup skupa Ω.

Podskupove od Ω ćemo nazivati *događaji*.

1.2 Slučajna promenljiva

Definicija 1.3
Neka je (Ω, Σ, P) prostor verovatnoća. Preslikavanje $\mathbb{X}: \Omega \to \mathbb{R}$ se naziva slučajna promenljiva ako važi da za svako $B \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{X}^{-1}(B) \in \Sigma.$$

Ekvivalentno kažemo da je $\mathbb{X}$ $\Sigma-$merljivo preslikavanje.

Definicija 1.4

Neka je A događaj na Ω. Funkcija 1_A^Ω definisana sa

$$1_A^\Omega(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

je slučajna promenljiva koja se zove indikator događaja A (ili indikator funkcija za događaj A). Kada je jasno šta je skup Ω, ovu funkciju možemo zapisivati samo sa 1_A.

U celom radu ćemo koristiti sledeće kraće oznake :

$$\{X = x_i\} = X^{-1}(x_i) = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$$
$$\{X \le x_i\} = X^{-1}((-\infty, x_i)) = \{\omega \mid X(\omega) \le x_i\}.$$

Definicija 1.5

Neka je X slučajna promenljiva na Ω. Onda kažemo da je:

1) X nenegativna (pišemo $X \ge 0$), ako je

$$X(\omega) \ge 0 \text{ za svako } \omega \in \Omega.$$

2) X strogo (eng. strictly) pozitivna (pišemo $X > 0$), ako je

$$X(\omega) \ge 0 \text{ za sve } \omega \in \Omega \text{ i } X(\omega) > 0 \text{ za bar jedno } \omega \in \Omega.$$

3) X jako (eng. strongly) pozitivna (pišemo $X \gg 0$), ako je

$$X(\omega) > 0 \text{ za sve } \omega \in \Omega.$$

1.3 Particije

Definicija 1.6

Neka je Ω neprazan skup. Onda je particija skupa Ω kolekcija $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\}$ nepraznih podskupova od Ω , koji se zovu blokovi particije, sa sledećim osobinama:

1) blokovi su međusobno disjunktni, tj.

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ za sve i, j, i} \ne \text{j},$$

2) unija svih blokova je skup Ω, tj.

$$B_1 \cup \cdots \cup B_n = \Omega.$$

Teorema 1.1

Neka je (Ω, P) konačan prostor verovatnoća i neka $B_1, ..., B_n$ čine particiju od Ω. Neka je za svako k, $P(B_k) \neq 0$. Tada, za svaki događaj A iz Ω, važi da je:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) P(B_k) .$$

Definicija 1.7

Neka je $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_k\}$ particija skupa Ω. Onda za particiju $\mathcal{Q} = \{C_1, ..., C_n\}$ skupa Ω, kažemo da je finija od particije $\mathcal{P}$ (eng. $\mathcal{Q}$ is a refinement of $\mathcal{P}$), ako je dobijena tako što smo neke blokove B_i, particije $\mathcal{P}$, podelili na manje delove.

Stoga, particija $\mathcal{Q}$ je finija od particije $\mathcal{P}$ ako je svaki blok iz $\mathcal{Q}$ sadržan u nekom bloku iz $\mathcal{P}$ ili, ekvivalentno, svaki blok iz $\mathcal{P}$ je unija blokova iz $\mathcal{Q}$. To obeležavamo sa $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$.

Primer 1.1

particija $\mathcal{P}$ particija $\mathcal{Q}$

Grafik 1.1

Vidimo da je particija $\mathcal{Q}$ finija od particije $\mathcal{P}$ jer je:

$$B_1 = C_1 \cup C_2$$
$$B_2 = C_3 \cup C_4 \cup C_5$$
$$B_3 = C_6$$
$$B_4 = C_7 .$$

Definicija 1.8

Neka je X slučajna promenljiva na Ω, pri čemu je skup svih mogućih vrednosti za X dat sa:

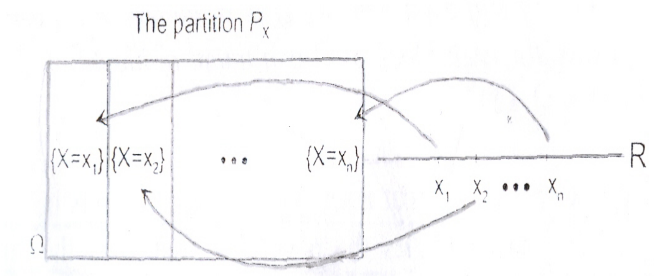
$$im(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n\} .$$

Tada slučajna promenljiva X određuje particiju skupa Ω čiji blokovi su inverzne slike elemenata im(X), tj.

$$\mathcal{P}_X = \{\{X = x\} \mid x \in im(X)\} = \{\{X = x_1\}, ..., \{X = x_n\}\} .$$

Particija $\mathcal{P}_X$ se naziva particija definisana slučajnom promenljivom X.

Na Grafiku 1.2 vidimo ilustraciju definicije 1.8.



Grafik 1.2

Događaji $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, ..., \{X = x_n\}$ čine particiju skupa Ω, tj. događaji su međusobno disjunktni i njihova unija je skup Ω (jer slučajna promenljiva X mora biti definisana na celom Ω).

Particija $\mathcal{P}_X$ definisana slučajnom promenljivom X ima jednu bitnu osobinu: X je konstantno na blokovima $\{X = x\}$ particije $\mathcal{P}_X$. Zapravo, na blokovima $\{X = x\}$, X ima vrednost x. Kažemo da je slučajna promenljiva X $\mathcal{P}_X$-merljiva.

Primetimo još nešto. X nije samo konstantno na blokovima od $\mathcal{P}_X$, već je reč o različitoj konstanti na svakom bloku $\mathcal{P}_X$.

Definicija 1.9

Neka je $\mathcal{P}$ bilo koja particija skupa Ω. Za slučajnu promenljivu X na Ω kažemo da je $\mathcal{P}$ - merljiva ako je X konstantno na svakom bloku particije $\mathcal{P}$.

Primetimo da postoje mnoge particije $\mathcal{Q}$ za koje je X konstantno na svakom bloku particije $\mathcal{Q}$, tj. za koje je X $\mathcal{Q}$- merljivo. Međutim, $\mathcal{P}_X$ je jedina particija za koju je X različita konstanta na svakom bloku.

Teorema 1.2

Neka je X slučajna promenljiva na Ω. Onda su sledeća tvrđenja tačna:

1) X je $\mathcal{Q}$- merljivo ako i samo ako je particija $\mathcal{Q}$ finija od particije $\mathcal{P}_X$.
2) $\mathcal{P}_X$ je "najgrublja" particija za koju je X merljivo i jedina particija za koju je X merljivo i na čijim blokovima prima različite konstantne vrednosti.

Teorema 1.3

Neka su X i Y slučajne promenljive. Onda je Y $\mathcal{P}_X$-merljivo ako i samo ako je Y funkcija od X, tj. ako i samo ako postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da je

$$Y = f(X).$$

1.4 Algebra

Definicija 1.10
Neka je Ω neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova od Ω se naziva algebra (ili algebra skupova) ako su zadovoljene sledeće osobine:

1) prazan skup pripada $\mathcal{A}$, tj.
$$\emptyset \in \mathcal{A}.$$

2) $\mathcal{A}$ je zatvoren u odnosu na komplement, tj.
$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}.$$

3) $\mathcal{A}$ je zatvoren u odnosu na uniju, tj.
$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \bigcup B \in \mathcal{A}.$$

Osobine algebre skupova:
$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathcal{A}$$
$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$$

Definicija 1.11
Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu Ω. Atom od $\mathcal{A}$ je neprazan skup $A \in \mathcal{A}$ sa osobinom da ne postoji nijedan pravi podskup skupa A koji je takođe u $\mathcal{A}$.

Teorema 1.4
Neka je Ω neprazan konačan skup. Tada:

1) Za svaku particiju $\mathcal{P}$ skupa Ω,
$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \{C \subseteq \Omega \mid C = \emptyset \text{ ili } C = \text{unija blokova od } \mathcal{P}\}$$

je algebra koja se naziva algebra generisana sa $\mathcal{P}$.

2) Ako je $\mathcal{A}$ algebra na Ω, onda je skup svih atoma od $\mathcal{A}$
$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\text{svi atomi od } \mathcal{A}\}$$

particija skupa Ω koja se naziva particija definisana sa $\mathcal{A}$.

Znači, ako imamo particiju $\mathcal{P}$ skupa Ω, možemo generisati algebru skupova $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ tako što uzmemo sve moguće konačne unije blokova od $\mathcal{P}$.

Takođe, počevši od algebre $\mathcal{A}$ na skupu Ω možemo dobiti particiju $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ tako što uzmemo sve atome algebre $\mathcal{A}$.

Iz svega toga, svu teoriju koju razvijemo u kontekstu particija možemo razviti u kontekstu algebri i obrnuto.

Teorema 1.5

Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ particije skupa Ω. Onda važi:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{Q}) \Leftrightarrow \mathcal{P} \prec \mathcal{Q}.$$

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{D}$ algebre na Ω. Tada je:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{D}).$$

Videli smo snažnu vezu između particija od Ω i algebri na Ω. Takođe znamo za vezu slučajne promenljive i particije. Sada je vreme da u priču uvedemo i slučajne promenljive i vidimo njihovu vezu sa algebrama.

Definicija 1.12

Neka je X slučajna promenljiva na Ω. Onda X definiše algebru na Ω čiji elementi su inverzne slike podskupova od im(X), tj.

$$\mathcal{A}_X = \{\{X \in B\} \mid B \subseteq im(X)\}.$$

Algebra $\mathcal{A}_X$ se naziva algebra generisana slučajnom promenljivom X.

Iz svega do sada, očigledno je da su $\mathcal{P}_X$ i $\mathcal{A}_X$ povezani.

Teorema 1.6

Neka je X slučajna promenljiva na konačnom skupu Ω. Onda je algebra generisana sa X ustvari algebra generisana sa $\mathcal{P}_X$, simbolima:

$$\mathcal{A}_X = \mathcal{A}(\mathcal{P}_X),$$

a particija definisana sa X je particija definisana sa $\mathcal{A}_X$, simbolima:

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{P}(\mathcal{A}_X).$$

Definisali smo merljivost slučajne promenljive X u odnosu na particiju $\mathcal{P}$ od Ω. Okrenimo se sada merljivosti slučajne promenljive X u odnosu na algebru skupova $\mathcal{A}$ na Ω.

Definicija 1.13
Neka je X slučajna promenljiva na konačnom skupu Ω. Neka je $\mathcal{A}$ bilo koja algebra skupova na Ω. Onda je X $\mathcal{A}$-merljivo ako

$$\{X = B\} \in \mathcal{A}, \text{ za svako } B \subseteq im(X).$$

Intuitivno, ako je $\mathcal{A}$ algebra na Ω, onda je X $\mathcal{A}$-merljivo ako je X konstantno na svim atomima od $\mathcal{A}$.

Teorema 1.7
Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:
1) X je $\mathcal{P}$-merljivo
2) X je konstantno na blokovima od $\mathcal{P}$
3) X je konstantno na atomima od $\mathcal{A}(\mathcal{P})$

Teorema 1.8
Neka je X slučajna promenljiva na Ω.
1) Ako je $\mathcal{A}$ algebra na Ω, onda je X $\mathcal{A}$-merljivo ako i samo ako je $\mathcal{P}(\mathcal{A})$-merljivo.
2) Ako je $\mathcal{P}$ particija od Ω, onda je X $\mathcal{P}$-merljivo ako i samo ako je $\mathcal{A}(\mathcal{P})$-merljivo.

Teorema 1.9
Slučajna promenljiva X na Ω je merljiva u odnosu na algebru $\mathcal{A}$ ako i samo ako je

$$\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}.$$

1.5 Očekivanje i uslovno očekivanje

Definicija 1.14
Neka je X slučajna promenljiva na konačnom prostoru (Ω, P), gde je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Očekivana vrednost (ili samo očekivanje) od X je dato sa:

$$E_P(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) \cdot P(\omega_i).$$

Osobina očekivanja:

$$E_P(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(X(\omega_i)) \cdot P(\omega_i)$$

Teorema 1.10
Neka je (Ω, P) konačan prostor verovatnoća i neka je A događaj za koji je $P(A) > 0$. Uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na događaj A je:

$$E_P(X \mid A) = \frac{E_P(X1_A)}{P(A)}.$$

gde je 1_A indikator funkcija za A.

Teorema 1.11
Neka je $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\}$ particija od Ω. Onda za svaku slučajnu promenljivu X na Ω važi:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X \mid B_i) P(B_i).$$

Teorema 1.12
Važi:

$$E_P(X1_A) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) \cdot 1_A(\omega_i) P(\omega_i).$$

Definicija 1.15
Neka je (Ω, P) konačan prostor verovatnoća i neka je $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\}$ particija od Ω za koju je $P(B_i) > 0$ za svako *i*. Uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na particiju $\mathcal{P}$ je slučajna promenljiva:

$$E_P(X \mid \mathcal{P}) : \Omega \to \mathbb{R}$$

definisana sa

$$E_P(X \mid \mathcal{P}) = E_P(X \mid \mathrm{B}_1) \cdot 1_{B_1} + ... + E_P(X \mid \mathrm{B}_n) \cdot 1_{B_n}.$$

Teorema 1.13
Neka je (Ω, P) konačan prostor verovatnoća. Neka je $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\}$ particija od Ω za koju je $P(B_i) > 0$ za svako *i*. Onda uslovno očekivanje $E_P(X \mid \mathcal{P})$ ima sledeće osobine:

1) Funkcija $E(\cdot \mid \mathcal{P})$ je linearna, tj. za slučajne promenljive X i Y i realne brojeve *a* i *b* važi:
$$E(aX + bY \mid \mathcal{P}) = aE(X \mid \mathcal{P}) + bE(Y \mid \mathcal{P}).$$

2) Ako je Y $\mathcal{P}$-merljiva slučajna promenljiva, onda je
$$E(YX \mid \mathcal{P}) = YE(X \mid \mathcal{P}).$$

3) Ako je X $\mathcal{P}$ -merljivo onda je:
$$E(X \mid \mathcal{P}) = X .$$

4) Ako su X i $\mathcal{P}$ nezavisni, tj. ako su $\mathcal{P}_X$ i $\mathcal{P}$ nezavisni, onda je:
$$E(X \mid \mathcal{P}) = E(X) .$$

5) Ako je particija $\mathcal{Q}$ finija od particije $\mathcal{P}$, onda važi:
$$E(E(X \mid \mathcal{P}) \mid \mathcal{Q}) = E(X \mid \mathcal{P}) = E(E(X \mid \mathcal{Q}) \mid \mathcal{P}) .$$

6) Uslovno očekivanje zadovoljava:
$$E(E(X \mid \mathcal{P})) = E(X) .$$

Definicija 1.16

Neka je (Ω, P) konačan prostor verovatnoća. Neka je Y slučajna promenljiva koja može primiti vrednosti $\{y_1, ..., y_k\}$. Onda je uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na Y ustvari uslovno očekivanje od X u odnosu na particiju $\mathcal{P}_Y$ generisanu sa Y:
$$E(X \mid Y) = E(X \mid \mathcal{P}_Y) = \sum_{i=1}^{k} E(X \mid \{Y = y_i\}) \cdot 1_{\{Y = y_i\}} .$$

1.6 Filtracije

Definicija 1.17

Stohastički proces $\{X(t),\ t \in I\}$ je familija slučajnih promenljivih definisana na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Skup *I* zvaćemo parametarski skup.

Konačan niz $X_1, ..., X_N$ slučajnih promenljivih definisanih na Ω zvaćemo *konačan stohastički proces* na Ω.

Definicija 1.18

Neka je dat merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada se niz σ -algebri $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ za koji važi da je:

1. $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ i
2. ako je $t_1 \leq t_2$ onda je $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$.

naziva filtracija.

Napomena 1.1: Merljiv prostor je uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ gde je Ω neprazan skup, a $\mathcal{F}$ σ -algebra na Ω .

Pored ove definicije filtracije biće nam potrebna još jedna.

Definicija 1.19
Niz $\mathbb{F}=(\mathcal{P}_0,...,\mathcal{P}_N)$ particija skupa $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_m\}$ za koji je

$$\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec ... \prec \mathcal{P}_N$$

se naziva filtracija.
Ako je pored toga zadovoljeno i da je:

1. $\mathcal{P}_0$ "najgrublja" moguća particija, tj. $\mathcal{P}_0=\{\Omega\}$,
2. $\mathcal{P}_N$ je najfinija moguća particija, tj. $\mathcal{P}_N=\{\{\omega_1\},...,\{\omega_m\}\}$ u kojoj je svaki blok veličine jedan,

tada filtraciju $\mathbb{F}$ nazivamo informaciona struktura (eng. information structure).

Znači, informaciona struktura počinje sa tim da nemamo informacija o konačnom stanju (osim da je u Ω), u svakom narednom trenutku *t* možda dobijamo dodatne informacije (i nikada ih ne gubimo) i na kraju imamo kompletno znanje o konačnom stanju.

Definicija 1.20
Neka je data filtracija $\mathbb{F}=(\mathcal{P}_0,...,\mathcal{P}_N)$ i konačan stohastički proces $\mathbb{X}=(X_0,X_1,...,X_N)$ na Ω (pri čemu je $X_0=0$) za koji je X_i $\mathcal{P}_i$-merljivo, za svako *i*. Tada kažemo da je stohastički proces $\mathbb{X}$ adaptiran filtraciji $\mathbb{F}$, ili $\mathbb{F}$-adaptiran.

Definicija 1.21
Stohastički proces $\mathbb{A}=(A_0,...,A_N)$ je predvidljiv (eng. predictable) u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$, ako je A_k $\mathcal{P}_{k-1}$-merljivo za svako *k*.

1.7 Martingali

Definicija 1.22
Konačan stohastički proces $\mathbb{X}=(X_0,X_1,...,X_N)$ je $\mathbb{F}$-martingal, pri čemu je $\mathbb{F}=(\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec ... \prec \mathcal{P}_N)$, ako je $\mathbb{X}$ $\mathbb{F}$-adaptiran (tj. X_i je $\mathcal{P}_i$-merljivo) i

$$E(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k)=X_k,$$

tj. za dato $\mathcal{P}_k$, očekivana vrednost za X_{k+1} je X_k.

Ako je u definiciji martingala $E(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) \geq X_k$, onda kažemo da je $\mathbb{X}$ $\mathbb{F}$-submartingal.
S druge strane, ako je $E(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) \leq X_k$, onda kažemo da je $\mathbb{X}$ $\mathbb{F}$-supermartingal.

Teorema 1.14
Neka je $\mathbb{X}=(X_0,X_1,...,X_N)$ $\mathbb{F}$-martingal, gde je $\mathbb{F}=(\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec ... \prec \mathcal{P}_N)$, onda za svako $i>0$ važi da je:

$$E(X_{k+i} \mid \mathcal{P}_k)=X_k.$$

1.8 Replikantne strategije

Definicija 1.23
Strategija trgovanja je niz portfolia $\Phi = (\Theta_1, ..., \Theta_T)$, gde je Θ_i portfolio za vremenski interval $[t_{i-1}, t_i]$.

Definicija 1.24
Strategija trgovanja $\Phi = (\Theta_1, ..., \Theta_T)$ je samofinansirajuća ako je za bilo koji trenutak t_i (osim za $i \neq 0, T$) nabavna cena (eng. acquisation price) za Θ_{i+1} jednaka sa cenom likvidacije (eng. liquidation price) za Θ_i, tj.

$$v_i(\Theta_{i+1}) = v_i(\Theta_i).$$

Generalno, koristićemo sledeće oznake:
$v_0(\Phi)$ - početni troškovi strategije Φ
$v_T(\Phi)$ - prihod strategije Φ
i za strategiju Φ smatraćemo da je samofinansirajuća strategija.

Definicija 1.25
Slučajna promenljiva $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se naziva alternativa (eng. alternative).

Definicija 1.26
Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ alternativa. Replikantna strategija za X je samofinansirajuća strategija trgovanja $\Phi = (\Theta_1, ..., \Theta_T)$ čiji prihod je jednak sa X, tj.

$$v_T(\Phi) = v_T(\Theta_T) = X.$$

Definicija 1.27
Za alternativu X kažemo da je dostižna (eng. attainable) ako ima bar jednu replikantnu strategiju.

Definicija 1.28
Za model kažemo da je kompletan ako je svaka alternativa dostižna.

Teorema 1.15
1) Za sve strategije trgovanja Φ važi:

$$v_T(\Phi) = 0 \Rightarrow v_0(\Phi) = 0.$$

2) Za sve strategije trgovanja Φ_1 i Φ_2 važi:

$$v_T(\Phi_1) = v_T(\Phi_2) \Rightarrow v_0(\Phi_1) = v_0(\Phi_2).$$

Definicija 1.29
Martingalna mera (ili ekvivalentna martingalna mera ili rizik neutralna mera) je mera u odnosu na koju je proces martingal.

Teorema 1.16
Važe sledeća tvrđenja:

1) Postoji ekvivalentna martingalna mera Π tako da je diskontovani proces vrednosti $\overline{v}_k(\Phi)$ svake samofinansirajuće strategije Φ martingal u odnosu na meru Π. Konkretno, za svako $k \geq 0$

$$E_{\Pi}(\overline{v}_{k+1}(\Phi) \mid \mathcal{P}_k) = \overline{v}_k(\Phi)$$

ili, ekvivalentno, za sve $i, k \geq 0$

$$E_{\Pi}(\overline{v}_{k+i}(\Phi) \mid \mathcal{P}_k) = \overline{v}_k(\Phi).$$

2) U bilo kom trenutku, očekivana diskontovana vrednost u odnosu na meru Π, bilo koje samofinansirajuće strategije Φ, je jednaka inicijalnoj vrednost Φ, tj. za svako $k \geq 0$

$$E_{\Pi}(\overline{v}_k(\Phi)) = \overline{v}_0(\Phi).$$

Napomena 1.2: Ovde je diskontni faktor dat sa e^{rk}.

Teorema 1.17 (Harrison i Pliska)
Važe sledeća tvrđenja:

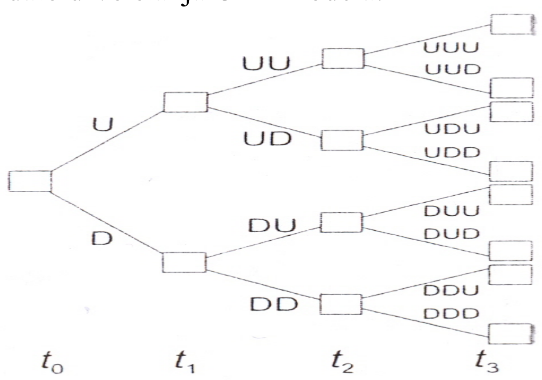
1) na tržištu nema arbitraže ako i samo ako postoji bar jedna martingalna mera i
2) tržište je kompletno ako i samo ako postoji tačno jedna martingalna mera i nijedna druga.

1.9 CRR model

Ovo je diskretan model i u literaturi se često naziva binomni model. U njemu posmatramo konačan broj vremenskih trenutaka $t_0 < t_1 < ... < t_T$ (zbog toga kažemo da je diskretan).

Ovaj model pretpostavlja da se tokom svakog vremenskog intervala ekonomsko stanje može menjati na dva načina: ili raste (U) ili opada (D). Takođe, šta će biti od ta dva stanja ne zavisi od promena u prošlosti. Konačno stanje je niz U-ova i D-ova dužine T.

Na narednom grafiku je dato drvo stanja CRR modela:



Grafik 1.3

Ovde je $T = 3$.

CRR model pretpostavlja da je cena akcije određena parom realnih brijeva u i d koji su u odnosu $0 < d < u$. Takođe pretpostavljamo da je verovatnoća da ekonomsko stanje raste data sa p.

1.10 Braunovo kretanje

Definicija 1.30

(Standardno) Braunovo kretanje (Vinerov proces) je stohastički proces $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ koji ima sledeće osobine:

- $X(0) = 0$
- za svako $t = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, priraštaji $X(t_1) - X(t_0), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ su nezavisne slučajne promenljive
- $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ima stacionarne priraštaje
- za svako $0 \leq s \leq t$, slučajna promenljiva $X(t) - X(s)$ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, t-s)$

Standardno Braunovo kretanje ćemo označavati sa W_t.

1.11 Jednodimenziona Itova formula

Teorema 1.18
Neka je X_t stohastički proces zadat svojim stohastičkim diferencijalom

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t .$$

Neka je g dva puta neprekidno-diferencijabilna funkcija. Onda je $Y_t = g(t, X_t)$ takođe stohastički proces i njegov stohastički diferencijal je dat sa :

$$dY_t = g_t dt + g_x dX_t + \frac{1}{2} g_{xx} (dX_t)^2 ,$$

gde je g_t izvod funkcije g po t, g_x izvod funkcije g po x i g_{xx} izvod drugog reda funkcije g po x.

1.12 Infinitezimalni generator

Definicija 1.31
Neka je $(X_t)_{t\geq 0}$ proces Itove difuzije u $\mathbb{R}^n$ homogen u vremenu. Definišimo infinitezimalni generator za X sa

$$\mathbb{L}_x f = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t)) - f(x)}{t} ,$$

gde je $x \in \mathbb{R}^n$ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.32
Ako je $(X_t)_{t\geq 0}$ proces Itove difuzije stohastičke diferencijalne jednačine (kraće: SDJ) date sa $dX_t = aX_t dt + \sigma X_t dW_t$, onda je infinitezimalni generator dat sa:

$$\mathbb{L}_x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma(x)\sigma(x)^T)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} .$$

Primetimo da za $n = 1$ infinitezimalni generator postaje:

$$\mathbb{L}_x = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} .$$

Takođe, za $a(x) = rx$ i $\sigma(x) = \sigma x$, infinitezimalni generator za $n = 1$ je dat sa:

$$\mathbb{L}_x = rx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} .$$

2. Opcije

2.1 Istorijski podaci

Iako se ne zna precizno kada se prvi ugovor ovog tipa javio, zna se da su Rimljani i Feničani koristili slične ugovore prilikom trgovanja. Takođe, postoje dokazi da je grčki matematičar i filozof Tales koristio ovakve ugovore da osigura nisku cenu maslina pre berbe. U Holandiji su se ovakvi ugovori koristili oko 1600. godine pri čemu im je cilj bio obezbeđivanje odgovarajuće cene lala. Trgovci lalama su koristili call opcije da osiguraju nisku cenu lala da bi mogli da zadovolje tražnju. U isto vreme, proizvođači lala su koristili put opcije da osiguraju odgovarajuću prodajnu cenu.

U Americi opcije su se pojavile negde u isto vreme kada i akcije. U 19. veku call i put opcije su bili ugovori između dve strane i njima se nije moglo trgovati na sekundarnom tržištu. Uslovi su zavisili od ugovora do ugovora, pa se broj ovakvih ugovora povećavao jako sporo.

Godine 1968. CBOT (Chicago Board of Trade) uvidevši mnoga neslaganja u ovim ugovorima i u cilju njihovog osnaživanja predložio je dve mere. Pod jedan, predloženo je da se standardizuju bitni uslovi u ugovorima kao što su strike cena, datum dospeća i drugi. Pod dva, da se stvori organizacija koja će biti posrednik i garant dobrog funkcionisanja tržišta opcija. Taj posrednik je danas poznat pod imenom Option Clearing Corporation. Godine 1973. osnovan je Chicago Board Options Exchange (CBOE).

Da su predložene mere dale rezultate, govori i činjenica da je do kraja 1974. godine broj ovakvih ugovora bio oko 200 000 dnevno što je bio ogroman broj. Poređenja radi, do 1968. godine broj ovakvih ugovora na godišnjem nivou nije prelazio 300 000. Godina 1973. je značajna i zbog toga što su se tada pojavili radovi Black i Scholesa koji su imali ogroman uticaj na povećanje broja ovih ugovora.

2.2 Definicija i osnovni tipovi opcija

Neki finansijski instrumenti imaju osobinu da njihova vrednost zavisi od vrednosti drugog finansijskog instrumenta. Prvi finansijski instrumenti se nazivaju *derivati*, a drugi *podloga* (eng. underlying) za derivat.

Generalno, opcije su ugovori koji daju pravo, ali ne i obavezu da se neka podloga kupi ili proda po unapred definisanoj ceni, u unapred definisanoj količini i na unapred definisan datum.

Podloga mogu biti akcije, deonice, obveznice, roba i valute. Pretpostavka sa kojom ćemo raditi u čitavom radu je da su akcije koje ne plaćaju dividende podloga za opcije.

Postoje dva osnovna tipa opcija. To su:

- put opcije i
- call opcije.

Definicija 2.1
Call opcija je ugovor koji daje pravo kupcu opcije (eng. buyer) da kupi određenu podlogu od onoga ko je napisao opciju (eng. writer, seller), na određen datum (koji se naziva datum dospeća), po unapred utvrđenoj ceni (koja se naziva strike cena ili cena izvršenja).

Definicija 2.2
Put opcija je ugovor koji daje pravo kupcu opcije da proda određenu podlogu, na određen datum, po unapred utvrđenoj ceni.

Datum dospeća ćemo obeležavati sa T, a strike cenu sa K.
Takođe, u samom radu ćemo često onoga ko je napisao opciju nazivati pisac ili prodavac opcije, dok ćemo onoga ko je kupio opciju nazivati kupac ili vlasnik opcije.
Prodavac opcije prima novac unapred, ali ima potencijalne obaveze kasnije.

U definicijama 2.1 i 2.2 nismo rekli da se radi o određenoj količini odgovarajuće podloge (akcija) zbog toga što ćemo u ovom radu pretpostavljati da je reč o jednoj akciji, (naravno, osim ako drugačije nije naznačeno u konkretnom primeru).

U zavisnosti od toga kada ih možemo izvršiti opcije se dele na:

- američke i
- evropske.

Američke opcije mogu biti izvršene u bilo kom trenutku od datuma kupovine do datuma dospeća. Za razliku od njih evropske opcije mogu biti izvršene samo na datum dospeća.

Napomena 2.1: nazivi američke i evropske opcije nemaju veze sa područjem na kojem se trguje. Evropskim opcijama se trguje u Americi i obrnuto.

Evropske opcije je generalno lakše analizirati nego američke i neke osobine američkih opcija su izvedene baš iz evropskih opcija.

Pored američkih i evropskih opcija postoje i drugi tipovi opcija. Nekim opcijama prihod zavisi od maksimalne vrednosti podloge tokom određenog vremena. Drugima prihod zavisi od prosečne vrednosti podloge tokom vremena. Kod trećih izvršenjem opcije investitor postaje vlasnik nove opcije... I kao što smo već rekli, stalno se uvode inovacije na tom tržištu.

2.2.1 Evropske opcije

Razmotrimo malo detaljnije evropske opcije, njihove prihode i profite.

Definicija 2.3
Evropska call opcija daje pravo njenom vlasniku da kupi akciju na datum dospeća po strike ceni K.

Vlasnik ove opcije očekuje da će cena akcije rasti i biti veća od strike cene na datum dospeća. Sa druge strane pisac opcije očekuje da će cena akcije pasti ispod strike cene na datum dospeća.

Cenu akcije u trenutku *t* ćemo označavati sa $S(t)$, a na datum dospeća T sa $S(T)$.

Prihod evropske call opcije je dat sa:

$$f(S,K)=\begin{cases} S(T)-K, \ za\ S(T)>K \\ 0, \text{ inače} \end{cases}.$$

Naglasimo da je ovde reč o prihodu vlasnika opcije.

Sa druge strane, ako je $S(T)>K$ prihod pisca opcije će biti:

$$f(S,K)=\begin{cases} K-S(T), \ za\ S(T)>K \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

Primer 2.1
Pretpostavimo da imamo investitora koji kupuje evropsku call opciju sa strike cenom 60$ čija podloga je jedna akcija Microsofta. Neka je trenutna cena akcije 58$, neka dospeva za četiri meseca i neka je cena ovakvog ugovora 5$. Znači, inicijalna investicija iznosi pet dolara. Na datum dospeća, ako je cena akcije ispod 60 dolara investitor neće izvršiti opciju (jer nema smisla kupiti akciju po 60 dolara kada joj je na tržištu cena manja). U ovom slučaju investitor ima gubitak od pet dolara. S druge strane, ako cena akcije na datum dospeća bude npr. 75 dolara investitor izvršava opciju. On kupuje akciju za 60$ i prodaje je za 75$ na tržištu. Time ostvaruje prihod od 15$. Kada od toga oduzmemo početne troškove od 5$, vidimo da je investitorov profit 10$. Da je cena akcije na datum dospeća bila na primer 62$ investitor bi opet izvršio opciju jer bi mu onda gubitak bio 3$, a ne 5$ kada ne bi izvršio opciju.

Generalno, kada god je cena akcije veća od strike cene (na datum dospeća) call opciju ima smisla izvršiti.

Definicija 2.4
Evropska put opcija daje pravo njenom vlasniku da proda akciju na datum dospeća po strike ceni K.

Vlasnik ove opcije očekuje da će cena akcija padati i biti niža od strike cene na datum dospeća. Sa druge strane pisac opcije očekuje da će cena akcije biti iznad strike cene na datum dospeća.

Prihod evropske put opcije je dat sa:

$$f(S,K)=\begin{cases} K-S(T), \ za \ K>S(T) \\ 0, \ \text{inače} \end{cases}$$

Ovo je prihod vlasnika opcije.

Sa druge strane, ako je $K > S(T)$ prihod pisca opcije je:

$$f(S,K)=\begin{cases} S(T)-K, \ za \ K>S(T) \\ 0, \ \text{inače} \end{cases}$$

Primer 2.2
Pretpostavimo da imamo investitora koji kupuje evropsku put opciju sa strike cenom 90\$ čija podloga je jedna akcija IBM-a. Neka je trenutna cena akcije 85\$, neka dospeva za tri meseca i neka je cena opcije 7\$. Pošto je reč o evropskoj opciji, ako je cena na datum dospeća iznad 90\$ investitor neće izvršiti opciju i imaće gubitak od 7\$. Sa druge strane, ako je cena akcije ispod 90\$, na primer 75\$ investitor će izvršiti opciju. On tada ostvaruje prihod od 15\$. Kada taj prihod umanjimo za početne troškove od 7\$ vidimo da njegov profit iznosi 8\$.

2.2.2 Američke opcije

Američke opcije su finansijski instrumenti (ugovori) koji kupcu daju pravo da kupi ili proda određenu podlogu u bilo kom trenutku pre datuma dospeća T za unapred određenu cenu, ali nije u obavezi da to uradi.

Definicija 2.5
Američka call opcija daje pravo, ali ne i obavezu, kupcu da kupi određenu podlogu u bilo kom trenutku pre datuma dospeća T, za unapred određenu cenu.

Prihod američke call opcije je dat sa:

$$f(S,K)=\begin{cases} S(t)-K, \ \text{ako je } S(t)>K, t\le T \\ 0, \ \text{inače} \end{cases}$$

Ovde opet govorimo o prihodu vlasnika opcije.

Ponovo, američku call opciju ima smisla izvršiti samo kada je cena akcije veća od strike cene K.

Definicija 2.6
Američka put opcija daje pravo, ali ne i obavezu kupcu da proda određenu podlogu u bilo kom trenutku pre datuma dospeća T, za unapred određenu cenu.

Prihod američke put opcije je dat sa:

$$f(S,K)=\begin{cases} K-S(t), & \text{ako je } K>S(t), t\le T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ovde je opet reč o prihodu vlasnika opcije.

Postoje američke opcije bez datuma dospeća (eng. perpetual american options, infinite time horizont american options). Ovim opcijama se ne može trgovati, ali će nam one pomoći prilikom rada kod neprekidnog modela (Poglavlje 4). Ove opcije će nam zapravo mnogo olakšati račun.

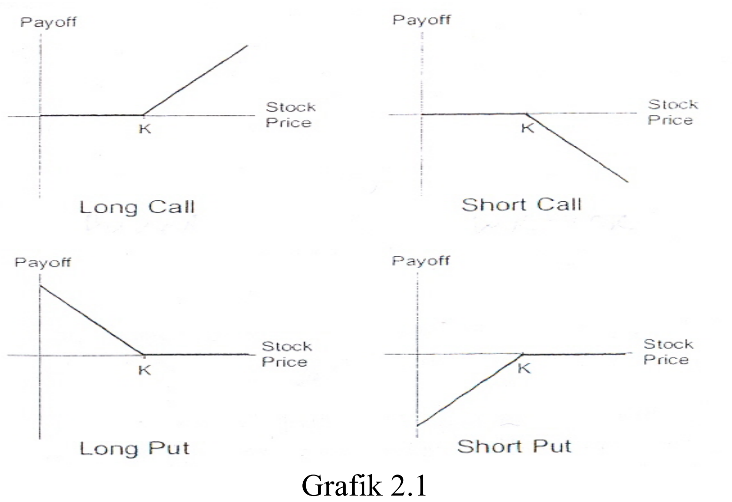
2.3 Pozicije u opciji

U svakom od ovih ugovora imamo dve pozicije. Kažemo da prodavac opcije zauzima kratku (eng. short) poziciju, a kupac dugu (eng. long) poziciju.

Znači, razmatraćemo četiri tipa pozicija u opcijama:

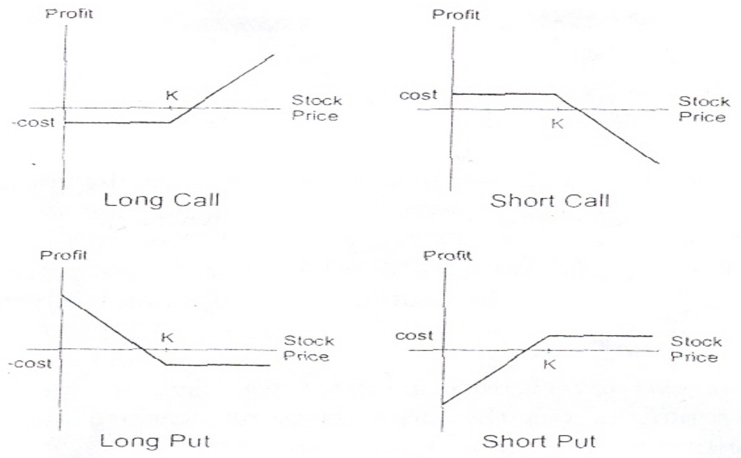
1. duga pozicija u call opciji
2. kratka pozicija u call opciji
3. duga pozicija u put opciji
4. kratka pozicija u put opciji

Na sledećem grafiku su prikazani prihodi za ove četiri pozicije.



Grafik 2.1

Profiti su dati na Grafiku 2.2.



Grafik 2.2

Navedimo neke osobine za profite i gubitke ovih pozicija.

Long call pozicija:

- gubitak je ograničen od dole: donji limit je cena call opcije
- profit je neograničen od gore: nemamo ograničenje na cenu akcije
- ovo je optimistička pozicija: kupac se nada da će cena akcije rasti
- ako se nalazimo u long call poziciji, opciju treba izvršiti kada je cena akcije iznad strike cene.

Short call pozicija:

- gubitak je neograničen od dole: ponovo, nemamo ograničenje na cenu akcije
- profit je ograničen od gore: gornji limit je cena call opcije
- ovo je pesimistička pozicija
- ako smo u short call poziciji, ostvarićemo prihod samo ako je cena akcije ispod strike cene.

Long put pozicija:

- gubitak je ograničen od dole: donji limit je cena put opcije
- profit je ograničen od gore: cena akcije može pasti do nule i u tom slučaju je profit jednak proizvodu strike cene i broja akcija minus cena put opcije
- ovo je pesimistička pozicija: kupac se nada da će cena akcije pasti
- ako se nalazimo u long put poziciji, opciju treba izvršiti kada je cena akcije ispod strike cene.

Short put pozicija:

- gubitak je ograničen od dole: ponovo, cena akcije može pasti samo do nule, pa je gubitak jednak proizvodu strike cene i broja akcija plus cena put opcije
- profit je ograničen od gore: gornji limit je cena put opcije
- ovo je optimistička pozicija
- ako se nalazimo u short put poziciji, ostvarićemo prihod samo ako je cena akcije iznad strike cene .

Ako pisac call opcije poseduje akcije u trenutku kada napiše opciju, kažemo da je reč o *pokrivenoj opciji* (eng. covered call). Sa druge strane, ako pisac ne poseduje akcije u trenutku kada napiše opciju, kažemo da je reč o *nepokrivenoj opciji* (eng. uncovered, naked). Naravno, pisanje pokrivenih call opcija je mnogo bezbednije.

2.4 Gornje granice za cene opcija

Ako je cena opcije iznad gornje granice imamo mogućnost arbitraže.

Uvešćemo sledeće oznake:
C^A - cena američke call opcije
P^A - cena američke put opcije
C^E - cena evropske call opcije
P^E - cena evropske put opcije

Cena američke i evropske call opcije ne može biti veća od trenutne cene akcije, tj.

$$C^A < S(0) \text{ i } C^E < S(0).$$

Kada ovo ne bi bilo tačno, imali bi mogućnost arbitraže tako što kupimo akciju i prodamo call opciju.

Sa druge strane, cena američke i evropske put opcije ne može biti veća od strike cene K tj.

$$P^A < K \text{ i } P^E < K$$

U suprotnom ponovo imamo mogućnost arbitraže.

2.5 Izvršavanje opcije pre datuma dospeća

Teorema 2.1
Pretpostavimo da je podloga za opciju akcija koja ne plaća dividende.
Za američku i evropsku call opciju pod istim uslovima, važi da je

$$C^A = C^E .$$

Za američku i evropsku put opciju važi da je

$$P^A \geq P^E .$$

Zapravo, nikada nije optimalno izvršiti američku call opciju pre datuma dospeća.

Intuitivno objašnjenje: (za detalje videti [4])
Pretpostavimo da investitor poseduje američku call opciju koja dospeva za mesec dana , čija strike cena je 40$. Neka je trenutna cena akcije 50$. Investitor može izvršiti opciju odmah i time ostvariti prihod od 10$. Međutim, ako investitor planira da zadrži akciju više od jednog meseca, izvršenje opcije ne bi bilo najbolja strategija. Bolja strategija bi bila izvršiti je za mesec dana. Onda on plaća 40$ takođe, ali to radi mesec dana kasnije, pa tih 40$ može staviti u banku na mesec dana i tako još malo zaraditi. Sa druge srane, može se desiti da cena akcije padne ispod 40$ za mesec dana. U tom slučaju investitor neće izvršiti opciju i biće mu drago što je nije izvršio ranije. A šta ako investitor smatra da je akcija precenjena i pita se da li da izvrši opciju i zatim proda akciju? U ovom slučaju bolje mu je da proda opciju nego da je izvrši. Opciju će kupiti drugi investitor koji želi da zadrži akciju. Takav investitor mora postojati jer inače cena akcije ne bi bila 50$, a prvi investitor će zaraditi više od 10$.

Sa druge strane, može biti optimalno izvršiti put opciju pre datuma dospeća.

Razmotrimo sledeću ekstremnu situaciju. Neka je strike cena 10$ i cena akcije je"nula". Ako bi odmah izvršio opciju, investitor bi ostvario prihod od 10$. Ako čeka, on može zaraditi manje od 10 $, ali ne može više od toga jer cena akcije ne može biti negativna. I naravno, 10$ danas je bolje nego 10$ u budućnosti.

2.6 Učesnici na tržištu

Opcije se primarno koriste za hedžing i špekulaciju (naravno i arbitraža je dobra ako ju je moguće ostvariti). Zbog toga se investitori, odnosno učesnici na tržištu opcija dele na hedžere (eng. hedgers), špekulante (eng. speculators) i arbitražere (eng. arbitrageurs).

Hedžeri žele da smanje rizik svoje investicije pomoću druge investicije. Na primer, pretpostavimo da investitor trenutno poseduje 1000 akcija IBM-a čija je trenutna cena 88$ po akciji. Ako dođe do većeg pada cene akcija u narednoj godini, investitor bi bio na većem gubitku. On zbog toga kupuje američku put opciju sa strike cenom od 85$ i rokom dospeća godinu dana. Neka je cena ovakvog ugovora 1.5$ po akciji. To znači da će investitor potrošiti 1 500$ da bi zaštitio investiciju od 88 000 $.

Za razliku od hedžera koji kupuju opcije da bi se zaštitili od neprijatnih pomeranja na tržištu, špekulanti žele da zauzmu poziciju na tržištu tako što se klade da li će cena akcija otići gore ili dole. Na primer, ako predviđaju da će cena akcija otići gore, kupuju call opciju pa pokušavaju da zarade kasnije.

Arbitražeri pokušavaju da ostvare profit tako što kupuju i prodaju na različitim tržištima. Najčešće su to London i Njujork (videti primer u četvrtom poglavlju). Ali same mogućnosti arbitraže traju kratko.

3. Teorija problema optimalnog zaustavljanja

3.1 Kratka istorija o problemima optimalnog zaustavljanja

Prvi rezultati teorije optimalnog zaustavljanja dobijeni su u diskretnom slučaju. Formulacija problema optimalnog zaustavljanja za diskretne stohastičke procese se prvo javila u sekvencijalnoj analizi gde broj observacija nije fiksiran unapred, već slučajan broj određen ponašanjem onoga što posmatramo.
Snell je bio prvi koji je došao do rezultata u teoriji optimalnog zaustavljanja za stohastičke procese u slučaju kada je vreme posmatrano kao diskretno. Dok je Snell došao do rezultata u diskretnom slučaju, Dynkin je prvi došao do opštih rezultata na problemima optimalnog zaustavljanja za Markovske procese gde je vreme bila neprekidna promenljiva.

3.2 Vreme zaustavljanja

U ovom i narednom poglavlju ćemo pretpostavljati da radimo na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kolekciju informacija dostupnih do trenutka t ćemo označavati sa $\mathcal{F}_t$, a prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ ćemo zvati "*filtrirani prostor verovatnoća*".

<u>Definicija 3.1</u>
Slučajna promenljiva τ definisana na Ω se naziva vreme zaustavljanja ako događaj $\tau \leq t$ pripada $\mathcal{F}_t$, za svako *t*.

<u>Definicija 3.2</u>
Ako je $(X_t)_{t \geq 0}$ stohastički proces, onda je problem optimalnog zaustavljanja dat sa

$$V(x) = \max_{\tau \in S_\tau} E_x(G(X_\tau)),$$

gde je S_τ skup svih vremena zaustavljanja za X. Funkcija $V(x)$ se naziva funkcija vrednosti (eng. value function), a G se naziva funkcija nagrade (eng. reward function).

Napomena 3.1: U problemima optimalnog zaustavljanja mi često želimo da otkrijemo da li da nastavimo proces i time povećavamo troškove (u cilju veće nagrade u budućnosti) ili da zaustavmo proces sa trenutnim dobitkom.

U problemima optimalnog zaustavljanja želimo da pronađemo rešenje datog problema tako da ostvarimo najveći mogući prihod. Američke opcije su dobar primer gde je teorija optimalnog zaustavljanja praktično primenjena jer vlasnik američke opcije opciju izvršava samo jednom i želi maksimalan prihod.

Problemi optimalnog zaustavljanja zahtevaju određivanje odgovarajućeg trenutka u kom može biti ostvarena maksimalna isplata. Najraniji trenutak $\tau^* \in S_\tau$ takav da izvršavanje dostiže maksimalnu vrednost se naziva *optimalno vreme zaustavljanja*.

Može postojati više optimalnih vremena zaustavljanja, trenutaka u kojima možemo ostvariti maksimalni prihod (pod tim mislimo na funkciju nagrade), ali nas interesuje prvo optimalno vreme jer hoćemo za što kraće vreme da maksimiziramo profit.

Onaj ko drži opciju mora odlučiti kada će je izvršiti. Takvu odluku treba doneti oprezno jer :

1) nagrade i troškovi ovih akcija su funkcije vremena
2) izvršenje opcije je često nepovratno ili nas košta ponovno izvršenje

Da bi ilustrovali dve prethodne rečenice, razmotrimo primer američke opcije. Vidimo da prva rečenica znači da će najveći prihod zavisiti od cene podloge u konkretnom trenutku. Druga znači da kada izvršimo opciju ne možemo to ponovo uraditi osim ako ne kupimo novu opciju.

Definicija 3.3

Optimalno vreme zaustavljanja τ je vreme zaustavljanja koje maksimizira vrednost E_x za svaku inicijalnu vrednost x.

Napomena 3.2: Ne možemo sve probleme posmatrati kao probleme optimalnog zaustavljanja, ali američke opcije možemo. Generalno, optimalno vreme zaustavljanja možda ne postoji.

Dodatno, ako je problem optimalnog zaustavljanja moguće rešiti, njegovo rešenje treba da se sastoji od funkcije vrednosti V, odgovarajuće vrednosti akcije i vremena zaustavljanja u kom je maksimalna vrednost ostvarena.

3.3 Formulacija prostog problema optimalnog zaustavljanja

Cilj ovog i narednog odeljka je da formulišemo i rešimo prosti problem optimalnog zaustavljanja. Njegovo rešenje će nam pomoći da odredimo najbolji trenutak za izvršenje američke put opcije jer ćemo taj problem u narednom poglavlju posmatrati kao problem optimalnog zaustavljanja.

Razmotrimo prosti problem optimalnog zaustavljanja koji je dat sa

$$V(x) = \max_{\tau \in S_\tau} E_x(e^{-\mu\tau} f(X_\tau)), \tag{3.1}$$

pri čemu je

$$dX_t = pX_t dt + qX_t dW_t \quad \text{i} \quad X(0) = x. \tag{3.2}$$

Označimo sa τ vreme zaustavljanja, sa τ^* optimalno vreme zaustavljanja, sa x_* cenu akcije u trenutku τ^*, tj. $x_* = x(\tau^*)$. Neka je μ diskontna stopa, a p i q pozitivni celi brojevi. Takođe,

- dW_t nazivamo priraštaj Vinerovog procesa
- $f(\cdot)$ nazivamo funkcijom nagrade
- $V(\cdot)$ nazivamo funkcijom vrednosti.

Veza između t i X je data jednačinom (3.2). Zbog toga će izbor τ koje dostiže maksimalnu vrednost za $V(x)$ zavisiti od jednačine (3.2).

Kada razmišljamo o tome kada izvršiti opciju, to ne bi trebalo uraditi razmatranjem samo vremena, ali mi želimo da znamo da li funkcija vrednosti dostiže maksimum u trenutku izvršenja opcije. Opciju bi trebalo izvršiti u optimalnom trenutku (u optimalnom vremenu zaustavljanja) i nikako drukčije. To znači da treba da maksimiziramo prihod za što kraće vreme. Naše rešenje će se sastojati od optimalnih vrednosti x_* i τ^*.

Napomena 3.3: Funkcija f je trenutno nepoznata.

3.4 Rešenje problema optimalnog zaustavljanja

Razmotrimo situaciju gde imamo problem optimalnog zaustavljanja dat na sledeći način (kao što je dato u prethodnom odeljku):

$$V(x) = \max_{\tau \in S_\tau} E_x(e^{-\mu\tau} f(X_\tau)) \tag{3.3}$$

i

$$dX_t = pX_t dt + qX_t dW_t \tag{3.4}$$

pri čemu je $p > 0$ i $q > 0$. Proces X_t, koji je dat jednačinom (3.4), zovemo *geometrijsko Braunovo kretanje* i taj proces ima sledeće osobine:

- ako je inicijalna vrednost $x > 0$ onda je $X_t \geq 0$ za sve $t \geq 0$
- ako je $X(0) = 0$, on uvek ostaje nula

Pretpostavljamo da je $\mu > p$ i $\mu > 0$ u cilju nalaženja rešenja problema. U svakom trenutku odluka o tome da li ćemo izvršiti opciju ili ne zavisi od toga da li je prihod optimalan.

U proučavanju ovog problema imamo sledeće pretpostavke:

- funkcije f i V su glatke
- pošto su f i V funkcije koje predstavljaju tržišne vrednosti aktive onda je
$$f(x), V(x) \geq 0$$
- troškovi transakcija nisu uzeti u razmatranje, tj. pretpostavljamo da su jednaki nuli.

U ovom odeljku moramo da nadjemo optimalnu vrednost x_* (a pomoću nje ćemo naći i ostale optimalne vrednosti). Možemo reći da, dok je cena akcije manja od x_*, mi biramo da ne izvršimo opciju. Ako je cena veća ili jednaka sa x_*, izvršavamo opciju. Kada je $x = x_*$ optimalno je izvršiti opciju. U toj tački funkcije V i f su jednake. To znači da je:

$$V(x_*) = f(x_*). \tag{3.5}$$

Ovaj uslov zovemo **value matching uslov**. Odluka o tome da li izvršiti ili ne izvršiti opciju je zasnovana na proučavanju optimalnosti u svakoj vrednosti x i donosimo je na osnovu funkcije ψ koja je data sa:

$$\psi(x) = \max\{V(x), f(x)\}.$$

Ako je $\psi(x) = V(x)$ nastavljamo proces, a ako je $\psi(x) = f(x)$ zaustavljamo se.

U cilju nalaženja optimalnog rešenja ovog problema, u razmatranje ćemo uključiti i **smooth pasting uslov** koji kaže da je:

$$V^{'}(x_{*}) = f^{'}(x_{*}). \tag{3.6}$$

Vidimo da uslov (3.6) kaže da su $V^{'}(x)$ i $f^{'}(x)$ jednake u optimalnoj vrednosti x_{*}, dok uslov (3.5) kaže da su $V(x)$ i $f(x)$ jednake u x_{*}. Ako ta dva uslova gledamo zajedno možemo reći da je $\psi(x)$ glatka i neprekidna u optimalnoj vrednosti x_{*}.

Kada je $f(x) \geq V(x)$ mi izvršavamo opciju jer je "vrednost zaustavljanja" (eng. stopping value) veća od "vrednosti nastavka" (eng. continuing value). Međutim, optimalno je izvršiti kada je $f(x) = V(x)$. Ovo je zbog toga što ćemo morati duže da čekamo do trenutka kada je $f(x) > V(x)$. S druge strane ako je $f(x) < V(x)$, optimalno je nastaviti dalje. Ovo nas vodi do pojmova "regiona zaustavljaja" i "regiona nastavka".

Region zaustavljanja je dat sa:

$$S_{rg} = \{x : f(x) \geq V(x)\}.$$

Region nastavka je dat sa:

$$C_{rg} = \{x : V(x) > f(x)\}.$$

Iz ove činjenice možemo izraziti optimalno vreme zaustavljanja kao

$$\tau^{*} = \inf\{t \geq 0 : \; V(X_t) \leq f(X_t)\}. \tag{3.7}$$

Iz (3.7) vidimo da je optimalno vreme zaustavljanja prvi trenutak u kom funkcija vrednosti nije veća od funkcije nagrade.

Sada je optimalni region zaustavljanja dat sa:

$$S_{rg}^{*} = \{x : f(x) = V(x)\}.$$

Ovaj skup je poznat kao *granica optimalnog zaustavljanja*. Granica optimalnog zaustavljanja deli prostor stanja (eng. state space) na region zaustavljanja i region nastavka. Na ovoj granici dve funkcije su jednake. Iako granica optimalnog zaustavljanja deli dva regiona, ona je deo regiona zaustavljanja i tada je optimalno izvršiti opciju. Bitno je primetiti da je na granici optimalnog zaustavljanja $x = x_{*}$.

Sada se vratimo rešavanju našeg početnog problema, tj. pronađimo x_*, τ^* i V.

Pretpostavimo da je i dalje optimalno nastaviti mali vremenski period σt posle optimalnog vremena zaustavljanja. Onda je

$$V(x) = e^{-\mu\sigma t} E(V(x+\sigma x)). \tag{3.8}$$

Ako $V(x+\sigma x)$ razvijemo u Tejlorov red dobijamo:

$$V(x+\sigma x) \approx V(x) + \sigma x V'(x) + \frac{1}{2}(\sigma x)^2 V''(x) + O((\sigma x)^3). \tag{3.9}$$

Ako zanemarimo "ostatak" i zamenimo (3.9) u (3.8) dobijamo:

$$V(x) \approx e^{-\mu\sigma t} E[V(x) + \sigma x V'(x) + \frac{1}{2}(\sigma x)^2 V''(x)],$$

odnosno,

$$V(x) \approx e^{-\mu\sigma t}[V(x) + V'(x)E(\sigma x) + \frac{1}{2}V''(x)E((\sigma x)^2)]. \tag{3.10}$$

Kada od obe strane oduzmemo $e^{-\mu\sigma t}V(x)$ dobijamo:

$$(1-e^{-\mu\sigma t})V(x) \approx e^{-\mu\sigma t}[V'(x)E(\sigma x) + \frac{1}{2}V''(x)E((\sigma x)^2)] . \tag{3.11}$$

Ako pomnožimo (3.11) sa $\dfrac{1}{\sigma t}$ dobijamo:

$$\frac{(1-e^{-\mu\sigma t})V(x)}{\sigma t} \approx e^{-\mu\sigma t}(\sigma t)^{-1}[V'(x)E(\sigma x) + \frac{1}{2}V''(x)E((\sigma x)^2)]. \tag{3.12}$$

Sada pustimo da $\sigma t \to 0$. (3.12) onda postaje:

$$\mu V(x) = (dt)^{-1}[V'(x)E(dx) + \frac{1}{2}V''(x)E((dx)^2)]. \tag{3.13}$$

Iz SDJ date na početku sa $dx = pxdt + qxdW$ sledi da je:

$$E(dx) = pxdt \ \text{ i } \ E((dx)^2) = (qx)^2 dt \tag{3.14}$$

Ako zamenimo (3.14) u (3.13) dobijamo:

$$\mu V(x) = pxV'(x) + \frac{1}{2}(qx)^2 V''(x). \tag{3.15}$$

Uslov (3.15) nazivamo **asset equilibrium uslov**.

On kaže da mera zarade koja može biti ostvarena ako se aktivom trguje na tržištu i prihoda ostvarenog ako se aktiva investira u banku po nerizičnoj kamatnoj stopi treba da bude ista. Ako to nije ispunjeno imamo mogućnost arbitraže. To će značiti da opcija nije izvršena u optimalnom trenutku.

U (3.15), $\mu V(x)$ je zarada koju je moguće ostvariti ako trgujemo aktivom na tržištu, dok je $pxV'(x)+\frac{1}{2}V''(x)(qx)^2$ zarada ako se aktiva investira u banku .

Ako imamo nejednakost u (3.15) aktiva je ili podcenjena (eng. undervalued) ili precenjena (eng. overvalued).

Ako je $\mu V(x) < pxV'(x)+\frac{1}{2}V''(x)(qx)^2$ kažemo da je aktiva podcenjena. To znači da bi imali veći prihod da smo aktivu investirali u banku po nerizičnoj kamatnoj stopi.

Sa druge strane, ako je $\mu V(x) > pxV'(x)+\frac{1}{2}V''(x)(qx)^2$ to znači da ćemo ostvariti veći prihod prodajom aktive na tržištu (po njenoj tržišnoj vrednosti u tom konkretnom trenutku) nego da smo investirali u banku. Tada kažemo da je aktiva precenjena.

Iz (3.15) imamo da je:

$$pxV'(x)+\frac{1}{2}q^2x^2V''(x)-\mu V(x)=0 .$$

Naš zadatak je da rešimo diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{1}{2}q^2x^2V''(x)+pxV'(x)-\mu V(x)=0 . \tag{3.16}$$

Data homogena diferencijalna jednačina je Cauchy-Euler-ova jednačina i rešenje možemo dobiti pogađanjem. Neka je:

$$V(x)=kx^{\omega}$$

Iz toga sledi da je

$$xV'(x)=\omega kx^{\omega} \quad \text{i} \quad x^2V''(x)=\omega(\omega-1)kx^{\omega} .$$

Ako zamenimo sve to u (3.16) i malo sredimo, dobijamo:

$$kx^{\omega}[q^2\omega(\omega-1)+2p\omega-2\mu]=0 .$$

Daljim sređivanjem dobijamo:

$$kx^{\omega}[q^2\omega^2+(2p-q^2)\omega-2\mu]=0 . \tag{3.17}$$

Napomena 3.4: *k, p, q* su konstante i $x>0$.

Rešavanjem (3.17) po ω dobijamo sledeća rešenja:

$$\omega_{\pm} = \frac{(q^2 - 2p) \pm \sqrt{(2p - q^2)^2 + 8q^2\mu}}{2q^2}. \tag{3.18}$$

Sledi da imamo dva rešenja prethodne jednačine (3.16). To su

$$V(x) = kx^{\omega_{\pm}}.$$

To impilicira da će opšte rešenje biti linearna kombinacija ovih rešenja. Zbog toga je rešenje dato sa:

$$V(x) = k_1 x^{\omega_+} + k_2 x^{\omega_-}. \tag{3.19}$$

Ako zamenimo (3.19) u value matching uslov i u smooth pasting uslov, imaćemo tri nepoznate k_1, k_2 i x_*, a dve jednačine. Trebaće nam treća jednačina da bi dobili jedinstveno rešenje. Uslov koji ćemo razmatrati se naziva **granični uslov** (eng. boundary condition).

Iz osobina geometrijskog Braunovog kretanja, videli smo da kada god je $x = 0$ treba da ostane nula stalno i stoga optimalna vrednost x_* neće biti nikada dostignuta. Iz (3.19) vidimo da je

$$V(0) = 0 \tag{3.20}$$

i to je naš treći uslov.

Napomena 3.5: Iz (3.18) je jasno da je $\omega_+ > 0$ i $\omega_- < 0$, pošto je $\mu > 0$.

Primenjujući ovu napomenu na (3.19) možemo videti da kada $x \to 0$, tada $k_2 x^{\omega_-} \to +\infty$ za $k_2 > 0$. Takođe, kada $x \to 0$, tada $k_2 x^{\omega_-} \to -\infty$ za $k_2 < 0$. To implicira da uslov (3.20) može važiti samo ako je $k_2 = 0$.

Napomena 3.6: Prvi član u (3.19) ide u nulu kada $x \to 0$. Time je zadovoljen uslov u (3.20).

Stoga, jednakost (3.19) možemo zapisati sa:

$$V(x) = k_1 x^{\omega_+} \quad \text{jer je } k_2 = 0. \tag{3.21}$$

Primenjujući (3.21) na value matching uslov (3.5) i na smooth pasting uslov (3.6) dobijamo:

$$k_1 x_*^{\omega_+} = f(x_*)$$

i

$$\omega_+ k_1 x_*^{[(\omega_+)-1]} = f^{'}(x_*)$$

Kombinovanjem ove dve jednakosti dobijamo:

$$\frac{(\omega_+) f(x_*)}{x_*} = f^{'}(x_*),$$

pa je optimalna vrednost akcije za ovaj problem data sa:

$$x_* = \frac{(\omega_+) f(x_*)}{f^{'}(x_*)}. \tag{3.22}$$

Pošto smo dobili optimalnu vrednost x_*, možemo izvesti optimalno vreme zaustavljanja τ^* kao:

$$\begin{aligned} \tau^* &= \min\{t \geq 0 : X_t = x_*\} \\ &= \min\{t \geq 0 : X_t = \frac{(\omega_+) f(x_*)}{f^{'}(x_*)}\}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Funkcija vrednosti u ovim optimalnim vrednostima postaje:

$$V(x) = E_x(e^{-\mu\tau^*} f(x_*)).$$

Funkcija $f(x)$ zavisi od problema koji rešavamo.

<u>Primer 3.1</u>

Razmotrimo slučaj gde imamo robu čija cena zavisi od težine (misli se da težinu posmatramo kao podlogu; npr. stoka, voće...). Hoćemo da utvrdimo optimalnu težinu za prodaju robe. Neka a bude cena u kg "po jedinici aktive". Ako su b troškovi transakcije, možemo formulisati f na sledeći način:

$$f(x) = ax - b.$$

Sada je

$$f^{'}(x) = a.$$

Zamenjujući ovo u (3.22) dobijamo da je:

$$x_* = \frac{(ax_* - b)\omega_+}{a}$$

što nam daje

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{-b\omega_+}{[1-(\omega_+)]a} \\ &= \frac{b\omega_+}{[(\omega_+)-1]a}. \end{aligned}$$

Optimalno vreme zaustavljanja za ovaj konkretan primer je:

$$\tau^* = \min\{t \geq 0 : X_t = \frac{b\omega_+}{[(\omega_+) - 1]a}\}$$

Napomena 3.7: Pretpostavka koju smo naveli ranije da je $\mu > p$ je tu zbog toga da bi bilo $\omega_+ > 1$ i samim tim $x_* > 0$.

Prethodno navedena strategija može biti korišćena za rešavanje mnogih problema optimalnog zaustavljanja. Međutim, bitno je naglasiti da funkcija $f(x)$ nije jedinstvena već se menja od problema do problema.

Napomena 3.8: U ovom problemu optimalnog zaustavljanja funkcija nagrade *f* i funkcija vrednosti V su samo funkcije od *x*, a ne od *x* i *t*. Stoga, problem koji smo rešili u ovom poglavlju je mnogo jednostavniji nego opšti problem.

4. Neprekidni model

U ovom poglavlju videćemo kako američke opcije možemo posmatrati kao probleme optimalnog zaustavljaja. Podloga za opciju će biti akcija koja ne plaća dividende.

4.1 Kratka istorija američkih opcija kao problema optimalnog zaustavljanja

Bensoussan i Karatzas su bili prvi koji su pokazali da cenu američke put opcije možemo tretirati kao problem optimalnog zaustavljanja. McKean je zatim izveo slobodni granični problem za diskontovanu američku call opciju sa funkcijom nagrade $f(x) = e^{-\beta t}(x-K)^+$. On je izrazio cenu opcije V kao funkciju granice optimalnog zaustavljanja u prebrojivoj nelinearnoj integralnoj jednačini. Međutim, McKean nije dokazao postojanje i jedinstvenost rešenja ovog sistema jednačina.
Moerbeke je zatim izveo nelinearnu integralnu jednačinu za granicu. Dokazao je postojanje i jedinstvenost rešenja ove jednačine za opšte probleme optimalnog zaustavljanja. Međutim, njegov rad je bio ograničen na diskontovane američke call opcije.
Steven Shreve je ispitivao američke put opcije u diskretnom vremenu. Goran Peskir i Albert Shiryaev u [2] razmatraju kako različite tipove opcija možemo posmatrati kao probleme optimalnog zaustavljanja pod pretpostavkom da je vreme neprekidna promenljiva. Pišu o američkim put opcijama, ruskim opcijama i azijskim opcijama kao problemima optimalnog zaustavljanja.

4.2 Pretpostavke modela

Finansijska tržišta su kompleksna. Kao i sa svim kompleksnim sistemima, kreiranje matematičkog modela sistema zahteva pojednostavljivanje nekih pretpostavki.

Pretpostavljaćemo da uvek postoji nerizična aktiva (tj. novac uvek možemo staviti u banku ili kupiti obveznicu). Osim toga, imaćemo još par ne tako realnih pretpostavki. One će nam pomoći u analizi i možemo mnogo naučiti o tome kako tržište funkcioniše na osnovu ovih prostih modela.

Pretpostavke u našim modelima će biti da:

- nema troškova transakcija ni provizija i sve transakcije se dešavaju odmah
- nema ograničenja na kratku prodaju, tj. kratka prodaja je dozvoljena
- pretpostavićemo da je stopa po kojoj možemo pozajmiti novac od nekoga ista kao i stopa po kojoj nekome možemo pozajmiti novac (eng. lending rate is equal to borrowing rate).
- ako neku aktivu možemo kupiti za cenu S onda je možemo i prodati za cenu S.

Još jedna pretpostavka koju ćemo imati je ta da na tržištu nema arbitraže.

Kažemo da imamo mogućnost arbitraže ako možemo pronaći investiciju koja za rezultat ne može imati gubitak, a postoji pozitivna verovatnoća da ostvarimo profit. Naglasimo da profit nije zagarantovan, već samo nemogućnost gubitka. Čak možemo reći da je ova pretpostavka prilično realna. Preciznije, ako se pojavi mogućnost arbitraže, vrlo brzo će se cene prilagoditi tome da eliminišu tu mogućnost. Evo i primera zašto je tako: neka je cena zlata po unci u Njujorku 380.10$, a u Londonu je 380.20$. Onda investitori mogu kupiti zlato u Njujorku i prodati ga u Londonu, ostvarujući profit od 10 centi po unci. Ali, kupovinom zlata u Njujorku će cena zlata otići naviše, a prodaja zlata u Londonu će tamo spustiti cenu. Rezultat: nema više arbitraže.

Napomenimo da pretpostavke koje smo naveli u ovom odeljku će važiti za Poglavlje 4 i Poglavlje 5.

4.3 Formulacija problema

Razmatraćemo američke put opcije koje nemaju rok dospeća, tj. smatramo da je rok dospeća beskonačan (eng. perpetual american options, american put with infinite time horizon). Razlog zašto ćemo se baviti ovim put opcijama je taj da će cena ove opcije biti funkcija samo cene aktive i optimalna granica zaustavljanja je konstantna funkcija. Zbog toga je problem lakše rešiti.
Opcije koje imaju datum dospeća se nešto teže rešavaju ovim metodom. Cena ovakve opcije je funkcija i vremena i cene akcije x. Granica optimalnog zaustavljanja nije konstantna već funkcija vremena. Štaviše, tačan region nastavka je onda nepoznat i kao rezultat toga analitičko rešenje je veoma teško (možda nemoguće) naći.

Mi hoćemo da pronađemo optimalno vreme zaustavljanja i optimalnu cenu američke put opcije koja nema datum dospeća (naravno bez mogućnosti arbitraže).

Neka je $W=(W_t)_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje i $t_0=0$. Neka je $X=(X_t)_{t\geq 0}$ geometrijsko Braunovo kretanje i neka cena akcije prati to kretanje. Dodatno, neka su $\sigma>0$ i $r>0$ volatilnost i nerizična kamatna stopa, respektivno.

Onda proces cena akcije $X=(X_t)_{t\geq 0}$ zadovoljava

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \text{ pri čemu je } X_0 = x > 0. \tag{4.1}$$

<u>Teorema 4.1</u>
Rešenje SDJ date sa (4.1) je dato sa:

$$X_t = X_0 \exp\left((r-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \right).$$

Dokaz

Jednačinu (4.1) možemo zapisati kao

$$\frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma dW_t . \tag{4.2}$$

Ako iskoristimo Itovu formulu pri čemu je $g(x,t) = \log x$, sledi

$$d(\log X_t) = \frac{\partial g}{\partial t} dt\bigg|_{x=X_t} + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t\bigg|_{x=X_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dX_t)^2\bigg|_{x=X_t} . \tag{4.3}$$

Očigledno je da funkcija $g(x,t) = \log x$ ne zavisi od *t* pa je prvi član u (4.3) jednak nuli.

Stoga, (4.3) se redukuje na:

$$d(\log X_t) = \frac{\partial g}{\partial x} dX_t\bigg|_{x=X_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dX_t)^2\bigg|_{x=X_t} . \tag{4.4}$$

Kada zamenimo $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$ dobijamo:

$$d(\log X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2}(dX_t)^2 . \tag{4.5}$$

Iz (4.2) sledi da je

$$\left(\frac{dX_t}{X_t}\right)^2 = r^2(dt)^2 + 2r\sigma dtdW_t + \sigma^2 dW_t dW_t .$$

Primenjujući osobine iz Itovog računa ($dt \cdot dt = 0$, $dt \cdot dW_t = 0$, $dW_t \cdot dW_t = dt$) dobijamo:

$$\left(\frac{dX_t}{X_t}\right)^2 = \sigma^2 dt .$$

Ovim se (4.5) svodi na:

$$d(\log X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt . \tag{4.6}$$

Kombinujući (4.2) i (4.6) dobijamo:

$$d(\log X_t) = rdt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt .$$

Malim sređivanjem dobijamo:

$$d(\log X_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t .$$

Integralimo sve sada od nula do *t*, tj.

$$\int_0^t d(\log X_s) = \int_0^t (r - \frac{1}{2}\sigma^2) ds + \int_0^t \sigma dW_s .$$

Rešavanjem dobijamo da je:

$$[\log X_s]\Big|_0^t = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma dW_t .$$

Konačno imamo da je:

$$X_t = X_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \right). \tag{4.7}$$

Napomena 4.1: Oznaka $\log X_t$ predstavlja prirodni logaritam tj. $\log_e X_t$.

Cena američke put opcije bez datuma dospeća, bez mogućnosti arbitraže je

$$V(x) = \max_{\tau \in S_\tau} E_x[e^{-r\tau}(K - X_\tau)^+)], \tag{4.8}$$

gde je K strike cena, τ vreme zaustavljanja, X_t proces cene akcije u trenutku *t* za koji važi jednačina (4.7). Bitno je primetiti da je funkcija nagrade za jednačinu (4.8) data sa $f(x) = (K - x)^+$, i X_τ u funkciji nagrade je rešenje X_t jednačine (4.7) kada je $t = \tau$.

Problem sa kojim se suočavamo je određivanje optimalne cene i optimalnog vremena zaustavljanja, recimo τ_*, kada bi trebalo izvršiti opciju, a da u tom trenutku ostvarimo maksimum prema jednačini (4.8). Koristeći argument da nema arbitraže, optimalno vreme zaustavljanja postaje najbolje vreme za zaustavljanje i ako nastavimo dalje, zapravo gubićemo novac čak i ako cena akcije nastavi da pada.

4.4 Rešenje problema

Znamo da je optimalno vreme za izvršenje američke put opcije momenat kada cena akcije padne što je više moguće. Međutim, mi takođe moramo razmatrati vreme i cenu opcije da bi izvršili opciju. Opciju treba izvršiti što pre od trenutka kupovine, ali u trenutku kada imamo najveću moguću isplatu.

Stoga, pretpostavljamo da postoji tačka $p \in (0, K)$ tako da je

$$\tau_p = \min\{t \geq 0 : X_t \leq p\}. \tag{4.9}$$

Mi treba da pronađemo tačku p koja će nam dati optimalnu cenu u cilju nalaženja optimalnih vrednosti za $V(x)$ i τ_p (optimalnu vrednost za τ_p ćemo kasnije označavati sa τ_*).

Američka put opcija bez datuma dospeća je samo specijalan slučaj problema optimalnog zaustavljanja rešenog u prethodnom poglavlju. Rezultate iz tog poglavlja možemo primeniti ovde. Bitno je primetiti da je p slično sa x_* iz jednačine (3.22).

Takođe je bitno naglasiti da je p cena akcije između 0 i K. Opciju ima smisla izvršiti samo kada je cena akcije ispod strike cene K i cena akcije ne može biti nula.

Naš problem je sada dat sa: (za detalje videti [2])

$$\mathbb{L}_x V = rV \quad \text{za } x > p \qquad \text{(asset equilibrium uslov)} \tag{4.10}$$

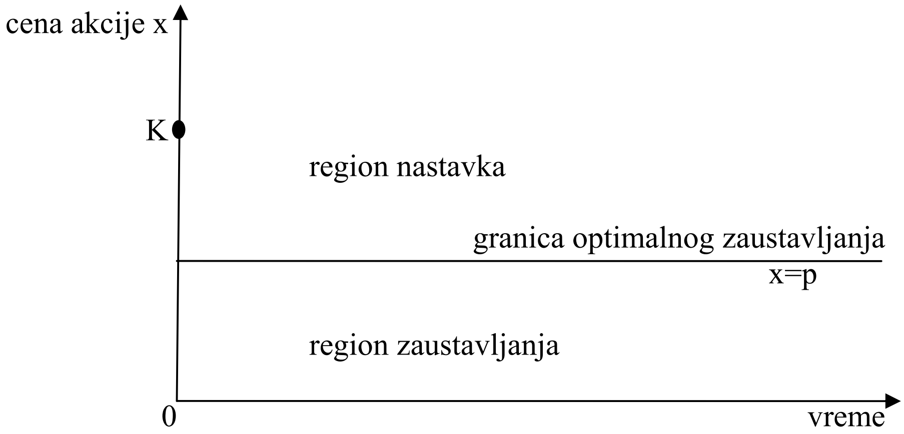
$$V(x) = (K - x)^+ \quad \text{za } x = p \qquad \text{(value matching uslov)} \tag{4.11}$$

$$V'(x) = -1 \quad \text{za } x = p \qquad \text{(smooth pasting uslov)} \tag{4.12}$$

$$V(x) > (K - x)^+ \quad \text{za } x > p \qquad \text{(region nastavka)} \tag{4.13}$$

$$V(x) = (K - x)^+ \quad \text{za } 0 < x < p \qquad \text{(value matching uslov)} \tag{4.14}$$

Bitno je naglasiti da su uslovi (4.11) i (4.14) oba value matching uslovi. Razdvojili smo ih da bi lakše bilo videti šta je granica optimalnog zaustavljanja za opciju. Štaviše, (4.11) je vrednost opcije na optimalnoj granici zaustavljanja. Na ovoj optimalnoj granici zaustavljanja cena opcije je jednaka prihodu.



Grafik 4.1

Sa Grafika 4.1 vidimo da, dok smo u regionu nastavka, čekamo do trenutka kada cena akcije padne na $x = p$. Konstantna funkcija $x = p$ je granica optimalnog zaustavljanja. Na granici optimalnog zaustavljanja optimalno je izvršiti opciju. Mi naravno možemo stati u bilo kojoj drugoj tački koja je u regionu zaustavljanja, ali nije optimalno čekati trenutak kada cena akcije padne ispod granice optimalnog zaustavljanja. Ovo je zato što mi zapravo ne znamo kada će cena akcije pasti najviše moguće i možda budemo predugo čekali do tog trenutka.

Mi smo zainteresovani da nađemo optimalnu vrednost ovog problema. To će biti vrednost koja će nam pomoći da nađemo druge bitne optimalne vrednosti. Razmatraćemo uslove date u (4.10 - 4.14) da bi našli te vrednosti.

Iz (4.10) dobijamo:

$$rx\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rV.$$

Malim modifikovanjem dobijamo:

$$\frac{\sigma^2}{2}x^2 V''(x) + rxV'(x) - rV(x) = 0. \qquad (4.15)$$

Jednačina (4.15) je jednačina Cauchy-Euler tipa i slična je sa jednačinom (3.16). Opšte rešenje je stoga dato sa:

$$V(x) = k_1 x^{\omega_+} + k_2 x^{\omega_-}. \qquad (4.16)$$

Moramo odrediti vrednosti za ω_+ i ω_-. Da bi ovo uradili razmotrimo jednačinu (3.18). Poređenjem jednačina (3.16) i (4.15) vidimo da je $q = \sigma$, $p = r$ i $\mu = r$.

Zato iz (3.18) dobijamo:

$$\begin{aligned}\omega_{\pm} &= \frac{(\sigma^2 - 2r) \pm \sqrt{(2r - \sigma^2)^2 + 8\sigma^2 r}}{2\sigma^2} \\ &= \frac{(\sigma^2 - 2r) \pm \sqrt{4r^2 + 4r\sigma^2 + \sigma^4}}{2\sigma^2} \\ &= \frac{(\sigma^2 - 2r) \pm (2r + \sigma^2)}{2\sigma^2},\end{aligned} \tag{4.17}$$

tj. $\omega_+ = 1$ i $\omega_- = \frac{-r}{A}$, gde je $A = \frac{\sigma^2}{2}$.

Napomena 4.2: jasno je da je $\omega_- < 0$, jer su $r > 0$ i $\sigma > 0$.

Opšte rešenje iz (4.16) je sada:

$$V(x) = k_1 x + k_2 x^{\frac{-r}{A}}. \tag{4.18}$$

Na tržištu na kom nema arbitraže cena američke put opcije je $V(x) \le K$ i $x > 0$ (videti odeljak 2.5).
Ovo implicira da rešenje u (4.18) treba da bude ograničeno. To znači da je

$$k_1 x + k_2 x^{\frac{-r}{A}} \le K.$$

Kada se x povećava, prvi član ide u beskonačno za $k_1 > 0$ i u minus beskonačno kada je $k_1 < 0$. To bi značilo da funkcija u (4.18) nije više ograničena. Da bi bila ograničena, mora biti $k_1 = 0$.

Napomena 4.3: Drugi član u (4.18) je konačan za sve vrednosti *x*.

Iz gornje činjenice (4.18) postaje:

$$V(x) = k_2 x^{\frac{-r}{A}}, \tag{4.19}$$

a nama ostaje da odredimo konstantu k_2.

Kada se podsetimo prethodnog poglavlja iz jednačine (3.22) dobijamo vrednost *p*, tj.

$$\begin{aligned}p &= \frac{(K - x)^+ (\omega_-)}{\frac{d}{dx}(K - x)^+} \\ &= -(\omega_-)(K - x)^+.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Primenjujući sada uslov (4.11) dobijamo:

$$p = -(\omega_-)(K-p)$$
$$= \frac{-K\omega_-}{1-(\omega_-)}$$
$$= \frac{K\frac{r}{A}}{1+\frac{r}{A}} \tag{4.21}$$
$$= \frac{K}{1+\frac{A}{r}}.$$

Napomena 4.4: Ranija pretpostavka je bila da je $p \in (0, K)$. Ovo je optimalna cena za izvršenje opcije. Ovo pokazuje da optimalna cena akcije zavisi od strike cene K i od volatilnosti σ jer je $A = \frac{\sigma^2}{2}$. Ako bi za ovu američku put opciju volatilnost σ i strike cena K bili poznati unapred, mi bi onda lako mogli pronaći vrednost p.

Iz (4.9) i (4.21), sledi da je optimalno vreme zaustavljanja:

$$\tau_* = \min\left\{ t \geq 0 : X_t \leq \frac{K}{1+\frac{A}{r}} \right\}. \tag{4.22}$$

Treba da nađemo vrednost $V(x)$ u ovoj tački. Da bi to uradili, treba da pronađemo vrednost k_2 u ovoj konkretnoj vrednosti p.
Iz (4.19) imamo da je:

$$V'(x) = -\frac{r}{A} k_2 p^{(\frac{-r}{A} - 1)}. \tag{4.23}$$

Primenjujući (4.12) na (4.23) dobijamo:

$$\frac{r}{A} k_2 p^{(\frac{-r}{A} - 1)} = 1. \tag{4.24}$$

To nam daje

$$k_2 = \frac{A}{r} p^{(\frac{r}{A}+1)}$$

$$= \frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{(1+\frac{r}{A})}. \tag{4.25}$$

Zamenjujući vrednost k_2 u (4.19) dobijamo

$$V(x) = x^{\frac{-r}{A}} \frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{(1+\frac{r}{A})}. \tag{4.26}$$

Da bi dobili rešenje (4.26) primenili smo prva tri granična uslova do sada. Prva tri uslova vode do toga da je ovde $x \geq p$. Iz poslednja dva uslova (4.13–4.14) vidimo da je $V(x) = K - x$ za $0 < x \leq p$.

Ako razmotrimo svih pet graničnih uslova, vidimo da je:

$$V(x) = \begin{cases} x^{\frac{-r}{A}} \frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{(1+\frac{r}{A})} & ,\text{za } x \geq p \\ K - x, & \text{za } 0 < x \leq \text{p} \end{cases} \tag{4.27}$$

gde je $p = \frac{K}{1+\frac{A}{r}}$ i $A = \frac{\sigma^2}{2}$.

Da zaključimo,

Teorema 4.2
Cena američke put opcije bez datuma dospeća, bez mogućnosti arbitraže je data eksplicitno sa (4.27). Optimalno vreme zaustavljanja je:

$$\tau_* = \min\left\{t \geq 0 : X_t \leq \frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right\}.$$

Pokažimo još da su u (4.27) vrednosti funkcije $V(x)$ jednake u tački $x = p$, tj.

$$x^{\frac{-r}{A}}\frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{(1+\frac{r}{A})} = K - x \quad \text{za} \quad x = p \tag{4.28}$$

Razmotrimo prvo slučaj kada je

$$V(x) = K - x\,.$$

Kada je $x = p$, imamo da je

$$\begin{aligned} V(x) &= K - p \\ &= K - \frac{K}{1+\frac{A}{r}} \\ &= K\left(1-\frac{1}{1+\frac{A}{r}}\right) \\ &= K\left(1-\frac{r}{r+A}\right) \\ &= \frac{AK}{r+A}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

U drugom slučaju, imamo da je

$$V(x) = x^{\frac{-r}{A}}\frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{(1+\frac{r}{A})}.$$

Kada je $x = p$, imamo da je

$$\begin{aligned} V(x) &= p^{\frac{-r}{A}}\frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{(1+\frac{r}{A})} \\ &= \left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{\frac{-r}{A}}\frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right)^{(1+\frac{r}{A})}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{A}{r}\left(\frac{K}{1+\frac{A}{r}}\right) \\ &= \frac{A}{r}\left(\frac{rK}{r+A}\right) \\ &= \frac{AK}{r+A} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Očigledno vidimo da su rezultati u (4.29) i (4.30) isti. Stoga je cena opcije na optimalnoj granici zaustavljanja data sa $\frac{AK}{r+A}$.

4.5 Američke put opcije koje imaju datum dospeća

Već smo napomenuli da se opcije koje imaju datum dospeća nešto teže rešavaju ovom metodom. Javlja se par problema. Sada ćemo dati samo neka poređenja. Za one koji su zainteresovani za mnogo više od toga videti [2].

Cena američke put opcije koja ima datum dospeća (eng. finite horizon american option), bez mogućnosti arbitraže, je data sa:

$$V(t,X) = \sup_{0\le\tau\le T-t} E(e^{-r\tau}(K - X_{t+\tau})^{+}),$$

gde je τ vreme zaustavljanja geometrijskog Braunovog kretanja $X = (X_{t+s})_{s\ge0}$ koje je dato sa:

$$dX_{t+s} = rX_{t+s}ds + \sigma X_{t+s}dW_s,$$

pri čemu je $X_t = x > 0$.

Vidimo da je cena ovakve opcije funkcija i vremena i cene akcije.

Dalje, granica optimalnog zaustavljanja nije konstantna već funkcija vremena, tj. optimalni region zaustavljanja je dat sa:

$$S_{rg}^{*} = \{(t,x) \in [0,T]\times(0,\infty) : V(t,x) = f(x)\},$$

pri čemu je $f(x) = (K - x)^{+}$

Štaviše, tačan region nastavka je onda nepoznat i kao rezultat toga analitičko rešenje je veoma teško naći.

Zbog svega ovoga (a i još nekih stvari) nalaženje optimalne cene akcije, optimalnog vremena zaustavljaja i cene opcije postaje mnogo teže.

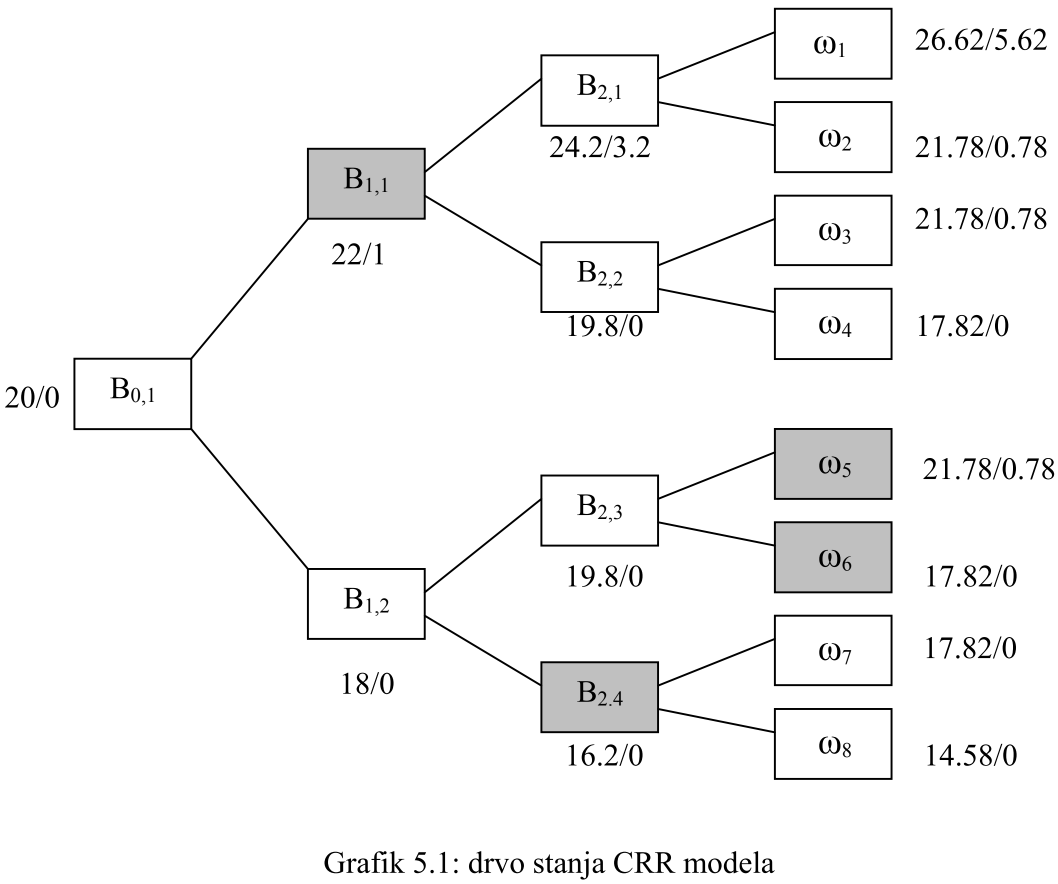
Napomena 4.5: Što se tiče američkih call opcija u Poglavlju 2 smo pokazali da je njihova cena ista kao i cena evropskih call opcija (naravno, pretpostavka je bila da akcija ne plaća dividende), tako da ih ne proučavamo ovom metodom. Takođe, već smo videli u Teoremi 2.1 da nikada nije optimalno izvršiti američku call opciju pre datuma dospeća.

5. Diskretni model

Za razliku od prethodnog poglavlja, ovde ćemo pokazati drugi način dolaska do optimalnog vremena zaustavljanja. Takođe, neke pojmove ćemo ponovo definisati zbog toga što će vreme ovde biti diskretna promenljiva.

Kao što smo već videli, američke opcije su komplikovanije nego evropske. One poseduju iste osobine kao i evropske, ali imaju još jednu dodatnu - one mogu biti izvršene u bilo kom trenutku između trenutka kupovine i datuma dospeća. Ovo je jako bitan dodatak pošto je nemoguće pogledati u budućnost i odlučiti kada izvršiti opciju. Investitor ne može da pozove svog brokera i kaže:"Ako cena akcija padne ispod sto dolara, onda je prodaj pre nego što padne".

Primer 5.1
Ovaj primer ćemo proučavati u čitavom poglavlju i vraćati se na njega s vremena na vreme. Na slici je prikazano drvo stanja CRR modela sa cenama akcija i prihodima od opcija.



Grafik 5.1: drvo stanja CRR modela

Neka je C cena američke call opcije sa strike cenom $K = 21$. Pretpostavljaćemo da je nerizična kamatna stopa jednaka nuli, tj. $r = 0$. Neka su za ovaj model dati sledeći podaci $T = 3$, $u = 1.1$, $d = 0.9$ i verovatnoća da akcija skoči je 0.5 (samim tim je i verovatnoća da akcija padne ista).

Napomena 5.1: za svaku slučajnu promenljivu X koristićemo sledeću kraću notaciju:

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}\}.$$

5.1 Model

Proučavaćemo model koji je diskretan i mogućnost arbitraže neće postojati , pa će zbog toga imati martingalnu meru Π (ovde ćemo pretpostavljati da je reč o jako pozitivnoj meri). Naravno, sve pretpostavke koje smo naveli u odeljku 4.2 će važiti i ovde. Razmatraćemo investiciju u američku opciju. Kupac opcije može izvršiti opciju u bilo kom od trenutaka t_0, t_1,..., t_T pri čemu važi da je

$$\mathrm{t}_0 < \mathrm{t}_1 < \ldots < \mathrm{t}_\mathrm{T}.$$

Dodatno, u svakom trenutku t_i, pretpostavljamo da postoji particija $\mathcal{P}_i = \{B_{i,1},\ldots,B_{i,m_i}\}$ skupa Ω, skup stanja je particija $\mathcal{P}_i$ skupa Ω i važi da je $\mathcal{P}_{i-1} \prec \mathcal{P}_i$. Štaviše, cena slučajne promenljive S_i, tj. cena akcije je $\mathcal{P}_i$-merljiva.

Prihod od opcije u trenutku t_k je slučajna promenljiva Y_k. Pretpostavljaćemo da je Y_k adaptirano filtraciji $\mathbb{F} = (\mathcal{P}_k)$. U našem primeru prihodi američke opcije su dati sa:

$$Y_3 = \max\{S_3 - 21, 0\} = \begin{cases} 5.62, \text{ za } \omega = \omega_1 \\ 0.78, \text{ za } \omega = \omega_2, \omega_3, \omega_5 \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

$$Y_2 = \max\{S_2 - 21, 0\} = \begin{cases} 3.2, \text{ za } \omega \in \mathrm{B}_{2,1} \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

$$Y_1 = \max\{S_1 - 21, 0\} = \begin{cases} 1, \text{ za } \omega \in \mathrm{B}_{1,1} \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

i naravno

$$Y_0 = 0.$$

5.2 Vreme zaustavljanja

Odluku o tome kada izvršiti opciju možemo modelirati kao slučajnu promenljivu sa specijalnim osobinama, nazvanu vreme zaustavljanja. Ideja je prilično jednostavna: vreme zaustavljanja je pravilo, odnosno slučajna promenljiva koja za svaki trenutak t_k identifikuje ishode iz skupa svih mogućih ishoda Ω za koje bi trebalo izvršiti opciju u trenutku t_k. Skup svih ishoda za koje bi trebalo izvršiti opciju u trenutku t_k ćemo nazivati *događaj zaustavljanja* (eng. stopping event) za trenutak t_k. Za konačni trenutak t_T događaj zaustavljanja se sastoji od ishoda za koje mi ili izvršimo opciju u trenutku t_T ili ne izvršimo opciju.
Jedini zahtev za vreme zaustavljanja je da moramo biti u mogućnosti da odredimo koji ishodi pripadaju događaju zaustavljanja za trenutak t_k u to vreme. Ovo je jako bitno naglasiti. Na primer, ne možemo reći da je odluka o tome da li ćemo izvršiti opciju u trenutku t_2 zasnovana na nečemu što će se desiti u trenutku t_3. To bi bilo isto što i poslati zahtev brokeru da proda akciju pre nego što cena padne ispod 100 dolara.

Definicija 5.1
Slučajna promenljiva τ, $\tau : \Omega \to \{0,...,T\}$ se naziva vreme zaustavljanja ako je događaj zaustavljanja "zaustavi se u trenutku t_k" definisan sa

$$[\tau = k] = \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) = k\}$$

u algebri $\mathcal{A}(\mathcal{P}_k)$ generisanoj sa $\mathcal{P}_k$ za svako $k = 0,...,T$.

Skup svih vremena zaustavljanja sa opsegom $\{k,...,T\}$ ćemo označavati sa $S_{k,T}$. Ovo su vremena zaustavljanja kojima se ne možemo zaustaviti pre trenutka t_k. Primetimo da je kodomen za τ skup svih celih brojeva od 0 do T.

Primer 5.2
Ne bi bilo neobično za investitora da kaže svom brokeru da proda akcije ako im cena pređe 100 dolara. Ovo pravilo je vreme zaustavljanja. Zapravo, ovo vreme zaustavljanja se naziva *prvo vreme ulaska* (eng. first entry time) procesa cena akcije (S_k) u skup $[100,+\infty)$. Formalno, definisano je na sledeći način:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \min\{k \mid S_k \geq 100\}, \text{ ako je } \{k \mid S_k \geq 100\} \neq \emptyset \\ T, \text{ inače} \end{cases}$$

Pokažimo da je ovo zaista vreme zaustavljanja.

Ako je $k < T$ imamo:

$$[\tau = k] = \{\omega \mid \mathrm{S_k} \geq 100 \text{ i } \mathrm{S_j} < 100 \text{ za j<k}\}$$
$$= [\mathrm{S_0} < 100] \cup ... \cup [\mathrm{S_{k-1}} < 100] \cup [\mathrm{S_k} \geq 100].$$

Ali, kako je S_i $\mathcal{P}_\mathrm{i}-$merljivo i $\mathbb{F}=(\mathcal{P}_\mathrm{i})$ je filtracija, zaključujemo da su svaki od događaja $[S_i < 100]$ i događaj $[S_k \geq 100]$ u najvećoj algebri $\mathcal{A}(\mathcal{P}_\mathrm{k})$. To je uslov koji se zahteva da bi prvo vreme ulaska bilo vreme zaustavljanja.

Konačno, za $k = T$ imamo:

$$[\tau = T] = [\mathrm{S_0} < 100] \cap ... \cap [\mathrm{S_{T-1}} < 100] \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_\mathrm{T}).$$

Stoga, τ jeste vreme zaustavljanja. Primetimo da će isti argumenti važiti i za svaku drugu vrednost osim 100. Zapravo, takođe je moguće pokazati da je prvo vreme ulaska u bilo koji Borelov skup B vreme zaustavljanja.

Na primer, $B = (-\infty, 17) \cup (20, +\infty)$ odgovara prvom trenutku kada cena akcije padne ispod 17 ili poraste iznad 20. Osenčeni blokovi na Grafiku 5.1 prikazuju događaje zaustavljanja za prvo vreme ulaska u skup B, tj. prvo vreme ulaska u skup B je:

$$\rho(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ za } \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \\ 2, \text{ za } \omega \in \{\omega_7, \omega_8\} \\ 3, \text{ za } \omega \in \{\omega_5, \omega_6\} \end{cases}$$

Sa druge strane, ako bi imali recimo američku put opciju, može se pokazati da vreme:

$$\rho_1(\omega) = \min\{k : S_k(\omega) \ = \min_{j \in \{0,...,T\}} S_j\}$$

nije vreme zaustavljanja (za detalje videti [7]). Inače, $\rho_1(\omega)$ je vreme koje kaže da se zaustavljamo kada cena akcije dostigne najmanju vrednost.

5.3 Šta uraditi u trenutku t_0

Budući da se bavimo načinom izbora vremena zaustavljanja, prvo moramo diskutovati posledice bilo kog izbora za vreme zaustavljanja.

Razmotrimo sledeću situaciju: zamislimo da je investitor kupio američku opciju u trenutku t_0 i sada razmišlja o svim mogućim vremenima zaustavljanja iz skupa $S_{0,T}$. Pretpostavimo da je investitor odlučio da izabere odgovarajuće vreme zaustavljanja $\tau \in S_{0,T}$. On zove svog brokera u trenutku t_0 i saopštava mu vreme zaustavljanja τ (naravno, investitor može promeniti svoje mišljenje u trenutku t_1 ili kasnije).
Od tog trenutka pa nadalje broker može da nastavi sam bez potrebe da konsultuje investitora. Konkretno, u svakom trenutku t_k, broker proverava da li je trenutna cena akcije (ponekad ćemo govoriti trenutno stanje ekonomije) u događaju zaustavljanja $[\tau = k]$ za to vreme. Na primer, da li je akcija prešla vrednost od 100 dolara. Ako je trenutno stanje u skupu $[\tau = k]$, broker izvršava opciju; u suprotnom je ne izvršava.

Pretpostavimo da se investitor odlučio za određeno vreme zaustavljanja $\tau \in S_{0,T}$. Onda, za svako $\omega \in \Omega$ opcija će biti izvršena u trenutku $t_{\tau(\omega)}$ i dati prihod $Y_{\tau(\omega)}(\omega)$.
Funkciju prihoda ćemo kraće označavati sa Y_τ. Slučajna promenljiva Y_τ se naziva *konačna vrednost* (eng. final value) procesa (Y_k), pod pretpostavkom da je vreme zaustavljanja dato sa τ.

Napomenimo ovde nešto jako bitno. Naime, za svako $\omega \in \Omega$ prihod $Y_{\tau(\omega)}(\omega)$ dolazi u trenutku $t_{\tau(\omega)}$. Pretpostavićemo da investitor ne povlači sredstva (eng. funds) sa računa sve do kraja vremena života modela, tj. do trenutka t_T i zbog toga prihod u trenutku $t_{\tau(\omega)}$ raste po nerizičnoj kamatnoj stopi u periodu od $\tau(\omega)$ do T.

To rezultira konačnim prihodom:

$$e^{r(T-\tau(\omega))}Y_{\tau(\omega)}(\omega) = \frac{B_T}{B_{\tau(\omega)}} Y_{\tau(\omega)}(\omega),$$

gde je $B_k = e^{rk}$ faktor diskontovanja (ili diskontni faktor).

Stoga, u trenutku t_T prihod koji je rezultat vremena zaustavljanja τ je zapravo:

$$\frac{B_T}{B_\tau} Y_\tau = B_T \overline{Y_\tau} \text{ , gde je } \overline{Y_\tau} = \frac{Y_\tau}{B_\tau}.$$

Primer 5.3
Vratimo se na Primer 5.1 i razmotrimo vreme zaustavljanja ρ prikazano sivom bojom na Grafiku 5.1. To je prvo vreme ulaska u skup

$$B = (-\infty, 17) \bigcup (20, +\infty).$$

(Diskontovana) konačna vrednost prihoda Y_τ je:

$$Y_\tau(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ ako } \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \\ 0.78, \text{ ako je } \omega = \omega_5 \\ 0, \text{ ako } \omega \in \{\omega_6, \omega_7, \omega_8\} \end{cases}$$

Napomena 5.2: U našem primeru je $r = 0$.

U cilju određivanja najboljeg vremena zaustavljanja u trenutku t_0, kao što je pomenuto ranije, investitor može posmatrati sva moguća vremena zaustavljanja na konačnom skupu $S_{0,T}$. Na početku deluje logično da investitor treba da izabere vreme zaustavljanja koje će maksimizirati konačni prihod:

$$\max_{\tau \in S_{0,T}} \{B_T \overline{Y_\tau}\}.$$

Međutim, prihodi $B_T \overline{Y_\tau}$ su funkcije (slučajne promenljive) i ne postoje garancije da postoji bar jedno vreme zaustavljanja koje je najbolje za svako $\omega \in \Omega$. Zaista, to je veoma neverovatno. Zbog toga nam je potrebna alternativa. Možemo maksimizirati inicijalnu vrednost isplate (prihoda). Pod pretpostavkom da je konačni prihod moguće dostići (eng. attainable), postoji samofinansirajuća strategija Φ za koju je

$$\nu_T(\Phi) = B_T \overline{Y_\tau}$$

i cena (u početnom trenutku) ove konačne isplate je:

$$\begin{aligned} V_0(\tau) &= \nu_0(\Phi) \\ &= \frac{1}{B_T} E_\Pi(\nu_T(\Phi)) \\ &= \frac{1}{B_T} E_\Pi(\mathrm{B_T} \overline{Y_\tau}) \\ &= E_\Pi(\overline{Y_\tau}). \end{aligned}$$

Za prelaz u drugom redu videti Teoremu 1.16. $V_0(\tau)$ se naziva *inicijalna vrednost* američke opcije pod pretpostavkom da je vreme zaustavljanja dato sa τ.

Pokazali smo da, pretpostavljajući da vlasnik opcije prati vreme zaustavljanja τ, cena ove opcije (bez mogućnosti arbitraže) mora biti $V_0(\tau)$.

Sada, u trenutku t_0, investitor može izabrati vreme zaustavljanja koje maksimizira inicijalnu vrednost opcije. Zbog toga definišemo:

$$V_0 = \max_{\tau \in S_{0,T}} V_0(\tau) = \max_{\tau \in S_{0,T}} E_\Pi(\overline{Y_\tau}).$$

i pretpostavimo da je investitor izabrao vreme zaustavljanja τ^* sa osobinom da je:

$$E_\Pi(\overline{Y_{\tau^*}}) = V_0.$$

Ovo je vreme zaustavljanja koje maksimizira inicijalnu vrednost opcije. Naziva se *optimalno vreme zaustavljanja*. Bez mogućnosti da vidimo budućnost, ovo je najbolje što se može uraditi u trenutku t_0.

Primer 5.4

Vratimo se ponovo na Primer 5.1. Videli smo da je konačni prihod za prvo vreme ulaska u skup $B = (-\infty, 17) \bigcup (20, +\infty)$ dat sa:

$$Y_\tau(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ ako } \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \\ 0.78, \text{ ako je } \omega = \omega_5 \\ 0, \text{ ako } \omega \in \{\omega_6, \omega_7, \omega_8\} \end{cases}.$$

Zato je

$$E_\Pi(\overline{Y_\tau}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0.78 + \frac{3}{8} \cdot 0 = 0.5975.$$

Razmotrimo sada vreme zaustavljanja dato sa:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 2, \text{ za } \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_7, \omega_8\} \\ 3, \text{ inače} \end{cases}$$

U ovom slučaju (diskontovana) konačna vrednost prihoda je

$$Y_\sigma(\omega) = \begin{cases} 3.2, \text{ ako } \omega \in \{\omega_1, \omega_2\} \\ 0.78, \text{ ako je } \omega = \{\omega_3, \omega_5\} \\ 0, \text{ ako } \omega \in \{\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\} \end{cases}$$

Zato je

$$E_\Pi(\overline{Y_\sigma}) = \frac{1}{4} \cdot 3.2 + \frac{1}{4} \cdot 0.78 = 0.995.$$

Vidimo da je σ bolje vreme zaustavljanja nego τ (jer imamo veći očekivani prihod). Zapravo, kao što ćemo kasnije videti, σ je optimalno vreme zaustavljanja.

5.4 Šta uraditi u trenutku t_k

Pretpostavimo sada da u trenutku t_k investitor još uvek nije izvršio američku opciju. Tada prethodna diskusija i dalje važi (naravno, kada se izvrše određene izmene). Konkretno, sada vreme zaustavljanja biramo iz skupa $S_{k,T}$, jer ako investitor u trenutku t_k još uvek nije izvršio opciju, ona ne može biti izvršena pre tog trenutka.

Ako investitor zaustavi proces prihoda koristeći konkretno vreme zaustavljanja $\tau \in S_{k,T}$ onda će ostvariti prihod Y_τ, a vrednost u trenutku t_T je:

$$\frac{B_T}{B_\tau} Y_\tau = B_T \overline{Y_\tau}$$

kao i ranije.

Pod pretpostavkom da je konačnu vrednost prihoda $B_T \overline{Y_\tau}$ moguće dostići, postoji samofinansirajuća strategija Φ za koju je:

$$\nu_T(\Phi) = B_T \overline{Y_\tau}$$

i cena ovog konačnog prihoda (bez mogućnosti arbitraže) u trenutku t_k je:

$$\begin{aligned} V_k(\tau) &= \nu_k(\Phi) \\ &= \frac{B_k}{B_T} E_\Pi(\nu_T(\Phi) \mid \mathcal{F}_k) \\ &= \frac{B_k}{B_T} E_\Pi(\mathrm{B_T} \overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k) \\ &= E_\Pi(\mathrm{B_k} \overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k). \end{aligned}$$

Veličina $V_k(\tau)$ je vrednost američke opcije u trenutku t_k pod pretpostavkom da je vreme zaustavljanja dato sa τ .

Sada, u trenutku t_k, ponovo pretpostavljamo da investitor donosi najbolju moguću odluku (govorimo o vremenu zaustavljanja), što je u ovom slučaju izbor vremena τ^* za koje je $V_k(\tau^*)$ maksimalno.

Prema tome, definišimo V_k na sledeći način:

$$V_k = \max_{\tau \in S_{k,T}} V_k(\tau) = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(B_k \overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k)$$

i kažemo da je vreme zaustavljanja τ^* *optimalno* ako je

$$E_\Pi(B_k \overline{Y_{\tau^*}} \mid \mathcal{F}_k) = V_k .$$

(V_k) nazivamo *proces vrednosti* (eng. value process) američke opcije.

Uporedimo na momenat odluke investitora donete u trenucima t_0 i t_k.

U trenutku t_0 smo imali da je:

$$V_0 = \max_{\tau \in S_{0,T}} V_0(\tau) = \max_{\tau \in S_{0,T}} E_\Pi(\overline{Y_\tau}),$$

a u trenutku t_k je:

$$V_k = \max_{\tau \in S_{k,T}} V_k(\tau) = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(B_k \overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k).$$

Primetimo da u drugom slučaju maksimum tražimo na manjem skupu jer je $S_{k,T} \subseteq S_{0,T}$, pa bi na prvi pogled izgledalo da maksimum treba da bude manji u drugom slučaju. Sa druge strane, u trenutku t_k mi vršimo maksimizaciju sa više informacija, tj. mi maksimiziramo uslovna očekivanja $E_\Pi(B_k \overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k)$ što bi vodilo ka tome da je maksimum veći u drugom slučaju. Kao rezultat svega ne možemo reći ništa o tome koji maksimum je veći.

Definicija 5.2

Za američku opciju čiji je proces prihoda dat sa $(Y_k \mid k = 0,...,T)$, *proces vrednosti* je dat sa:

$$V_k = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(B_k \overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k)$$

i *diskontovani proces vrednosti* je:

$$\overline{V_k} = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(\overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k).$$

Diskotovani proces vrednosti $(\overline{V_k})$ se naziva **Snell envelop** diskontovanog procesa prihoda $(\overline{Y_k})$.

Definicija 5.3

Vreme zaustavljanja τ^* je *optimalno* na intervalu $[k,T]$ ako ono maksimizira očekivani diskontovani proces prihoda $(\overline{Y_k})$, tj. ako je:

$$E_\Pi(\overline{Y_{\tau^*}} \mid \mathcal{F}_k) = \overline{V_k} = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(\overline{Y_\tau} \mid \mathcal{F}_k),$$

odnosno ako τ^* postiže najbolji očekivani diskontovani prihod.

5.5 Optimalno vreme zaustavljanja i Snell envelop

Da bi malo pojednostavili notaciju proučavaćemo Snell envelop u uslovima nediskontovanih procesa. Jedina razlika je u tome što u obeležavanju više nećemo imati crticu iznad.

Definicija 5.4

Ako je $\mathbb{Z} = (Z_k \mid k = 0,...,T)$ slučajni proces, onda se proces $\mathbb{U} = (U_k)$ definisan sa

$$U_k = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{F}_k)$$

naziva **Snell envelop** od $\mathbb{Z}$. Vreme zaustavljanja τ^* za koje dostižemo dati maksimum na intervalu $[k,T]$, tj. vreme zaustavljanja za koje je:

$$E_\Pi(Z_{\tau^*} \mid \mathcal{F}_k) = U_k = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{F}_k)$$

se naziva **optimalno vreme zaustavljanja** za $\mathbb{Z}$ na $[k,T]$.

Stoga, ako je $\mathbb{Z}$ diskontovani proces prihoda američke opcije, onda je Snell envelop $\mathbb{U}$ diskontovani proces vrednosti opcije.

5.6 Postojanje optimalnih vremena zaustavljanja

Prvo pitanje koje bi trebalo postaviti o optimalnim vremenima zaustavljanja je da li ona postoje ili ne. Za $k=0$ jasno je da optimalno vreme zaustavljanja postoji jer mi jednostavno maksimiziramo konačan skup konstanti $E_\Pi(Z_\tau)$. Ali za $k>0$ mi maksimiziramo nekonstantne funkcije $E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{F}_k)$.

Teorema 5.1
Za svaki interval $[k,T]$ optimalno vreme zaustavljanja za slučajni proces $\mathbb{Z}$ postoji.

Dokaz
Podsetimo se Definicije 1.15 koja kaže da je za particiju

$$\mathcal{P}_k = \{B_{k,1},\ldots,B_{k,c}\}$$

uslovno očekivanje definisano sa

$$E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k) = \sum_{u=1}^{c} E_\Pi(Z_\tau \mid B_{k,u}) \cdot 1_{B_{k,u}} .$$

Stoga, za svako $B_{k,u}$, slučajna promenljiva $E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)$ je jednaka konstanti $E_\Pi(Z_\tau \mid B_{k,u})$ na $B_{k,u}$.

Zato možemo naći vreme zaustavljanja $\tau_{k,u}$ koje maksimizira ove konstante, tj. za koje je:

$$E_\Pi(Z_{\tau_{k,u}} \mid B_{k,u}) = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid B_{k,u})$$

Posmatrajmo sada slučajnu promenljivu

$$\tau_k^* = \sum_{u=1}^{c} \tau_{k,u} 1_{B_{k,u}}$$

koja maksimizira uslovno očekivanje na svakom od blokova koji čine particiju $\mathcal{P}_k$.

Pokažimo da je τ_k^* optimalno vreme zaustavljanja. Treba da pokažemo dve stvari: da je τ_k^* vreme zaustavljanja i da je τ_k^* optimalno.

Da bi videli da je τ_k^* vreme zaustavljanja na $S_{k,T}$, primetimo da je $\tau_k^* \geq k$ i za svako $h \geq k$ je:

$$[\tau_k^* = h] = \bigcup_{v=1}^{c} ([\tau_k^* = h] \cap B_{k,v}) = \bigcup_{v=1}^{c} ([\tau_{k,v} = h] \cap B_{k,v}) \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_h)$$

što se i zahteva za vreme zaustavljanja.

Da bi videli da je reč o optimalnom vremenu zaustavljanja, neka je sada $\omega \in B_{k,v}$,pa je

$$[Z_{\tau_k^*}](\omega) = Z_{\tau_k^*(\omega)}(\omega) = Z_{\tau_{k,v}(\omega)}(\omega)$$

i

$$Z_{\tau_k^*} = \sum_{u=1}^{c} Z_{\tau_{k,u}} 1_{B_{k,u}} \quad .$$

Stoga, za svako $\tau \in S_{k,T}$, važi da je

$$\begin{aligned}
E_\Pi(Z_{\tau_k^*} \mid \mathcal{P}_k) &= \sum_{u=1}^{c} E_\Pi(Z_{\tau_{k,u}} 1_{B_{k,u}} \mid \mathcal{P}_k) \\
&\geq \sum_{u=1}^{c} E_\Pi(Z_\tau \cdot 1_{B_{k,u}} \mid \mathcal{P}_k) \\
&= \sum_{u=1}^{c} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k) \cdot 1_{B_{k,u}} \\
&= E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k) \sum_{u=1}^{c} 1_{B_{k,u}} \\
&= E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)
\end{aligned}$$

iz čega sledi da je τ_k^* optimalno vreme zaustavljanja.□

Teorema 5.2
Snell envelop (U_k) je adaptiran filtraciji $\mathbb{F}$.

Dokaz
Slučajna promenljiva U_k je maksimum na konačnom broju slučajnih promenljivih $E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)$, a svaka od njih je $\mathcal{P}_k$ - merljiva. Stoga je i U_k .□

5.7 Osobine koje važe za Snell envelop

Razmotrimo ponovo situaciju u kojoj se nalazi investitor koji u trenutku t_k treba da odabere vreme zaustavljanja iz skupa $S_{k,T}$. U cilju nešto lakšeg donošenja odluke, investitor može podeliti kandidate za vreme zaustavljanja u tri podskupa.

Investitor jednostavno može odlučiti da se zaustavi sada (u trenutku t_k), ili može odlučiti da se ne zaustavi u trenutku t_k ni u kom slučaju, ili može izabrati vreme zaustavljanja koje može stati sada ili kasnije zavisno od stanja ekonomije.

Simbolički, $S_{k,T}$ je unija skupova:

$$S_{k,T} = S_{k,k} \cup S_{k+1,T} \cup S_{k,T}^*$$

gde su skupovi dati sa:

1) zaustavi se sada, tj. u trenutku t_k

$$S_{k,k} = \{k \cdot 1_\Omega\} = \{\tau \in S_{k,T} \mid [\tau = k] = \Omega\}$$

2) nemoj stati sada, tj. zaustavi se u trenutku t_{k+1} ili kasnije

$$S_{k+1,T} = \{\tau \in S_{k,T} \mid [\tau = k] = \emptyset\}$$

3) možeš stati sada ili možeš stati kasnije

$$S^*_{k,T} = \{\tau \in S_{k,T} \mid [\tau = k] \neq \emptyset, \Omega\}.$$

Snell envelop može biti određen bez potrebe da razmatramo vremena zaustavljanja trećeg tipa.(videti [1])
Matematički, Snell envelop zadovoljava:

$$U_k = \max\{Z_k, \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)\}.$$

Primetimo da sada maksimum tražimo na skupu $S_{k+1,T}$.
To nas dovodi do sledeće teoreme.

Teorema 5.3
Za svako $k = 0,...,T$ Snell envelop zadovoljava:

$$U_k = \max\{Z_k, \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)\}.$$

Dokaz
Sa jedne strane, kako je $\tau = k$ (konstantno) vreme zaustavljanja i $S_{k+1,T} \subseteq S_{k,T}$ imamo da je:

$$\begin{aligned} U_k &= \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k) \\ &\geq \max\{E_\Pi(Z_k \mid \mathcal{P}_k), \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)\} \\ &= \max\{Z_k, \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)\}. \end{aligned}$$

Sada treba dokazati drugu stranu.
Neka je $\tau \in S_{k,T}$. Razmotrimo vreme zaustavljanja τ' koje je dobijeno od τ i definisano na sledeći način:

$$\tau'(\omega) = \max\{\tau, k+1\} = \begin{cases} \tau(\omega), & \text{ako je } \omega \in [\tau > \text{k}] \\ k+1, & \text{ako je } \omega \in [\tau = \text{k}] \end{cases}.$$

Kako je maksimum dva vremena zaustavljanja takođe vreme zaustavljanja, zaključujemo da je $\tau' \in S_{k+1,T}$.

Sada, imamo da je:

$$\begin{aligned} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k) &= E_\Pi(Z_\tau \cdot 1_{[\tau=\kappa]} \mid \mathcal{P}_k) + E_\Pi(Z_\tau \cdot 1_{[\tau>\kappa]} \mid \mathcal{P}_k) \\ &= E_\Pi(Z_k \cdot 1_{[\tau=\kappa]} \mid \mathcal{P}_k) + E_\Pi(Z_{\tau'} \cdot 1_{[\tau>\kappa]} \mid \mathcal{P}_k) \\ &\le \max\{Z_k, E_\Pi(Z_{\tau'} \mid \mathcal{P}_k)\} \\ &= \max\{Z_k, \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)\}. \end{aligned}$$

Ali, leva strana važi za svako $\tau \in S_{k,T}$ pa je onda:

$$U_k = \max_{\tau \in S_{k,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k) \le \max\{Z_k, \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)\}$$

kao što smo i želeli.□

Najbitniji rezultat prethodne teoreme je taj da pomoću date relacije možemo unazad pronaći U_k. Primetimo da je

$$U_T = \max_{\tau \in S_{T,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_T) = E_\Pi(Z_T \mid \mathcal{P}_T) = Z_T .$$

To nam je početni korak u rekurentnoj vezi unazad.

Razmotrimo sada slučajnu promenljivu

$$X = \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k)$$

koja se javlja u Teoremi 5.3.
Ako bi u X pisalo $\mathcal{P}_{k+1}$ umesto $\mathcal{P}_k$, onda bi X bilo samo U_{k+1}.

Podsetimo se jedne osobine uslovnog očekivanja. Za svake dve slučajne promenljive X i Y važi:

$$\max\{E(X \mid \mathcal{P}), E(Y \mid \mathcal{P})\} \le E(\max\{X, Y\} \mid \mathcal{P}).$$

Sada, sa jedne strane imamo:

$$\begin{aligned} X &= \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_k) \\ &= \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_{k+1}) \mid \mathcal{P}_k) \\ &\le E_\Pi(\max_{\tau \in S_{k+1,T}} \{E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{P}_{k+1})\} \mid \mathcal{P}_k) \\ &= E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{P}_k). \end{aligned}$$

Dakle,

$$X \le E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k).$$

Pokažimo sada drugu stranu. Neka je $\tau^* \in S_{k+1,T}$ optimalno vreme zaustavljanja na intervalu $[k+1,T]$, tj.

$$U_{k+1} = E_\Pi(Z_{\tau^*} \mid \mathcal{F}_{k+1}).$$

Onda je

$$\begin{aligned}
E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) &= E_\Pi(E_\Pi(Z_{\tau^*} \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k) \\
&= E_\Pi(Z_{\tau^*} \mid \mathcal{F}_k) \\
&\le \max_{\tau \in S_{k+1,T}} E_\Pi(Z_\tau \mid \mathcal{F}_k) \\
&= X.
\end{aligned}$$

Stoga,

$$X = E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)$$

i tako stižemo do naredne relacije za Snell envelop.
U dokazu obe strane koristili smo Teoremu 1.13.

Teorema 5.4
Snell envelop zadovoljava:

1) $U_T = Z_T$
2) $U_k = \max\{Z_k, E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)\}$ za svako $k = 0,\dots,T-1$.

Primer 5.5
Sada možemo izračunati Snell envelop procesa prihoda iz Primera 5.1.

Prvo, po Teoremi 5.4 je:

$$U_3 = Y_3.$$

Zatim,

$$E_\Pi(U_3 \mid \mathcal{F}_2) = E_\Pi(Y_3 \mid \mathcal{F}_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(5.62 + 0.78) = 3.2, \text{ ako } \omega \in \mathrm{B}_{2,1} \\ \frac{1}{2}(0.78 + 0) = 0.39, \text{ ako } \omega \in \mathrm{B}_{2,2} \\ \frac{1}{2}(0.78 + 0) = 0.39, \text{ ako } \omega \in \mathrm{B}_{2,3} \\ 0, \text{ ako } \omega \in \mathrm{B}_{2,4} \end{cases}$$

iz čega dobijamo da je

$$U_2 = \max\{Y_2, E_\Pi(U_3 \mid \mathcal{P}_2)\} = \begin{cases} 3.2, \text{ ako je } \omega = \omega_1, \omega_2 \\ 0.39, \text{ ako je } \omega = \omega_3, \omega_4 \\ 0.39, \text{ ako je } \omega = \omega_5, \omega_6 \\ 0, \text{ ako je } \omega = \omega_7, \omega_8 \end{cases}$$

Zatim,

$$E_\Pi(U_2 \mid \mathcal{P}_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3.2 + 0.39) = 1.795, \text{ ako je } \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \\ \frac{1}{2}(0.39 + 0) = 0.195, \text{ ako je } \omega = \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8 \end{cases}$$

što nam daje da je

$$U_1 = \max\{Y_1, E_\Pi(U_2 \mid \mathcal{P}_1)\} = E_\Pi(U_2 \mid \mathcal{P}_1) = \begin{cases} 1.795, \text{ ako je } \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \\ 0.195, \text{ ako je } \omega = \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8 \end{cases}$$

Konačno,

$$U_0 = \max\{Y_0, E_\Pi(U_1 \mid \mathcal{P}_0)\} = \max\{0, \frac{1}{2}(1.795 + 0.195)\} = 0.995 .$$

Podsetimo se vremena zaustavljanja σ iz Primera 5.4 koje smo definisali sa

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 2, \text{ za } \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_7, \omega_8\} \\ 3, \text{ inače} \end{cases}$$

Ono je imalo očekivanu (diskontovanu) konačnu vrednost procesa prihoda

$$E_\Pi(\overline{Y_\sigma}) = \frac{1}{4} \cdot 3.2 + \frac{1}{4} \cdot 0.78 = 0.995$$

što je jednako sa U_0. Stoga, σ je zaista optimalno vreme zaustavljanja. Zapravo, kao što ćemo malo kasnije videti, σ je najmanje optimalno vreme zaustavljanja u smislu da je ono manje od svih ostalih optimalnih vremena zaustavljanja.

5.8 Najmanji dominantni supermartingal

Podsetimo se, $\mathbb{F}-$adaptirani proces (X_k) je $\mathbb{F}$ - supermartingal ako je

$$E_\Pi(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) \leq X_k .$$

Iz drugog Uslova Teoreme 5.4 koji kaže da je $E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) \leq U_k$, jasno je da je U_k supermartingal.
Takođe je jasno da je $Z_k \leq U_k$, tj. kažemo da U_k *dominira* nad Z_k.

Zapravo, U_k je najmanji $\mathbb{F}$ - supermartingal koji dominira nad Z_k. To ćemo pokazati u sledećoj teoremi.

<u>Teorema 5.5</u>
Snell envelop U_k je najmanji $\mathbb{F}$ - supermartingal koji dominira nad Z_k.

<u>Dokaz</u>
Malopre smo videli da je U_k supermartingal koji dominira nad Z_k.
Pretpostavimo da je V_k takođe supermartingal koji dominira nad Z_k .To znači da je

$$V_k \geq \max\{Z_k, E_\Pi(V_{k+1} \mid \mathcal{P}_k)\} .$$

Sada ćemo indukcijom unazad po t pokazati tvrđenje teoreme.

Za $k = T$ važi da je $V_T \geq Z_T = U_T$.
Pretpostavimo da je $V_{k+1} \geq U_{k+1}$.

Onda je :

$$V_k \geq \max\{Z_k, E_\Pi(V_{k+1} \mid \mathcal{P}_k)\} \geq \max\{Z_k, E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{P}_k)\} = U_k$$

iz čega sledi tvrđenje teoreme. □

Sada ćemo navesti jednu osobinu martingala i supermartingala koja će nam trebati u narednom odeljku.

<u>Teorema 5.6</u>
Ako je $\mathbb{X}$ $\mathbb{F}$ - martingal, onda je za svako $j \leq k$

$$E(X_j) = E(X_k) .$$

Ako je $\mathbb{X}$ $\mathbb{F}$ - supermartingal, onda je za svako $j \leq k$

$$E(X_j) \geq E(X_k) .$$

Dokaz
Za martingale važi da je $E(X_k \mid \mathcal{F}_j) = X_j$.
Uradimo očekivanja obe strane prethodnog izraza i koristeći Teoremu 1.13 dobijamo da je:

$$E(X_k) = E(E(X_k \mid \mathcal{F}_j)) = E(X_j).$$

Dokaz za supermartingale je sličan. □

5.9 Doob-ova dekompozicija

Počećemo sa formalnom definicijom trajektorije (eng. sample path) stohastičkog procesa.

Definicija 5.5
Neka je dat stohastički proces $\mathbb{X} = (X_0, ..., X_T)$. Za svako $\omega \in \Omega$ niz

$$X_0(\omega), ..., X_T(\omega)$$

se naziva trajektorija.

Intuitivno, da bi zaustavili stohastički proces, zaustavljamo trajektoriju za svako $\omega \in \Omega$ u trenutku $\tau(\omega)$. Stoga, trajektorija je data sa:

$$X_0(\omega), X_1(\omega), ..., X_{\tau(\omega)}(\omega), X_{\tau(\omega)}(\omega), ...$$

Indeksi u ovoj trajektoriji su jednaki sa $n \wedge \tau(\omega) = \min\{n, \tau(\omega)\}$, pa trajektoriju možemo zapisati na sledeći način:

$$X_{0\wedge\tau(\omega)}(\omega), X_{1\wedge\tau(\omega)}(\omega), ..., X_{n\wedge\tau(\omega)}(\omega), X_{(n+1)\wedge\tau(\omega)}(\omega), ...$$

Definicija 5.6
Neka je $\mathbb{X} = (X_0, ..., X_T)$ stohastički proces adaptiran filtraciji $\mathbb{F}$ i neka τ bude vreme zaustavljanja na $\mathbb{F}$. *Stop proces* (eng. sampled proces) je definisan sa:

$$\mathbb{X}^\tau = (X_k^\tau) = (X_{k\wedge\tau}) = (X_{k\wedge 0}, ..., X_{k\wedge T})$$

(primetimo da su prva tri izraza samo oznake za četvrti).

Primetimo da za svako *n* u stop procesu važi:

$$X_{n\wedge\tau} = \sum_{i=1}^{n-1} X_i 1_{\{\tau=i\}} + X_n 1_{\{\tau\geq n\}} \tag{5.1}$$

Teorema 5.7
Neka je proces $\mathbb{X} = (X_k)$ martingal (ili supermartingal) i τ vreme zaustavljanja. Onda je stop proces $\mathbb{X}^\tau$ takođe martingal (ili supermartingal).

Dokaz
Pretpostavimo da je (X_k) martingal. Tada je po definiciji:

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}.$$

Počevši od izraza (5.1) imamo:

$$E(X_{n\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i 1_{\{\tau=i\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}) + E(X_n 1_{\{\tau\geq n\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}).$$

Sada, pošto je $\{\tau = i\} \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{n-1})$ za svako $i \leq n-1$, pošto je X_i $\mathcal{P}_{n-1}$-merljivo i pošto je $\{\tau \geq n\} \in \mathcal{A}(\mathcal{P}_{n-1})$ dobijamo da je:

$$\begin{aligned}
E(X_{n\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n-1} X_i 1_{\{\tau=i\}} + 1_{\{\tau\geq n\}} \cdot E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} X_i 1_{\{\tau=i\}} + 1_{\{\tau\geq n\}} \cdot X_{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} X_i 1_{\{\tau=i\}} + 1_{\{\tau=n-1\}} \cdot X_{n-1} + 1_{\{\tau\geq n\}} \cdot X_{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} X_i 1_{\{\tau=i\}} + 1_{\{\tau\geq n-1\}} \cdot X_{n-1} \\
&= X_{(n-1)\wedge\tau}
\end{aligned}$$

odnosno $\mathbb{X}^\tau$ je martingal.
Dokaz za supermartingale je gotovo identičan pa ga nećemo ispisivati. □

Konačno stižemo do sledećeg rezultata, koji će nam trebati kasnije.

Teorema 5.8 (Doob-ova dekompozicija)
Neka je $\mathbb{X} = (X_0, ..., X_T)$ $\mathbb{F}$ - adaptirani stohastički proces. Tada:

1) postoje jedinstveni martingal $\mathbb{M} = (M_0, ..., M_T)$ i jedinstveni predvidljivi proces (eng. predictable) $\mathbb{A} = (A_0, ..., A_T)$, tako da je

$$X_k = M_k - A_k$$

gde je $A_0 = 0$.

2) Ako je $\mathbb{X}$ supermartingal, onda je proces $\mathbb{A}$ neopadajući, tj.

$$A_{k+1} \geq A_k.$$

Dokaz
Za prvi deo tvrđenja, daćemo samo ideju dokaza.
Očigledno je da je za k=0 $X_0 = M_0$ i $A_0 = 0$ i sve je u redu.
Onda imamo da je

$$X_{n+1} - X_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n).$$

Zatim uradimo uslovno očekivanje datog izraza u odnosu na $\mathcal{F}_n$ i dobijamo traženo tvrđenje. Za ceo dokaz pogledati [5].

Za drugi deo teoreme pretpostavimo da je $\mathbb{X}$ supermartingal. Onda je

$$\begin{aligned} M_k - A_k = X_k &\geq E(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \\ &= E(M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) - E(A_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \\ &= M_k - A_{k+1} \end{aligned}$$

a iz toga sledi da je $A_{k+1} \geq A_k$.

5.10 Karakterizacija optimalnih vremena zaustavljanja

Vratimo se sada na naš prvobitni cilj, a to je karakterizacija optimalnih vremena zaustavljanja, odnosno pitamo se koji uslovi nam trebaju da bi neko τ bilo optimalno vreme zaustvljanja.

Primetimo da ako dve diskretne slučajne promenljive zadovoljavaju $X \leq Y$ i $E_\Pi(X) = E_\Pi(Y)$, onda, pošto je Π jako pozitivna, sledi da je $X = Y$.

Počećemo tako što ćemo videti šta se dešava ako zaustavimo proces (U_k).
Kako je U_k supermartingal, iz Teoreme 5.7 sledi da za svako vreme zaustavljanja $\tau \in S_{0,T}$, stop proces (U_k^τ) je takođe supermartingal, tj.

$$E_\Pi(U_{k+1}^\tau \mid \mathcal{P}_k) \leq U_k^\tau.$$

Štaviše, kako je $Z_k \leq U_k$ sledi da konačne vrednosti zadovoljavaju $Z_\tau \leq U_\tau$.

Činjenica da je (U_k^τ) supermaringal i $Z_\tau \leq U_\tau$ implicira sledeći niz nejednakosti:

$$E_\Pi(Z_\tau) \leq E_\Pi(U_\tau) = E_\Pi(U_T^\tau) \leq \ldots \leq E_\Pi(U_k^\tau) \leq \ldots \leq E_\Pi(U_0^\tau) = U_0.$$

Ovaj niz nejednakosti će nam trebati za dokaz naredne teoreme.

Teorema 5.9

Vreme zaustavljanja $\tau \in S_{0,T}$ je optimalno na intervalu $[0,T]$ ako i samo ako je:

1) $Z_\tau = U_\tau$
2) U_k^τ je martingal.

Dokaz

Ako je τ^* optimalno vreme zaustavljanja na $[0,T]$, tj.

$$U_0 = E_\Pi(Z_{\tau^*})$$

onda prethodni niz nejednakosti postaje niz jednakosti.

Prva od tih jednakosti

$$E_\Pi(Z_{\tau^*}) = E_\Pi(U_{\tau^*})$$

implicira da je $Z_{\tau^*} = U_{\tau^*}$ (videti primedbu na početku ovog odeljka; $Z_{\tau^*} \le U_{\tau^*}$ i Π je jako pozitivna). Ovim smo pokazali prvi deo.

Gledajući ostatak niza nejednakosti (koji je sada niz jednakosti) možemo videti da je

$$E_\Pi(U_k^{\tau^*}) = E_\Pi(U_{k-1}^{\tau^*}).$$

Osobina supermartingala (Teorema 5.6) sada implicira da je $(U_k^{\tau^*})$ ustvari martingal. Da bi videli to, podsetimo se, osobina supermartingala je:

$$E_\Pi(U_k^{\tau^*} \mid \mathcal{P}_{k-1}) \le U_{k-1}^{\tau^*}.$$

Ali obe strane imaju istu očekivanu vrednost. Zapravo, ako nađemo očekivanje leve strane, koristeći Teoremu 1.13, dobijamo da je:

$$E_\Pi(E_\Pi(U_k^{\tau^*} \mid \mathcal{P}_{k-1})) = E_\Pi(U_k^{\tau^*}) = E_\Pi(U_{k-1}^{\tau^*}).$$

Generalno, ako je $A \le B$ i $E(A) = E(B)$, onda je $A = B$, pa mi zaključujemo da je

$$E_\Pi(U_k^{\tau^*} \mid \mathcal{P}_{k-1}) = U_{k-1}^{\tau^*},$$

tj. $(U_k^{\tau^*})$ je martingal. Ovim smo pokazali drugi deo.

Sada pokažimo drugu stranu.

Pretpostavimo da je $Z_\tau = U_\tau$ i da je (U_k^τ) martingal.

Onda je niz nejednakosti ustvari niz jednakosti i konkretno je $U_0 = E_\Pi(Z_\tau)$,

što implicira da je τ optimalno na intervalu $[0,T]$. □

5.11 Optimalna vremena zaustavljanja i Doob-ova dekompozicija

Malopre smo videli da je vreme zaustavljanja τ optimalno ako i samo ako je $Z_\tau = U_\tau$, i $\mathbb{U}^\tau = (U_k^\tau)$ je martingal. To nas dovodi do pitanja kada je $\mathbb{U}^\tau$ martingal.

Videli smo da je Snell envelop $\mathbb{U} = (U_0,...,U_T)$ supermartingal.

Koristeći Doob-ovu dekompoziciju možemo zapisati

$$\mathbb{U} = \mathbb{M} - \mathbb{A}$$

gde je $\mathbb{M} = (M_0,...,M_T)$ martingal, a $\mathbb{A} = (A_0,...,A_T)$ je predvidljiv, neopadajući proces i $A_0 = 0$.

Pretpostavimo da sada zaustavimo niz:

$$\mathbb{U}^\tau = \mathbb{M}^\tau - \mathbb{A}^\tau = (M_0^\tau - A_0^\tau,...,M_T^\tau - A_T^\tau).$$

Znamo da je $\mathbb{M}^\tau$ martingal. Iz jedinstvenosti Doob-ove dekompozicije sledi da je $\mathbb{U}^\tau$ martingal ako i samo ako je $\mathbb{A}^\tau$ nula proces.

Sada, za svako $\omega \in \Omega$ niz $A_k^\tau(\omega)$ je dat sa:

$$A_0(\omega),..., A_{\tau(\omega)-1}(\omega), A_{\tau(\omega)}(\omega),..., A_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Kako je niz neopadajući i $A_0 = 0$, to znači da je

$$[A_\tau](\omega) = A_{\tau(\omega)}(\omega) = 0.$$

Stoga, $\mathbb{A}^\tau = 0$ ako i samo ako je $A_\tau = 0$, tj. U^τ je martingal ako i samo ako je $A_\tau = 0$.

Tako dolazimo do naredne teoreme.

Teorema 5.10
Neka je $\mathbb{U} = (U_k)$ Snell envelop za (Z_k). Za vreme zaustavljanja $\tau \in S_{0,T}$, stop proces $\mathbb{U}^\tau = (U_k^\tau)$ je martingal ako i samo ako $A_\tau = 0$, gde je $\mathbb{A} = (A_k)$ predvidljiv proces u Doob-ovoj dekompoziciji za $\mathbb{U}$.

5.12 Najmanje optimalno vreme zaustavljanja

Prethodna teorema nam olakšava da odredimo najmanje optimalno vreme zaustavljanja. Prvo se podsetimo rekurentne formule:

$$U_k = \max\{Z_k, E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{P}_k)\}.$$

Koristeći Doob-ovu dekompoziciju primećujemo da je

$$\begin{aligned} E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) &= E_\Pi(M_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) - E_\Pi(A_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) \\ &= M_k - A_{k+1} \\ &= (M_k - A_k) - (A_{k+1} - A_k) \\ &= U_k - (A_{k+1} - A_k) \end{aligned}$$

i

$$U_k = \max\{Z_k, U_k - (A_{k+1} - A_k)\}.$$

Stoga, stroga nejednakost $U_k > Z_k$ implicira da je $A_{k+1} = A_k$.

Sledi, da pre prvog trenutka t_k za koji je $U_k = Z_k$, mi imamo strogu nejednakost $U_i > Z_i$ za $i < k$ i $A_{i+1} = A_i$ za $i < k$. Ali $A_0 = 0$ pa je:

$$0 = A_0 = \ldots = A_k.$$

Na osnovu toga ćemo definisati $\tau_{\min}$ na sledeći način:

$$\tau_{\min}(\omega) = \min\{k \mid Z_k(\omega) = U_k(\omega)\}$$

koje postoji jer je $Z_T(\omega) = U_T(\omega)$.

Dodatno, $\tau_{\min}$ je prvo vreme ulaska adaptiranog procesa $(Z_k - U_k)$ u Borelov skup $\{0\}$ i tako da je i vreme zaustavljanja. Po definiciji imamo da je

$$Z_{\tau_{\min}}(\omega) = U_{\tau_{\min}}(\omega).$$

Ako je $\tau_{\min}$ optimalno vreme zaustavljanja, onda mora biti najmanje optimalno vreme zaustavljanja jer sva optimalna vremena zaustavljanja zadovoljavaju $Z_\tau = U_\tau$, tj.

$$Z_{\tau(\omega)}(\omega) = U_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Štaviše, upravo smo videli da je $0 = A_0(\omega) = A_1(\omega) = \ldots = A_{\tau_{\min}(\omega)}(\omega)$.

Stoga, $A_{\tau_{\min}} = 0$ što implicira da je $\mathbb{U}^{\tau_{\min}}$ martingal.

Konačno,

Teorema 5.11
Najmanje optimalno vreme zaustavljanja je dato sa:

$$\tau_{\min}(\omega) \in \min\{k \mid Z_k(\omega) = U_k(\omega)\} .$$

Primer 5.6
U Primeru 5.4 smo definisali vreme zaustavljanja

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 2, \text{ za } \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_7, \omega_8\} \\ 3, \text{ inače} \end{cases}$$

a u Primeru 5.5 smo pokazali da je σ optimalno. Zapravo, lako se vidi da σ zadovoljava Teoremu 5.11, tj.

$$\sigma(\omega) \in \min\{k \mid Z_k(\omega) = U_k(\omega)\} ,$$

pa je to najmanje optimalno vreme zaustavljanja.

5.13 Najveće optimalno vreme zaustavljanja

Razmotrimo sledeću funkciju:

$$\tau_{\max}(\omega) = \max\{k \mid \mathrm{A}_k(\omega) = 0\}$$

koja postoji jer je $A_0 = 0$. Kako svako optimalno vreme zaustavljanja τ zadovoljava $A_\tau = 0$, ako je $\tau_{\max}$ optimalno vreme zaustavljanja, onda to mora biti najveće optimalno vreme zaustavljanja. Primetimo da $\tau_{\max}$ takođe može biti definisano na sledeći način:

$$\tau_{\max}(\omega) = \begin{cases} \min\{k \mid A_{k+1} > 0\}, \text{ ako je} \{k \mid A_{k+1} > 0\} \neq \emptyset \\ T, \text{ inače} \end{cases}$$

i pošto je ovo prvo vreme ulaska (u skup $(0, +\infty)$) adaptiranog procesa $\mathbb{A}$, vidimo da je $\tau_{\max}$ vreme zaustavljanja.

Takođe, kako je $A_{\tau_{\max}} = 0$, po Teoremi 5.10 znamo da je $(U_k^{\tau_{\max}})$ martingal.
Stoga, da bi pokazali da je $\tau_{\max}$ optimalno, treba samo da pokažemo da je $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$.

Još jednom posmatramo rekurentnu relaciju

$$U_k = \max\{Z_k, E_\Pi(U_{k+1} \mid \mathcal{P}_k)\}$$

koja, koristeći Doob-ovu dekompoziciju može biti zapisana kao

$$U_k = \max\{Z_k, U_k - (A_{k+1} - A_k)\}.$$

Ali za $k = \tau_{\max}$ imamo:

$$A_{\tau_{\max}+1}(\omega) - A_{\tau_{\max}}(\omega) = A_{\tau_{\max}+1}(\omega) > 0$$

tako da je gornji maksimum Z_k , tj.

$$U_{\tau_{\max}}(\omega) = Z_{\tau_{\max}}(\omega).$$

Stoga, je $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$ kao što smo i želeli.

Teorema 5.12

Najveće optimalno vreme zaustavljanja je dato sa:

$$\begin{aligned}\tau_{\max}(\omega) &= \max\{k \mid \mathrm{A}_k(\omega) = 0\}\\ &= \begin{cases}\min\{k \mid A_{k+1} > 0\}, \text{ ako je} \{k \mid A_{k+1} > 0\} \neq \emptyset\\ T, \text{ inače}\end{cases}\end{aligned}$$

gde je $U_k = M_k - A_k$ Doob-ova dekompozicija.

Zaključak

Danas prosto nema granica u raznovrsnosti opcija (a i svih drugih derivata) kojima se može trgovati. U cilju stvaranja profita, iz dana u dan na tom tržištu se uvode nove inovacije. Neke od njih su derivati vremena (eng. weather derivatives) čiji prihod zavisi od prosečne temperature na određenoj lokaciji, ili derivati električne energije (eng. electricity derivatives) čiji prihod zavisi od trenutne cene električne energije određenog dana i mnogi drugi. Ipak, neki "tradicionalniji" derivati su i dalje popularni.

U ovom radu smo se bavili samo američkim opcijama čija podloga su akcije koje ne plaćaju dividende jer su to opcije koje su privlačne velikom broju investitora. Videli smo dva načina dolaska do optimalnog vremena zaustavljanja američke opcije i oba načina imaju različite pristupe ovom problemu. U prvom načinu vrednost američke put opcije (bez datuma dospeća) smo posmatrali kao problem optimalnog zaustavljanja. Pomoću odgovarajućih uslova smo rešili Cauchy-Eulerovu diferencijalnu jednačinu i došli smo do vrednosti akcije u kojoj je optimalno izvršiti opciju. Takođe, odredili smo optimalno vreme zaustavljanja i vrednost opcije na optimalnoj granici zaustavljanja. Druge opcije koje možemo posmatrati na ovaj način su: ruske opcije, azijske opcije i američke put opcije sa datumom dospeća. Drugi način je poznat kao martingalski pristup. Pomoću Snell envelop-a, nekoliko osobina martingala i uslovnog očekivanja smo došli do teoreme koja kaže kada je neko vreme zaustavljanje optimalno.

Naravno, postoji još načina određivanja trenutka kada je optimalno izvršiti američku opciju i neke od njih smo napomenuli u odeljku 4.1, ali oni nisu predmet ovog rada. A zahvaljujući ogromnom razvoju tržišta opcija i derivata uopšte, sigurno će ih biti još više.

Literatura

[1] Steven Roman, Introduction to the mathematics of finance, Springer, 2004

[2] Goran Peskir, Albert Nikolaevich Shiryaev, Optimal stopping and free boundary problems, Springer, 2006

[3] Jefta Sunzu, American options and optimal stopping problems, University of Witwatersrand, 2007

[4] John Hull, Options, futures and other derivative securities, Prentice Hall, 2nd edition, 1993

[5] Damien Lamberton, Bernard Lapeyre, Introduction to stochastic calculus applied to finance, CRC Press, 1996

[6] Ravi Myneni, The pricing of the american options, the annals of applied probability, Stanford University, 1992

[7] Steven Shreve, Stochastic calculus and finance, Carnegie Mellon University, 1996

[8] Martin Baxter, Andrew Rennie, Financial calculus, an introduction to derivative pricing, Cambridge University press, 2003

[9] www.optionsxpress.com

[10] www.en.wikipedia.org

Biografija

Rođen sam 29. jula 1985. godine u Šapcu. Roditelji su mi Božidar i Živka Marković i imam mlađu sestru Branku. Osnovnu školu „Laza K. Lazarević“ sam završio u Šapcu 2000. godine. Prirodno-matematički smer „Šabačke gimnazije“ u Šapcu sam završio 2004. godine. Iste godine sam upisao Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku. U septembru 2008. godine sam diplomirao sa prosečnom ocenom 9.68 i stekao stručni naziv diplomirani matematičar – matematika finansija. Odmah zatim sam upisao master studije primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Poslednji ispit sam položio 27.6.2009. godine. Prosek mojih ocena na master studijama je 9.93.

Novi Sad, 1. septembar 2009.

Branko Marković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master teza
VR
Autor: Branko Marković
AU
Mentor: Dr Danijela Rajter-Ćirić
MN
Naslov rada: Vreme zaustavljanja i primena na američke opcije
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s/e
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2009
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (5, 79, 0, 0, 0, 7, 0)
(broj poglavlja, br. strana, br. literarnih citata, br. tabela, br. slika, br. grafika, br. priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Stohastička analiza
ND
Ključne reči: američke opcije, vreme zaustavljanja, granica optimalnog zaustavljanja, algebre, particije, supermartingali, Doob-ova dekompozicija

PO
UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod:
IZ
U ovom radu su prikazana dva načina određivanja optimalnog trenutka za izvršenje američke opcije. Prvi način koristi odgovarajuće uslove kako bi došli do optimalne cene akcije i optimalnog vremena zaustavljanja, i ovde vreme posmatramo kao neprekidno. Drugi način koristi martingalski pristup i ovde vreme posmatramo kao diskretno.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 7.7.2009.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik: Dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: Dr Danijela Rajter-Ćirić, vanredni profesor Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: Dr Dora Seleši, docent Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Branko Marković
AU
Mentor: PhD Danijela Rajter-Ćirić
MN
Title: Stopping time and application on american options
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2009
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of mathematics and informatics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (5, 79, 0, 0, 0, 7, 0)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Stochastic Analysis
SD
Key words: american options, stopping time, optimal stopping boundary, algebras, partitions, supermartingals, Doob decomposition

SKW
UC:

Holding data: In library of Department of Mathematics
HD
Note:
N
Abstract:
AB
In this thesis we consider two ways of determining optimal moment for exercising american option. In the first way we use suitable conditions in order to find the optimal price of a stock and the optimal stopping time, and here we presume that time is continuous. The second way uses the martingale approach and here we presume that time is discrete.

Accepted by the Scientific Board on: 7.7.2009.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB

President: Dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Danijela Rajter-Ćirić, Associate Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Dora Seleši, Assistant Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad