UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Zorica Janković

# Diferencijalni i integralni račun na podmnogostrukostima od $\mathbb{R}^n$

- master rad -

Mentor:
docent dr Sanja Konjik

Novi Sad, 2014

# Predgovor

Kalkulus na euklidskom prostoru obuhvata određivanje dužine, i to ne samo podskupova od $\mathbb{R}^1$, već i glatkih krivih u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Njime je obuhvaćeno i izračunavanje površine, ne samo podskupova od $\mathbb{R}^2$, nego i glatkih površi u $\mathbb{R}^3$. Cilj ovog rada je uvođenje $k$- dimenzionalnih analogona krivih i površi, koje nazivamo it $k$- dimenzionalnim podmnogostrukostima od $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, i razvijanje dieferencijalnog i integralnog računa na njima. Definisaćemo koncept odgovarajućeg zapreminskog elementa za ovakve objekte, i integral funkcije na $k$ - dimenzionalnoj podmnogostrukosti, generalizujući pojmove definisane u okviru kalkulusa nad krivama i površima. Intuitivno, $k$- dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ je prostor koji lokalno "liči na $\mathbb{R}^k$," a taj prostor opisujemo lokalnim koordinatnim sistemom sa $k$ koordinata.

Potreba za pojmom podmnogostrukosti se pojavila sa razvijanjem neeuklidske geometrije, kada je otkriveno da postoje prostori različiti od euklidskih prostora, a koji su sa matematičkog aspekta interesantni za analiziranje. To su bili rezultati radova Bolyaija[1], Gaussa[2] i Lobachevskog[3] oko 1880. godine. Moderna definicija je bila omogućena Hilbertovom[4] aksiomatizacijom, koju je dalje unapredio Weyl[5] 1913. godine.

U prvom poglavlju je obuhvaćen kalkulus na euklidskom prostoru, čiji rezultati su neophodni za razvijanje kalkulusa na podmnogostrukostima. Definišemo diferencijalne forme na $\mathbb{R}^3$, koje predstavljaju osnovu za ravijanje diferencijalnog računa na podmnogostrukostima. Zatim proširujemo koncept diferencijalnih formi sa $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^n$, i definišemo spoljašnji izvod forme.

Drugo poglavlje sadrži definiciju $k$- dimenzionalne podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$, i njegove karakterizacije kao podskupa od $\mathbb{R}^n$. Zatim pojam podmnogostrukosti proširujemo do pojma diferencijalnih mnogostrukosti.

U trećem poglavlju definišemo tangentni prostor podmnogostrukosti i, koji aproksimira podmnogostrukost u nekoj njenoj fiksnoj tački, i snabdevamo ga unutrašnjom strukturom vektorskog prostora. Izloženi su rezultati vezani za tangentno raslojenje i tenzore, koji dovode do definicije diferencijalne forme na mnogostrukosti.

[1]Janos Bolyai, 1802-1860
[2]Carl Friedrich Gauss, 1777-1855
[3]Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1792-1856
[4]David Hilbert, 1862-1943
[5]Hermann Weyl, 1885-1955

Četvrto poglavlje obuhvata razvijanje teorije integracije na mnogostrukostima. U njemu je izložen koncept integracije diferencijalnih formi na podmnogostrukostima. Uvodimo pojam orijentisanih mnogostrukosti i mnogostrukosti sa rubom, koji su neophodni za izvođenje glavnog cilja ovog poglavlja, a to je formulacija i dokaz Stokesove[6] teoreme kao generalizacije klasičnih teorema integralnog računa Gaussa i Greena.[7].

[6]George Stokes, 1819-1903
[7]George Green, 1793-1841

# Sadržaj

# Glava 1

# Kalkulus na euklidskom prostoru

Krive, površi i njihova uopštenja- mnogostrukosti, su osnovni pojmovi diferencijalne geometrije. Metodama matematičike analize i algebre se u diferencijalnoj geometriji proučavaju različiti tipovi geometrijskih pojmova i invarijanti. U ovom poglavlju ćemo izložiti rezultate diferencijalnog i integralnog računa na euklidskom prostoru. Detaljnije izlaganje čitalac može pronaći u [1].

## 1.1 Euklidski prostor

Trodimenzionalni prostor se često u matematici koristi bez formalne definicije. Intuitivno, posmatrajmo ćošak sobe, pri čemu primećujemo ose pravouglog koordinatnog sistema. Na svakoj osi možemo naći broj koji opisuje položaj neke tačke. Precizna definicija koja opisuje ovu intuitivnu predstavu može se dobiti na sledeći način: umesto da tri broja *opisuju položaj* tačke u prostoru, tu trojku brojeva definišemo *tačkom u prostoru.*

**1.1.1 Definicija** *Euklidski trodimenzionalni prostor* $\mathbb{R}^3$ *je skup svih uređenih trojki realnih brojeva. Uređena trojka* $p = (p_1,\ p_2,\ p_3)$ *se zove tačka u* $\mathbb{R}^3$.

U okviru linearne algebre je pokazano da je $\mathbb{R}^3$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. U suštini, ako su $p = (p_1, p_2, p_3)$ i $q = (q_1, q_2, q_3)$ tačke u $\mathbb{R}^3$, njihova *suma* je tačka

$$p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3).$$

*Skalarni proizvod* tačke $p = (p_1, p_2, p_3)$ i broja $a \in \mathbb{R}$ je tačka

$$ap = (ap_1, ap_2, ap_3).$$

Lako je proveriti da ove dve operacije zadovoljavaju aksiome vektorskog prostora. Tačka $0 = (0, 0, 0)$ se naziva *koordinatnim početkom* u $\mathbb{R}^3$. Diferencijalni račun podrazumeva drugačiji aspekt prostora $\mathbb{R}^3$, počevši od pojma diferencijabilne realne funkcije na $\mathbb{R}^3$. Podsetićemo se osnovnih pojmova.

**1.1.2 Definicija** *Neka su $f$, $g$ i $h$ realne funkcije na $\mathbb{R}^3$, takve da je za svaku tačku $p = (p_1, p_2, p_3)$ iz $\mathbb{R}^3$*

$$f(p) = p_1,\ g(p) = p_2,\ h(p) = p_3.$$

*Funkcije $f$, $g$ i $h$ zovemo koordinatnim funkcijama na $\mathbb{R}^3$.*

Možemo koristiti i indeksnu notaciju za ove funkcije, pišući

$$f_1 = f,\ \ f_2 = g,\ f_3 = h.$$

Kako je vrednost funkcije $f_i$ u tački $p$ broj $p_i$, važi identitet $p = (p_1, p_2, p_3) = (f_1(p),\ f_2(p),\ f_3(p))$, za svaku tačku $p \in \mathbb{R}^3$. Elementarni kalkulus ne pravi uvek razliku između *brojeva* $p_1,\ p_2,\ p_3$ i *funkcija* $f_1,\ f_2,\ f_3$. U višedimenzionalnim prostorima kao što je $\mathbb{R}^3$, taj nedostatak vodi ka ozbiljnim nedoumicama. (U suštini, pravimo razliku kada funkciju na $\mathbb{R}^3$ označimo jednim slovom $f$, dok sa $f(p)$ označavamo njenu vrednost u tački $p$.)

**1.1.3 Definicija** *Realna funkcija $f$ na $\mathbb{R}^3$ je diferencijabilna (ili beskonačno puta diferencijabilna, ili glatka, ili klase $C^\infty$) ako postoje svi njeni parcijalni izvodi i neprekidni su.*

Diferencijabilne realne funkcije $f$ i $g$ možemo sabirati i množiti na uobičajen način i time dolazimo do funkcija koje su opet diferencijabilne i realne. Jednostavno sabiramo i množimo njihove vrednosti u svakoj tački tj. za tačku $p \in \mathbb{R}^3$ imamo

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p)$$
$$(fg)(p) = f(p)g(p).$$

Izraz "diferencijabilna realna funkcija" je dugačak. Zato ćemo uvesti konvenciju prema kojoj ćemo "funkcijom" smatrati "realnu funkciju", osim ako nije drugačije napomenuto, a za funkcije koje posmatramo ćemo podrazumevati da su diferencijabilne.

Ovde posmatramo *trodimenzionalni* euklidski prostor samo zato što ćemo njega najčešće koristiti u daljem radu. Analogno bismo rezonovali za *Euklidski $n$ - prostor* $\mathbb{R}^n$, u kom su tačke $n$ - torke $p = (p_1, \ldots, p_n)$ i koji ima $n$ koordinatnih funkcija $f_1, \ldots, f_n$. Svi rezultati ovog poglavlja važe za prostore proizvoljnih dimenzija. Jasno, oni važe i za *realnu pravu* $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Mnogi koncepti koji slede se prenose i na veće dimenzije, a moguće ih je ponovo izvesti i ako se ograničimo na jednodimenzionalni prostor.

## 1.2 Tangentni vektori

Intuitivno, vektor u $\mathbb{R}^3$ je orijentisana duž, ili "strelica". Vektori se često koriste u fizici ili inženjerstvu da bi se opisala sila, brzina, impuls i mnogi druge veličine. Da bismo došli do definicije koja je i praktična i precizna, opisaćemo "strelicu" u $\mathbb{R}^3$ tako što ćemo dati početnu tačku $p$ i promenu, odnosno vektor $v$, da bismo stigli do krajnje tačke $p + v$. Striktno govoreći, $v$ je samo tačka u $\mathbb{R}^3$.

**1.2.1 Definicija** *Tangentni vektor $v_p$ na $\mathbb{R}^3$ sastoji se od dve tačke prostora $\mathbb{R}^3$: svoje vektorske komponente $v$ i tačke dodira $p$.*

Naglasimo da su dva tangentna vektora jednaka, u oznaci $v_p = w_q$, ako i samo ako imaju jednake vektorske komponente, $v = w$, i istu tačku dodira, $p = q$. Dalje, za tangentne vektore $v_p$ i $v_q$, koji imaju jednake vektorske komponente ali različite tačke dodira, kažemo da su *paralelni*. Od suštinske je važnosti primetiti da su $v_p$ i $v_q$ različiti za $p \neq q$. Primer gde se ovo jasno vidi je koncept momenta sile u fizici: ista sila $v$, koja deluje na različite dve tačke čvrstog tela, može proizvesti različite rotacione efekte.

**1.2.2 Definicija** *Neka je $p$ tačka u $\mathbb{R}^3$. Skup $T_p(\mathbb{R}^3)$ svih tangentnih vektora sa istom tačkom dodira $p$ zove se tangentni prostor od $\mathbb{R}^3$ u tački $p$.*

Naglasimo još da $\mathbb{R}^3$ u svakoj svojoj tački ima različit tangentni prostor.

Kako svi vektori jednog tangentnog prostora imaju zajedničku tačku dodira, sabiranje vektora, kao i množenje vektora skalarom, iz $\mathbb{R}^3$ možemo preneti na $T_p(\mathbb{R}^3)$ i time ga učiniti vektorskim prostorom. Eksplicitno, definišemo da je zbir $v_p + w_p$ zapravo $(v + w)_p$, i za realan broj $c$ definišemo da je proizvod $c(v_p)$ zapravo $(cv)_p$. U pitanju je uobičajeno "pravilo paralelograma" za sabiranje vektora, a množenjem skalarom $c$ samo menjamo dužinu polaznog tangentnog vektora u zavisnosti od skalara $c$, pri čemu mu menjamo smer za $c < 0$.

Ove operacije na tangentnom prostoru $T_p(\mathbb{R}^3)$ čine vektorski prostor $T_p(\mathbb{R}^3)$ izomorfnim sa $\mathbb{R}^3$. Zaista, iz gornjih definicija direktno sledi da je funkcija $v \to v_p$, za fiksnu tačku $p$, linearni izomorfizam prostora $\mathbb{R}^3$ na prostor $T_p(\mathbb{R}^3)$, odnosno linearna transformacija koja je "1-1" i "na".

Standardni koncept u fizici i inženjerstvu je polje sila. Gravitaciono polje planete Zemlje, recimo, svakoj tački svemira dodeljuje silu (vektor) usmeren ka centru Zemlje.

**1.2.3 Definicija** *Vektorsko polje $V$ na $\mathbb{R}^3$ je funkcija koja svakoj tački $p$ prostora $\mathbb{R}^3$ dodeljuje tangentni vektor $V(p)$ na $\mathbb{R}^3$ u tački $p$.*

Grubo govoreći, vektorsko polje je samo kolekcija mnoštva strelica u svim tačkama prostora $\mathbb{R}^3$. No, postoji prirodna algebra vektorskih polja. Da bismo je opisali, preispitajmo prvo poznati pojam sabiranja realnih funkcija $f$ i $g$. Moguće je sabirati funkcije $f$ i $g$, jer je moguće sabrati njihove vrednosti u svim tačkama. Isto je sa vektorskim poljima $V$ i $W$. U svakoj tački $p$, vrednosti $V(p)$ i $W(p)$ su u istom vektorskom prostoru - tangentnom prostoru $T_p(\mathbb{R}^3)$, pa odatle sledi da je moguće sabirati $V(p)$ i $W(p)$. Vektorska polja $V$ i $W$ sabiramo jednostavno, tako što sabiramo njihove vrednosti u svakoj tački. Odatle sledi da je formula za sabiranje vektorskih polja ista kao za funkcije,

$$(V + W)(p) = V(p) + W(p).$$

Ova šema će se pojavljivati u više navrata; ako se određena operacija može primeniti na vrednosti dve funkcije u svakoj tački, onda se ta operacija može proširiti baš na funkcije - jednostavno, primenjujući je na vrednosti tih funkcija u svakoj tački.

Na primer, posmatrajmo proširenje operacije *skalarnog množenja* na tangentne prostore od $\mathbb{R}^3$. Ako je $f$ realna funkcija na $\mathbb{R}^3$ i $V$ vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$, onda je sa $fV$ definisano vektorsko polje nad $\mathbb{R}^3$ takvo da je

$$(fV)(p) = f(p)V(p) \text{ za svako } p.$$

Naš cilj je da precizno odredimo kako vektorsko polje izgleda. Da bismo to učinili, uvešćemo tri specijalna vektorska polja, koja će nam poslužiti kao "baza" svih vektorskih polja.

**1.2.4 Definicija** *Neka su $U_1$, $U_2$ i $U_3$ vektorska polja nad $\mathbb{R}^3$, tako da je*

$$U_1(p) = (1, 0, 0)_p$$
$$U_2(p) = (0, 1, 0)_p$$
$$U_3(p) = (0, 0, 1)_p$$

*za svaku tačku $p$ prostora $\mathbb{R}^3$. $U_1$, $U_2$, $U_3$ ćemo zvati prirodnim okvirom polja na $\mathbb{R}^3$.*

Tako je $U_i$ $(i = 1, 2, 3)$ jedinično vektorsko polje u pozitivnom $x_i$ smeru.

**1.2.5 Lema** *Ako je $V$ vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$, onda postoje tri jedinstveno određene realne funkcije $v_1, v_2, v_3$ na $\mathbb{R}^3$ tako da je*

$$V = v_1U_1 + v_2U_2 + v_3U_3.$$

*Funkcije $v_1, v_2, v_3$ se nazivaju euklidske koordinatne funkcije vektorskog polja $V$.*

**Dokaz.** Prema definiciji, vektorsko polje $V$ svakoj tački $p$ dodeljuje tangentni vektor $V(p)$ u tački $p$. Tako vektorska komponenta od $V(p)$ zavisi od $p$, pa je zapisujemo kao $v_1(p), v_2(p), v_3(p)$. Na ovj način su $v_1, v_2, v_3$ definisani kao realne *funkcije* na $\mathbb{R}^3$. Odatle sledi

$$\begin{aligned} V(p) &= (v_1(p), v_2(p), v_3(p))_p \\ &= v_1(p)(1, 0, 0)_p + v_2(p)(0, 1, 0)_p + v_3(p)(0, 0, 1)_p \\ &= v_1(p)U_1(p) + v_2(p)U_2(p) + v_3(p)U_3(p) \end{aligned}$$

za svaku tačku $p$. Prema gornjem razmatranju, to znači da vektorsko polje $V$ i $\sum_{i=1}^{3} v_i U_i$ imaju jednake vrednosti tangentnih vektora u svakoj tački. Odatle sledi da je $V = \sum_{i=1}^{3} v_i U_i$. □

Dobijeni identitet tangentnih vektora, $(a_1, a_2, a_3)_p = \sum_{i=1}^{3} a_i U_i(p)$, biće često korišćen u daljem izlaganju.

Računske operacije na vektorskim poljima se uvek mogu izvesti pomoću odgovarajućih funkcija. Na primer, sabiranje vektorskih polja i množenje vektorskih polja funkcijom je izraženo preko koordinata na sledeći način:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i U_i + \sum_{i=1}^{3} w_i U_i = \sum_{i=1}^{3} (v_i + w_i) U_i,$$

$$f(\sum_{i=1}^{3} v_i U_i) = \sum_{i=1}^{3} (f v_i) U_i.$$

Obzirom na to da ćemo se baviti diferencijalnim računom, prirodno je očekivati da ćemo za razne objekte koje budemo posmatrali, zahtevati da budu diferencijabilni. Vektorsko polje $V$ je snabdeveno *diferencijabilnošću*, ako su njegove koordinatne funkcije diferencijabilne (u smislu Definicije 1.1.3). Od sada, kada kažemo "vektorsko polje", podrazumevaćemo "diferencijabilno vektorsko polje".

## 1.3 Izvod u pravcu

Svakom tangentnom vektoru $v_p$ prostora $\mathbb{R}^3$ dodelimo pravu $t \to p + tv$ (prava je najjednostavnija kriva u Euklidskom prostoru; njene koordinatne funkcije su linearne u smislu $t \to at + b$, a ne u smislu homogenosti $t \to at$; eksplicitno, kriva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, za koju je

$$\alpha(t) = p + tq = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, p_3 + tq_3) \ (q \neq 0)$$

je *prava* kroz tačku $p$ u pravcu $q$.) Ako je $f$ diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^3$, onda je $t \to f(p + tv)$ obična diferencijabilna funkcija na realnoj pravi. Očigledno je da izvod ove funkcije u $t = 0$ pokazuje stepen promene funkcije $f$, dok se tačka $p$ pomera u pravcu $v$.

**1.3.1 Definicija** *Neka je $f$ diferencijabilna realna funkcija na $\mathbb{R}^3$, i neka je $v_p$ tangentni vektor na $\mathbb{R}^3$. Tada je broj*

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f(p + tv))$$

*izvod funkcije $f$ u pravcu vektora $v_p$.*

Ova definicija se pojavljuje u okviru elementarnog kalkulusa sa dodatnim zahtevom da je $v_p$ jedinični vektor. Iako mi to ovde ne zahtevamo, ipak ćemo $v_p[f]$ smatrati *izvodom u pravcu*.

Na primer, izračunajmo $v_p$ za dato $f = x^2yz$, za $p = (1, 1, 0)$ i $v = (1, 0, -3)$. Jednakost

$$p + tv = (1, 1, 0) + t(1, 0, -3) = (1 + t, 1, -3t)$$

opisuje pravu kroz tačku $p$ u pravcu $v$. Primenjujući funkciju f na tačke ove prave, dobijamo

$$f(p + tv) = (1 + t)^2 \cdot 1 \cdot (-3t) = -3t - 6t^2 - 3t^3.$$

Dalje je

$$\frac{d}{dt}(f(p + tv)) = -3 - 12t - 9t^2,$$

odakle sledi da za $t = 0$ dobijamo $v_p[f] = -3$. Sledi da funkcija $f$ opada, dok se tačka $p$ kreće u pravcu $v$.

Sledeća lema pokazuje kako vrednosti $v_p[f]$ izračunavamo pomoću parcijalnih izvoda funkcije $f$ u tački $p$.

**1.3.2 Lema** *Ako je $v_p = (v_1, v_2, v_3)_p$ tangentni vektor prostora $\mathbb{R}^3$, onda je*

$$v_p[f] = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

**Dokaz.** Neka je $p = (p_1, p_2, p_3)$. Tada je

$$p + tv = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3).$$

Koristimo pravilo za izvod kompozicije da izračunamo izvod funkcije

$$f(p + tv) = f(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$$

u $t = 0$.

Kako je

$$\frac{d}{dt}(p_i + tv_i) = v_i,$$

dobijamo

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f(p + tv)) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i.$$

□

Koristeći navedenu lemu, izračunajmo ponovo $v_p[f]$ iz prethodnog primera. Kako je $f = x^2yz$, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z,\ \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y.$$

Odatle sledi da je u tački $p = (1, 1, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 1.$$

Dalje prema lemi sledi

$$v_p[f] = 0 + 0 + (-3) \cdot 1 = -3,$$

kao što smo i ranije dobili.

Osnovne osobine ovako definisanog izvoda su navedene u narednoj teoremi.

**1.3.3 Teorema** *Neka su $f$ i $g$ funkcije na $\mathbb{R}^3$, $v_p$ i $w_p$ tangentni vektori, a i b brojevi. Tada je:*

1. $(av_p + bw_p)[f] = av_p[f] + bw_p[f]$.
2. $v_p[af + bg] = av_p[f] + bv_p[g]$.
3. $v_p[fg] = v_p[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p[g]$.

**Dokaz.** Sve tri osobine se lako mogu izvesti iz prethodne leme. Dokažimo deo tvrđenja 3. Prema lemi, ako je $v = (v_1, v_2, v_3)$, onda je

$$v_p[fg] = \sum v_i \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(p).$$

Kako je

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial(f)}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial(g)}{\partial x_i},$$

sledi da je

$$\begin{aligned} v_p[fg] &= \sum v_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \left( \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) g(p) + f(p) \left( \sum v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right) \\ &= v_p[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p[g]. \end{aligned}$$

□

Prve dve osobine možemo ukratko rezimirati konstatacijom da je $v_p[f]$ linearno i po $v_p$ i po $f$. Treća osobina je, kako smo i u dokazu naveli, primena uobičajenog Leibnizovog[1] pravila za diferenciranje proizvoda. *Bez obzira na formu, diferenciranje će uvek imati odgovarajuće linearne osobine i zadovoljavaće Leibnizovo pravilo.*

Sada ćemo definisati *dejstvo vektorskog polja $V$ na funkciju f.* Rezultat je realna funkcija $V[f]$, čija je vrednost u svakoj tački $p$ broj $V(p)[f]$, tj. izvod funkcije $f$ u pravcu tangentnog vektora $V(p)$ u tački $p$. Ovaj postupak ne bi trebao biti neobičan, jer za funkciju $f$ na realnoj pravi, on počinje definisanjem izvoda *funkcije $f$ u tački*, a tada je izvod $\frac{df}{dx}$ funkcija čija je vrednost u svakoj tački upravo izvod u toj tački. Definicija funkcije $V(p)[f]$ je analogna. U

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716

suštini, ako je $U_1, U_2, U_3$ prirodni okvir oblasti u $R^3$, onda je $U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Ovo je neposredna posledica Leme 1.3.2 . Npr., $U_1(p) = (1,0,0)_p$, odakle sledi

$$U_1(p)[f] = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f(p_1+t, p_2, p_3)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p).$$

Ovo je tačno za tačke $p = (p_1, p_2, p_3)$, odakle je $U_1[f] = \frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Ovakvu notaciju izvoda u pravcu ćemo nadalje u većoj meri koristiti za vektorska polja, nego za pojedinačne tangentne vektore.

**1.3.4 Lema** *Neka su $V$ i $W$ vektorska polja na $\mathbb{R}^3$ i $f, g, h$ realne funkcije. Tada je*

1. $(fV + gW)[h] = fV[h] + gW[h]$.
2. $V[af + bg] = aV[f] + bV[g], \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.
3. $V[fg] = V[f] \cdot g + f \cdot V[g]$.

**Dokaz.** Dokažimo treću formulu. Po definiciji, vrednost funkcije $V[fg]$ u $p$ je $V(p)[fg]$. Prema Teoremi 1.3.3 imamo

$$\begin{aligned} V(p)[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot V(p)[g] &= V[f](p) \cdot g(p) + f(p) \cdot V[g](p) \\ &= (V[f] \cdot g + f \cdot V[g])(p). \end{aligned}$$

□

Napomenimo dalje da $fV$ uglavnom označava množenje, ali $V[f]$ je diferenciranje. Npr. ako je $V = xU_1 - y^2U_3$ i $f = x^2y + z^3$, onda je

$$\begin{aligned} V[f] &= xU_1[x^2y] + xU_1[z^3] - y^2U_3[x^2y] - y^2U_3[z^3] \\ &= x(2xy) + 0 - 0 - y^2(3z^2) \\ &= 2x^2y - 3y^2z^2. \end{aligned}$$

## 1.4 Krive u $\mathbb{R}^3$

Neka je $I$ otvoren interval na realnoj pravi $\mathbb{R}$. Interpretiraćemo ga na sledeći način: osim uobičajenog otvorenog intervala $a < t < b$ ($a$,$b$ su realni brojevi), otvorenim intervalom smatraćemo i beskonačne oblike $a < t$ (poluprava do $+\infty$), $t < b$ (poluprava do $-\infty$), kao i čitavu realnu pravu.

Krivu u $\mathbb{R}^3$ možemo zamisliti kao put koji svojim kretanjem pređe tačka $\alpha$. U svakom "trenutku" $t$ u nekom otvorenom intervalu, $\alpha$ se nalazi u položaju

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

u $\mathbb{R}^3$. Preciznije, $\alpha$ je funkcija iz $I$ u $\mathbb{R}^3$, a relane funkcije $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ su njene *euklidske koordinatne funkcije*. Tako onda pišemo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pri čemu naravno podrazumevamo

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)), \text{ za sve } t \text{ iz } I.$$

Definišemo da je funkcija $\alpha$ *diferencijabilna* ako su njene (realne) koordinatne funkcije diferencijabilne u uobičajenom smislu.

**1.4.1 Definicija** *Kriva u $\mathbb{R}^3$ je diferencijabilno preslikavanje $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ otvorenog intervala $I$ na $\mathbb{R}^3$.*

Sledi nekoliko primera krivih.

1. **Prava linija**. Linija je najjednostavniji oblik krive u euklidskom prostoru. Njene koordinatne funkcije su linearne (u smislu $t \to at + b$, ne u smislu homogenosti $t \to at$). Eksplicitno, kriva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ za koju je
$$\alpha(t) = p + tq = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, p_3 + tq_3) \ (q \neq 0)$$
je *prava linija* kroz tačku $p = \alpha(0)$ u pravcu $q$.

2. **Spirala**. Kriva $t \to (a\cos t, a\sin t, 0)$ prostire se oko kruga poluprečnika $a > 0$, u $xy$ - ravni u $\mathbb{R}^3$. Ako pretpostavimo da kriva raste (ili opada) konstantnom brzinom, dobijamo *spiralu* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, datu formulom
$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$
gde je $a > 0, b \neq 0$.

3. Kriva
$$\alpha(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right), \text{ za svako } t \in \mathbb{R},$$
ima svojstvo koje je bitno napomenuti: neka je $C$ cilindar u $\mathbb{R}^3$ nad kružnicom u $xy$ - ravni sa centrom u (1,0,0) i poluprečnikom 1. Tada se $\alpha$ konstantno kreće putanjom isečenom od $C$ po sferi $\mathbf{\Sigma}$ poluprečnika 2, sa centrom u koordinatnom početku.

4. Kriva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ za koju je
$$\alpha(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\right)$$
ima svojstvo da konstantno raste, kao i spirala u (2). Međutim, za razliku od spirale, ona se prostire nad parabolom $xy = 1$ u $xy$ ravni.

Ako su koordinatne funkcije krive dovoljno jednostavne, onda njen oblik u $\mathbb{R}^3$ možemo barem aproksimativno pronaći nalaženjem na grafiku nekoliko njenih tačaka.

Ako krivu $\alpha$ u $\mathbb{R}^3$ zamislimo kao pokretnu tačku, onda u svakom trenutku $t$, postoji tangentni vektor u tački $\alpha(t)$ koji nam daje trenutnu brzinu od $\alpha$ u tom trenutku.

**1.4.2 Definicija** *Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ kriva u $\mathbb{R}^3$, pri čemu je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Za svaki broj $t$ u $I$, vektor brzine krive $\alpha$ u $t$ je tangentni vektor*
$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right)$$
*u tački $\alpha(t)$ u $\mathbb{R}^3$.*

Datu definiciju možemo interpretirati i geometrijski, na sledeći način: izvod realne funkcije $f$ na $\mathbb{R}$ u $t$ je dat sa

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Ova formula ima smisla i kada funkciju $f$ zamenimo krivom $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. U suštini, važi sledeće:

$$\frac{1}{\Delta t}(\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)) =$$
$$\left(\frac{\alpha_1(t + \Delta t) - \alpha_1(t)}{\Delta t}, \frac{\alpha_2(t + \Delta t) - \alpha_2(t)}{\Delta t}, \frac{\alpha_3(t + \Delta t) - \alpha_3(t)}{\Delta t}\right).$$

Ovo je vektor od $\alpha(t)$ do $\alpha(t+\Delta t)$, skalarno pomnoženo sa $\frac{1}{\Delta t}$. Sada, kako se $\Delta t$ smanjuje, $\alpha(t + \Delta t)$ se približava ka $\alpha(t)$, i u graničnom slučaju kada $\Delta t \to 0$, dobijamo tangentni vektor na krivu $\alpha$ u tački $\alpha(t)$,

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right).$$

Tačka u kojoj tangentni vektor dodiruje krivu je $\alpha(t)$.

Primena identiteta

$$(v_1, v_2, v_3)_p = \sum v_i U_i(p)$$

na vektor brzine $\alpha'(t)$ u $t$ nas dovodi do alternativne formule

$$\alpha'(t) = \sum \frac{d\alpha_i}{dt}(t) U_i(\alpha(t)).$$

Npr., brzina prave $\alpha(t) = p + tq$ je

$$\alpha'(t) = (q_1, q_2, q_3)_{\alpha(t)} = q_{\alpha(t)}.$$

Činjenica da je $\alpha$ prava linija se ogleda u tome što su svi njeni vektori brzine paralelni; samo se usled promene argumenta $t$ menja tačka dodira. Za spiralu

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

brzina je

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)_{\alpha(t)}.$$

Činjenica da spirala konstantno raste se ogleda u cinjenici da je $z$ koordinata vektora $\alpha'(t)$ konstanta.

**1.4.3 Definicija** *Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ kriva. Ako je $h : J \to I$ $C^1$ preslikavanje na otvorenom intervalu $J$, onda je kompozicija preslikavanja*

$$\beta = \alpha(h) : J \to R^3$$

*kriva koja se naziva reparametrizacija krive $\alpha$ pomoću $h$.*

Za svako $s \in J$, nova kriva $\beta$ se u tački $\beta(s) = \alpha(h(s))$ poklapa sa $\alpha$ u $h(s)$ u $I$.

Da bismo izračunali koordinate krive $\beta$, treba jednostavno zameniti $t = h(s)$ umesto koordinata $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ u $\alpha$. Npr., pretpostavimo da je

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t\right) \text{ na } I : 0 < t < 4.$$

Ako je $h(s) = s^2$ na $J : 0 < s < 2$, onda je reparametrizacija date krive

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1 - s^2).$$

Naredna lema povezuje brzinu krive sa njenom reparametrizacijom.

**1.4.4 Lema** *Ako je $\beta$ reparametrizacija od $\alpha$ po $h$, onda je*

$$\beta'(s) = \alpha'(h(s))\frac{dh}{ds}(s).$$

**Dokaz.** Ako je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, onda je

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \alpha_3(h(s))).$$

Koristeći pravilo za izvod složene funkcije, dobijamo

$$(\alpha_i(h(s)))' = \alpha_i'(h(s)) \cdot h'(s).$$

Prema definiciji brzine, odavde proizilazi

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= (\alpha(h))'(s) \\ &= (\alpha_1'(h(s)) \cdot h'(s), \alpha_2'(h(s)) \cdot h'(s), \alpha_3'(h(s)) \cdot h'(s)) \\ &= \alpha'(h(s))h'(s). \end{aligned}$$

□

Prema ovoj lemi, brzinu reparametrizacije od $\alpha$ po $h$ dobijamo tako što prvo dobijemo reparametrizaciju $\alpha'$ po $h$, a onda nju skalarno pomnožimo sa izvodom od $h$.

**1.4.5 Lema** *Neka je $\alpha$ kriva u $\mathbb{R}^3$ i neka je $f$ diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^3$. Tada je*

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t).$$

**Dokaz.** Kako je

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}\right)_\alpha,$$

prema Lemi 1.3.2 imamo da je

$$\alpha'(t)[f] = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))\frac{d\alpha_i}{dt}(t).$$

No, kako se kompozicija funkcija $f \circ \alpha$ može zapisati kao $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pravilo za izvod kompozicije daje isti rezultat. $\square$

Prema definiciji, $\alpha'(t)[f]$ je brzina promene funkcije $f$ duž $\alpha(t)$ u pravcu $\alpha'(t)$. Ako je $\alpha'(t) \neq 0$, to je tangenta na $\alpha$ u $\alpha(t)$. Prethodna lema pokazuje da je brzina promene ista kao ona od $f$ duž krive $\alpha$.

Kako je kriva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ funkcija, ima smisla reći da je $\alpha$ "1-1" tj. $\alpha(t) = \alpha(t_1)$ samo ako je $t = t_1$. Drugo specifično svojstvo krivih je periodičnost: kriva $\alpha : R \to R^3$ je *periodična* ako postoji broj $p > 0$ takav da je $\alpha(t+p) = \alpha(t)$ za svako $t$. Najmanji takav broj $p$ zovemo *periodom* krive $\alpha$.

Što se kalkulusa tiče, najvažniji uslov za krivu $\alpha$ je da bude *regularna*, tj. svi njeni vektori brzine su različiti od nule.

## 1.5 1- forme na $\mathbb{R}^3$

Ako je $f$ realna funkcija na $\mathbb{R}^3$, onda se u okviru elementarnog kalkulusa diferencijal funkcije $f$ obično definiše kao

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Nije uvek sasvim jasno šta ovaj formalni izraz znači. U ovom odeljku dajemo rigorozni pristup koristeći notaciju 1 - formi, koje će se u daljem radu pojavljivati u bitnim momentima.

**1.5.1 Definicija** 1- *forma $\phi$ na $\mathbb{R}^3$ je realna funkcija na skupu svih tangentnih vektora na $\mathbb{R}^3$ takva da je $\phi$ linearno u svakoj tački, tj.*

$$\phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w),$$

*za sve $a, b \in \mathbb{R}$ i sve tangentne vektore $v$, $w$ u istoj tački prostora $\mathbb{R}^3$.*

Naglasimo da za svaki tangentni vektor $v$, 1 - forma $\phi$ definiše realan broj $\phi(v)$, i za svaku tačku $p$ prostora $\mathbb{R}^3$, rezultujuća funkcija $\phi_p : T_p(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ je linearna. Tako je u svakoj tački $p$, $\phi_p$ element dualnog prostora od $T_p(\mathbb{R}^3)$. U ovom smislu, pojam 1- forme je dualan pojmu vektorskog polja.

Zbir 1- formi $\phi$ i $\psi$ se definiše na uobičajen način:

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v),$$

za svaki tangentni vektor $v$.

Slično, ako je $f$ realna funkcija na $\mathbb{R}^3$ i $\phi$ je 1- forma, onda je $f\phi$ 1- forma tako da je

$$(f\phi)(v_p) = f(p)\phi(v_p),$$

za sve tangentne vektore $v_p$.

Postoji takođe prirodan način primene 1- forme na vektorsko polje $V$ da bi se dobila realna funkcija $\phi(V)$: u svakoj tački $p$, vrednost funkcije $\phi(V)$ je $\phi(V(p))$.

Tako 1- formu možemo posmatrati kao mašinu koja konvertuje vektroska polja u realne funkcije. Kao i kod vektorskih polja, uvek ćemo pretpostaviti da su 1-forme diferencijabilne.

Po definiciji se pokazuje da je $\phi(V)$ linearno i po $\phi$ i po $V$, tj.

$$\phi(fV \ + \ gW) = f\phi(V) + g\phi(W)$$

i

$$(f\phi + g\psi)(V) = f\phi(V) + g\psi(V),$$

gde su $f$ i $g$ funkcije.

Koristeći pojam izvoda u pravcu, sada cemo definisati najvažniji način pretvaranja funkcija u 1- forme.

**1.5.2 Definicija** *Ako je $f$ diferencijabilna realna funkcija na $\mathbb{R}^3$, onda je diferencijal $df$ funkcije $f$ 1- forma tako da je*

$$df(v_p) = v_p[f],$$

*za sve tangentne vektore $v_p$.*

Zapravo, $df$ je 1- forma, jer je $df$ po definiciji realna funkcija primenjena na tangentne vektore, a prema (1) Teoreme 1.3.3 $df$ je linearno u svakoj tački $p$. Jasno je da $df$ pokazuje sve brzine promene funkcije $f$ u svim pravcima u $\mathbb{R}^3$, pa nije neobično što je diferencijal fundamentalan pojam u kalkulusu na $\mathbb{R}^3$.

Sada je naš zadatak da pokažemo da ove apstraktne definicije vode ka poznatim rezultatima.

**1.5.3 Primer** 1- forme na $R^3$.

1. Diferencijali $dx_1, dx_2, dx_3$ koordinatnih funkcija. Koristeći Lemu 1.3.2, dobijamo

   $$dx_i(v_p) = v_p[x_i] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \sum_j v_j \delta_{ij} = v_i,$$

   gde je $\delta_{ij}$ Kronekerov simbol (koji uzima vrednost 0 za $i \neq j$, a 1 za $i = j$). Tako je *vrednost $dx_i$ na proizvoljnom tangentnom vektoru $v_p$ $i$ - ta koordinata $v_i$ njegove vektorske komponente*, i ona ne zavisi od tačke $p$.

2. 1- forma $\psi \ = \ f_1 dx_1 \ + \ f_2 dx_2 \ + \ f_3 dx_3$. Kako je $dx_i$ 1- forma, naše definicije pokazuju da je $\psi$ takođe 1- forma za bilo koje funkcije $f_1, f_2, f_3$. Vrednost $\psi$ na proizvoljnom tangentnom vektoru $v_p$ je

   $$\psi(v_p) = (\sum f_i dx_i)(v_p) = \sum f_i(p) dx_i(v_p) = \sum f_i(p) v_i.$$

Prvi primer pokazuje da su 1- forme $dx_1, dx_2, dx_3$ analogne tangentnim vektorima koordinatnih funkcija $x_1, x_2, x_3$. S druge strane, možemo posmatrati $dx_1, dx_2, dx_3$ kao "duale" vektorskih polja $U_1, U_2, U_3$. Zapravo, direktno iz (1) sledi da funkcija $dx_i(U_j)$ ima konstantnu vrednost $\delta_{ij}$.

Dalje ćemo pokazati da se svaka 1- forma može prikazati kao linearna kombinacija 1- formi $dx_1, dx_2,$ i $dx_3$..

**1.5.4 Lema** *Ako je $\phi$ 1- forma na $\mathbb{R}^3$, onda je $\phi = \sum f_i dx_i$, gde je $f_i = \phi(U_i)$. Funkcije $f_1, f_2, f_3$ se zovu euklidske koordinatne funkcije 1- forme $\phi$.*

**Dokaz.** Po definiciji, 1- forma je funkcija na tangentnim vektorima, odakle sledi da su $\phi$ i $\sum f_i dx_i$ jednaki ako i samo ako imaju istu vrednost za svaki tangentni vektor $v_p = \sum v_i U_i(p)$. U (2) u prethodnom primeru smo videli da je

$$(\sum f_i dx_i)(v_p) = \sum f_i(p) v_i.$$

S druge strane,

$$\phi(v_p) = \phi(\sum v_i U_i(p)) = \sum v_i \phi(U_i(p)) = \sum v_i f_i(p),$$

pošto je $f_i = \phi(U_i)$. Tako $\phi$ i $\sum f_i dx_i$ zaista imaju istu vrednost za svaki tangentni vektor. □

Ova lema pokazuje da 1- forma na $\mathbb{R}^3$ nije ništa drugo do izraz

$$f\ dx + g\ dy + h\ dz,$$

a takvi izrazi su sada rigorozno definisani kao funkcije na tangentnim vektorima. Sada pokažimo da se definicija diferencijala funkcije (Definicija 1.5.2) slaže sa neformalnom definicijom datom na početku ovog odeljka.

**1.5.5 Propozicija** *Ako je $f$ diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^3$, onda je*

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

**Dokaz.** Vrednost sume $\sum(\frac{\partial f}{\partial x_i}) dx_i$ u proizvoljnom tangentnom vektoru $v_p$ je $\sum(\frac{\partial f}{\partial x_i})(p) v_i$. Prema Lemi 1.3.2, vrednost $df(v_p) = v_p[f]$ je ista. Odatle dobijamo da su 1- forme $df$ i $\sum(\frac{\partial f}{\partial x_i}) dx_i$ jednake. □

Sada, nezavisno od toga da li koristimo ovaj rezultat ili definiciju diferencijala $d$, dobijamo da je

$$d(f+g) = df + dg.$$

Konačno, ustanovićemo kako $d$ deluje na *proizvod* i *kompoziciju* funkcija.

**1.5.6 Lema** *Neka je $fg$ proizvod diferencijabilnih fukncija $f$ i $g$ na $\mathbb{R}^3$. Tada je*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

**Dokaz.** Koristeći Propoziciju 1.5.5, dobijamo

$$\begin{aligned} d(fg) &= \sum \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} dx_i \\ &= \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i \\ &= g \Big( \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \Big) + f \Big( \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \Big) \\ &= gdf + fdg. \end{aligned}$$

□

**1.5.7 Lema** *Neka su $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije, tako da je i kompozicija tih funkcija $h(f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takođe diferencijabilna. Tada je*

$$d(h(f)) = h'(f)df.$$

**Dokaz.** Uobičajeno pravilo za izvod kompozicije funkcija nam daje

$$\frac{\partial(h(f))}{\partial x_i} = h'(f)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Odatle sledi

$$d(h(f)) = \sum \frac{\partial(h(f))}{\partial x_i} dx_i = \sum h'(f)\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = h'(f)df.$$

□

Da bismo izračunali *df* za datu funkciju, gotovo uvek je jednostavnije koristiti ova svojstva diferencijala nego formulu datu u Propoziciji 1.5.5. Pomoću *df* odmah dobijamo parcijalne izvode funkcije *f*, i u suštini, sve njene *izvode u pravcu*. Npr., pretpostavimo da je

$$f = (x^2 - 1)y + (y^2 + 2)z.$$

Tada je prema Lemi 1.5.6 i 1.5.7,

$$\begin{aligned} df &= (2x\ dx)y + (x^2 - 1)dy + (2y\ dy)z + (y^2 + 2)dz \\ &= \underbrace{2xy}_{\frac{\partial f}{\partial x}}\ dx + \underbrace{(x^2 + 2yz - 1)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy + \underbrace{(y^2 + 2)}_{\frac{\partial f}{\partial z}} dz. \end{aligned}$$

Sada iskoristimo navedena pravila da odredimo vrednost ovog izraza u tangentnom vektoru $v_p$. Rezultat je:

$$v_p[f] = df(v_p) = 2p_1p_2v_1 + ({p_1}^2 + 2p_2p_3 - 1)v_2 + ({p_2}^2 + 1)v_3.$$

## 1.6 Diferencijalne forme na $\mathbb{R}^3$

1- forme na $\mathbb{R}^3$ su deo većeg sistema zvanog *diferencijalne forme* na $\mathbb{R}^3$. Kako račun ovog sistema nećemo izlagati rigorozno kao u slučaju 1- formi, napomenimo da sva ranije navedena svojstva važe i za diferencijalne forme.

Grubo govoreći, *diferencijalna forma* na $\mathbb{R}^3$ je izraz dobijen sabiranjem i množenjem realnih funkcija i diferencijala $dx_1, dx_2, dx_3$ prirodnih koordinata funkcija na $\mathbb{R}^3$. Za ove dve operacije važe uobičajeni zakoni asocijativnosti i distributivnosti; međutim, množenje nije komutativno. Umesto toga važi

$$\textit{pravilo alternacije}: \ dx_i dx_j = -dx_j dx_i \ (1 \leq i, j \leq 3).$$

Ovo pravilo se pojavljuje i u elementarnom kalkulusu. Posledica pravila alternacije je činjenica da "ponavljanje daje nulu" tj., da je $dx_i dx_i = 0$, jer za $i = j$, pravilo alternacije daje

$$dx_i dx_i = -dx_i dx_i.$$

Ako svaki sabirak diferencijalne forme sadrži $p$ umnožaka diferencijala $dx_i$ ($p = 0, 1, 2, 3,\ \ i = 1, 2, 3$), forma se zove $p$- forma, i kažemo da ona ima *stepen p*. Tako, opredelivši se za notaciju $dx, dy, dz$, dobijamo

- 0 - forma je upravo diferencijabilna funkcija $f$.
- 1 - forma je izraz $f\ dx + g\ dy + h\ dz$, kao u prethodnom odeljku.
- 2 - forma je izraz $f\ dx\ dy + g\ dx\ dz + h\ dy\ dz$.
- 3 - forma je izraz $f\ dx\ dy\ dz$.

Od ranije znamo kako da saberemo 1- forme: jednostavnim sabiranjem odgovarajućih koeficijenata. Tako je, u indeksnoj notaciji,

$$\sum f_i dx_i + \sum g_i dx_i = \sum (f_i + g_i) dx_i.$$

Odgovarajuće pravilo važi i za 2- forme, odnosno za 3- forme.

Na trodimenzionalnom euklidskom prostoru, sve $p$- forme za $p > 3$ su jednake nuli. Ovo je posledica pravila alternacije, jer proizvod više od tri umnoška diferencijala $dx_i$ mora sadržati neki diferencijal $dx_i$ dva puta, a u tom slučaju dobijamo nulu. Npr., $dx\ dy\ dx\ dz = -dx\ dx\ dy\ dz = 0$, jer je $dx\ dx = 0$. Kao podsetnik za korišćenje pravila alternacije, označimo ovo množenje 1- formi znakom $\wedge$. Ovaj proizvod zvaćemo *spoljašnjim proizvodom.* (Naravno, nećemo koristiti ovu oznaku ukoliko računamo samo proizvode diferencijala $dx, dy, dz$.)

**1.6.1 Primer** Neka je

$$\phi = x\ dx - y\ dy,\ \ \psi = z\ dx + x\ dz.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \phi \wedge \psi &= (x\ dx - y\ dy) \wedge (z\ dx + x\ dz) \\ &= xz\ dx\ dx + x^2\ dx\ dz - yz\ dy\ dx - yx\ dy\ dz. \end{aligned}$$

Kako je $dx\ dx = 0$ i $dy\ dx = -dx\ dy$, imamo da je

$$\phi \wedge \psi = yz\ dx\ dy + x^2 dx\ dz - xy\ dy\ dz.$$

Generalno, proizvod dve 1- forme je 2- forma.

Neka je sada $\theta = zdy$. Tada je

$$\theta \wedge \phi \wedge \psi = yz^2\ dy\ dx\ dy + x^2 z\ dy\ dx\ dz - xyz\ dy\ dy\ dz.$$

Oba izraza $dy\ dx\ dy$ i $dy\ dy\ dz$ su jednaki nuli. Odatle je

$$\theta \wedge \phi \wedge \psi = -x^2 z\ dx\ dy\ dz.$$

Neka je $\eta = y\ dx\ dz + x\ dy\ dz$ 2- forma. Tada imamo da je

$$\phi \wedge \eta = x^2\ dx\ dy\ dz - y^2\ dy\ dx\ dz = (x^2 + y^2)dx\ dy\ dz.$$

Dakle, $\phi \wedge \eta$ je 3- forma.

Iz prethodnog primera primećujemo da je $\wedge$ - proizvod $p$- forme i $q$- forme $(p+q)$-forma. Odatle sledi da je ovakav proizvod jednak nuli za $p + q > 3$.

**1.6.2 Lema** *Ako su $\phi$ i $\psi$ 1- forme, onda je*

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi.$$

**Dokaz.** Zapišimo date 1- forme na sledeći način:

$$\phi = \sum f_i dx_i,\ \psi = \sum g_i dx_i.$$

Tada je, prema pravilu alternacije,

$$\phi \wedge \psi = \sum f_i g_i dx_i dx_j = -\sum g_j f_i dx_j dx_i = -\psi \wedge \phi.$$

□

**1.6.3 Definicija** *Ako je $\phi = \sum f_i dx_i$ 1- forma na $\mathbb{R}^3$, onda je spoljašnji izvod 1- forme $\phi$ 2- forma $d\phi = \sum df_i \wedge dx_i$.*

Ako datu definiciju proširimo koristeći Propoziciju 1.5.5, dobijamo sledeću zanimljivu formulu za spoljašnji izvod od

$$\phi = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3,$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)dx_1 dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)dx_1 dx_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)dx_2 dx_3.$$

Nema potrebe pamtiti ovu formulu, jednostavnije je svaki put primeniti definiciju. Npr., neka je

$$\phi = xy\ dx + x^2\ dz.$$

Tada je

$$\begin{aligned} d\phi &= d(xy) \wedge dx + d(x^2) \wedge dz \\ &= (y\ dx + x\ dy) \wedge dx + (2x\ dx) \wedge dz \\ &= -x\ dx\ dy + 2x\ dx\ dz. \end{aligned}$$

Lako je proveriti da za spoljašnji izvod važi linearnost kao u Definiciji 1.5.2, tj.

$$d(a\phi + b\psi) = a\ d\phi + b\ d\psi,$$

gde su $\phi$ i $\psi$ proizvoljne forme, a $a$ i $b$ brojevi. Sledeća teorema daje vezu između spoljašnjeg izvoda i spoljašnjeg proizvoda.

**1.6.4 Teorema** *Neka su $f$ i $g$ funkcije, $\phi$ i $\psi$ 1- forme. Tada*

1. *d(fg)=df g+f dg.*
2. *d(f$\phi$)=df$\wedge\phi$+f d$\phi$.*
3. *d($\phi \wedge \psi$)=d$\phi \wedge \psi$ - $\phi \wedge d\psi$.*[2]

**Dokaz.** Prva formula je pokazana u Lemi 1.5.6. Izvedimo dokaz za treću formulu.

Formulu je dovoljno dokazati za $\phi = f\ du,\ \psi = g\ dv$, gde su $u$ i $v$ bilo koje od kooridnatnih funkcija $x_1, x_2, x_3$. Kako je svaka 1- forma suma takvih izraza, opšti slučaj će slediti iz linearnosti diferencijala $d$ i algebre spoljašnjeg proizvoda.

Pretpostavimo da je $\phi = f\ dx,\ \psi = g\ dy$. Dobijamo

$$d(\phi \wedge \psi) = d(fg\ dx\ dy) = \frac{\partial(fg)}{\partial z} dz\ dx\ dy = \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz. \quad (1.1)$$

Sada je

$$d\phi \wedge \psi = d(f\ dx) \wedge g\ dy = \frac{\partial f\ g}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = g\frac{\partial f}{\partial z} dx\ dy\ dz.$$

No,

$$\phi \wedge d\psi = f\ dx \wedge d(g\ dy) = f\ dx \wedge \frac{\partial g}{\partial z} dz\ dy = -f\frac{\partial g}{\partial z} dx\ dy\ dz,$$

pošto je $dx\ dz\ dy = -dx\ dy\ dz$. Odatle sledi da poslednju jednačinu moramo oduzeti od prethodne, da bismo dobili (1.1). □

Jedan način pamćenja minusa u trećoj jednačini je da tretiramo $d$ kao da je 1- forma. Da bismo dobili $\psi$, $d$ mora zameniti mesto sa $\phi$, pa je tako minus konzistentan sa pravilom alternacije u Lemi 1.6.2.

Diferencijalne forme i njima pridruženi pojmovi spoljašnjeg proizvoda i spoljašnjeg izvoda, omogućavaju nam da izrazimo komplikovane veze između parcijalnih izvoda.

Rezultate ovog odeljka ćemo uopštiti definicijom i osobinama diferencijalnih formi na otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}^n$. Neka je $X$ otvoren skup u prostoru $\mathbb{R}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Označimo sa $C^k(X)$ skup svih funkcija $X \to \mathbb{R}$ koje imaju sve parcijalne izvode u svakoj tački skupa $X$ do reda $\leq k$, pri čemu su pomenuti izvodi neprekidne funkcije na $X$. Elementi skupa $C^k(X)$ zovu se *funkcije klase* $C^k$. Primetimo i sledeće: ako je $X \subset \mathbb{R}^n$, tada je $f \in C^k(X),\ k \geq 0$, ako za svako $x \in X$ postoji otvoren skup $U_x$ u $\mathbb{R}^n$ i $f \in C^k(U_x),\ k \geq 0$.

**1.6.5 Definicija** *Neka je $U$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Funkcija $f : U \to \mathbb{R}$ klase $C^k,\ k \geq 0$, je diferencijalna 0-forma klase $C^k$ na otvorenom podskupu $U \subset \mathbb{R}^n$. Izraz*

$$f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + \cdots + f_n dx^n,$$

[2]Kao i obično, množenje ima prednost nad sabiranjem i oduzimanjem, pa ovaj izraz treba čitati kao $(d\phi \wedge \psi)\ -\ (\phi \wedge d\psi)$.

*gde su* $f_1, f_2, \cdots, f_n : U \to \mathbb{R}$ *funkcije klase* $C^k$, $k \geq 0$, *je diferencijalna* 1-*forma klase* $C^k$ *na otvorenom skupu* $U$ *u prostoru* $\mathbb{R}^n$. *Ako je* $k = \infty$, *ova forma se zove glatka* 1- *forma.*

**1.6.6 Primer** Izraz $\frac{2}{z}dy + e^x\ dz$ je diferencijalna 1- forma klase $C^\infty$ na otvorenom skupu $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \neq 0\}$ u $\mathbb{R}^3$.

Sabiranje dve 1- forme iste klase $C^k$ na otvorenom skupu $U$ u $\mathbb{R}^n$ definiše se analogno sabiranju formi u $\mathbb{R}^3$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\ dx^i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\ dx^i\right) = \sum_{i=1}^{n}(f_i + g_i)\ dx^i,$$

dok se množenje 1- forme sa 0- formom iste klase $C^k$ na otvorenom podskupu $U$ od $\mathbb{R}^n$ definiše sa:

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\ dx^i\right) = \sum_{i=1}^{n} g\ f_i\ dx^i.$$

Diferencijalna 2- forma klase $C^k$, $k \geq 0$, ili kraće samo 2- forma, na otvorenom skupu $U$ u $\mathbb{R}^n$ je formalni izraz oblika

$$\omega \ = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} dx^i \wedge dx^j, \tag{1.2}$$

gde su funkcije $f_{ij} : U \to \mathbb{R}$ klase $C^k$, $k \geq 0$. Izraz $dx^i \wedge dx^j$ je *spoljašnji* ili $\wedge$ *proizvod* 1- forme $dx^i$ sa 1- formom $dx^j$. Definiše se tako da je

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i,\ i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Jednakost (1.3) implicira

$$dx^i \wedge dx^i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

pa se 2- forma $\omega$ data sa (1.2) može zapisati u obliku

$$\omega \ = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (f_{ij} - f_{ji}) dx^i \wedge dx^j.$$

**1.6.7 Primer** Koristeći osobinu

$$dx^i \wedge dx^i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{3} \sin\ x^i\ \cos\ x^j\ dx^i \wedge dx^j = \\ &(\sin\ x^1\ \cos\ x^2 - \sin\ x^2\ \cos\ x^1) dx^1 \wedge dx^2 \\ + \quad &(\sin\ x^1\ \cos\ x^3 - \sin\ x^3\ \cos\ x^1) dx^1 \wedge dx^3 \\ + \quad &(\sin\ x^2\ \cos\ x^3 - \sin\ x^3\ \cos\ x^2) dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

**1.6.8 Napomena** U daljem tekstu, kada je reč o operacijama među formama, uvek pretpostavljamo da su iste klase $C^k$, $k \geq 0$, osim ako drugačije nije eksplicitno navedeno.

*Spoljašnji proizvod* dve 1- forme na $\mathbb{R}^n$ definišemo sa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\, dx^i\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{n} g_i\, dx^j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} f_i g_j\, dx^i \wedge dx^j = \sum_{1\leq i<j\leq n} (f_i g_j - f_j g_i)\, dx^i \wedge dx^j.$$

Analogno rezultatu datom u Lemi 1.6.2, važi antikomutativnost množenja.

**1.6.9 Primer** Neka je $\omega = x\ dy + xy\ dz$ i $\eta = 2\ dx - 4sin\ z\ dy + x^2\ dz$ na $\mathbb{R}^3$. Tada je $\omega \wedge \eta = -2x\ dx \wedge dy - 2xy\ dx \wedge dz + (x^3 + 4xy\ sin\ z)\ dy \wedge dz$.

Formalni izraz

$$\omega = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p=1}^{n} f_{i_1,i_2,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

gde je $f_{i_1,i_2,\ldots,i_p} : U \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^k(U)$, $k \geq 0$, za sve $i_1, i_2, \ldots, i_p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ je antikomutativni proizvod 1 -formi $dx^{i_1}, dx^{i_2}$ $\ldots, dx^{i_p}$, je diferencijalna $p$- forma na otvorenom skupu U u prostoru $\mathbb{R}^n$ (kraće rečeno $p$- forma na U).

Zbir dve $p$- forme

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p=1}^{n} f_{i_1,i_2,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \qquad (1.4)\\
\omega_2 &= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p=1}^{n} g_{i_1,i_2,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}
\end{aligned}$$

definišemo sa

$$\omega_1 + \omega_2 = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p=1}^{n} (f_{i_1,i_2,\ldots,i_p} + g_{i_1,i_2,\ldots,i_p}) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Spoljašnji proizvod $p$- forme $\omega_1$ klase $C^k$, $k \geq 0$ date sa (1.4) i 0- forme $h$ iste klase, definišemo sa

$$h \wedge \omega_1 = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_p=1}^{n} h f_{i_1,i_2,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Konačno, spoljašnji proizvod $p$- forme i $s$- forme se definiše sa

$$\left(\sum f_{i_1,i_2,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) \wedge \left(\sum g_{j_1,j_2,\ldots,j_s} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}\right)$$

$$= \sum\sum f_{i_1,i_2,\ldots,i_p} g_{j_1,j_2,\ldots,j_s} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}.$$

Drugim rečima, svaki sabirak u $p$- formi pomnožimo se svakim sabirkom u $s$-formi (pri čemu je $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$), i dobijene proizvode saberemo.

U narednoj teoremi ćemo navesti osnovne osobine sume i spoljašnjeg proizvoda formi.

**1.6.10 Teorema** *Neka su $\omega_1$ i $\omega_2$ $p$- forme, $\eta_1$ i $\eta_2$ $q$- forme i $\gamma$ $r$- forma na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$\begin{aligned}(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta_1 &= \omega_1\wedge\eta_1+\omega_2\wedge\eta_1\\ \omega_1\wedge(\eta_1+\eta_2) &= \omega_1\wedge\eta_1+\omega_1\wedge\eta_2\\ \omega_1\wedge(\eta_1\wedge\gamma) &= (\omega_1\wedge\eta_1)\wedge\gamma.\end{aligned}$$

Tvrđenje sledeće teoreme se često naziva antikomutativni zakon.

**1.6.11 Teorema** *Neka je $\omega_1$ $p$- forma, a $\eta$ $q$- forma na otvorenom skupu $U$ u $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}\eta\wedge\omega. \tag{1.5}$$

**Dokaz.** Dokažimo tvrđenje u specijalnom slučaju kada je

$$\omega = f\ dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

i

$$\eta = g\ dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q},$$

gde je $i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_q \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je

$$\omega\wedge\eta = fg\ dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q} \tag{1.6}$$

$$\eta\wedge\omega = gf\ dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}. \tag{1.7}$$

Koristeći osobinu: $dx^i\wedge dx^j = -dx^j\wedge dx^i,\ i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, dobijamo

$$dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}$$

$$= -dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{p-1}}\wedge dx^{j_1}\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q} = \cdots$$

$$= (-1)^p dx^{j_1}\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q} = \cdots$$

$$(-1)^{2p} dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots dx^{i_p}\wedge dx^{j_3}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q} = \cdots$$

$$(-1)^{qp} dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}.$$

Iz prethodnih jednakosti, i jednakosti 1.6 i 1.7, sledi tvrđenje teoreme u ovom specijalnom slučaju.

Ako su $\omega$ i $\eta$ proizvoljne diferencijalne forme, tada je svaka od njih suma sabiraka oblika $f\ dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$ i $g\ dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}$, gde $i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, redom. Tvrđenje sledi iz prethodnog razmatranja i Teoreme 1.6.10. □

**1.6.12 Napomena** Važi sledeće: Ako je $\omega$ $n$- forma klase $C^k$, $k \geq 0$, na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$, tada je

$$\omega = f\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

gde je $f : U \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^k$, $k \geq 0$.

Ako je $\omega$ $p$- forma na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$ i $p > n$, tada je $\omega = 0$.

Zaista, ako je $\omega$ $p$- forma na otvorenom skupu U u $\mathbb{R}^n$, ona je suma sabiraka oblika $f_{i_1,i_2,\dots i_p}\ dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, gde $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, n\}$, a $f_{i_1,i_2,\dots i_p}$ je funkcija klase $C^k$, $k \geq 0$, $U \to \mathbb{R}$. Ako je $p = n$, tada je (zbog $dx^i \wedge dx^i = 0$) svaki od tih sabiraka, osim $f_{1,2,\dots,n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$, jednak sa nulom. Ako je $p > n$, tada se u svakom od uočenih sabiraka bar jedan od diferencijala $dx^i$ pojavljuje dva puta, te su svi jednaki nuli.

**1.6.13 Definicija** *Spoljašnji diferencijal (izvod) 0- forme $f$ na $\mathbb{R}^n$, u oznaci $df$, definišemo analogno odgovarajućoj definiciji u slučaju forme na $\mathbb{R}^3$,*

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j. \tag{1.8}$$

**1.6.14 Napomena** Spoljašnji diferencijal projekcije $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto x^i$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ je $dx^i, i = 1, \dots, n$.

**1.6.15 Definicija** *Ako je $\omega$ $p$- forma klase $C^k$, $k \geq 1$, na otvorenom skupu prostora $\mathbb{R}^n$, data sa*

$$\omega = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_p)\in I} f_{i_1,i_2,\dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

*gde je $I \subset \{1, 2, \dots, n\}^p$, tada se spoljašnji diferencijal (izvod) $p$- forme $\omega$, u oznaci $d\omega$ definiše sa*

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_p)\in I} d(f_{i_1,i_2,\dots i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_p)\in I} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,i_2,\dots i_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

*To je $(p+1)$- forma klase $C^{k-1}$.*

Umesto izraza spoljašnji diferencijal ili izvod, često koristimo kraći izraz - diferencijal ili izvod.

**1.6.16 Primer** Ako je $\omega$ 1 -forma na $\mathbb{R}^4$ data sa: $\omega = x^2 x^4 dx^1 + (x^1)^2 dx^3$, tada je

$$\begin{aligned} & d\omega = d(x^2x^4) \wedge dx^1 + d((x^1)^2) \wedge dx^3 \\ = \ & (x^4 dx^2 + x^2 dx^4) \wedge dx^1 + (2x^1 dx^1) \wedge dx^3 \\ = \ & -x^4 dx^1 \wedge dx^2 + 2x^1 dx^1 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^4. \end{aligned}$$

Sledeća teorema koju dajemo bez dokaza pokazuje da je spoljašnji diferencijal aditivan.

**1.6.17 Teorema** *Neka su* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ $p$*- forme klase* $C^k$, $k \geq 1$, *na otvorenom skupu* $U$ *u* $\mathbb{R}^n$. *Tada je*

$$d(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k) = d\omega_1 + d\omega_2 + \cdots + d\omega_k.$$

Naredna teorema određuje dejstvo spoljašnjeg diferencijala na proizvod dve forme.

**1.6.18 Teorema** *Ako je* $\omega$ $p$*- forma klase* $C^k$, $k \geq 1$, *a* $\eta$ $q$*- forma klase* $C^k$, $k \geq 1$, *na otvorenom skupu* $U$ *u* $\mathbb{R}^n$, *tada je*

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

**Dokaz.** Za 0- forme $f$ i $g$ važi $d(fg) = gdf + fdg$. Ako je

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \quad \eta = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q},$$

tada je

$$\begin{aligned} & d(\omega \wedge \eta) = d(fg\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}) \\ = \quad & (gdf + fdg)(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}) \\ = \quad & g(df) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\ + \quad & f(dg) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}. \end{aligned}$$

Kako je $dg$ 1- forma, a $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ $p$- forma, sledi

$$(dg) \wedge (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = (-1)^p (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \wedge dg.$$

Tako dobijamo

$$\begin{aligned} & d(\omega \wedge \eta) = ((df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) g \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\ + \quad & (-1)^p (f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dg) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\ = \quad & (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Pošto je svaka $p$- forma suma sabiraka oblika $f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, a svaka $q$-forma suma sabiraka oblika $g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}$, dokaz teoreme sledi iz gornjeg razmatranja i Teoreme 1.6.17. □

**1.6.19 Teorema** *Ako je* $\omega$ $p$*- forma klase* $C^k$, $k \geq 2$, *na otvorenom skupu u* $\mathbb{R}^n$, *tada je*

$$d(d\omega) = 0.$$

**Dokaz.** Dovoljno je pokazati da je $d(df) = 0$, za $f \in C^k(U)$, gde je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Ako je $f$ 0- forma, tada je

$$d(df) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\partial_{ij} f - \partial_{ji} f) dx^i \wedge dx^j.$$

Kako je $f$ funkcija klase $C^k, k \geq 2$, važi $\partial_{ij} f - \partial_{ji} f = 0$, pa je $d(df) = 0$. □

## 1.7 Preslikavanja iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$

U ovom odeljku ćemo posmatrati funkcije iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Za $n = 3$ i $m = 1$, takva funkcija je upravo realna funkcija na $\mathbb{R}^3$. Iako će naši rezultati važiti za proizvoljne $m$ i $n$, prvenstveno smo zainteresovani za sledeća tri slučaja:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Osnovna osobina funkcije $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je to što je možemo u potpunosti opisati pomoću $m$ realnih funkcija na $\mathbb{R}^n$. (U odeljku 1.4 smo razmatrali slučaj za $n = 1,\ m = 3$.)

**1.7.1 Definicija** *Neka je data funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i neka $f_1, f_2, \ldots, f_m$ označavaju realne funkcije na $\mathbb{R}^n$ tako da je*

$$F(p) = (f_1(p), f_2(p), \ldots, f_m(p))$$

*za sve tačke $p \in \mathbb{R}^n$. Ove fukcije se nazivaju euklidske koordinatne funkcije date funkcije F, i pišemo $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.*

*Funkcija F je diferencijabilna ako su njene koordinatne funkcije diferencijabilne u uobičajenom smislu. Diferencijabilna funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se zove preslikavanje iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$.*

Primetimo da su koordinatne funkcije od $F$ zapravo kompozicije funkcija $f_i = x_i(F)$, gde su $x_1, \ldots, x_m$ koordinatne funkcije od $\mathbb{R}^m$.

Preslikavanja se mogu opisati na mnogo različitih načina. Npr., neka je $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikavanje tako da je $F = (x^2, yz, xy)$. Tada je

$$F(p) = (x(p)^2, y(p)z(p), x(p)y(p)),$$

za svako $p$. Sada, $p = (p_1, p_2, p_3)$, i prema definiciji koordinatnih funkcija, imamo

$$x(p) = p_1,\ y(p) = p_2,\ z(p) = p_3.$$

Odatle dobijamo

$$F(p_1, p_2, p_3) = ({p_1}^2, p_2p_3, p_1p_2)$$

za sve $p_1, p_2, p_3$. Tako je, npr.

$$F(1, -2, 0) = (1, 0, -2),\ F(-3, 1, 3) = (9, 3, -3).$$

U suštini, teorija krivih bi se mogla izvesti iz opšte teorije preslikavanja. Ali za razliku od krivih, preslikavanja mogu biti veoma komplikovana (pa čak u slučaju $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.) Zato ćemo mi obrnuti ovaj proces i, koristeći krive, izučavati preslikavanja.

**1.7.2 Definicija** *Ako je $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ kriva u $\mathbb{R}^n$ i $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje, onda je kompozicija funkcija $\beta = F(\alpha) : I \to \mathbb{R}^m$ kriva u $\mathbb{R}^m$ koja se zove slika krive $\alpha$ dobijena pomoću F.*

**1.7.3 Primer** Uzmimo preslikavanje $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tako da je

$$F = (x - y, x + y, 2z).$$

Tada je

$$F(p_1, p_2, p_3) = (p_1 - p_2, p_1 + p_2, 2p_3)$$

za sve $p_1, p_2, p_3$.

Samo u slučaju jednostavnog preslikavanja, možemo očekivati da ćemo njegovo ponašanje konstatovati jednostavnim izračunavanjem njegovih vrednosti u konačno mnogo tačaka. Kako je ova funkcija je prilično jednostavna *linearna* transformacija iz $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}^3$, i ona je u potpunosti određena svojim vrednostima u trima (linearno nezavisnim) tačkama, recimo jediničnim tačkama

$$u_1 = (1, 0, 0),\ u_2 = (0, 1, 0),\ u_3 = (0, 0, 1).$$

Uopšteno govoreći, diferencijalni kalkulus se bavi aproksimacijom glatkih objekata linearnim objektima. Najpoznatiji slučaj je aproksimacija realne funkcije $f$ u okolini $x$ liearnom funkcijom $\Delta x \to f'(x)\Delta x$, što nam daje tangentu u $x$ na grafik funkcije $f$. Naš cilj je da sada definišemo analognu linearnu aproksimaciju za preslikavanje $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u okolini tačke $p$ prostora $\mathbb{R}^n$.

**1.7.4 Definicija** *Neka je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje. Ako je $v$ tangentni vektor na $\mathbb{R}^n$ u $p$, neka je $F_*(v)$ početna brzina krive $t \to F(p+tv)$. Rezultujuća funkcija $F_*$ tangentnim vektorima na $\mathbb{R}^n$ opredeljuje tangentne vektore na $\mathbb{R}^m$, i zove se tangentno preslikavanje od $F$.*

Tangentno preslikavanje se može eksplicitno opisati na sledeći način.

**1.7.5 Propozicija** *Neka je $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ preslikavanje iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Ako je $v$ tangentni vektor na $\mathbb{R}^n$ u tački $p$, onda je*

$$F_*(v) = (v[f_1], \dots, v[f_m]),$$

*u tački $F(p)$.*

**Dokaz.** Za konačan slučaj uzmimo $m = 3$. Tada je

$$\beta(t) = F(p + tv) = (f_1(p + tv), f_2(p + tv), f_3(p + tv)).$$

Prema definiciji, $F_*(v) = \beta'(0)$. Da bismo dobili $\beta'(0)$, nađimo izvode koordinatnih funkcija od $\beta$ u $t = 0$. Važi

$$\frac{d}{dt}(f_i(p + tv))|_{t=0} = v[f_i].$$

Prema tome, imamo

$$F_*(v) = (v[f_1], v[f_2], v[f_3])|_{\beta(0)},$$

i $\beta(0) = F(p)$. □

Fiksirajmo sada tačku $p$ u $\mathbb{R}^n$. Definicija tangentnog preslikavanja pokazuje da $F_*$ preslikava tangentne vektore u $p$ na tangentne vektore u $F(p)$. Tako za svako $p$ iz $\mathbb{R}^n$, funkcija $F_*$ dovodi do funkcije

$$F_{*_p} : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{F(p)}(\mathbb{R}^m),$$

koju zovemo tangentnim preslikavanjem od $F$ u $p$. (Analogon ovome u elementarnom kalkulusu je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima izvodnu funkciju $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koja u svakoj tački $t$ prostora $\mathbb{R}$ daje izvod funkcije $f$ u tački $t$.)

**1.7.6 Propozicija** *Ako je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje, onda je tangentno preslikavanje $F_{*_p} : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$ linearna transformacija, za svako $p$ iz $\mathbb{R}^n$.*

**Dokaz.** Treba pokazati da za tangentne vektore $v$ i $w$ u $p$ i $a, b \in \mathbb{R}$ važi

$$F_*(av + bw) = aF_*(v) + bF_*(w).$$

Ovo sledi direktno iz prethodne propozicije koristeći linearnost u tvrđenju (1) Teoreme 1.3.3. □

Zapravo, tangentno preslikavanje $F_{*_p}$ u $p$ je *linearna transformacija koja najbolje aproksimira $F$ u okolini $p$.*

Još jedna posledica ove propozicije je to što preslikavanja očuvavaju brzine krivih.

**1.7.7 Propozicija** *Neka je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje. Ako je $\beta = F(\alpha)$ slika krive $\alpha$ iz $\mathbb{R}^n$, onda je $\beta' = F_*(\alpha')$.*

**Dokaz.** Uzmimo opet da je $m = 3$. Ako je $F = (f_1, f_2, f_3)$, onda

$$\beta = F(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha)).$$

Odatle nam Teorema 1.7.5 daje

$$F_*(\alpha') = (\alpha'[f_1], \alpha'[f_2], \alpha'[f_3]).$$

Ali prema Lemi 1.4.6 imamo

$$\alpha'[f_i] = \frac{df_i(\alpha)}{dt}.$$

Odatle je

$$F_*(\alpha'(t)) = \left( \frac{df_1(\alpha)}{dt}(t), \frac{df_2(\alpha)}{dt}(t), \frac{df_3(\alpha)}{dt}(t) \right)_{\beta(t)} = \beta'(t).$$

□

Neka su $U_j$ $(1 \leq j \leq n)$ i $\overline{U_i}$ $(1 \leq i \leq m)$ prirodni okviri za $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, respektivno (videti Definiciju 1.2.4).

**1.7.8 Propozicija** *Ako je $F = (f_1, \ldots, f_m)$ preslikavanje iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, onda je*

$$F_*(U_j(p)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\overline{U_i}(F(p)) \quad (1 \leq j \leq n).$$

**Dokaz.** Tvrđenje sledi direktno iz Propozicije 1.7.5, pošto je $U_j[f_i] = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. □

Matrica koja se pojavljuje u prethodnoj formuli,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

se naziva *Jakobijeva matrica* preslikavanja $F$ u $p$. Za $m = n = 1$, ona se svodi na jedan broj: izvod od $F$ u $p$.

Kao što nam izvod funkcije daje informaciju o funkciji, tako nam tangentno preslikavanje $F_*$ može koristiti prilikom proučavanja preslikavanja $F$.

Kako su tangentna preslikavanja linearne transformacije, standardni rezultati linearne algebre pokazuju da su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. $F_{*p}$ je injektivno preslikavanje.
2. $F_*(v_p) = 0$ implicira da je $v = 0$.
3. Jakobijeva matrica preslikavanja $F$ u $p$ je ranga $n$, što je dimenzija domena $\mathbb{R}^n$ preslikavanja $F$.

Sledeće svojstvo linearnih transformacija $T : V \to W$ će biti korisno prilikom proučavanja tangentnih preslikavanja. Ako vektorski prostori $V$ i $W$ imaju iste dimenzije, onda je $T$ injekcija ako i samo ako je "na", pa je i jedna i druga osobina ekvivalent činjenici da je $T$ linearni izomorfizam.

Preslikavanje koje ima (diferencijabilno) inverzno preslikavanje se zove *difeomorfizam.* Rezultati ovog odeljka važe i kada euklidske prostore $R^n$ zamenimo otvorenim skupovima, pa onda možemo govoriti o difeomorfizmima iz jednog otvorenog skupa na drugi.

**1.7.9 Teorema** *Neka je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje euklidskih prostora istih dimenzija. Ako je $F_{*_p}$ injektivno u tački $p$, onda postoji otvoren skup $\mathcal{U}$ koji sadrži $p$, takav da je restrikcija preslikavanja $F$ na $\mathcal{U}$ difeomorfizam skupa $\mathcal{U}$ na otvoren skup $\mathcal{V}$.*

Ova teorema se naziva *teorema o inverznoj funkciji*, jer tvrdi da restrikcija preslikavanja $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ ima diferencijabilno inverzno preslikavanje $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Polazeći od poznatog pojma realne funkcije i koristeći rezultate linearne algebre u svakom koraku, konstruisali smo raznovrsne matematičke objekate. Osnovni pojam tangentnog vektora vodio je ka pojmu vektorskog polja, koji se dalje dualizovao u 1 - forme, koje su vodile proizvoljnim diferencijalnim formama. Pojam krive i diferencijabilne funkcije smo generalizovali pojmom preslikavanja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Zatim, polazeći od uobičajenog pojma izvoda realne funkcije, nastavili smo konstruisanjem odgovarajuće operacije diferenciranja za sledeće objekte: izvod u pravcu funkcije, spoljašnji izvod forme, brzinu krive, tangentno preslikavanje. Sve ove operacije su svedene na (obične ili parcijalne) izvode relanih koordinatnih funkcija, ali treba napomenuti da u većini slučajeva *definicije* ovih operacija nisu date preko koordinata. Uopšteno govoreći, sve pomenute operacije diferenciranja na neki način pokazuju linearne i Leibnizove osobine običnih izvoda.

## 1.8 Povlačenje forme unazad

Neka je $U$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $V$ otvoren skup u $\mathbb{R}^m$. Definisaćemo preslikavanje $\varphi^*$ koje svakoj $p$- formi na $V$ pridružuje $p$- formu na $U$.

**1.8.1 Definicija** *Neka je $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m) : U \to V$ funkcija klase $C^k, k \geq 1$. Ako je $f$ 0- forma klase $C^q, q \geq 0$, na $V$, 0- forma $\varphi^* f$ je kompozicija $f \circ \varphi$. Ona je klase $C^p, p = min(k, q)$.*

*Ako su sa $x^1, \dots, x^n$ i $y^1, \dots, y^m$ označene koordinate u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ redom, definišemo formu $\varphi^* dy^i$ sa*

$$\varphi^* dy^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} dx^j,$$

*gde je $\varphi : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^m) = (\varphi^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \varphi^m(x^1, \dots, x^n))$. Ova forma je klase $C^{k-1}$.*

*Za proizvoljnu 1- formu $\omega$ klase $C^q$, $q \geq 0$, na $V$ datu sa*

$$\omega = f_1 dy^1 + \cdots + f_m dy^m$$

*definišemo formu $\varphi^* \omega$ klase $C^p$, $p = min(q, k-1)$, sa*

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^{m} \varphi^*(f_i) \varphi^*(dy^i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (f_i \circ \phi) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} dx^j.$$

*Ako je $\omega$ $p$- forma klase $C^q$, $q \geq 1$, na $V$ data sa*

$$\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in I} f_{i_1, i_2, \dots, i_p} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p},$$

*tada je*

$$\varphi^* \omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in I} \varphi^*(f_{i_1, i_2, \dots, i_p}) \varphi^*(dy^{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy^{i_p}),$$

*forma klase $C^p$, $p = min(q, k-1)$. Preslikavanje $\varphi^*$ nazivamo povlačenje forme unazad indukovano preslikavanjem $\varphi : U \to V$.*

**1.8.2 Napomena** Jasno, ako je $\varphi$ funkcija klase $C^\infty$, $\varphi^*$ ne menja klasu forme.

**1.8.3 Primer** Ako je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ preslikavanje klase $C^1$ i $\omega = f dy$ je 1- forma klase $C^0$ na $\mathbb{R}$, tada je $\varphi^*\omega = \varphi^*(f)\varphi^*(dy) = (f \circ \varphi)\frac{d\varphi}{dx}dx$ forma klase $C^0$.

Ako je

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x^1, x^2) \mapsto (y^1, y^2) = (ax^1 + bx^2, cx^1 + ex^2)$$

i $\omega = dx^1 \wedge dx^2$, tada je

$$\varphi^* dy^1 = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} dx^2 = a\ dx^1 + b\ dx^2,$$

$$\varphi^* dy^2 = \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} dx^2 = c\ dx^1 + e\ dx^2,$$

te je

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega &= (\varphi^* dx^1) \wedge (\varphi^* dx^2) \\ &= (a\ dx^1 + b\ dx^2) \wedge (c\ dx^1 + e\ dx^2) \\ &= (ac - be) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Na kraju ovog poglavlja dajemo dve teoreme bez dokaza.

**1.8.4 Teorema** *Neka je $U$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $V$ otvoren skup u $\mathbb{R}^m$ i $\varphi : U \to V$ funkcija klase $C^p$, $p \geq 1$. Tada jednakosti*

$$\varphi^*(\omega + \widetilde{\omega}) = \varphi^*\omega + \varphi^*\widetilde{\omega}$$

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\eta)$$

*važe za svake dve $p$- forme $\omega$, $\widetilde{\omega}$ i $q$- formu $\eta$ klase $C^q$, $q \geq 0$, na $V$.*

*Ako je $W$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$, i $\psi : V \to W$ funkcija klase $C^q$, $q \geq 1$, tada je*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

**1.8.5 Teorema** *Neka je $U$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $V$ otvoren skup u $\mathbb{R}^m$ i neka je preslikavanje $\varphi : U \to V$ klase $C^q$, $q \geq 2$. Tada je*

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega),$$

*za svaku $p$- formu $\omega$ klase $C^k$, $k \geq 1$ na $V$.*

# Glava 2

# Podmnogostrukosti euklidskog prostora

Površi u $\mathbb{R}^3$ su pojam iz našeg svakodnevnog iskustva, pa je logično ispitivati ih matematički. Ali kada ovaj koncept pogledamo kritički, možemo se zapitati da li slične površi postoje i u $\mathbb{R}^4$, ili u $\mathbb{R}^n-$ ili čak postoje površi koje nisu u okviru bilo kakvog euklidskog prostora. Intuitivno, površ dimenzije $m$ u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, koju ćemo zvati *podmnogostrukost od* $\mathbb{R}^n$, je prostor koji posmatraču koji živi na njemu izgleda kao prostor $\mathbb{R}^m$. Međutim, da bismo precizno definisali pojam mnogostrukosti, ne smemo se osloniti na naše direktno iskustvo percepcije realnog prostora, nego na naše matematičko iskustvo o površima u $\mathbb{R}^n$. U ovom poglavlju ćemo definisati podmnogostrukost dimenzije $m$ kao objekat u prostoru $\mathbb{R}^n, m \leq n$, koji je lokalno jednak sa prostorom $\mathbb{R}^m$, a snabdeven je takvom strukturom koja omogućava da se na njemu može razviti i diferencijalni i integralni račun. Dakle, najopštiji objekat na kojem se može izvoditi matematički kalkulus nazvaćemo mnogostrukost. To je, jednostavnije rečeno, apstraktna površ proizvoljne dimenzije $m$.

## 2.1 Podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$

Na početku ovog odeljka ćemo se podsetiti određenih rezultata iz analize. Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da su sva preslikavanja klase $C^\infty$.

**2.1.1 Teorema** *(Teorema o inverznoj funkciji) Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : U \to \mathbb{R}^n$ klase $C^\infty$, $x_0 \in U$, $y_0 := f(x_0)$ i $Df(x_0)$ invertibilno preslikavanje ($\det Df(x_0) \neq 0$). Tada je, lokalno u okolini $x_0$, $f$ difeomorfizam, tj. postoji otvorena okolina $U_1 \subseteq U$ tačke $x_0$ i otvorena okolina $V_1$ tačke $y_0$ tako da je $f : U_1 \to V_1$ bijekcija i $f^{-1} : V_1 \to U_1$ je klase $C^\infty$.*

**2.1.2 Teorema** *(Teorema o implicitnoj funkciji) Neka su $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi, $f : U \times V \to \mathbb{R}^m$ klase $C^\infty$, $(x_0, y_0) \in U \times V$, $f(x_0, y_0) = 0$*

*i neka je* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *invertibilno. Tada postoji otvorena okolina* $U_1 \subseteq U$ *tačke* $x_0$ *i otvorena okolina* $V_1$ *tačke* $y_0$ *tako da za svako* $x \in U_1$ *postoji jedinstveno* $y = y(x) \in V_1$ *da je* $f(x, y(x)) = 0$. *Preslikavanje* $x \mapsto y(x)$ *je klase* $C^\infty$.

Podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ ćemo definisati uz pomoć regularnih preslikavanja.

**2.1.3 Definicija** *Neka je* $U \subseteq \mathbb{R}^k$ *otvoren skup i* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *klase* $C^\infty$. $\varphi$ *je regularno preslikavanje ako je za svako* $x \in U$ *rang jakobijana* $D\varphi(x)$ *maksimalan, stoga jednak sa* $min(k, n)$. *Tada za rang* $r(D\varphi)$ *imamo:*

$$r(D\varphi(x)) = dim(ImD\varphi(x)) = dim(\mathbb{R}^k) - dim(KerD\varphi(x)).$$

*Ako je* $k \leq n$, *onda je* $KerD\varphi(x) = 0$ *i* $D\varphi(x)$ *je injektivno preslikavanje, za svako* $x$. *Tada se* $\varphi$ *naziva imerzija. Za* $k \geq n$ *je* $D\varphi(x)$ *sirjektivno preslikavanje, za svako* $x$ *i* $\varphi$ *se naziva submerzija.*

**2.1.4 Definicija** *(Lokalno nula skup)* $k$ *- dimenzionalna podmnogostrukost od* $\mathbb{R}^n$ *je podskup* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *sa sledećom osobinom: za svako* $p \in X$ *postoji otvorena okolina* $U_p \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U_p$, *i diferencijabilno preslikavanje*

$$f = (f_1, ..., f_{n-k}) : U_p \to \mathbb{R}^{n-k}$$

*koje je regularno (tj.* $r(Df(q)) = n - k,$ *za sve* $q \in X$*), tako da je* $X \cap U_p = f^{-1}(0) = \{x \in U_p | f(x) = 0\}$.

Jednodimenzionalne podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ nazivamo krivama, a dvodimenzionalne podmnogostrukosti nazivamo površima u $\mathbb{R}^n$. Podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ dimenzije $n - 1$ su hiperpovrši u $\mathbb{R}^n$.

Dakle, $k$ - dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ je definisana lokalno u $\mathbb{R}^n$, pomoću otvorenih okolina. Svaka od tih okolina je sadržana u $\mathbb{R}^n$ kao što je $\mathbb{R}^m$ sadržan u $\mathbb{R}^n$ u vidu vektorskog potprostora. Slede primeri podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$.

### 2.1.5 Primeri

1. Skup $X$ u $\mathbb{R}^n$ je 0- dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $X$ diskretan u $\mathbb{R}^n$.
   Podskup $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je diskretan ako i samo ako za svako $p \in X$ postoji otvoren podskup $U \subseteq \mathbb{R}^n$, tako da je $X \cap U = \{p\}$. U ovom slučaju, definišimo preslikavanje

   $$f : U \to \mathbb{R}^n, \ f(x) := x - p.$$

   Tada je $f$ diferencijabilno preslikavanje i $X \cap U = \{p\} = f^{-1}(0)$. Pri tome je rang $r(Df(p)) = r(id_{\mathbb{R}^n}) = n = n - 0$. Ovim je pokazano da je $X$ 0-dimenzionalna podmnogostrukost.

   Obrnuto, neka je $X$ *0* - dimenzionalna podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ i $p \in X$. Tada postoji otvoren podskup $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$, i diferencijabilno preslikavanje $f : U \to \mathbb{R}^{n-0} = \mathbb{R}^n$ tako da je $X \cap U = f^{-1}(0)$ i $r(Df(p)) = n$.

Prema Teoremi o inverznoj funkciji možemo pretpostaviti da je $f$ difeomorfizam pa samim tim i injekcija. Otuda sledi da je $\{p\} = f^{-1}(0) = X \cap U$.

2. Skup $X$ u $\mathbb{R}^n$ je $n$- dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $X$ otvoren u $\mathbb{R}^n$.

   Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Tada za svako $p \in X$ biramo $U = X$ i $f \equiv 0$, konstantnu funkciju $U \to \{0\} = \mathbb{R}^0 = \mathbb{R}^{n-n}$. Jakobijan ovog preslikavanja je ranga 0, odakle sledi da je $X$ $n$- dimenzionalna podmnogostrukost.

   Obrnuto, neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $n$ - dimenzionalna podmnogostrukost, i neka $p \in X$. Tada postoji otvoren podskup $U \subseteq \mathbb{R}^n,\ p \in U$ i diferencijabilno preslikavanje $f : U \to \mathbb{R}^{n-n} = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, tako da je $X \cap U = f^{-1}(0) = U$. Odatle sledi da za svako $p \in X$ postoji otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$, tako da $p \in U \subset X$, tj. $X$ je otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$.

3. Neka je $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ jedinična kružnica. Za svaku tačku $p = (p_1, p_2) \in S^1$ izaberimo $U = \mathbb{R}^2$ i $f : U \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Preslikavanje $f$ je diferencijabilno, i važi da je $S^1 = S^1 \cap U = f^{-1}(0)$. Jakobijan preslikavanja $f$ je $Df(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$. Kako je $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$ za sve $(p_1, p_2) \in S^1$, imamo da je rang $r(Df(p_1, p_2)) = 1$, za sve $(p_1, p_2) \in S^1$. Odatle sledi da je $S^1$ *1* - dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^2$.

4. Pretpostavimo da je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno nula skup preslikavanja $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, ali da $f$ nije svuda diferencijabilno, ili da je za neko $p \in X \cap U$ važi da je $r(Df(p)) < n - k$. Pokazaćemo da $X$ može biti podmnogostrukost, uz odgovarajući izbor preslikavanja $f$.

   Posmatrajmo pravu $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = x_2\}$. Važi da je $X = f^{-1}$ za diferencijabilnu funkciju $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, čiji Jakobijan je $Df(x_1, x_2) = (2x_1 - 2x_2, -2x_1 + 2x_2) = (0, 0)$, za sve $(x_1, x_2) \in X$ tj. važi da je rang $r(Df((x_1, x_2))) = 0 < 2 - 1 = 1$, za sve $(x_1, x_2) \in X$. Ipak, $X$ je 1 - dimenzionalna podmnogostrukost, pošto je to nula skup diferencijabilne funkcije $x_1 - x_2$, čiji Jakobijan $(1, -1)$ je svuda jednak sa 1.

5. Neka je $M(n)$ vektorski prostor realnih $(n \times n)$- matrica, koji prirodno identifikujemo sa $\mathbb{R}^{n^2}$. Neka je $S(n) = \{A \in M(n) | A = A^t\}$ vektorski prostor simetričnih realnih $(n \times n)$ - matrica, koji identifikujemo sa $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, uzimajući za koordinate koeficijente sa i iznad dijagonale. Neka je sa $I_n$ označena $n \times n$ jedinična matrica. Tada je $O(n) = \{A \in M(n) | A \cdot A^t = I_n\}$ ortogonalna grupa dimenzije $n$, tj. grupa ortogonalnih $(n \times n)$ - matrica. Napomenimo još da je ortogonalna matrica $A$ invertibilna, sa inverznom matricom $A^{-1} = A^t$. Tada je $O(n)$ $\frac{n(n-1)}{2}$ - dimenzionalna podmnogostrukost od $M(n)$.
   $O(n)$ je nula skup diferencijabilnog preslikavanja

$$f : M(n) \to S(n),\ f(A) := A \cdot A^t - I_n.$$

Za svako $A \in M(n)$, Jakobijan preslikavanja $f$

$$Df(A) : M(n) \to S(n)$$

je dat sa

$$\begin{aligned} Df(A)(B) &= \frac{d}{dt}(f(A+tB))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(A \cdot A^t + t(A \cdot B^t + B \cdot A^t) + t^2 B \cdot B^t - I_n)|_{t=0} \\ &= (A \cdot B^t + B \cdot A^t + 2tB \cdot B^t)|_{t=0} = A \cdot B^t + B \cdot A^t. \end{aligned}$$

Uzmimo sada $A \in O(n)$ i $C \in S(n)$, i definišimo $B := \frac{1}{2} C \cdot A \in M(n)$. Tada je $B^t = \frac{1}{2} A^t \cdot C$, odakle dobijamo

$$Df(A)(B) = \frac{1}{2}(A \cdot A^t \cdot C + C \cdot A \cdot A^t) = C.$$

To znači da je za svako $A \in O(n)$ Jakobijan $Df(A)$ sirjekcija, tj. da ima rang $r(D(f)) = \dim S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, tj. da je $O(n)$ podmnogostrukost od $M(n)$ dimenzije

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Sada ćemo $k$- dimenzionalne podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ opisati lokalno, koristeći preslikavanja između otvorenih podskupova od $X$ i $\mathbb{R}^k$.

**2.1.6 Teorema** *Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *$X$ je $k$- dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$.*

2. *(Lokalna trivijalizacija) Za svako $p \in X$ postoji otvorena okolina $U \subset \mathbb{R}^n$ tačke $p$, otvoreni podskup $U' \subset \mathbb{R}^n$, i difeomorfizam $\Phi : U \to U'$ tako da je*
$$\Phi(X \cap U) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in U' | x_1 = ... = x_{n-k} = 0\}.$$

3. *(Lokalna parametrizacija) Za svako $p \in X$ postoji otvorena okolina $U \subset \mathbb{R}^n$ tačke $p$, otvoreni podskup $W \subset \mathbb{R}^k$, i diferencijabilno preslikavanje $\eta : W \to \mathbb{R}^n$ tako da je*

   *(a) $X \cap U = \eta(W)$,*

   *(b) $\eta : W \to X \cap U$ je homeomorfizam,*

   *(c) $r(D\eta(\eta^{-1}(p))) = k$.*

   *Takvo preslikavanje se naziva lokalna parametrizacija skupa $X$.*
   *Prethodna tri uslova impliciraju sledeću osobinu skupa $X \subset \mathbb{R}^n$ :*

*4. Postoji k- dimenzionalni diferencijabilni atlas za X, tj. skup*

$$\mathcal{A} = \{(V_i, \phi_i, W_i) | i \in I\},$$

*gde je I skup indeksa, sa sledećim osobinama:*

*(a) za svako $i \in I$, $V_i$ je otvoren u X, $W_i$ je otvoren u $\mathbb{R}^k$, i $\phi_i : V_i \to W_i$ je homeomorfizam*

*(b) za svako $i, j \in I$, preslikavanje*

$$(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) | \phi_i(V_i \cap V_j) : \phi_i(V_i \cap V_j) \to \phi_j(V_i \cap V_j)$$

*je diferencijabilno. Elementi $(V_i, \phi_i, W_i)$ se zovu karte skupa X.*

**Dokaz.** Za $k = 0$ i $k = n$ tvrđenje je trivijalno, pa pretpostavimo da je $0 < k < n$.

1. $\Rightarrow$ 4. Uzmimo $I := X$. Za svako $p \in X$ biramo $U_p \subset \mathbb{R}^n$ i

$$f_p = (f_1, ..., f_{n-k}) : U_p \to \mathbb{R}^{n-k}$$

kao u 2.1.4. Definišimo $V_p := X \cap U_p$; tada važi $X = \bigcup_{p \in X} V_p$. Kako je

$$r\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{i=1,\dots,n-k \\ j=1,\dots n}}\right)(p) = n - k,$$

možemo pretpostaviti

$$\det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j=1,\dots,n-k}\right) \neq 0.$$

Prema Teoremi o implicitnoj funkciji 2.1.2, za svako $U_p$ postoji otvoren podskup $W_p \subset \mathbb{R}^k \ni (x_{n-k+1}, ..., x_n)$ i jedinstveno diferencijabilno preslikavanje

$$g : W_p \to \mathbb{R}^{n-k} \ni (x_1, ..., x_{n-k}),$$

tako da je

$$f_p(g_p(x_{n-k+1}, ..., x_n), x_{n-k+1}, ..., x_n) = 0 \text{ za sve } (x_{n-k+1}, ..., x_n) \in W_p, \quad (2.1)$$

i tako da

$$\begin{aligned} V_p \quad = \quad & U_p \cap X = U_p \cap f_p^{-1}(0) = \{(x_1, ..., x_n) \in U_p | (x_{n-k+1}, ..., x_n) \in W_p, \\ & (x_1, ..., x_{n-k}) = g_p(x_{n-k+1}, ..., x_n)\}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Definišimo $\phi_p : V_p \to W_p$, $\phi_p(x_1, ..., x_n) := (x_{n-k+1}, ..., x_n)$ tj. $\phi_p$ je restrikcija ortogonalne projekcije na $V_p$ koja je neprekidna. Dalje, $\phi_p$ je bijekcija, sa neprekidnom inverznom funkcijom

$$\phi_p^{-1}(x_{n-k+1}, ..., x_n) = (g_p(x_{n-k+1}, ..., x_n), x_{n-k+1}, ..., x_n).$$

Sledi da je $\phi_p$ homeomorfizam, a $\phi_p^{-1}$ je diferencijabilno preslikavanje skupa $W_p$ na $\mathbb{R}^n$, pa je preslikavanje $\phi_q \circ \phi_p^{-1}$ diferencijabilno (gde je definisano) za sve $p, q \in X$ (kao kompozicija projekcije i diferencijabilnog preslikavanja).

1. $\Rightarrow$ 2. Uzmimo $U := U_p, V_p, W_p$ i $g_p$ kao u dokazu 1. $\Rightarrow$ 4., i definišimo

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^n,\ \Phi(x_1, ..., x_n) := ((x_1, ..., x_n) - g_p(x_{n-k+1}, ..., x_n), x_{n-k+1}, ..., x_n).$$

Tada je $\Phi$ diferencijabilno, i njegov Jakobijan je oblika

$$\begin{pmatrix} I_{n-k} & * \\ 0 & I_k \end{pmatrix},$$

gde je sa $I_k$ označena $k \times k$ jedinična matrica. Važi da je $\det(D\Phi(p)) \neq 0$, odakle, prema Teoremi o inverznoj funkciji 2.1.1 (za dovoljno malo U), možemo pretpostaviti da je $\Phi : U \to U'$ difeomorfizam. Iz 2.1 i 2.2 dalje sledi

$$\Phi(X \cap U) = \Phi(V_p) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in U' | x_1 = ... = x_{n-k} = 0\}.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Za svako $p \in X$ uzmimo $U$, $\Phi$ i $U'$ kao u 2. Definišimo

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k},\ \pi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-k});$$

tada je $\pi$ linearno diferencijabilno preslikavanje ranga $n-k$, čiji Jakobijan je $D\pi(x) = \pi$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Definišimo sada diferencijabilno preslikavanje

$$f := \pi \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

Tada, pošto je $\Phi$ bijekcija, važi

$$X \cap U = \Phi^{-1}(\{x \in U' | \pi(x) = 0\}) = \Phi^{-1}(\pi^{-1}(0)) = (\pi \circ \Phi)^{-1}(0) = f^{-1}(0).$$

Konačno, imamo da je

$$Df(p) = D\pi(\Phi(p)) \circ D\Phi(p) = \pi \circ D\Phi(p)$$

ranga $n-k$, pošto je $D\Phi(p)$ izomorfizam, a preslikavanje $\pi$ ima rang $n-k$.

1. $\Rightarrow$ 3. Uzmimo $U := U_p$, $V_p$, $W_p$ i $\phi_p$ kao u dokazu 1. $\Rightarrow$ 4., i definišimo skup $W = W_p$, i preslikavanje $\eta := \phi_p^{-1} : W \to V_p = X \cap U \subset \mathbb{R}^n$. Kao što je ranije primećeno, $\eta$ je diferencijabilni homeomorfizam skupa $W$ na $X \cap U$. Ostaje nam da pokažemo osobinu *3(c)*.

Kako je $W \subset \mathbb{R}^k$, jasno je da važi $r(D\eta(\eta^{-1}(p))) \leq k$. Sa druge strane, iz $\phi_p \circ \eta = i_{d_W}$ sledi $i_{d_{\mathbb{R}^k}} = D\phi_p(p) \circ D\eta(\eta^{-1}(p))$, što dalje implicira $r(D\eta(\eta^{-1}(p))) \geq k$.

3. $\Rightarrow$ 1. Za svako $p \in X$ uzmimo $U, W$ i $\eta$ kao u 3., $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$. Kako je $D\eta(\eta^{-1}(p))$ ranga $k$, možemo pretpostaviti da je

$$\det\left(\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}(\eta^{-1}(p))\right)_{i,j=1,...,k}\right) \neq 0.$$

Prema Teoremi o inverznoj funkciji 2.1.1 (za dovoljno malo $U$ i $W$), postoji otvoren podskup $W' \subset \mathbb{R}^k$, tako da je

$$g := (\eta_1, ..., \eta_k) : W \to W'$$

difeomorfizam. Neka je

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \ (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_k),$$

projekcija. Tada

$$g = \pi \circ \eta = \pi|_{\eta(W)} \circ \eta = \pi|_{X \cap U} \circ \eta : W \xrightarrow{\eta} X \cap U \xrightarrow{\pi|_{X \cap U}} W',$$

pa je

$$\pi|_{X \cap U} = g \circ \eta^{-1} : X \cap U \to W'$$

homeomorfizam, čiji inverz je

$$\Phi = \eta \circ g^{-1} : W' \to X \cap U.$$

Primetimo da je $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_n) : W' \to \mathbb{R}^n$ injektivno i diferencijabilno.

Neka je sada $(x_1, ..., x_n) \in X \cap U$. Tada

$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_n) &= \Phi(\pi(x_1, ..., x_n)) = \Phi(x_1, ..., x_k) \\ &= (\Phi_1(x_1, ..., x_k), ..., \Phi_n(x_1, ..., x_k)), \end{aligned}$$

tj.

$$\forall x \in X \cap U \ : \ x_i = \Phi_i(x_1, ..., x_k) \ , \ i = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Sa druge strane, za $(x_1, ..., x_k) \in W'$ važi

$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_k) &= \pi(\Phi(x_1, ..., x_k)) = \pi(\Phi_1(x_1, ..., x_k), ..., \Phi_n(x_1, ..., x_k)) \\ & \quad (\Phi_1(x_1, ..., x_k), ..., \Phi_k(x_1, ..., x_k)), \end{aligned}$$

tj.

$$\forall (x_1, ..., x_k) \in W' \ : \ \Phi(x_1, ..., x_k) = x_i \ , \ i = 1, ..., k. \tag{2.4}$$

Primetimo da ako zamenimo skup $U$ skupom $U \cap \pi^{-1}$ (ako je nepohodno), možemo pretpostaviti

$$(x_1, ..., x_n) \in U \ \Rightarrow \ (x_1, ..., x_k) \in W'. \tag{2.5}$$

Definišimo sada diferencijabilno preslikavanje

$$f : U \to \mathbb{R}^{n-k}, \ f(x_1, ..., x_n) = (x_{k+1} - \Phi_{k+1}(x_1, ..., x_k), ..., x_n - \Phi_n(x_1, ..., x_k)).$$

Tada iz 2.3 direktno sledi $X \cap U \subset f^{-1}(0)$. Dalje, kako je Jakobijan preslikavanja $f$ oblika

$$Df = (A \ I_{n-k}),$$

gde je $A$ matrica formata $((n-k)\times k)$, važi da je $r(Df) = n-k$. Ostaje da pokažemo

$$x \in U \text{ i } f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x \in X.$$

Za to je dovoljno pokazati da je $x = (x_1, ..., x_n)$ sadržano u slici preslikavanja $\eta$. Iz 2.5$(x_1, ..., x_k) \in W'$, dakle $\Phi(x_1, ..., x_k)$ je difinisano. Prema 2.4 sledi

$$\Phi(x_1, ..., x_k) = (x_1, ..., x_k, \Phi_{k+1}(x_1, ..., x_k), ..., \Phi_n(x_1, ..., x_k)).$$

Sa druge strane, $f(x) = 0$ znači $x_i = \Phi_i(x_1, ..., x_k),\ i = k+1, ..., n$, odakle dobijamo

$$\begin{aligned} x &= (x_1, ..., x_k, \Phi_{k+1}(x_1, ..., x_k), ..., \Phi_n(x_1, ..., x_k)) \\ &= \Phi(x_1, ..., x_k) = \eta(g^{-1}(x_1, ..., x_k)), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Kartu $k$- dimenzionalne podmnogostrukosti $X$ od $\mathbb{R}^n$ kraće označavamo sa $(\phi, V)$. Ona, dakle, predstavlja difeomorfizam sa otvorenog podskupa $V \subset X$ na otvoren podskup od $\mathbb{R}^k$. Karte su inverzi lokalnih parametrizacija, što je detaljno obrazloženo u [5].

## 2.2 Diferencijabilne mnogostrukosti

U ovom odeljku ćemo definisati pojam diferencijabilne mnogostrukosti, čije topološke osobine su detaljno izložene u [5].

**2.2.1 Definicija** *Neka je dat skup $X$. Karta $(\psi, V)$ od $X$ je bijektivno preslikavanje $\psi : V \to U$ otvorenog podskupa $V \subseteq X$ na otvoren podskup $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dve karte $(\psi_1, V_1)$ i $(\psi_2, V_2)$ se nazivaju $C^\infty$- komptibilne, ako su $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ i $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ otvoreni u $\mathbb{R}^n$ i*

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2) \to \psi_2(V_1 \cap V_2)$$

*je $C^\infty$- difeomorfizam.*
*$C^\infty$- atlas od $X$ je familija $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) | \alpha \in A\}$ kompatibilnih karata tako da je $M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$.*
*Dva atlasa su ekvivalentna ako je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ atlas od X, tj. ako su sve karte atlasa $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ kompatibilne. Apstraktna diferencijabilna mnogostrukost je skup $X$ zajedno sa klasom ekvivalencije atlasa. Takva struktura se zove diferencijabilna (ili $C^\infty$) stuktrura na $X$.*

### 2.2.2 Primeri

1. Neka je $S^1 = \{(x,y)|x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ jedinična kružnica, $V_1 := \{(\cos\varphi, \sin\varphi)|0 < \varphi < 2\pi\}$ i
$$\psi_1 : V_1 \to (0, 2\pi),\ (\cos\varphi, \sin\varphi) \mapsto \varphi.$$
Neka je, dalje, $V_2 := \{(\cos\varphi, \sin\varphi)| - \pi < \varphi < \pi\}$ i
$$\psi_2 : V_2 \to (-\pi, \pi),\ (\cos\varphi, \sin\varphi) \mapsto \varphi.$$
Tada su $(\psi_1, V_1)$ i $(\psi_2, V_2)$ karte za $S^1$ i $S^1 = V_1 \cup V_2$. Štaviše, karte su kompatibilne. Važi $\psi_1(V_1 \cap V_2) = (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ i $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}|_{(0,\pi)} : \varphi \mapsto \varphi$. Dalje je $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}|(\pi, 2\pi) : \varphi \mapsto \varphi - 2\pi$, pa je
$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2) \to \psi_2(V_1 \cap V_2)$$
difeomorfizam. Sledi da je $\mathcal{A} := \{(\psi_1, V_1), (\psi_2, V_2)\}$ atlas od $S^1$.

2. Neka je dat skup $M$ u $\mathbb{R}^n$ i neka je
$$V_1 := \{(s,0)| - 1 < s < 1\},\ \psi_1 : V_1 \to (-1,1),\ \psi_1(s,0) = s.$$
Neka je, dalje,
$$V_2 := \{(s,0)| - 1 < s < 0\} \cup \{(s,s)|0 < s < 1\},$$
i
$$\psi_2 : V_2 \to (-1,1),\ \psi_2(s,0) = s,\ \psi_2(s,s) = s.$$
Tada su $\psi_1$ i $\psi_2$ bijekcije pa sledi da su to karte i $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : s \mapsto s$. Međutim, $\psi_1(V_1 \cap V_2) = (-1, 0]$ nije otvoren, pa $\psi_1$ i $\psi_2$ nisu kompatibilne karte.

Dokaz naredne teoreme je dat u [5].

**2.2.3 Teorema** *Neka je $X$ $m$- dimenzionalna podmnogostrukost od $R^n$. Tada je $X$ i $m$- dimenzionalna $C^\infty$ mnogostrukost u smislu Definicije 2.2.1.*

# Glava 3

# Diferencijalni račun na mnogostrukostima

Jedan od osnovnih koncepata neophodnih za račun na podmnogostukostima je pojam tangentnog prostora. Ovaj koncept je zasnovan na intuitivnoj geometrijskoj ideji tangentne ravni na površ. Ključno pitanje je šta bi trebalo zameniti intuitivnu ideju tangentnog vektora, kao nečega što je tangentno na površ u uobičajenom smislu. Odgovor je da tangentni vektor treba razumeti kao nešto što je tangentno na *krivu* u podmnogostrukosti.

Mnogostrukosti u opštem slučaju nemaju strukturu vektorskog prostora. Stoga diferenciranje na mnogostrukostima možemo posmatrati kao proces aproksimacije u dva koraka: prvo se mnogostrukost u bilo kojoj tački aproksimira vektorskim prostorom (tangentnim prostorom koji odgovara tangentnoj ravni na površ), a zatim se izvod definiše kao linearno preslikavanje na tim tangentnim prostorima.

## 3.1 Tangentni prostor

Neka je $X \subset \mathbb{R}^n$ $k$- dimenzionalna podmnogostrukost, i $p \in X$.

**3.1.1 Definicija** *Kriva u $X$ kroz $p$ je diferencijabilno preslikavanje $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$, $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, pri čemu $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset X$ i $\gamma(0) = p$.*

### 3.1.2 Napomene

1. Kriva $\gamma$ u $X$ kroz $p$ je diferencijabilna (jer preslikava na $\mathbb{R}^n$), pa je

$$\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0) \in \mathbb{R}^n$$

dobro definisano.

2. Postoji više krivih kroz svaku tačku $p \in X$ : ako je $\eta : W \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje kao u 2.1.6 (3), $p = \eta(q), q \in W$ i $\gamma' : (-\epsilon, \epsilon) \to W$ je kriva kroz $q$ u $\mathbb{R}^k$, onda je $\gamma := \eta \circ \gamma'$ kriva u $X$ kroz $p$.

**3.1.3 Definicija** *Skup*

$$T_pX := \{\gamma'(0) | \gamma \text{ je kriva u } X \text{ kroz } p\} \subset \mathbb{R}^n$$

*je tangentni prostor od $X$ u tački $p$. Elemente ovog prostora zvaćemo tangentnim vektorima podmnogostrukosti $X$ u tački $p$.*

Dakle, vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je tangentni vektor (tj. $v \in T_pX$) na $X$ u $p$ ako postoji diferencijabilna kriva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to X \subset \mathbb{R}^n$ tako da je $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$.

**3.1.4 Teorema** *Neka je $X$ podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i $p \in X$. Tada se se sledeći podskupovi od $\mathbb{R}^n$ poklapaju:*

1. *$ImD\varphi(0)$, gde je $\varphi$ lokalna parametrizacija od $X$ i $\varphi(0) = p$.*
2. *$\{\gamma'(0) | \gamma : I \to X\ C^\infty,\ I \subset \mathbb{R},\ \gamma(0) = p\}$.*
3. *$KerDf(p)$, gde je lokalno oko $p$, $X$ nula skup regularnog preslikavanja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ ($k = dimX$.)*

**Dokaz.** $1 \subseteq 2$. Za dato $D\varphi(0) \cdot v \in ImD\varphi(0)$ definišemo $\gamma(t) := \varphi(t \cdot v)$. Tako je za, odgovarajući interval $I$, funkcija $\gamma : I \to X$ glatka, $\gamma(0) = \varphi(0) = p$ i $\gamma'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t \cdot v) = D\varphi(0) \cdot v$.
$2 \subseteq 3$. Neka je dato $\gamma'(0),\ \gamma : I \to X$, i neka je data funkcija $f$ kao u 3. Tada, lokalno oko 0, imamo $f(\gamma(t)) = 0$, pa je stoga

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t)) = Df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0),$$

odkale sledi $\gamma'(0) \in KerDf(p)$.
$3 \subseteq 1$. Kako je $1 \subseteq 2 \subseteq 3$ tj. $1 \subseteq 3$, dovoljno je pokazati

$$dim(ImD\varphi(0)) = dim(KerDf(p)).$$

Preslikavanje $\varphi$ je imerzija, pa je $dim(ImD\varphi(0)) = k = dimX$. Preslikavanje $f$ je regularno, pa je $dim(ImDf(p)) = n - k$, odakle je $dim(KerDf(p)) = n - (n - k) = k$. □

Posmatrajmo skup

$$T_pX = \{\gamma'(0) | \gamma : I \to X\ C^\infty,\ I \subset \mathbb{R},\ \gamma(0) = p\},$$

tj. tangentni prostor podmnogostrukosti $X$ u tački $p$. Pokazaćemo da je $T_pX$ linearni potprostor od $\mathbb{R}^n$.

### 3.1.5 Primeri

1. Ako je $X$ afini potprostor od $\mathbb{R}^n$, i $X = p_0 + V$ gde je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$, onda je $T_pX = V$ za sve $p \in X$.

2. Neka je $X$ podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$, i $\gamma$ kriva u $X$ kroz tačku $p$. Neka je $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfizam između dva otvorena skupa $U$ i $V$. Ako je $\gamma(t) \in X \cap U$, pri čemu je $\gamma(0) = p$, onda je $f(\gamma(t)) \in f(X) \cap V$ i $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = d_p f(\gamma'(0))$. Sledi da $v \in T_pX$ ako i samo ako $d_p f(v) \in T_{f(p)}(f(X))$. Tako dobijamo izomorfizam

$$T_pX \xrightarrow{d_p f} T_{f(p)}(f(X)).$$

Na osnovu prethodnih primera zaključujemo: ako za $p \in X$ uzmemo kartu $\phi : U \ni x \to V \subset \mathbb{R}^n,\ \phi(X \cap U) = (\mathbb{R}^n \times 0) \cup V$, sledi

$$T_pX = (d_p\phi)^{-1}(\mathbb{R}^n \times 0).$$

**3.1.6 Primer** Posmatrajmo $\mathbb{R}^{n+1}$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom $\langle\ ,\rangle$ i podmnogostrukost

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x\rangle = 1.\}$$

Za $f(x) := \langle x, x\rangle - 1,\ x \in S^n$ i $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ važi $Df(x)(y) = 2\langle x, y\rangle$. Odatle sledi

$$T_xS^n = x^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

**3.1.7 Napomena** Sada ćemo pokazati da $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = |x_1|\}$ nije 1 - dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^2$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $X$ 1- dimenzionalna podmnogostrukost. Tada postoji 1 - dimenzionalni tangentni prostor u tački (0,0). Zapravo, tada postoji diferencijabilna kriva $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset X,\ \gamma(0) = (0, 0)$ i $\gamma'(0) \neq (0, 0)$. $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset X$ implicira $\gamma_1^2(t) = \gamma_2^2(t)$, za svako $t$. Diferencirajući dva puta poslednju jednakost, dobijamo

$$2\gamma_1'(t)^2 + 2\gamma_1(t)\gamma_1''(t) = 2\gamma_2'(t)^2 + 2\gamma_2(t)\gamma_2''(t).$$

Koristeći $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$, dobijamo

$$\gamma_1'(0)^2 = \gamma_2'(0)^2. \tag{3.1}$$

Sa druge strane, $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset X$ implicira $\gamma_2(t) \geq 0$ za svako $t$, i $\gamma(0) = (0, 0)$ povlači $\gamma_2(0) = 0$. To znači da $\gamma_2$ ima minimum u $t = 0$, odakle sledi $\gamma_2'(0) = 0$. No, tada 3.1 implicira $\gamma_1'(0) = 0$, pa je $\gamma'(0) = (0, 0)$, što je kontradikcija.

**3.1.8 Definicija** *Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogostrukosti. Preslikavanje $f : X \to Y$ je glatko (ili $C^\infty$), ako za svako $p \in X$ postoji otvorena okolina $U_p$ od $p$ u $\mathbb{R}^m$ i glatko proširenje $\tilde{f} : U_p \to \mathbb{R}^n$, pri čemu je $\tilde{f}|_{X\cap U_p} = f|_{X\cap U_p}$. Ako je $f$ bijekcija, i $f$ i $f^{-1}$ su glatka preslikavanja, onda je $f$ difeomorfizam.*

Ako je $Y$ takođe podmnogostrukost, i $f : X \to Y$ glatko preslikavanje kao u 3.1.8, definišimo preslikavanje među podmnogostrukostima na sledeći način:

$$T_p f : T_p X \to T_{f(p)} Y,\ \gamma'(0) \mapsto (f \circ c)'(0).$$

$T_p f$ se zove *tangentno preslikavanje od $f$ u $p$.*

Pokažimo da je preslikavanje $T_p f$ dobro definisano. Neka su $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ glatke krive kroz tačku $p$, dakle $\gamma_1(0) = p, \gamma_2(0) = p$, i neka $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. Kako je $f$ glatko preslikavanje, sledi da lokalno oko $p$ postoji otvorena okolina $U_p \subset \mathbb{R}^n$ i glatko proširenje $\tilde{f} : U_p \to \mathbb{R}^n$, tako da važi $\tilde{f}|_{U_p \cap X} = f|_{U_p \cap X}$. Tada:

$$\tilde{f} \circ \gamma_i = f \circ \gamma_i,\ i = 1, 2$$

pa je

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (\tilde{f} \circ \gamma_1)'(0) = D\tilde{f}(p) \cdot \gamma_1'(0) = D\tilde{f}(p) \cdot \gamma_2'(0) = (\tilde{f} \circ \gamma_2)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0).$$

($D\tilde{f}(p)$ označava izvod preslikavanja $f$ u tački $p$.)

**3.1.9 Lema** *Neka su $X$, $Y$, $Z$ podmnogostrukosti, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ preslikavanja klase $C^\infty$ i neka $p \in X$. Tada važi:*

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f.$$

**Dokaz.** Neka su $\tilde{g}$ i $\tilde{f}$ glatka proširenja funkcija $g$ i $f$. Tada je $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ glatko proširenje funkcije $g \circ f$ i važi:

$$\begin{aligned} T_p(g \circ f) &= (\tilde{g} \circ \tilde{f} \circ \gamma)'(0) \\ &= D\tilde{g}(\tilde{f} \circ \gamma(0)) \cdot \tilde{f} \circ \gamma)'(0) \\ &= T_{f(p)} g(D\tilde{f}(p)\gamma'(0)) \\ &= T_{f(p)} g \circ T_p f(\gamma'(0)). \end{aligned}$$

□

Sada nam je cilj da pojam tangentnog prostora proširimo na apstraktne mnogostrukosti. Za mnogostrukost $X$ i glatku krivu $\gamma : I \to X$, izvod $\gamma'(0)$ nema smisla zbog nedostatka euklidskog prostora koji okružuje $X$. Zato ćemo posmatrati karte.

**3.1.10 Definicija** *Neka je $X$ mnogostrukost, $p \in X$ i $\phi$ karta oko $p$. Dve glatke krive $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ koje prolaze kroz tačku $p$ (tj. $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$) se zovu tangentne krive u $p$ u odnosu na kartu $\phi$ ako je*

$$(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0).$$

**3.1.11 Lema** *Definicija 3.1.10 je dobra, tj. ne zavisi od izbora karte $\phi$.*

**Dokaz.** Neka su $\gamma_1$ i $\gamma_2$ glatke krive kroz $p$, koje su tangentne u $p$ na $X$ u odnosu na kartu $\phi_1$. Neka je $\phi_2$ druga karta oko $p$. Tada, lokalno oko 0, imamo $\phi_2 \circ \gamma_i = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \gamma_i),\ i = 1, 2$ pa je

$$(\phi_2 \circ \gamma_1)'(0) = D(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(\phi_1(p))(\phi_1 \circ \gamma_1)'(0) = (\phi_2 \circ \gamma_2)'(0)$$

□

Na prostoru glatkih krivih koje prolaze kroz tačku $p$ definišimo relaciju ekvivalencije: neka je $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Tada je $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ako i samo ako za bilo koju kartu $\phi$ u tački $p$ važi

$$(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0).$$

Za krivu $\gamma : I \to X,\ \gamma(0) = p$ označimo sa $[\gamma]_p$ klasu ekvivalencije kojoj pripada $\gamma$ s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ . Tada se $[\gamma]_p$ zove *tangentni vektor u p.*

**3.1.12 Definicija** *Tangentni prostor mnogostrukosti $X$ u tački $p \in X$ je*

$$T_pX = \{[\gamma]_p | \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to X\ C^\infty,\ (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R},\ \gamma(0) = p\}.$$

**3.1.13 Definicija** *Neka su $X$ i $Y$ mnogostrukosti i $f : X \to Y$ glatka funkcija. Preslikavanje*

$$T_pf : T_pX \to T_{f(p)}Y,\ [\gamma]_p \mapsto [f \circ \gamma]_{f(p)}$$

*se naziva tangentno preslikavanje od $f$ u $p$.*

Sledi propozicija, čiji dokaz je detaljno izložen u [5].

**3.1.14 Propozicija** *Neka su $X$, $Y$ i $Z$ mnogostrukosti, $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ glatka preslikavanja i $p \in X$. Tada*

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_pf.$$

*Štaviše, kako je $T_p(i_{d_X}) = i_{d_{T_pX}}$, za difeomorfizam f, $T_pf$ je bijekcija i $(T_pf)^{-1} = T_{f(p)}f^{-1}$.*

Primenimo ovo na lokalnu kartu oko $p$ : preslikavanje $\phi$ je difeomorfizam $\phi : U \subset X \to V \subset \mathbb{R}^n$, pa dobijamo izomorfizam

$$T_p\phi : T_pX \xrightarrow{\text{`}} \mathbb{R}^n,\ \gamma \mapsto (\phi \circ \gamma)'(0).$$

Da bismo pokazali da je $T_pX$ vektorski prostor, treba pokazati da $T_pX$ ne zavisi od izbora karte $\phi$. Sledi teorema, kojom će prostor $T_pX$ biti snabdeven unutrašnjom (nezavisnom od izbora karte) strukturom vektorskog prostora:

**3.1.15 Teorema** *Neka je $X$ mnogostrukost, $p \in X$, $V \subseteq X$ otvoren i $\phi$ karta oko $p$. Struktura vektorskog prostora, indukovanog na $T_pX$ bijekcijom $T_p\phi$ : $T_pX \to T_{\phi(p)}\phi(V) \cong \mathbb{R}^n$, ne zavisi od izbora karte $\phi$.*

**Dokaz.** Prema definiciji je $T_pV = T_pX$. Važi $T_p\phi : T_pX \to T_{\phi(p)}\phi(V) \cong \mathbb{R}^n$. Prema Propoziciji 3.1.14, $T_p\phi$ je bijekcija. Pokažimo sada da ova struktura ne zavisi od izbora karte. Neka $[\gamma_1]_p, [\gamma_2]_p \in T_pX,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i neka je $\psi$ neka druga karta oko $p$ sa istim domenom $V$ (čime ne gubimo na opštosti). Tada važi:

$$\begin{aligned}
\alpha[\gamma_1]_p + \beta[\gamma_2]_p \quad &:= \quad (T_p\phi)^{-1}(\alpha T_p\phi([\gamma_1]_p) + \beta T_p\phi([\gamma_2]_p))\\
&= \quad (T_p\phi)^{-1}(\alpha(\phi\circ\gamma_1)'(0) + \beta(\phi\circ\gamma_2)'(0))\\
&= \quad (T_p\phi)^{-1}(\alpha(\phi\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\gamma_1)'(0) + \beta(\phi\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\gamma_2)'(0))\\
&= \quad (T_p\phi)^{-1}(D(\phi\circ\psi^{-1})(\psi(p))(\alpha(\psi\circ\gamma_1)'(0) + \beta(\psi\circ\gamma_2)'(0))\\
&= \quad (T_p\phi)^{-1}(T_{\psi(p)})(\phi\circ\psi^{-1})(\alpha(\psi\circ\gamma_1)'(0) + \beta(\psi\circ\gamma_2)'(0))\\
&\overset{3.1.14}{=} \quad (T_p\psi)^{-1}(\alpha T_p\psi([\gamma_1]_p) + \beta T_p\psi([\gamma_2]_p)).
\end{aligned}$$

Za $x \in \mathbb{R}^n$, tangentni vektor na $\mathbb{R}^n$ u tački $x$ možemo posmatrati kao uređen par $(x, v)$, gde $v \in \mathbb{R}^n$. Pri tome je

$$\begin{aligned}
(x,v) + (x,w) \quad &= \quad (x, v+w),\\
c(x,v) \quad &= \quad (x, cv).
\end{aligned}$$

Skup tangentnih vektora čini vektorski prostor, koji zovemo tangentnim prostorom na $\mathbb{R}^n$ i označavamo sa $T_x\mathbb{R}^n$.

**3.1.16 Definicija** *Neka je (a,b) otvoreni interval u $\mathbb{R}$ i $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje klase $C^r$. Vektor brzine preslikavanja $\gamma$ je $(\gamma(t), \gamma'(t)),\ t \in (a,b)$.*

**3.1.17 Definicija** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$ i $\alpha : A \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje klase $C^r$. Neka $x \in A$ i $p = \alpha(x)$. Definišimo linearnu transformaciju*

$$\alpha_* : T_x\mathbb{R}^k \to T_p\mathbb{R}^n$$

*sa*

$$\alpha_*(x,v) = (p, D\alpha(x)\cdot v).$$

*Kažemo da je $\alpha_*$ transformacija indukovana diferencijabilnim preslikavanjem $\alpha$.*

Za dato $(x,v)$, primetimo da je vektor $\alpha_*(x,v)$ zapravo vektor brzine krive $\gamma(t) = \alpha(x+tv)$, za $t = 0$.

Navodimo pravilo kompozicije transformacija, čiji dokaz je izložen u [9].

**3.1.18 Lema** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$ i neka je preslikavanje $\alpha : A \to \mathbb{R}^m$ klase $C^r$. Neka je $B$ otvoren skup u $\mathbb{R}^m$ koji sadrži $\alpha(A)$ i neka je preslikavanje $\beta : B \to \mathbb{R}^n$ klase $C^r$. Tada važi $(\beta\circ\alpha)_* = \beta_*\circ\alpha_*$.*

**3.1.19 Definicija** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Tangentno vektrosko polje u $A$ je neprekidna funkcija $F : A \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, takva da je $F(x) \in T_x\mathbb{R}^n$, za svako $x \in A$. Tada $F$ ima oblik $F(x) = (x, f(x))$, pri čemu $f : A \to \mathbb{R}^n$.*

U skladu sa prethodno izloženim rezultatima, tangentni prostor podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ dimenzije $k$ možemo posmatrati na sledeći način: neka je $X$ mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije $k$. Za $p \in X$ izaberimo parametrizaciju $\alpha : U \to V$ oko $p$, gde je $U$ otvoren u $\mathbb{R}^k$, a $V$ otvoren u $\mathbb{R}^n$. Neka je $x$ tačka skupa $U$ tako da je $\alpha(x) = p$. Skup svih vektora oblika $\alpha_*(x, v)$, gde je $v$ vektor iz $\mathbb{R}^k$, je tangentni prostor od $X$ u $p$, $T_pX$. Drugim rečima,

$$T_pX = \alpha_*(T_x\mathbb{R}^k).$$

## 3.2 Tangentno raslojenje

Definisali smo tangentni prostor mnogostrukosti. Međutim, pojedinčni tangentni prostori još uvek nisu povezani u mnogostrukost. Stoga nam je sledeći cilj da uniju tangentnih prostora snabdemo atlasom uz pomoć kojeg će ta unija postati mnogostrukost.

**3.2.1 Definicija** *Neka je $X$ glatka mnogostrukost i $p \in X$. Definišimo tangentno raslojenje mnogostrukosti $X$ kao disjunktnu uniju vektorskih prostora $T_pX$:*

$$TX := \bigsqcup_{p \in X} T_pX := \bigcup_{p \in X} \{p\} \times T_pX.$$

Preslikavanje $\pi_X : TX \to X$ dato sa $(p, v) \mapsto p$ se zove *kanonička projekcija.* Ako je $f : X \to Y$ glatka funkcija, tada je tangentno preslikavanje $Tf$ od $f$ definisano sa $Tf(p, v) = (f(p), T_pf(v))$.

Sledi analogon Propozicije 3.1.14.

**3.2.2 Propozicija** *Neka su $X$, $Y$ i $Z$ mnogostrukosti i $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ glatke funkcije. Tada je $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. Šta više, $T(i_{d_X}) = i_{d_{TX}}$, pa za difeomorfizam $f : X \to Y$ imamo $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.*

Neka $p \in V$, gde je $V$ otvoren skup u $X$. Da bi tangentno raslojenje $TX$ postalo mnogostrukost, moramo ga snabdeti $C^\infty$ - atlasom. Prirodni kandidati za karte od $TX$ su tangentna preslikavanja karti $T\phi$, gde je $\phi$ karta mnogostrukosti $X$ :

$$T\phi : TV = \bigcup_{p \in V} \{p\} \times T_pV = \bigcup_{p \in V} \{p\} \times T_pX =: TX|_V \to T(\phi(V)),$$

gde je $T(\phi(V)) = \bigcup_{x \in \phi(V)} \{x\} \times T_x(\phi(V)) = \phi(V) \times \mathbb{R}^n$.

Svako ovako definisano $T\phi$ je bijekcija. Sledi teorema, čiji dokaz čitalac može pročitati u [5]:

**3.2.3 Definicija** *Neka je $X$ glatka mnogostrukost sa atlasom $(\phi_\alpha, V_\alpha)|\alpha \in A$. Tada je $(T\phi_\alpha, TX|_{V_\alpha})|\alpha \in A$ $C^\infty$ atlas za $TX$.*

## 3.3 Tenzori

**3.3.1 Definicija** *Neka je $V$ vektorski prostor. Označimo sa $V^k = V \times \cdots \times V$ skup svih $k$- torki $(v_1, \ldots, v_k)$ vektora iz $V$. Funkcija $f : V^k \to \mathbb{R}$ je linearna po $i$- toj promenljivoj ako je, za date vektore $v_j$, $j \neq i$, funkcija $T : V \to \mathbb{R}$ definisana sa*

$$T(v) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k),$$

*linearna. Funkcija $f$ je multilinearna, ako je linearna po $i$- toj promenljivoj, za svako $i$. Takvu funkciju nazivamo $k$- tenzorom, ili tenzorom reda $k$ na $V$. Skup svih $k$- tenzora na $V$ označavamo sa $\mathcal{L}^k(V)$.*

**3.3.2 Napomena** Za $k = 1$, $\mathcal{L}^1(V)$ je skup linearnih transformacija $f : V \to \mathbb{R}$. Ponekad ga nazivamo dual- prostorom prostora $V$ i označavamo ga sa $V^*$.

**3.3.3 Teorema** *Skup svih $k$- tenzora na $V$ čini vektorski prostor, pri čemu je zbir dva $k$- tenzora definisan sa*

$$(f + g)(v_1, \ldots, v_k) = f(v_1, \ldots, v_k) + g(v_1, \ldots, v_k),$$

*a množenje $k$- tenzora skalarom je dato sa*

$$(cf)(v_1, \ldots, v_k) = c(f(v_1, \ldots, v_k)).$$

Sledi rezultat o jednakosti dva $k$- tenzora na $V$.

**3.3.4 Lema** *Neka je $a_1, \ldots, a_n$ baza prostora $V$. Ako su $f, g : V^k \to \mathbb{R}$ $k$- tenzori na $V$, i*

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = g(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}),$$

*za svaku $k$- torku $I = (i_1, \ldots, i_k)$ elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$, onda je $f = g$.*

**Dokaz.** Neka je $(v_1, \ldots, v_k)$ proizvoljna $k$- torka vektora iz $V$. Vektor $v_i$ izražavamo pomoću vektora baze na sledeći način:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{j_1=1}^{n} c_{1j_1} f(a_{j_1}, v_2, \ldots, v_k) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} c_{1j_1} c_{2j_2} f(a_{j_1}, a_{j_2}, v_3, \ldots, v_k), \end{aligned}$$

i tako dalje. Na kraju dobijamo jednačinu

$$f(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdots c_{kj_k} f(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}).$$

Analogno izvodimo izraz za $g$. Sledi da su $f$ i $g$ jednaki za sve $k$- torke vektora iz $V$, ako su jednaki za sve $k$- torke bazisnih elemenata. $\square$

Kao što linearna transformacija sa $V$ na $W$ može biti definisana određivanjem njenih vrednosti u baznim vektorima prostora $V$, tako i $k$- tenzor na $V$ možemo definisati njegovim vrednostima u $k$- torkama baznih elemenata. Ova činjenica je posledica prethodne leme i sledeće teoreme, čiji dokaz je izložen u [9].

**3.3.5 Teorema** *Neka je $V$ vektorski prostor sa bazom $a_1, \ldots, a_n$. Neka je $I = (i_1, \ldots, i_k)$ $k$- torka elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$. Postoji jedinstveni $k$- tenzor $\phi_I$ na $V$, takav da je za svaku $k$- torku $J = (j_1, \ldots, j_k)$ elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$,*

$$\phi_I(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) = \begin{cases} 0, & I \neq J \\ 1, & I = J \end{cases} \tag{3.2}$$

*Tenzori $\phi_I$ formiraju bazu prostora $\mathcal{L}^k(V)$.*

Tenzori $\phi_I$ se nazivaju elementarni $k$- tenzori na V koji odgovaraju bazi $a_1, \ldots, a_n$. Kako oni formiraju bazu za $\mathcal{L}^k(V)$, i kako postoji $n^k$ različitih $k$-torki skupa $\{1, \ldots, n\}$, dimenzija prostora $\mathcal{L}^k(V)$ je upravo $n^k$.

Uvedimo operaciju množenja na skupu svih tenzora prostora $V$. Proizvod $k$-tenzora i $l$- tenzora će biti $k + l$- tenzor.

**3.3.6 Definicija** *Neka je $f$ $k$- tenzor, a $g$ $l$- tenzor na V. Definišemo $k + l$-tenzor $f \otimes g$ na $V$ na sledeći način:*

$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = f(v_1, \ldots, v_k) \cdot g(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

*Funkcija $f \otimes g$ je multilinearna i naziva se tenzorski proizvod tenzora $f$ i $g$.*

Sledeća teorema sadrži osnovne osobine tenzorskog proizvoda, a dokaz je komentarisan u [9].

**3.3.7 Teorema** *Neka su f,g i h tenzori na V. Tada važe sledeće osobine:*

1. *(Asocijativnost)* $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$.
2. *(Homogenost)* $(cf) \otimes g = c(f \otimes g) = f \otimes (cg)$.
3. *(Distributivnost) Neka su $f$ i $g$ tenzori istog reda. Tada:*

$$\begin{aligned} (f+g) \otimes h &= f \otimes h + g \otimes h, \\ h \otimes (f+g) &= h \otimes f + h \otimes g. \end{aligned}$$

**3.3.8 Definicija** *Neka je $T : V \to W$ linearna transformacija. Definišimo dualnu transformaciju*

$$T^* : \mathcal{L}^k(W) \to \mathcal{L}^k(V),$$

*na sledeći način: ako je $f \in \mathcal{L}^k(W)$, i $v_1, \ldots, v_k$ su vektori iz V, onda je*

$$(T^* f)(v_1, \ldots, v_k) = f(T(v_1), \ldots, T(v_k)).$$

Transformacija $T^*$ je kompzicija transformacija $T \times \cdots \times T$ i $f$, odakle sledi da je multilinerana (jer je $T$ linearno, a $f$ multilinearno).

**3.3.9 Teorema** *Neka je $T : V \to W$ linearna transformacija i neka je*

$$T^* : \mathcal{L}^k(W) \to \mathcal{L}^k(V)$$

*njena dualna transformacija. Tada:*

1. *$T^*$ je linearna transformacija.*
2. *$T^*(f \otimes g) = T^* f \otimes T^* g$.*
3. *Ako je $S : W \to Y$ linearna transformacija, onda je $(S \circ T)^* f = T^*(S^* f)$.*

**Dokaz.** Pokazaćemo linearnost. Važi

$$\begin{aligned} (T^*(af & + bg))(v_1, \ldots, v_k) = (af + bg)(T(v_1), \ldots, T(v_k)) \\ & = af(T(v_1), \ldots, T(v_k)) + bg(T(v_1), \ldots, T(v_k)) \\ & = aT^* f(v_1, \ldots, v_k) + bT^* g(v_1, \ldots, v_k), \end{aligned}$$

odakle sledi $T^*(af + bg) = aT^* f + bT^* g$. □

Da bismo definisali alterativne tenzore, neophodan je pojam i određene osobine permutacija.

**3.3.10 Definicija** *Neka je $k \geq 2$. Permutacija skupa $\{1, \ldots, k\}$ je injektivno preslikavanje $\sigma$ datog skupa na samog sebe. Skup svih takvih permutacija označavamo sa $S_k$. Ako $\tau, \sigma \in S_k$, onda važi $\tau \circ \sigma \in S_k$ i $\sigma^{-1} \in S_k$. Stoga je $S_k$ grupa, koju nazivamo simetričnom grupom ili grupom permutacija skupa $\{1, \ldots, k\}$.*

**3.3.11 Definicija** *Neka je $1 \leq i < k$ i neka je $e_i \in S_k$ permutacija data sa $e_i(j) = j$ za $j \neq i, i+1$, i*

$$e_i(i) = i + 1 \text{ i } e_i(i+1) = i.$$

*Permutaciju $e_i$ nazivamo elementarnom premutacijom.*

Dokaz sledeće leme je dat u [9].

**3.3.12 Lema** *Ako je $\sigma \in S_k$, onda je $\sigma$ kompozicija elementarnih permutacija.*

**3.3.13 Definicija** *Neka $\sigma \in S_k$. Posmatrajmo skup svih parova elemenata $i, j$ skupa $\{1, \ldots, k\}$, gde za $i < j$ važi $\sigma(i) > \sigma(j)$. Takav par elemenata skupa $\{1, \ldots, k\}$ sa naziva inverzija. Definišemo znak permutacije $\sigma$, koji je jednak sa $-1$, ako je broj inverzija neparan, a u suprotnom je jednak sa 1. Ukoliko je znak permutacije $\sigma$ $-1$, zovemo je neparnom permutacijom. U suprotnom, permutacija $\sigma$ se naziva parna permutacija. Znak permutacije $\sigma$ ima oznaku $sgn\sigma$.*

Sledi lema u kojoj su izloženi rezultati o znaku permutacije, a čiji dokaz je naveden u [9].

**3.3.14 Lema** *Neka $\sigma, \tau \in S_k$. Tada:*

1. *Ako je $\sigma$ kompozicija $m$ elementarnih permutacija, onda je* $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^m$.
2. $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn}\sigma) \cdot (\operatorname{sgn}\tau)$
3. $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$.

**3.3.15 Definicija** *Neka je $f$ proizvoljni $k$- tenzor na $V$. Ako je $\sigma$ permutacija skupa $\{1, \ldots, k\}$, onda definišemo $f^\sigma$ :*

$$f^\sigma(v_1, \ldots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

*Kako je $f$ linarno po svakoj promenljivoj, onda to važi i za $f^\sigma$, odakle sledi da je $f^\sigma$ $k$- tenzor na $V$. Kažemo da je tenzor $f$ simetričan, ako je $f^e = f$, za svaku elementarnu permutaciju $e$. Tenzor $f$ je alternativan ako je $f^e = -f$, za svaku elementarnu permutaciju $e$.*

Drugim rečima, $f$ je simetričan tenzor, ako je

$$f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k) = f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k),$$

za svako $i$. Tenzor $f$ je alternativan ako je

$$f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k) = -f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k).$$

Neka je V vektorski prostor. Označimo sa $\mathcal{A}^k(V)$ skup svih alternativnih k-tenzora na V. Lako je proveriti da je zbir dva alternativna tenzora alternativni tenzor, i da je proizvod alternativnog tenzora sa skalarom opet alternativni tenzor. Stoga je $\mathcal{A}^k(V)$ linearni potprostor prostora svih k- tenzora na V, $\mathcal{L}^k(V)$.

Da bismo pronašli bazu prostora $\mathcal{A}^k(V)$, navešćemo sledeću lemu koja je detaljno dokazana u [9].

**3.3.16 Lema** *Neka je $f$ $k$- tenzor na $V$ i neka $\sigma, \tau \in S_k$.*

1. *Transformacija $f \to f^\sigma$ je linearna transformacija sa $\mathcal{L}^k(V)$ na $\mathcal{L}^k(V)$. Za svako $\sigma, \tau$ važi*
$$(f^\sigma)^\tau = f^{\tau \circ \sigma}.$$
2. *Tenzor $f$ je alternativan ako i samo je $f^\sigma = (\operatorname{sgn}\sigma) f$, za svako $\sigma$. Ako je tenzor $f$ alternativan, i $v_p = v_q$ za $p \neq q$, onda je $f(v_1, \ldots, v_k) = 0$.*

Sada smo u mogućnosti da odredimo bazu prostora $\mathcal{A}^k(V)$. Za $k = 1$ je $\mathcal{A}^1(V) = \mathcal{L}^1(V)$, pa je taj slučaj rešen. Za $k > n$ je prostor $\mathcal{A}^k(V)$ trivijalan. Za bilo koji $k$- tenzor $f$, jedinstveno je određen svojim vrednostima u $k$- torkama baznih elemenata. U slučaju $k > n$, neki bazni elementi se moraju pojaviti više puta u $k$- torci, a kako je $f$ alternativan tenzor, njegova vrednost u $k$- torci je nula.

Konačno, posmatrajmo slučaj $1 < k \leq n$. Pokazaćemo da je alternativni tenzor $f$ u potpunosti određen svojim vrednostima u $k$- torkama baznih elemenata, čiji indeksi su u rastućem poretku.

**3.3.17 Lema** *Neka je $a_1, \ldots, a_n$ baza prostora V. Ako su f,g alternativni k-tenzori na V, i*

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = g(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}),$$

*za svaku rastuću k- torku $I = (i_1, \ldots, i_k)$ skupa $\{1, \ldots, n\}$, onda je f=g.*

**3.3.18 Teorema** *Neka je V vektorski prostor sa bazom $a_1, \ldots, a_n$. Neka je $I = (i_1, \ldots, i_k)$ rastuća k- torka elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$. Postoji jedinstveni alternativni k- tenzor $\psi_I$ na V, takav da je za svaku rastuću k- torku $J = (j_1, \ldots, j_k)$ elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$,*

$$\psi_I(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) = \begin{cases} 0, & I \neq J, \\ 1, & I = J \end{cases}$$

*Tenzori $\psi_I$ formiraju bazu prostora $\mathcal{A}^k(V)$. Tenzor $\psi_I$ zadovoljava jednakost*

$$\psi_I = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)(\psi_{\mathrm{I}})^\sigma,$$

*pri čemu $\sigma \in S_k$.*

*Tenzori $\psi_I$ se nazivaju elementarni alternativni k- tenzori na V koji odgovaraju bazi $a_1, \ldots, a_n$ prostora V.*

**Dokaz.** Jedinstvenost je posledica prethodne leme. Da bismo pokazali egzistenciju, definišimo $\psi_I$ kao što je navedeno u formulaciji teoreme, i pokažimo da $\psi_I$ zadovoljava uslove teoreme.

Prvo ćemo pokazati da je $\psi_I$ alternativni tenzor. Neka $\tau \in S_k$. Tada

$$\begin{aligned} (\psi_I)^\tau &= \sum_\sigma (\text{sgn } \sigma)((\psi_I)^\sigma)^\tau \\ &= \sum_\sigma (\text{sgn } \sigma)(\psi_I)^{\tau\circ\sigma} \\ &= (\text{sgn } \tau) \sum_\sigma ((\text{sgn } (\tau \circ \sigma))(\psi_I)^{\tau\circ\sigma} \\ &= (\text{sgn } \tau)\psi_I. \end{aligned}$$

Dalje, za dati skup $J$ imamo

$$\psi_I(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) = \sum_\sigma (\text{sgn } \sigma)\psi_I(a_{j\sigma(1)}, \ldots, a_{j\sigma(k)}).$$

Sada, najviše jedan izraz može biti različit od nule; to je izraz koji odgovara permutaciji $\sigma$ za koju je $I = (j\sigma(1), \ldots, j\sigma(k))$. Kako su $I$ i $J$ skupovi rastućih indeksa, ovaj slučaj je jedino moguć ako je $I = J$ i ako je $\sigma$ identička permutacija. Tada je vrdnost sume 1. Ako je $I \neq J$, svi sabirci se anuliraju.

Sada ćemo pokazati da $\psi_I$ formiraju bazu prostora $\mathcal{A}^k(V)$. Neka je $f$ alternativni $k$- tenzor na $V$. Pokažimo da $f$ možemo izraziti kao linearnu kombinaciju tenzora $\psi_I$.

Neka je za dato $f$ i za svaku rastuću $k$- torku $I = (i_1, \ldots, i_k)$ elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$, $d_I$ skalar oblika

$$d_I = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}).$$

Posmatrajmo alternativni $k$- tenzor

$$g = \sum_{[J]} d_J \psi_J,$$

gde je $[J]$ oznaka za sumiranje po svim rastućim $k$- torkama elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$. Ako je $I$ rastuća $k$- torka, onda je vrednost tenzora $g$ u $k$- torci $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ jednaka sa $d_I$, i jednaka je sa vrednosti tenzora $f$ u istoj $k$- torci. Sledi da je $f = g$. □

Prethodna teorema pokazuje da, kada odredimo bazu $a_1, \ldots, a_n$ prostora $V$, onda se proizvoljni $k$- tenzor $f$ može izraziti jedinstveno na sledeći način:

$$f = \sum_{[J]} d_J \psi_J.$$

Brojevi $d_J$ se nazivaju komponente tenzora $f$ u odnosu na bazu $\{\psi_J\}$.

**3.3.19 Teorema** *Neka je $V$ vektorski prostor. Definišemo operaciju koja svakom $k$- tenzoru $f \in \mathcal{A}^k(V)$ i svakom $l$- tenzoru $g \in \mathcal{A}^l(V)$ opredeljuje element $f \wedge g \in \mathcal{A}^{k+l}(V)$, tako da važi sledeće:*

1. *(Asocijativnost) $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$.*
2. *(Homogenost) $(cf) \wedge g = c(f \wedge g) = f \wedge (cg)$.*
3. *(Distributivnost) Ako su $f$ i $g$ tenzori istog reda, onda*

$$\begin{aligned} (f+g) \wedge h &= f \wedge h + g \wedge h, \\ h \wedge (f+g) &= h \wedge f + h \wedge g. \end{aligned}$$

4. *(Antikomutativnost) Ako su $f$ i $g$ tenzori reda $k$ i $l$, respektivno, onda*

$$g \wedge f = (-1)^{kl} f \wedge g.$$

5. *Za datu bazu $a_1, \ldots, a_n$ prostora $V$, neka $\phi_i$ označava dualnu bazu prostora $V^*$, i neka su $\psi_I$ odgovarajući elementarni alternativni tenzori. Ako je $I = (i_1, \ldots, i_k)$ rastuća $k$- torka elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$, onda je*

$$\psi_I = \phi_{i_1} \wedge \phi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}.$$

6. *Ako je $T : V \to W$ linearna transformacija, $f$ i $g$ su alternativni tenzori na $W$, onda je*

$$T^*(f \wedge g) = T^* f \wedge T^* g.$$

*Tenzor $f \wedge g$ se naziva spoljašnji proizvod tenzora $f$ i $g$. Primetimo da je posledica četvrte osobine činjenica da za alternativni tenzor $f$ neparnog reda važi $f \wedge f = 0$.*

**Dokaz.** Neka je $F$ $k$- tenzor na $V$. Definišimo transformaciju $A : \mathcal{L}^k(V) \to \mathcal{L}^k(V)$ formulom

$$AF = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) F^{\sigma}, \ \sigma \in S_k.$$

Transformacija $A$ ima sledeće osobine:

(i) $A$ je linearno.

(ii) $AF$ je alternativni tenzor.

(iii) Ako je $F$ alternativni tenzor, onda je $AF = (k!)F$.

Linearnost je posledica činjenice da je preslikavanje $F \to F^{\sigma}$ linearno. Alternativnost pokazujemo direktno,

$$\begin{aligned} (AF)^{\tau} &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)(F^{\sigma})^{\tau} \\ &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) F^{\tau \circ \sigma} \\ &= (\operatorname{sgn} \tau) \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \tau \circ \sigma) F^{\tau \circ \sigma} \\ &= (\operatorname{sgn} \tau) AF. \end{aligned}$$

Definišimo proizvod $f \wedge g$. Ako je $f$ alternativni $k$- tenzor na $V$, a $g$ alternativni $l$- tenzor na $V$, definišimo

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g).$$

Tada je $f \wedge g$ alternativni $k + l$- tenzor.

Dokažimo homogenost:

$$\begin{aligned} (cf) \wedge g &= \frac{1}{k!l!} A((cf) \otimes g) \\ &= \frac{1}{k!l!} A(c(f \otimes g)), \text{ zbog linearnosti operacije } \otimes, \\ &= \frac{1}{k!l!} cA(f \otimes g), \text{ zbog linearnosti transformacije } A, \\ &= c(f \wedge g). \end{aligned}$$

Distributivnost je posledica distributivnosti proizvoda $\otimes$ i linearnosti od $A$. $\square$

Dokazi antikomutativnosti, asocijativnosti, kao i poslednje dve osobine, detaljno su izloženi u [9], pa pomenute dokaze izostavljamo.

## 3.4 Diferencijalne forme

**3.4.1 Definicija** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. $k$- tenzorsko polje u $A$ je funkcija $\omega$ koja svakoj tački $x \in A$ pridružuje $k$- tenzor definisan na vektorskom prostoru $T_x\mathbb{R}^n$, tj.*

$$\omega(x) \in \mathcal{L}^k(T_x\mathbb{R}^n),$$

*za svako $x$. Tako je $\omega(x)$ funkcija koja $k$- torke tangentnih vektora na $\mathbb{R}^n$ u tački $x$ preslikava na $\mathbb{R}$. Stoga se njena vrednost u datoj $k$- torci može zapisati u obliku*

$$\omega(x)((x, v_1), \ldots, (x, v_k)).$$

*Zahtevamo da je $\omega(x)$ neprekidna funkcija od $(x, v_1, \ldots, v_k)$, i ako je klase $C^r$, onda kažemo da je $\omega$ tenzorsko polje klase $C^r$. Ako je $\omega(x)$ alternativni $k$- tenzor za svako $x$, onda se $\omega$ naziva diferencijalna forma reda $k$ na $A$.*

Ako je $X$ mnogostukost dimenzije $m$ u $\mathbb{R}^n$, $k$- tenzorsko polje na $X$ definišemo kao funkciju $\omega$ koja svakoj tački $p \in X$ dodeljuje element prostora $\mathcal{L}^k(T_pX)$. Ako je $\omega(p)$ alternativno za svako $p$, i tada se $\omega$ naziva diferencijalna forma na $X$.

**3.4.2 Definicija** *Neka je $e_1, \ldots, e_n$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$. Tada se $(x, e_1), \ldots, (x, e_n)$ naziva standardna baza prostora $T_x\mathbb{R}^n$. Definišemo 1- formu $\tilde{\phi}_i$ na $\mathbb{R}^n$ na sledeći način:*

$$\tilde{\phi}_i(x)(x, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

*Forme $\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_n$ su elementarne 1- forme na $\mathbb{R}^n$. Slično, za datu rastuću $k$-torku $I = (i_1, \ldots, i_k)$ elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$, definišemo $k$- formu $\tilde{\psi}_I$ na $\mathbb{R}^n$ sa*

$$\tilde{\psi}_I = \tilde{\phi}_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \tilde{\phi}_{i_k}(x)$$

*Forme $\tilde{\psi}_I$ se nazivaju elementarne $k$- forme na $\mathbb{R}^n$.*

Primetimo da za svako $x$, 1- tenzori $\tilde{\phi}_1(x), \ldots, \tilde{\phi}_n(x)$ čine bazu prostora $\mathcal{L}^1(T_x\mathbb{R}^n)$ dualnu standardnoj bazi prostora $T_x\mathbb{R}^n$, a $k$- tenzori $\tilde{\psi}_I$ odgovaraju elementarnim alternativnim tenzorima na $T_x\mathbb{R}^n$.

Ako je $\omega$ $k$- forma definisana na otvorenom skupu A u $\mathbb{R}^n$, onda $k$- tenzore $\omega(x)$ možemo jedinstveno zapisati u obliku

$$\omega(x) = \sum_{[I]} b_I(x)\tilde{\psi}_I(x),$$

za neke skalarne funkcije $b_I(x)$. Ove funkcije nazivamo komponentama forme $\omega$ u odnosu na standardne elemenatarne forme u $\mathbb{R}^n$.

Dajemo formulaciju leme o diferencijabilnosti forme, čiji dokaz je naveden u [9].

**3.4.3 Lema** *Neka je $\omega$ $k$- forma na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$. $\omega$ je klase $C^r$ ako i samo ako su njene komponente $b_I$ klase $C^r$ na $A$.*

**3.4.4 Lema** *Neka su $\omega$ i $\eta$ $k$- forme, i $\theta$ $l$- forma na otvorenom skupu $A$ u $\mathbb{R}^n$. Ako su $\omega, \eta, \theta$ klase $C^r$, onda su $a\omega + b\eta,\ a, b \in \mathbb{R}$ i $\omega \wedge \theta$ takođe klase $C^r$.*

**Dokaz.** $a\omega + b\eta,\ a, b \in \mathbb{R}$ je klase $C^r$ kao linearna kombinacija funkcija klase $C^r$. Drugi deo tvrđenja se pokazuje korišćenjem formule za spoljašnji proizvod, date u Teoremi 3.3.19. $\square$

**3.4.5 Definicija** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ preslikavanje klase $C^r$, onda se $f$ naziva skalarno polje na $A$. $f$ takođe zovemo i diferencijalnom formom reda 0.*

Spoljašnji proizvod dve 0- forme $f$ i $g$ definišemo sa $f \wedge g = f \cdot g$, što je zapravo uobičajeni proizvod dve realne funkcije. Uopšteno, spoljašnji proizvod 0- forme $f$ i $k$- forme $\omega$ definisano je na sledeći način

$$(\omega \wedge f)(x) = (f \wedge \omega)(x) = f(x) \cdot \omega(x),$$

što je zapravo proizvod tenzora $\omega(x)$ i skalara $f(x)$.

Algebarske osobine spoljašnjeg proizvoda važe i u ovom slučaju; asocijativnost, homogenost i distributivnost direktno, a antikomutativnost važi jer su skalarna polja 0- forme:

$$f \wedge g = (-1)^0 g \wedge f \quad , \quad f \wedge \omega = (-1)^0 \omega \wedge f,$$

pri čemu su $f, g$ 0- forme, a $\omega$ je $k$- forma, za $k > 0$.

**3.4.6 Definicija** *Neka je $X$ mnogostrukost dimenzije $m$. Preslikavanje $\omega$ koje svakoj tački $x \in X$ pridružuje alternativni $k$- tenzor $\omega(x)$ definisan na tangentnom prostoru $T_xX$ je $k$- forma na mnogostrukosti $X$.*

Sve osobine formi na otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}^n$ važe i na mnogostrukostima.

### 3.4.1 Diferencijalni operator

U ovom odeljku ćemo uvesti operator $d$ na diferencijalnim formama. Generalno, opearator $d$, primenjen na $k$- formu, daje $k+1$- formu. Počećemo definisanjem operatora $d$ na 0- formama.

0- forma na otvorenom podskupu $A$ od $\mathbb{R}^n$ je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$. Diferencijal $df$ je 1- forma na $A$, tj. linearna transformacija prostora $T_x\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}$, za svako $x \in A$.

**3.4.7 Definicija** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, i $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^r$. 1- formu $df$ na $A$ definišemo formulom*

$$df(x)(x, v) = f'(x, v) = Df(x) \cdot v,$$

*i zovemo je diferencijalom funkcije $f$. Ona je klase $C^{r-1}$.*

**3.4.8 Teorema** *Operator $d$ je linearan na 0- formama.*

**Dokaz.** Neka su $f, g : A \to \mathbb{R}$ 0- forme na $A$ klase $C^r$. Neka je $h = af + bg,\ a, b \in \mathbb{R}$. Tada je

$$Dh(x) = aDf(x) + bDg(x),$$

odakle sledi

$$dh(x)(x, v) = a\ df(x)(x, v) + b\ dg(x)(x, v).$$

Zato je $dh = a(df) + b(dg)$, što je i trebalo pokazati. □

Ako je $f$ 0- forma, onda je $df$ 1- forma, pa se može izraziti kao linearna kombinacija elementarnih 1- formi.

**3.4.9 Teorema** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, i $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^r$. Tada*

$$df = (D_1 f)dx_1 + \cdots + (D_n f)dx_n.$$

*Važi da je $df = 0$, ako je $f$ konstantna funkcija.*

U Leibnitzovoj notaciji, ova jednakost ima formu

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

**Dokaz.** Odredimo vrednost obe strane jednakosti u tangentnom vektoru $(x, v)$. Prema definiciji imamo

$$df(x)(x, v) = Df(x) \cdot v,$$

odakle je

$$\sum_{i=1}^{n} D_i f(x) dx_i(x)(x, v) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) v_i,$$

odakle sledi tvrđenje. □ U daljem izlaganju, pretpostavićemo da su sve forme klase $C^\infty$. Definisaćemo operator $d$ u opštem slučaju.

**3.4.10 Definicija** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, i neka je sa $\Omega^k(A)$ označen skup svih $k$- formi na $A$ (klase $C^\infty$). Suma takve dve $k$- forme je opet $k$- forma. Proizvod $k$- forme sa skalarom je takođe $k$- forma. Stoga $\Omega^k(A)$ zadovoljava aksiome vektorskog prostora, i zvaćemo ga linearnim prostorom $k$- formi na $A$.*

U sledećoj teoremi uvodimo diferencijalni operator forme. Dokazaćemo egzistenciju, jedinstvenost i prve dve osobine. Treća osobina se dokazuje direktno, i detaljno je pokazana u [9], pa stoga taj deo dokaza izostavljamo.

**3.4.11 Teorema** *Neka je $M$ mnogostrukost. Za svaki otvoren skup $A \subseteq M$ postoji jedinstvena linearna transformacija*

$$d : \Omega^k(A) \to \Omega^{k+1}(A),$$

*definisana za $k \geq 0$, tako da:*

1. *Ako je $f$ 0- forma, onda je $df$ 1- forma*

$$df(x)(x, v) = Df(x) \cdot v.$$

2. *Ako su $\omega$ i $\eta$ forme reda $k$ i $l$, respektivno, onda je*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. *Za svaku formu $\omega$ važi*

$$d(d\omega) = 0.$$

*$d$ nazivamo diferencijalnim operatorom, a $d\omega$ diferencijalom forme $\omega$.*

**Dokaz.** Dokažimo jedinstvenost. Prvo ćemo pokazati da uslovi (2) i (3) impliciraju da za proizvoljne forme $\omega_1, \ldots, \omega_k$, važi

$$d(d\omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_k) = 0.$$

Za $k = 1$, ova jednakost je posledica osobine (3). Pretpostavimo da je ona tačna za $k - 1$, i uzmimo $\eta = (d\omega_2 \wedge \cdots \wedge d\omega_k)$. Korišćenjem osobine (2) dobijamo

$$d(d\omega_1 \wedge \eta) = d(d\omega_1) \wedge \eta \pm d\omega_1 \wedge d\eta.$$

Tada se $d(d\omega_1)$ anulira zbog osobine (3), a $d\omega_1 \wedge d\eta = 0$ prema indukcijskoj hipotezi.

Sada pokažimo da je forma $d\omega$ u potpunosti određena vrednošću diferencijala $d$ u 0- formi, za bilo koju $k$- formu $\omega$ (što je precizirano u (1)). Kako je $d$ linearno, dovoljno je posmatrati slučaj $\omega = f\ dx_I$. Tada imamo

$$\begin{aligned} d\omega = d(f\ dx_I) &= d(f \wedge dx_I) \\ &= df \wedge dx_I + f \wedge d(dx_I), \quad \text{prema osobini (2)}, \\ &= df \wedge dx_I. \end{aligned}$$

Sada definišimo $d$. Njegova vrednost u 0- formi je precizirana u (1). Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, i $\omega$ je $k$- forma na $A$. Tada je

$$\omega = \sum_{[I]} f_I dx_I,$$

i definišemo

$$d\omega = \sum_{[I]} df_I \wedge dx_I.$$

Pokazaćemo da je $d\omega$ klase $C^\infty$. Važi

$$d\omega = \sum_{[I]} [\sum_{j=1}^{n} (D_j f) dx_j] \wedge dx_I.$$

Da bismo $d\omega$ izrazili kao linearnu kombinaciju elementarnih $k$- formi, prvo izuzmemo sve izraze za koje je $j$ jednak sa odgovarajućim indeksom $k$- torke $I$. Zatim u preostalim izrazima preraspodelimo diferencijale $dx_i$, tako da indeksi budu u rastućem poretku. Tako je svaka komponenta od $d\omega$ linearna kombinacija funkcija $D_j f$, pa je stoga klase $C^\infty$.

Pokažimo sada da je $d$ linearno za $k$- formu, pri čemu je $k > 0$. Neka $a, b \in \mathbb{R}$ i neka su

$$\omega = \sum_{[I]} f_I dx_I, \quad \eta = \sum_{[I]} g_I dx_I$$

$k$- forme. Tada

$$\begin{aligned} d(a\omega + b\eta) &= d\sum_{[I]}(af_I + bg_I)dx_I \\ &= \sum_{[I]} d(af_I + bg_I) \wedge dx_I, \quad \text{prema definiciji}, \\ &= \sum_{[I]}(a\ df_I + b\ dg_I) \wedge dx_I, \quad \text{jer je } d \text{ linearna } \ k-\text{forma}, \\ &= a\ d\omega + b\ d\eta. \end{aligned}$$

Sada pokažimo da, ako je $J$ proizvoljna $k$- torka elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$, onda je

$$d(f \wedge dx_J) = df \wedge dx_J.$$

Ako u $J$ postoje dva jednaka indeksa, slučaj je trivijalan jer je tada $dx_J = 0$. Stoga pretpostavimo da su svi indeksi u $J$ međusobno različiti. Neka je $I$ $k$- torka dobijena raspoređivanjem indeksa iz $J$ u rastući poredak. Neka je $\pi$ pomenuta permutacija. Zbog antikomutativnosti spoljašnjeg proizvoda, imamo $dx_I = (\mathrm{sgn}\pi)dx_J$. Kako je $d$ linearno, a spoljašnji proizvod homogen, iz formule $d(f \wedge dx_I) = df \wedge dx_I$ sledi

$$(\mathrm{sgn}\,\pi)d(f \wedge dx_J) = (\mathrm{sgn}\,\pi)df \wedge dx_J.$$

Sada ćemo proveriti osobinu (2) za $k = 0$ i $l = 0$. Važi

$$\begin{aligned} d(f \wedge g) &= \sum_{j=1}^{n} D_j(f \cdot g)dx_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}(D_j f) \cdot g\ dx_j + \sum_{j=1}^{n} f \cdot (D_j g)dx_j \\ &= (df) \wedge g + f \wedge (dg). \end{aligned}$$

Pokažimo sada osobinu (2) u opštem slučaju. Posmatrajmo prvo slučaj kada su obe forme pozitivnog reda. Kako su obe strane tražene jednakosti linearne po $\omega$ i $\eta$, dovoljno je posmatrati slučaj

$$\omega = f\ dx_I, \quad \eta = g\ dx_J.$$

Važi

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg\ dx_I \wedge dx_J) \\ &= d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge g + f \wedge dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g \wedge dx_J) + (-1)^k (f \wedge dx_I) \wedge dg \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Znak $(-1)^k$ je posledica činjenice da je $dx_I$ $k$-forma, a $dg$ je 1- forma. Konačno, dokaz u slučaju kada je $k$ ili $l$ jednako sa nulom sledi iz predhodnog računa. Ako je $k = 0$, izraz $dx_I$ iččezava iz prethodnih jednakosti, a ako je $l = 0$, iččezava izraz $dx_J$. □

Neka je $\alpha : A \to \mathbb{R}^n$ $C^\infty$ preslikavanje, gde je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$. Tada nas $\alpha$ dovodi do linearne transformacije $\alpha_*$, koja tangentni prostor od $\mathbb{R}^k$ u tački $x$ preslikava na tangentni prostor od $\mathbb{R}^n$ u tački $\alpha(x)$. Nadalje, znamo da bilo koja linearna transformacija $T : V \to W$ vektorskih prostora indukuje dualnu transformaciju $T^* : \mathcal{A}^l(W) \to \mathcal{A}^l(V)$ među alternativnim tenzorima.

**3.4.12 Definicija** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$, i neka je $\alpha : A \to \mathbb{R}^n$ klase $C^\infty$. Neka je, dalje, $B$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži $\alpha(A)$. Definišemo dualnu transformaciju formi*

$$\alpha^* : \Omega^l(B) \to \Omega^l(A)$$

*na sledeći način: za datu 0- formu $f : B \to \mathbb{R}$ na $B$, definišemo 0- formu $\alpha^* f$ na $A$ sa $\alpha^* f(x) = f(\alpha(x))$, za svako $x \in A$. Tada za datu $l$- formu $\omega$ na $B$, gde je $l > 0$, definišemo $l$- formu $\alpha^*\omega$ na $A$ sa*

$$\alpha^*\omega(x)((x, v_1), \ldots, (x, v_l)) = \omega(\alpha(x))(\alpha_*(x, v_1), \ldots, \alpha_*(x, v_l)).$$

Kako su $f, \omega, \alpha, D\alpha$ klase $C^\infty$, onda su i forme $\alpha^* f$ i $\alpha^*\omega$ klase $C^\infty$. Primetimo da, ako je $\alpha$ konstantno preslikavanje, onda je $\alpha^* f$ takođe konstantno, a $\alpha^*\omega$ je 0- tenzor.

**3.4.13 Teorema** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$, i neka je $\alpha : A \to \mathbb{R}^m$ klase $C^\infty$. Neka je $B$ otvoren skup u $\mathbb{R}^m$, i sadrži $\alpha(A)$ i neka je $\beta : B \to \mathbb{R}^n$ klase $C^\infty$. Neka su, dalje, $\omega, \eta, \theta$ forme definisane na otvorenom skupu $C$ u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži $\beta(B)$ i pretpostavimo da $\omega$ i $\eta$ imaju isti red. Tada:*

1. $\beta^*(a\omega + b\eta) = a(\beta^*\omega) + b(\beta^*\eta),\ a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\beta^*(\omega \wedge \theta) = \beta^*\omega \wedge \beta^*\eta$.
3. $(\beta \circ \alpha)^*\omega = \alpha^*(\beta^*\omega)$.

Prethodna teorema pokazuje da $\alpha^*$ očuvava strukturu vektorskog prostora i spoljašnji proizvod. Sada ćemo izvesti formulu za izračunavanje forme $\alpha^*\omega$. Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$, i $\alpha : A \to \mathbb{R}^n$. Formulu ćemo izvesti u dva slučaja, kada je $\omega$ 1- forma i kada je $\omega$ $k$- forma.

Kako je $\alpha^*$ linearno i očuvava spoljašnji proizvod, i kako je $\alpha^* f = f \circ \alpha$, dovoljno je odrediti $\alpha^*$ za elementarne 1- forme i elementarne $k$- forme.

**3.4.14 Teorema** *Neka je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}^k$, i neka je $\alpha : A \to \mathbb{R}^n$ klase $C^\infty$. Neka $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$. Tada $dx_i$ i $dy_i$ označavaju elementarne 1- forme na $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^n$, respektivno. Važi:*

1. $\alpha^*(dy_i) = d\alpha_i$.

2. *Ako je $I = (i_1, \ldots, i_k)$ rastuća $k$- torka elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$, onda je*
$$\alpha^*(dy_I) = (det\frac{\partial \alpha_I}{\partial x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,$$
*pri čemu je*
$$\frac{\partial \alpha_I}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}.$$

Dokaz prethodne teoreme čitalac može pronaći u [9].

# Glava 4

# Integralni račun na mnogostrukostima

Cilj ovog poglavlja je razvijanje teorije integracije na mnogostrukostima u $\mathbb{R}^n$. Videli smo u prethodnom poglavlju da $k$- forme predstavljaju generalizaciju skalarnih i vektorskih polja na $\mathbb{R}^n$. Definisaćemo integral $k$- forme na mnogostrukosti dimenzije $k$, čime ćemo uopštiti pojam linijskog i površinskog integrala sa $\mathbb{R}^3$, na prostor $\mathbb{R}^n$.

## 4.1 Integracija skalarnih funkcija na mnogostrukostima

U ovom odeljku ćemo definisati pojam integrala neprekidne skalarne funkcije $f$ na mnogostrukosti $X$ od $\mathbb{R}^n$, pri čemu ćemo se ograničiti na slučaj kada je $X$ kompaktna mnogostrukost.

**4.1.1 Definicija** *Ako je $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nosač preslikavanja $\phi$ definišemo kao zatvaranje skupa $\{x|\phi(x) \neq 0\}$, i označavamo ga sa $S(\phi)$.*

**4.1.2 Definicija** *Neka je X kompaktna mnogostrukost dimenzije k u $\mathbb{R}^n$ klase $C^r$. Neka je $f : X \to \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija. Neka je, dalje, sa S(f) označen kompaktni nosač funkcije f. Pretpostavimo da postoji lokalna parametrizacija $\alpha : U \to V$ mnogostrukosti X, gde je U otvoren skup u $\mathbb{R}^k$, a V je otvoren u X, tako da je $S(f) \subset V$. Tada je $\alpha^{-1}(S(f))$ kompaktan skup. Stoga, ako U zamenimo manjim otvorenim skupom (ukoliko je neophodno), možemo preptostaviti da je U ograničen skup. Integral funkcije f na X definišemo na sledeći način:*

$$\int_X f\ dV = \int_{\mathrm{Int}\, U} (f \circ \alpha) V(D\alpha),$$

*gde je unutrašnjost skupa U,* $\mathrm{Int}\, U = \mathrm{U}$ *ako je U otvoren u* $\mathbb{R}^n$.

**4.1.3 Teorema** *Ako je nosač funkcije f sadržan u jednoj lokalnoj parametrizaciji mnogostrukosti X, onda je integral* $\int_X f\,dV$ *dobro definisan i nezavisan od izbora karte.*

Dokaz date teoreme je izložen u [9].

Da bismo integral $\int_X f\,dV$ definisali u opštem slučaju, potrebna nam je particije jedinice na $X$.

**4.1.4 Lema** *Neka je X kompaktna mnogostrukost od* $\mathbb{R}^n$ *dimenzije k i klase* $C^r$. *Za dati pokrivač mnogostrukosti X sačinjen od lokalnih parametrizacija, postoji konačna familija* $C^\infty$ *funkcija* $\phi_1, \dots, \phi_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *takvih da*

1. $\phi_i(x) \geq 0,\ \forall x.$
2. *Za dato i, nosač* $S(\phi_i)$ *je kompaktan i postoji lokalna parametrizacija* $\alpha_i : U_i \to V_i$ *sadržana u pokrivaču, tako da je*
$$S(\phi_i) \cap X \subset V_i.$$
3. $\sum \phi_i(x) = 1,\ x \in X.$

*Skup* $\{\phi_1, \dots, \phi_l\}$ *se naziva particija jedinice na X podređena familiji lokalnih parametrizacija koje pokrivaju X.*

**4.1.5 Definicija** *Neka je X kompaktna mnogostrukost u* $\mathbb{R}^n$ *dimenzije k i klase* $C^r$. *Neka je* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Izaberimo particiju jedinice* $\{\phi_1, \dots, \phi_l\}$ *na X podređena familiji svih lokalnih parametrizacija mnogostrukosti X. Integral funkcije f na X definišemo na sledeći način:*

$$\int_X f\,dV = \sum_{i=1}^{l} [\int_X (\phi_i f) dV].$$

*Dalje definišemo k- dimenzionalnu zapreminu mnogostrukosti X jednakošću*

$$v(X) = \int_X 1\,dV.$$

Ako je nosač funkcije $f$ sadržan u jednoj parametrizaciji $\alpha : U \to V$, ova definicija je saglasna sa prethodnom definicijom. U tom slučaju, neka je $A = \operatorname{Int} U$. Tada

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} [\int_X (\phi_i f) dV] &= \sum_{i=1}^{l} [\int_A (\phi_i \circ \alpha)(f \circ \alpha) V(D\alpha)], \text{ prema definiciji} \\
&= \int_A [\sum_{i=1}^{l} (\phi_i \circ \alpha)(f \circ \alpha) V(D\alpha)], \text{ zbog linearnosti} \\
&= \int_A (f \circ \alpha) V(D\alpha), \text{ jer je } \sum_{i=1}^{l} (\phi_i \circ \alpha) = 1 \text{ na } A \\
&= \int_X f\,dV \text{ prema definiciji.}
\end{aligned}$$

Definicija je nezavisna od parametrizacije, što je pokazano u [9]. Sledi teorema o linearnosti integrala skalarne funkcije na mnogostrukosti.

**4.1.6 Teorema** *Neka je $X$ kompaktna mnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ dimenzije $k$ i klase $C^r$. Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ neprekidna preslikavanja i $a, b \in \mathbb{R}$. Tada*

$$\int_X (af + bg)\ dV = a \int_X f\ dV + b \int_X g\ dV.$$

## 4.2 Orijentabilnost

U ovom odeljku ćemo definisati integral $k$- forme $\omega$ na $k$- dimenzionalnoj mnogostrukosti. Prvo ćemo posmatrati slučaj kada je nosač forme $\omega$ sadržan u jednoj lokalnoj parametrizaciji $\alpha : U \to V$. Tada definišemo

$$\int_X \omega = \int_{\operatorname{Int} U} \alpha^* \omega.$$

Međutim, ovaj integral je invarijantan u odnosu na reparametrizaciju samo do na znak. Stoga, da bi integral $\int_X \omega$ bio dobro definisan, potreban nam je još jedan uslov na mnogostrukosti $X$, a taj uslov se naziva *orijentabilnost*.

**4.2.1 Definicija** *Neka je $g : A \to B$ difeomorfizam između otvorenih poskupova od $\mathbb{R}^k$. Kažemo da $g$ očuvava orijentaciju, ako je $Dg > 0$ na $A$. Ako je $Dg < 0$ na $A$, onda $g$ ne očuvava orijentaciju.*

Posmatrajmo linearnu transformaciju među tangentnim prostorima, indukovanu sa $g$,

$$g_* : T_x\mathbb{R}^k \to T_{g(x)}\mathbb{R}^k,$$

datu sa $g_*(x, v) = (g(x), Dg(x) \cdot v)$. Tada $g$ očuvava orijentaciju ako i samo ako za svako $x$, linearna transformacija na $\mathbb{R}^k$ čija matrica je $Dg$, očuvava orijentaciju u smislu prethodne definicije.

**4.2.2 Definicija** *Neka je $X$ mnogostrukost dimenzije $k$ u $\mathbb{R}^n$. Za date lokalne parametrizacije $\alpha_i : U_i \to V_i$ na $X$, gde $i = 0, 1$ kažemo da se preklapaju, ako je $V_0 \cap V_1$ neprazan skup. Dalje, kažemo da se pozitivno preklapaju, ako funkcija prelaza $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0$ očuvava orijentaciju. Ako se $X$ može prekriti familijom lokalnih parametrizacija, među kojima se svake dve pozitivno preklapaju (ukoliko se preklapaju), onda kažemo da je $X$ orijentabilna mnogostrukost. U suprotnom, $X$ se naziva neorijentabilna mnogostrukost.*

**4.2.3 Definicija** *Neka je $X$ orijentabilna mnogostrukost dimenzije $k$ u $\mathbb{R}^n$. Datoj familiji lokalnih parametrizacija koje se pozitivno preklapaju i koje pokrivaju $X$, pridružimo familiju svih drugih lokalnih parametrizacija od $X$ koje se pozitivno preklapaju sa datim parametrizacijama. Lako je primetiti da se svake dve parametrizacije ove proširene familije parametrizacija pozitivno preklapaju. Ova proširena kolekcija se naziva orijentacija mnogostrukosti $X$. Mnogostrukost $X$ zajedno sa orijentacijom se naziva orijentisana mnogostrukost.*

Neka je $r : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ preslikavanje dato sa

$$r(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (-x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Ono je samom sebi inverzno preslikavanje.

**4.2.4 Definicija** *Neka je $X$ orijentabilna mnogostrukost dimenzije $k$ u $\mathbb{R}^n$. Neka su $\alpha_i : U_i \to V_i$ lokalne parametrizacije od $X$ koje pripadaju orijentaciji mnogostrukosti $X$, i $\beta_i$ lokalna parametrizacija data sa $\beta_i = \alpha_i \circ r : r(U_i) \to V_i$. Tada se $\beta_i$ i $\alpha_i$ negativno preklapaju, pa $\beta$ ne pripada orijentaciji mnogostrukosti $X$. Sa druge strane, lokalne parametrizacije $\beta_i$ se međusobno pozitivno preklapaju, pa čine novu orijentaciju na $X$. Ona se naziva obrnuta ili suprotna orijentacijom na $X$.*

Vidimo, dakle, da svaka orijentabilna mnogostrukost ima barem dve orijentacije, datu orijentaciju i njoj suprotnu orijentaciju.

## 4.3 Mnogostrukosti sa rubom

Da bismo definisali mnogostrukost sa rubom, počećemo teoremom u kojoj posmatramo lokalne parametrizacije sa posebnom osobinom.

**4.3.1 Teorema** *Neka je $X$ mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije $k$ i klase $C^r$. Neka su $\alpha_0 : U_0 \to V_0$ i $\alpha_1 : U_1 \to V_1$ lolalne parametrizacije od $X$ za koje važi da je $W = V_0 \cap V_1$ neprazan skup. Neka je, dalje, $W_i = \alpha_i^{-1}(W)$, $i = 0, 1$. Tada je kompozicija $\alpha^{-1} \circ \alpha_0 : W_0 \to W_1$ klase $C^r$, i njen izvod je nesingularno preslikavanje.*

Dokaz prethodne teoreme je detaljno izložen u [9].

Označimo sa $H^k$ poluprostor od $\mathbb{R}^k$, koji se sastoji samo od onih tačaka $x \in \mathbb{R}^k$ za koje je $x_k \geq 0$. Označimo sa $H^k_+$ poluprostor od $\mathbb{R}^k$, koji se sastoji samo od onih tačaka $x \in \mathbb{R}^k$ za koje je $x_k > 0$.

**4.3.2 Definicija** *Neka je $X$ mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije $k$ i $p \in M$. Ako postoji lokalna parametrizacija $\alpha : U \to V$ od $X$ oko $p$, tako da je $U$ otvoren u $\mathbb{R}^k$, kažemo da je $p$ unutrašnja tačka mnogostrukosti $X$. U suprotnom, kažemo da je $p$ rubna tačka mnogostrukosti $X$. Skup svih rubnih tačaka mnogostrukosti $X$ označavamo sa $\partial X$, i nazivamo ga rubom mnogostrukosti $X$.*

**4.3.3 Lema** *Neka je $X$ mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije $k$ i $\alpha : U \to V$ lokalna parametrizacija oko tačke $p \in X$. Tada:*

1. *Ako je $U$ otvoren u $\mathbb{R}^k$, onda je $p$ unutrašnja tačka mnogostrukosti $X$.*
2. *Ako je $U$ otvoren u $H^k$ i $p = \alpha(x_0)$ gde $x_0 \in H^k_+$, onda je $p$ unutrašnja tačka mnogostrukosti $X$.*
3. *Ako je $U$ otvoren u $H^k$ i $p = \alpha(x_0)$ gde $x_0 \in \mathbb{R}^{k-1} \times 0$, onda je $p$ rubna tačka mnogostrukosti $X$.*

**Dokaz.** Osobina (1) sledi direktno iz definicije. Dokažimo (2). Neka je za datu lokalnu parametrizaciju $\alpha : U \to V$, $U_0 = U \cap H^k_+$ i $V_0 = \alpha(U_0)$. Tada je $\alpha|U_0 : U_0 \to V_0$ lokalna parametrizacija oko $p$, pri čemu je $U_0$ otvoren u $\mathbb{R}^k$.

Dokažimo (3). Neka je $\alpha|U_0 : U_0 \to V_0$ lokalna parametrizacija oko $p$, pri čemu je $U_0$ otvoren u $H^k$, i $p = \alpha(x_0)$ gde $x_0 \in R^{k-1} \times 0$. Pretpostavimo suprotno, da postoji lokalna parametrizacija $\alpha_1 : U_1 \to V_1$ oko $p$, tako da je $U_1$ otvoren u $\mathbb{R}^k$.

Kako su $V_0$ i $V_1$ otvoreni u X, skup $W = V_0 \cap V_1$ je takođe otvoren u X. Neka je $W_i = \alpha_i^{-1}(W)$, $i = 0, 1$. Tada je $W_0$ otvoren u $H^k$ i sadrži $x_0$, a $W_1$ je otvoren u $\mathbb{R}^k$. Iz prethodne teoreme imamo da je funkcija prelaza

$$\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1 : W_1 \to W_0$$

klase $C^r$, koja injektivno preslikava $W_1$ na $W_0$, i ima nesingularan izvod. Tada je slika ovog preslikavanja otvoren skup u $\mathbb{R}^k$. No, $W_0$ je sadržan u $H^k$ i sadrži tačku $x_0 \in \mathbb{R}^{k-1} \times 0$, pa stoga nije otvoren u $\mathbb{R}^k$. Kontradikcija. □

Primetimo da je $H^k$ mnogostrukost u $\mathbb{R}^k$ dimenzije $k$, a iz prethodne leme sledi da je $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1} \times 0$.

Poslednju teoremu u ovom odeljku navodimo bez dokaza (dokaz je izložen u [9]).

**4.3.4 Teorema** *Neka je X mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije k klase $C^r$. Ako je $\partial X$ neprazan skup, onda je $\partial X$ mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije $k-1$ klase $C^r$.*

## 4.4 Stoksova teorema i primene

Neka je sa $I^k$ označena jedinična $k$- kocka u $\mathbb{R}^k$,

$$I^k = [0,1]^k = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$$

Tada je Int$I^k$ otvorena kocka $(0,1)^k$, a rub Bd$I^k$ je skup $I^k - \text{Int}I^k$.

Dokaz sledeće leme je naveden u [9].

**4.4.1 Lema** *Neka je $k > 1$, i neka je $\eta$ $(k-1)$- forma definisana na otvorenom skupu $U$ u $\mathbb{R}^k$ koji sadrži jediničnu $k$- kocku $I^k$. Pretpostavimo da se $\eta$ anulira u svim tačkama skupa* Bd $I^k$, *osim eventualno u tačkama podskupa* $(\text{Int}\, I^{k-1}) \times 0$. *Tada*

$$\int_{\text{Int}\, I^k} d\eta = (-1)^k \int_{\text{Int}\, I^{k-1}} b^* \eta,$$

*gde je $b : I^{k-1} \to I^k$ preslikavanje dato sa*

$$b(u_1, \ldots, u_{k-1}) = (u_1, \ldots, u_{k-1}, 0).$$

**4.4.2 Teorema** *(Stokes- ova teorema) Neka je $k > 1$, i X kompaktna orijentisana mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije k. Orijentacija mnogostrukosti X indukuje* *orijentaciju ruba mnogostrukosti $\partial X$, ukoliko je $\partial X$ neprazan skup. Neka je $\omega$ $(k-1)$- forma definisana na otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$ koji sadrži X. Tada je*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega,$$

*ako je $\partial X$ neprazan skup, a $\int_X d\omega = 0$, ako je $\partial X$ prazan skup.*

**Dokaz.** Pretpostavimo prvo da $p \in X - \partial X$. Izaberimo lokalnu parametrizaciju $\alpha : U \to V$ koja pripada orijentaciji mnogostrukosti X, tako da je $U$ otvoren u $\mathbb{R}^k$ i sadrži jediničnu kocku $I^k$, tako da $\alpha$ preslikava tačku skupa $\operatorname{Int} I^k$ na tačku $p$. Neka je $W = \operatorname{Int} I^k$, i $Y = \alpha(W)$. Tada je $\alpha : W \to Y$ lokalna parametrizacija koja pripada orijentaciji mnogostrukosti X oko $p$, pri čemu je $W = \operatorname{Int} I^k$ otvoren u $\mathbb{R}^k$.

Sada uzmimo $p \in \partial X$. Izaberimo lokalnu parametrizaciju $\alpha : U \to V$ koja pripada orijentaciji mnogostrukosti X, tako da je $U$ otvoren u $H^k$ i $U$ sadrži $I^k$, i tako da $\alpha$ preslikava tačku skupa $(\operatorname{Int} I^{k-1}) \times 0$ na tačku $p$. Neka je

$$W = (\operatorname{Int} I^k) \cup ((\operatorname{Int} I^{k-1}) \times 0),$$

i $Y = \alpha(W)$. Tada je $\alpha : W \to Y$ lokalna parametrizacija koja pripada orijentaciji mnogostrukosti X oko $p$, pri čemu je $W$ otvoren u $H^k$, ali nije otvoren u $\mathbb{R}^k$. Primetimo da se preslikavanje $\alpha$ može proširiti, ukoliko je neophodno, do $C^\infty$ preslikavanja definisanog na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^k$ koji sadrži $I^k$.

Kako su operator $d$ i integrali linearni, dovoljno je dokazati teoremu u specijalnom sučaju za $(k-1)$- formu $\omega$, tako da skup

$$C = X \cap S(\omega)$$

može biti pokriven jednom lokalnom parametrizacijom $\alpha : W \to Y$. Kako je nosač od $d\omega$ sadržan u nosaču forme $\omega$, skup $X \cap S(d\omega)$ je sadržan u $C$, pa je pokriven istom lokalnom parametrizacijom.

Označimo sa $\eta$ formu $\alpha^*\omega$. Forma $\eta$ može biti, ukoliko je neophodno, proširena do $C^\infty$ forme na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^k$, koji sadrži $I^k$. Nadalje, $\eta$ se anulira u svim tačkama skupa $\operatorname{Bd} I^k$. Stoga su zadovoljene pretpostavke prethodne leme.

Dokažimo teoremu kada je skup $C$ pokriven lokalnom parametrizacijom $\alpha : W \to Y$, koja je konstruisana kao u prvom slučaju. Ovde su $W = \operatorname{Int} I^k$ i $Y$ razdvojeni od $\partial X$. Kako je $\alpha^* d\omega = d\alpha^*\omega = d\eta$, imamo

$$\int_X d\omega = \int_{\operatorname{Int} I^k} \alpha^* d\omega = \int_{\operatorname{Int} I^k} d\eta = (-1)^k \int_{\operatorname{Int} I^{k-1}} b^*\eta.$$

Ovde koristimo prethodnu lemu. U ovom slučaju, $\eta$ se anulira u tačkama van skupa $\operatorname{Int} I^k$. Posebno, $\eta$ se anulira na skupu $I^{k-1} \times 0$, pa je $b^*\eta = 0$. Tada je $\int_X d\omega = 0$.

Ako je $\partial M$ prazan skup, dokaz je završen. Ako je $\partial M$ neprazan skup, onda jednakost

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

važi trivijalno, jer je nosač forme $\omega$ razdvojen od $\partial M$, pa se integral od $\omega$ na $\partial M$ anulira.

Sada dokažimo teoremu u slučaju kada je $C$ pokriven lokalnom parametrizacijom $\alpha : W \to Y$, koja je konstruisana kao u drugom slučaju. Sada je $W$ otvoren u $H^k$, ali nije otvoren u $\mathbb{R}^k$, i $Y$ seče skup $\partial X$. Važi da je $W = \mathrm{Int}\, I^k$. Kao i u prethodnom slučaju, imamo

$$\int_X d\omega = \int_{\mathrm{Int}\, I^k} d\eta = (-1)^k \int_{\mathrm{Int}\, I^{k-1}} b^*\eta.$$

Sada odredimo integral $\int_{\partial X} \omega$. Skup $\partial X \cap S(\omega)$ je pokriven lokalnom parametrizacijom

$$\beta = \alpha \circ b : \mathrm{Int}\, I^{k-1} \to Y \cap \partial X$$

od $\partial X$. Sada $\beta$ pripada indukovanoj orijentaciji od $\partial X$, ako je $k$ paran broj, odnosno suprotnoj orijentaciji, ako je $k$ neparan broj. Da bismo iskoristili $\beta$ prilikom određivanja integrala forme $\omega$ na $\partial X$, moramo obrnuti znak integrala ako je $k$ neparan broj. Tada dobijamo

$$\int_{\partial X} \omega = (-1)^k \int_{\mathrm{Int}\, I^{k-1}} \beta^*\omega.$$

Kako je $\beta^*\omega = b^*(\alpha^*\omega) = b^*\eta$, teorema je dokazana. $\square$

**4.4.3 Definicija** *(Stokes- ova teorema za 1- mnogostrukosti) Neka je $X$ kompaktna orijentisana mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije 1. Orijentacija mnogostrukosti $X$ indukuje orijentaciju ruba mnogostrukosti $\partial X$, ukoliko je $\partial X$ neprazan skup. Neka je $f$ 0- forma definisana na otvorenom skupu od $\mathbb{R}^n$ koji sadrži $X$. Tada je*

$$\int_X df = \int_{\partial X} f,$$

*ako $\partial X$ nije prazan skup, a $\int_X df = 0$, ako je $\partial X$ prazan skup.*

Do sada smo pokazali da diferencijalne forme reda $k$ mogu biti interpretirane u $\mathbb{R}^n$ u određenim slučajevima kao skalarna ili vektorska polja. Sada ćemo pokazati da integrali formi mogu biti slično interpretirani.

**4.4.4 Lema** *Neka je $X$ kompaktna orijentisana mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije 1. Neka je $T$ jedinični tangentni vektor na $X$ koji odgovara orijentaciji. Neka je, dalje,*

$$F(x) = (x, f(x)) = (x, \sum f_i(x)e_i)$$

*vektorsko polje definisano na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži $X$. To vektorsko polje odgovara 1- formi*

$$\omega = \sum f_i \, dx_i.$$

*Tada je*

$$\int_X \omega = \int_X \langle F, T\rangle ds.$$

Koristimo oznaku $ds$ da bi teoreme koje slede bile što više usaglašene sa klasičnim teoremama integralnog računa.

**Dokaz.** Kako su integrali linearni po $\omega$ i $F$, dovoljno je lemu dokazati u slučaju kada je skup

$$C = X \cap S(\omega)$$

sadržan u lokalnoj parametrizaciji $\alpha : U \to V$, koja pripada orijentaciji mnogostrukosti X. Neka je $t \in \mathbb{R}$. Tada

$$\begin{aligned} \alpha^*\omega &= \sum_{i=1}^{n}(f_i \circ \alpha)\ d\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(f_i \circ \alpha)(D\alpha_i)\ dt \\ &= \langle f \circ \alpha, D\alpha\rangle\ dt. \end{aligned}$$

Sledi da je

$$\begin{aligned} \int_X \omega &= \int_{\mathrm{Int}\ U} \alpha^*\omega \\ &= \int_{\mathrm{Int}\ U} \langle f \circ \alpha, D\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} \int_X \langle F, T\rangle ds &= \int_{\mathrm{Int}\ U} \langle F \circ \alpha, T \circ \alpha\rangle \cdot V(D\alpha) \\ &= \int_{\mathrm{Int}\ U} \langle f \circ \alpha, \frac{D\alpha}{\|D\alpha\|}\rangle V(D\alpha) \\ &= \int_{\mathrm{Int}\ U} \langle f \circ \alpha, D\alpha\rangle, \end{aligned}$$

jer je $V(D\alpha) = [\det(D\alpha^{\mathrm{tr}} \cdot D\alpha)]^{\frac{1}{2}} = \|D\alpha\|$. □

**4.4.5 Definicija** *Kompaktna mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije 0 je konačan skup tačaka $\{x_1, \ldots, x_m\}$ iz $\mathbb{R}^n$. Definišemo orijentaciju od X kao funkciju $\epsilon : X \to \{-1, 1\}$. Ako je $f$ 0- forma definisana na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži X, definišemo integral od $f$ na orijentisanoj mnogostrukosti X,*

$$\int_X f = \sum_{i=1}^{m} \epsilon(x_i) f(x_i).$$

**4.4.6 Definicija** *Ako je X orijentisana mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije 1 sa nepraznim rubom, definišemo indukovanu orijentaciju na $\partial X$ sa $\epsilon(p) = -1,\ p \in \partial X$, ako postoji lokalna parametrizacija $\alpha : U \to V$ od X oko p koja pripada orijentaciji od X, gde je U otvoren u $H^1$. U suprotnom je $\epsilon(p) = +1$.*

Naredna teorema je posledica Stoksove teoreme za mnogostrukosti dimenzije 1, a dokaz je naveden u [9].

**4.4.7 Teorema** *Neka je $X$ kompaktna mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ dimenzije 1. Neka je $T$ jedinični tangentni vektor na $X$. Neka je, dalje, $f$ $C^\infty$ preslikavanje definisano na otvorenom skupu oko $X$. Ako je $\partial X$ prazan skup, onda je*

$$\int_X \langle grad\ f, T\rangle\ ds = 0.$$

*Ako se $\partial X$ sastoji od tačaka $x_1, \ldots, x_m$, neka je $\epsilon_i = -1$, ako je $T$ usmeren ka $X$ u $x_i$, a $\epsilon_i = -1$, u suprotnom. Tada*

$$\int_X \langle grad\ f, T\rangle\ ds = \sum_{i=1}^m \epsilon_i f(x_i).$$

**4.4.8 Primeri**

1. Neka je $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 1- forma u $\mathbb{R}^2$. Tada je prema 1.6.15
$$d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy.$$

2. Neka je $\omega = P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy$. Tada iz 1.6.15 sledi
$$d\omega = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz.$$

Primenom 4.4.2, na formu $\omega$ iz 1, dobijamo Green- ovu teoremu u ravni:

$$\int_{\partial M} Pdx + Qd_y = \int_M (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy.$$

Primenom 4.4.2, na formu $\omega$ iz 2, dobijamo Gauss- ovu teoremu divergencije u $\mathbb{R}^3$:

$$\int_M (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial M} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

# Zaključak

$k$ - dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ je definisana kao objekat u prostoru $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, koji je lokalno jednak sa prostorom $\mathbb{R}^k$. Stoga su tačke podmnogostrukosti opisane lokalno sa $k$ koordinata koje smo nazvali lokalnim koordinatama. Podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ je, dakle, apstrakcija pojma glatke površi euklidskog prostora. Korisna je jer postoje skupovi koji su glatki u određenom smislu, ali nisu okarakterisani kao podskupovi euklidskog prostora.

Definisanjem lokalnih karti, tangentnog prostora, tangentnog i vektorskog raslojenja i, konačno, diferencijalnih formi, podmnogostrukost smo snabdeli dovoljno bogatom strukturom, tako da se na njoj može razviti diferencijalni i integralni račun. Razvijanjem odgovarajućeg rigoroznog koncepta, pokazano je da su podmnogostrukosti geometrijski objekti, koji su lokalno dovoljno slični euklidskom prostoru, da bi se na njima izvodio diferencijalni i integralni račun. Konačan rezultat je generalizacija kalkulusa na višedimenzionalnim objektima u $\mathbb{R}^n$ koji su lokalno jednaki sa prostorom $\mathbb{R}^m$, $(m \leq n)$.

# Literatura


[1] O'Neil, B. *Elementary Differential Geometry* University of California, Los Angeles, USA 2006.

[2] Amann, H., Escher, J. *Analysis II* Birkhäuser Verlag, Switzerland, 1999.

[3] Perišić, D., Pilipović, S., Stojanović, M. *Funkcije više promenljivih; Diferencijalni i integralni račun* Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1997.

[4] Biquard, O. *Introduction To Differential Geometry* UPMC University of Paris, 2008.

[5] Kuzinger, M. *Differential Geometry 1* University of Vienna, 2008.

[6] Duistermaat, J.J., Kolk, J.A.C. *Multidimensional Real Analysis I- Differentitation* University of Cambrige, 2004.

[7] Duistermaat, J.J., Kolk, J.A.C. *Multidimensional Real Analysis II- Integration* University of Cambridge, 2004.

[8] Lubke, M. *Introduction To Manifolds* Leiden University, 2010.

[9] Munkres, J.R. *Analysis On Manifolds* Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1991.

[10] Stoll, M. Integration And Manifolds University of Bayreuth, Germany, 2007.

# Biografija

Zorica Janković rođena je 14. marta 1984. godine u Vukovaru. Osnovnu školu završila je u Čelarevu, te školovanje nastavila u gimnaziji "20. oktobar" u Bačkoj Palanci. Gimnaziju je završila sa prosekom ocena 5,00 i nosilac je Vukove diplome. Na Prirodno - matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu upisala se 2003. godine, smer Diplomirani matematičar - profesor matematike. Diplomirala je 2009. godine, sa prosečnom ocenom 8,71 i temom pod nazivom Snaga formalnih sistema, iz oblasti matematičke logike. Na master studije upisala se 2009. godine, modul Nastava matematike. Sve ispite je položila u predviđenom roku i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
**RBR**

Identifikacioni broj:
**IBR**

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
**TZ**

Vrsta rada: Master rad
**VR**

Autor: Zorica Janković
**AU**

Mentor: Docent dr Sanja Konjik
**MN**

Naslov rada: Diferencijalni i integralni račun na podmnogostrukostima od $\mathbb{R}^n$
**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)
**JP**

Jezik izvoda: s / e
**JI**

Zemlja publikovanja: Srbija
**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina
**UGP**

Godina:2014
**GO**

Izdavač: Autorski reprint
**IZ**

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
**MA**

Fizički opis rada: (4,71,10,0,0,0,0)

**FO**

Naučna oblast: Matematika
**NO**

Naučna disciplina: Diferencijalna geometrija
**ND**

Predmetna odrednica/Ključne reči: podmnogostrukost, diferencijalna forma, tangentni prostor, integral
**PO**

**UDK:**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
**ČU**

Važna napomena:
**VN**

Izvod:
**IZ**
Glavni cilj ovog rada je definisanje diferencijalnog i integralnog računa na k-dimenzionalnim podmnogostrukostima od $\mathbb{R}^n$, koje predstavljaju generalizaciju glatkih krivih i površi euklidskog prostora. Razvijanjem odgovarajućeg rigoroznog koncepta, pokazano je da su podmnogostrukosti geometrijski objekti, koji su lokalno dovoljno slični euklidskom prostoru, da bi se na njima izvodio diferencijalni i integralni račun. Konačan rezultat je generalizacija kalkulusa na višedimenzionalnim objektima u $\mathbb{R}^n$ koji su lokalno jednaki sa prostorom $\mathbb{R}^m$, $(m \leq n)$.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 6.9.2011.
**DP**

Datum odbrane:
**DO**

Članovi komisije:
**KO**

| | |
|---|---|
| Predsednik: | dr Dušanka Perišić, redovni profesor, Prirodno- matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |
| Član: | Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |
| Član: | dr Sanja Konjik, docent, Prirodno- matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor |

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
**ANO**

Identification number:
**INO**

Document type: Monographic type
**DT**

Type of record: Printed text
**TR**

Contents Code: Master thesis
**CC**

Author: Zorica Janković
**AU**

Mentor: Sanja Konjik, PhD
**MN**

Title: Diferential and integral calculus on submanifolds of $\mathbb{R}^n$
**TI**

Language of text: Serbian
**LT**

Language of abstract: Serbian/English
**LA**

Country of publication: Serbia
**CP**

Locality of publication: Vojvodina
**LP**

Publication year:2014.
**PY**

Publisher: Author's reprint
**PU**

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
**PP**

Physical description: (4,71,10,0,0,0,0)

**PD**

Scientific field: Mathematics
**SF**

Scientific discipline: Differential geometry
**SD**

Subject/Key words: submanifolds, differential forms, tangent space, integral
**SKW**

**UC:**

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
**HD**

Note:
**N**

Abstract:
**AB**

The main goal of this paper is how to define differential and integral calculus on k - dimensional submanifolds of $\mathbb{R}^n$, which represent generalisation of smooth curves and surfaces in Euclidean space. By developing propper rigorous concept, it is shown that it is possible to do differential and integral calculus on submanifolds. Therefore, the main result is generalization of calcuclus on higher dimensional objects in $\mathbb{R}^n$, which are locally equal to $\mathbb{R}^m$ $(m \leq n)$.

Accepted by the Scientific Board on: 6.9.2011.
**ASB**

Defended:
**DE**

Thesis defend board:
**DB**

| | |
|---|---|
| President: | Dr. Dušanka Perišić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad |
| Member: | Academic dr. Stevan Pilipović , full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, |
| Member: | Dr. Sanja Konjik, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor |