UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tamara Maksimović -Tot

TENZORSKA POLJA I DIFERENCIJALNE FORME NA GLATKIM MNOGOSTRUKOSTIMA

-master rad-

Mentor:

Docent dr Sanja Konjik

Novi Sad, 2012.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Predmet izučavanja ovog rada su tenzorska polja i diferencijalne forme na glatkim mnogostrukostima. Ovi pojmovi se prvo uvode i izučavaju na konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima, a zatim se proširuju na mnogostrukosti.

Ovaj rad ima dve glave. Prva glava je uvodna i posvećena je osnovnim pojmovima i tvrđenjima koja su neophodna za izučavanje tenzorskih polja i diferencijalnih formi na mnogostrukostima. Podsetićemo se pojma podmnogostrukosti u R^n, apstraktne mnogostrukosti, glatkog preslikavanja na mnogostrukostima, tangentnog prostora, tangentnog raslojenja i vektorskih polja. Drugi deo rada je posvećen tenzorima i diferencijalnim formama. Definisaćemo tenzore tipa $\binom{r}{s}$, a zatim tenzorsko raslojenje, tenzorska polja, kontrakcije, simetrične tenzore, Rimanovu metriku, spoljašnji proizvod, Grasmanovu algebru, pullback i push-forward preslikavanja i ispitivati njihove osobine i međusobne veze. Na samom kraju ćemo dokazati Stoksovu teoremu, koja predstavlja generalizaciju osnovnih teorema kalkulusa (Grinove, Gausove i Stoksove teoreme).

Ovom prilikom se zahvaljujem svom mužu Edvardu, roditeljima Miloju i Zdenki i sestri Danijeli na nesebičnoj podršci ne samo tokom pisanja ovog rada, nego i u životu. Ogromnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Sanji Konjik na korisnim sugestijama, primedbama i savetima, a pre svega na strpljenju.

Novi Sad, *januar 2012.* *Tamara Maksimović-Tot*

Glava 1

DIFERENCIJABILNE MNOGOSTRUKOSTI

Jedan od najvažnijih pojmova moderne matematike je pojam diferencijabilne mnogostrukosti. Primeri mnogostrukosti se mogu naći u analizi, teoriji Lijevih grupa, diferencijalnoj geometriji, ODJ i PDJ, kao i u mnogim granama fizike, npr. u klasičnoj mehanici, opštoj relativnosti i Jang-Milsovoj teoriji[1]. U ovoj glavi, upoznaćemo se sa osnovnim definicijama i teoremama o podmnogostrukostima u R^n, apstraktnim mnogostrukostima, particiji jedinice, tangentnom prostoru, tangentnim raslojenjima i vektorskog polja. Teoreme ćemo dati bez dokaza, za više detalja pogledati [1], [2], [3], [4], [5], [6], i [7], slike su preuzete iz [6].

1.1 PODMNOGOSTRUKOSTI U R^n

Pre same definicije k-dimenzionalne podmnogostrukosti uvešćemo pojam regularnog preslikavanja.

1.1.1 Definicija

Neka je skup $U \subset R^k$ otvoren i $\varphi: U \longrightarrow R^n$ glatko preslikavanje (ili C^∞). Preslikavanje φ se naziva *regularno preslikavanje* ako je za sve $x \in U$ rang Jakobiana $D\varphi(x)$ maksimalan, tj. jednak $min\{k, n\}$. Tada za rang $rk(D\varphi)$ od $D\varphi$ (takođe se naziva i rang preslikavanja φ) imamo:

$$rk\big(D\varphi(x)\big) = \dim Im\,(D\varphi(x)) = \dim(R^k) - \dim(\ker D\varphi(x)).$$

Ako je $k \leq n$, onda je $\ker D\varphi(x) = \{0\}$ i $D\varphi(x)$ je injektivno za sve x. U tom slučaju, φ se naziva *imerzija*. Za $k \geq n$, $D\varphi(x)$ je sirjektivno za sve x i φ se naziva *submerzija*. ■

1.1.2 Definicija

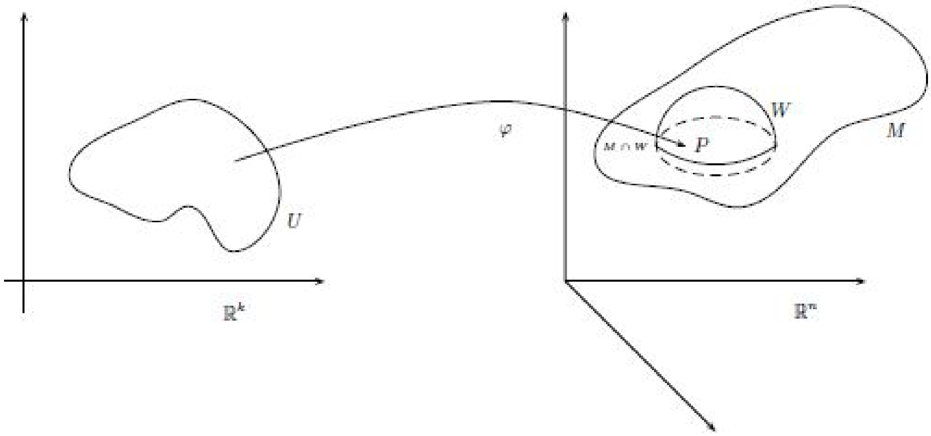
Podskup M od R^n se naziva *k-dimenzionalna podmnogostrukost* od R^n $(k \leq n)$ ako:

(P) Za svako $p \in M$ postoji otvorena okolina W od p u R^n, otvoren podskup U od R^k i imerzija $\varphi: U \longrightarrow R^n$ takvi da je $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U)$ homeomorfizam i $\varphi(U) = M \cap W$.

Preslikavanje φ se naziva *lokalna parametrizacija* od M. (Slika 1.)■

Dakle, φ je regularno preslikavanje koje identifikuje U i $\varphi(U) = M \cap W$ topološki ($\varphi(U) = M \cap W$ ima indukovanu topologiju od R^n).

[1] Yang-Mills teorija nosi naziv po Chen Ning Yang i Robert Mills

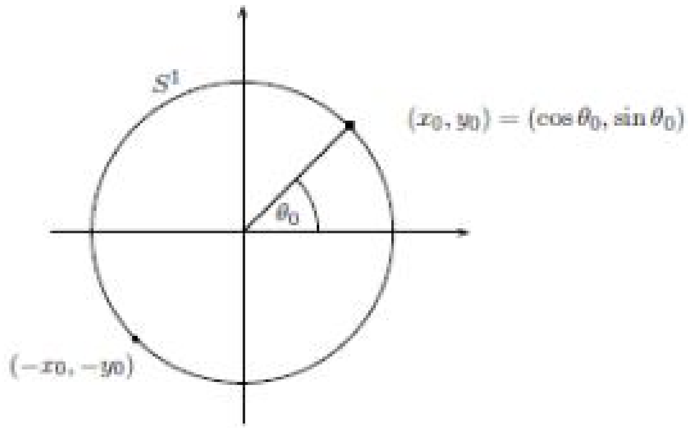


Slika 1.

1.1.3 Primer

1. Jedinična kružnica S^1.

Neka je $\varphi\colon \theta \longrightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$. Tada za svako $(x_0, y_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, $\varphi\colon (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) \longrightarrow R^2$ je parametrizacija od S^1 oko (x_0, y_0). Za W se može uzeti, recimo, $R^2 \setminus \{(-x_0, -y_0)\}$. Dakle, S^1 je $1-$dimenzionalna podmnogostrukost od R^2. Primetimo i da ne postoji jedna parametrizacija za celu kružnicu S^1 (ne postoji homeomorfizam otvorenog podskupa od R na S^1 pošto je S^1 kompaktan skup) (Slika 2.).



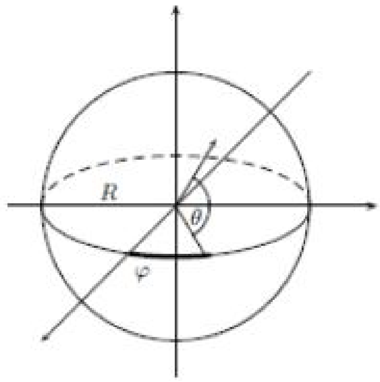
Slika 2.

2. Jedinična sfera S^2 u R^3.

Neka je $\varphi(\phi, \theta) = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$. Tada je

$$D\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

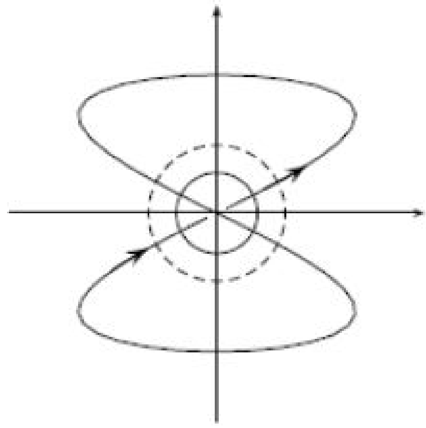
φ je parametrizacija od S^2 npr. na $(0,2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Na ovom domenu φ je injektivna i $rk\big(D\varphi(x)\big) = 2$, pošto je $\cos\theta \neq 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ponovo, potrebno je više od jedne parametrizacije da bi se prekrila sfera S^2(Slika 3.)



Slika 3.

3. Mnogostrukost figura osam.

Neka je $M \coloneqq \{(\sin 2s, \sin s) \mid s \in (0,2\pi)\}$. Preslikavanje $\varphi: s \longrightarrow (\sin 2s, \sin s)$ je injektivna imerzija. Zaista, $D\varphi(s) = \varphi'(s) = (2\cos 2s, \cos s) \neq (0,0)$ na $(0,2\pi)$ (Slika 4.).



Slika 4.

Ipak, M nije podmnogostrukost od R^2 !!!

Pretpostavimo da postoji parametrizacija $\Psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B_{1/2}(0,0)$ od M oko $p = (0,0)$ takva da je $\Psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B_{1/2}(0,0) \cap M$ homeomorfizam. Tada, kako $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ ima 2 povezane komponente, a $\left(M \cap B_{\frac{1}{2}}(0,0)\right) \setminus (0,0)$ ima četiri, dolazimo do kontradikcije (Slika 5.).■

Slika 5.

Podmnogostrukosti od R^n se mogu opisati na još tri načina, ovo pokazuje sledeće tvrđenje.

1.1.4 Teorema

Neka je $M \subseteq R^n$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(P) (*Lokalna parametrizacija*) M je $k-$ dimenzionalna podmnogostrukost od R^n.

(Z) (*Lokalno nula skup*) Za svako $p \in M$ postoje otvorena okolina W od p u R^n i regularno preslikavanje $f: W \longrightarrow R^{n-k}$ (tj. $rk\, Df(q) = n-k,\ \ \forall q \in W$) tako da važi.

$$M \cap W = f^{-1}(0) = \{x \in W | f(x) = 0\}.$$

(G) (*Lokalno grafik*) Za svako $p \in M$ postoje (nakon prenumerisanja koordinata ako je potrebno) otvorena okolina $U' \subseteq R^k$ od $p' \coloneqq (p_1, \dots, p_k)$ i otvorena okolina $U'' \subseteq R^{n-k}$ od $p'' \coloneqq (p_{k+1}, \dots, p_n)$ i postoji $C^\infty -$preslikavanje $g: U' \longrightarrow U''$ takvo da je.

$$M \cap (U' \cap U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'', x'' = g(x')\} = graph(g).$$

(T) (*Lokalna trivijalizacija*) Za svako $p \in M$ postoje otvorena okolina W od p u R^n, otvoren skup W' u $R^n \cong R^k \times R^{n-k}$ i difeomorfizam $\Psi: W \longrightarrow W'$ tako da važi.

$$\Psi(\mathrm{M} \cap \mathrm{W}) = W' \cap (R^k \times \{0\}) \subseteq R^k \times \{0\} \cong R^k. \blacksquare$$

1.1.5 Primer

1. Kružnica u R^2.

- Nula skup lokalno:
  $W \coloneqq R^2 \setminus \{(0,0)\},\ \ f: W \longrightarrow R,\ \ f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2,\ S^1 \cap W = f^{-1}(0).$
- Grafik lokalno: $S^1 \cap (U' \times U'') = graph(g),\ \ g: x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$.
- Lokalna trivijalizacija: $\Psi: (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mapsto (\varphi, r-R)$. Tada imamo (lokalno) $\psi \coloneqq \Psi|_{W \cap S^1} = (Rcos\,\varphi, R\sin\varphi) \mapsto (\varphi, 0)$, W je odgovarajuća okolina.

2. Sfera u R^3.

- Nula skup lokalno: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- Grafik lokalno: $(x,y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
- Lokalna trivijalizacija: inverzne sferne koordinate sa fiksnim poluprečnikom.■

Za podmnogostrukosti $M \subseteq R^m$ i $N \subseteq R^n$ preslikavanje $f: M \longrightarrow N$ se naziva *glatko* (ili C^∞) ako za svako $p \in M$ postoje otvorena okolina U_p od p u R^m i glatko preslikavanje $\tilde{f}: U_p \longrightarrow R^n$ za koje važi

$$\tilde{f}|_{M \cap U_p} = f|_{M \cap U_p}.$$

Ako je f bijekcija, a f i f^{-1} glatka preslikavanja, tada se f naziva *difeomorfizam*.

Nije teško proveriti da je kompozicija glatkih preslikavanja glatko preslikavanje.

Karte k −dimenzionalnih podmnogostrukosti M od R^n se definišu na sledeći način: *Karta* (ψ, V) od M je difeomorfizam $\psi: V \longrightarrow U$, gde je $V \subseteq M$ otvoren skup i U otvoren podskup od R^k. Karte su inverzna preslikavanja lokalnih parametrizacija.

Ako je M k −dimenzionalna podmnogostrukost od R^n i (ψ, V) karta, tada za $p \in V$ možemo pisati:

$$\psi(p) = \big(\psi_1(p), \dots, \psi_k(p)\big) = (x_1, \dots, x_k).$$

Glatke funkcije $\psi_i = pr_i \circ \psi$ se nazivaju *lokalne koordinatne funkcije*, a x_i se nazivaju *lokalne koordinate* od p.

Neka su M^m i N^n podmnogostrukosti, $f: M \longrightarrow N,\ p \in M,\ \varphi$ karta od M oko p i ψ karta od N oko $f(p)$. Tada se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ naziva *lokalna reprezentacija funkcije* f. Imamo

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\psi_1\left(f\big(\varphi^{-1}(p)\big)\right), \dots, \psi_n\left(f\big(\varphi^{-1}(p)\big)\right)\right) =: \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big).$$

Funkcije f_i se nazivaju *koordinatne funkcije* od f u odnosu na karte φ i ψ.

Korišćenjem karti, glatkost preslikavanja između podmnogostrukosti može biti karakterisana bez korišćenja Euklidskog prostora u kojem se podmnogostrukost nalazi:

1.1.6 Propozicija

Neka su $M^m \subseteq R^s$ i $N^n \subseteq R^t$ podmnogostrukosti i $f: M \longrightarrow N$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

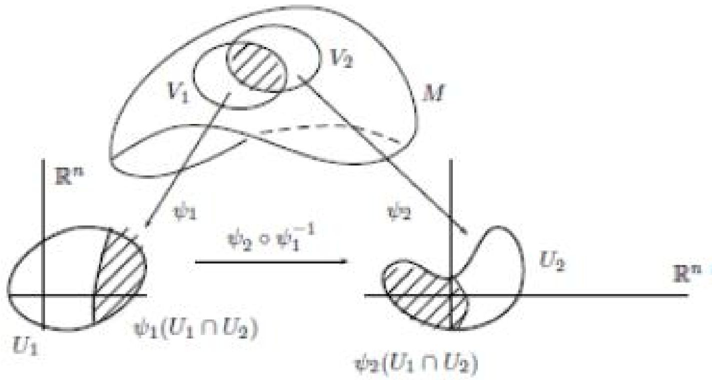
1. f je glatka funkcija.
2. Za svako $p \in M$ postoje karte (φ, U) od M oko p i (ψ, V) od N oko $f(p)$ tako da je domen $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ lokalne reprezentacije $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ otvoren i
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V) \text{ je glatko.}$$
3. f je neprekidno i za svako $p \in M$ postoji karta (φ, U) od M oko p i postoji karta (ψ, V) od N oko $f(p)$ tako da je lokalna reprezentacija $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$ glatka.
4. f je neprekidno i za svako $p \in M$, i za svaku kartu (φ, U) od M oko p, i za svaku kartu (ψ, V) od N oko $f(p)$, lokalna reprezentacija $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$ je glatka.■

1.2 APSTRAKTNE MNOGOSTRUKOSTI

Apstraktne mnogostrukosti su, grubo govoreći, objekti koji su lokalno difeomorfni sa R^n, ali čija je globalna struktura različita i kompleksnija od R^n. One uopštavaju pojam podmnogostrukosti od R^n, tj. generalizacija pojma podmnogostrukosti od R^n biće realizovana pomoću karti koje smo uveli u prethodnom poglavlju.

1.2.1 Definicija

Neka je M skup. Karta (ψ, V) od M je bijekcija ψ iz $V \subseteq M$ na otvoren podskup $U \subseteq R^n$, $\psi: V \longrightarrow U$. Dve karte $(\psi_1, V_1), (\psi_2, V_2)$ su $(C^\infty-)$ *kompatibilne* ako su $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ i $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ otvoreni u R^n i promena karti $\psi_2 \circ {\psi_1}^{-1}: \psi_1(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \psi_2(V_1 \cap V_2)$ je C^∞ $-$difeomorfizam (Slika 6.).



Slika 6.

C^∞ $-$*atlas* od M je familija $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ po parovima kompatibilnih karti takva da je $M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Dva atlasa $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ su *ekvivalentna* ako je njihova unija ponovo atlas od M, tj. ako su sve karte iz $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ kompatibilne. *Apstraktna mnogostrukost* je skup M zajedno sa klasom ekvivalencije atlasa. Takva struktura se naziva *diferencijabilna* ili C^∞ $-$*struktura* na M. ■

1.2.2 Primer

1. Neka je $U \subseteq R^n$ otvoren skup, tada je U mnogostrukost sa atlasom $\mathcal{A} = \{(id_U, U)\}$. Kao posledicu imamo da je svaki prostor R^n glatka mnogostrukost.
2. Neka je $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq R^2$. Definišimo:

$$V_1 = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid 0 < \varphi < 2\pi\}$$

$$\psi_1: V_1 \longrightarrow (0, 2\pi), \qquad (\cos\varphi, \sin\varphi) \longmapsto \varphi$$

$$V_2 = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid 0 < \varphi < 2\pi\}$$

$$\psi_2: V_2 \longrightarrow (-\pi, \pi), \qquad (\cos\varphi, \sin\varphi) \longmapsto \varphi.$$

Tada su (ψ_1, V_1) i (ψ_2, V_2) karte od S^1 i $S^1 = V_1 \cup V_2$. Pokazaćemo da su ψ_1 i ψ_2 kompatibilne. Prvo, $\psi_1(V_1 \cap V_2) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, $\psi_2(V_1 \cap V_2) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Dalje imamo

$$\psi_2 \circ {\psi_1}^{-1}|_{(0,\pi)} = \varphi \longmapsto \varphi$$

$$\psi_2 \circ {\psi_1}^{-1}|_{(\pi,2\pi)} = \varphi \longmapsto \varphi - 2\pi.$$

Sledi da je promena karti $\psi_2 \circ {\psi_1}^{-1}: \psi_1(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \psi_2(V_1 \cap V_2)$ difeomorfizam. Dakle, $\mathcal{A} = \{(\psi_1, V_1), (\psi_2, V_2)\}$ je atlas od S^1.

3. Neka je $M = \{(\sin 2s, \sin s) \mid s \in R\}$ figura osam. Neka je

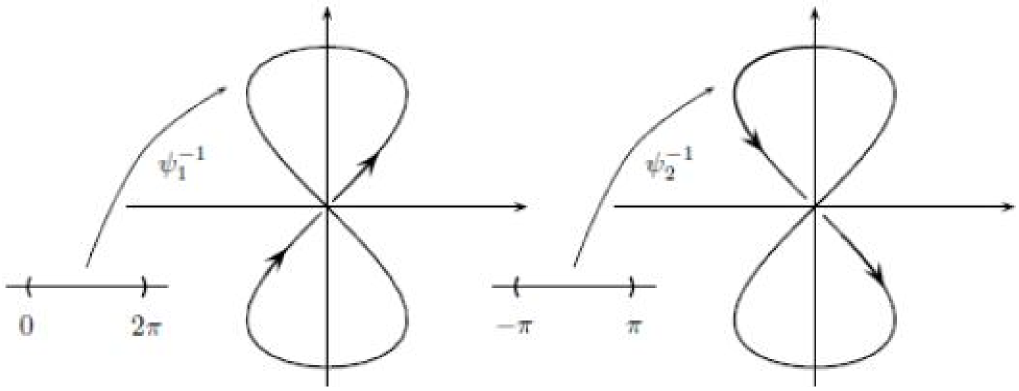
$$V_1 = M, \;\; \psi_1: V_1 \longrightarrow (0,2\pi), \qquad \psi_1(\sin 2s, \sin s) = s.$$

Tada je ψ_1 karta, a $\mathcal{A}_1 := \{(\psi_1, V_1)\}$ atlas koji definiše C^∞ −strukturu na M.

Sa druge strane, neka je:

$$V_2 = M, \;\; \psi_2: V_2 \longrightarrow (-\pi,\pi), \qquad \psi_2(\sin 2s, \sin s) = s.$$

Tada je i $\mathcal{A}_2 := \{(\psi_2, V_2)\}$ atlas (Slika 8.).



Slika 8.

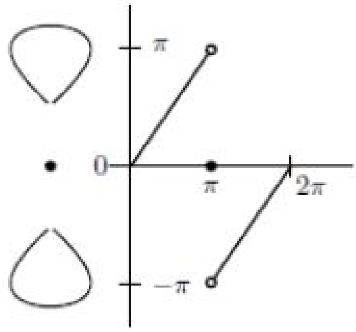
Ipak, $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ nisu ekvivalentni:

$$\psi_2 \circ {\psi_1}^{-1}: (0,2\pi) \longrightarrow (-\pi,\pi)$$

$$s \longmapsto \begin{cases} s, & 0 < s < \pi \qquad (gornja\ petlja) \\ s - \pi, & s = \pi \qquad (koordinatni\ početak) \\ s - 2\pi, & \pi < s < 2\pi \qquad (donja\ petlja) \end{cases}$$

Dakle, $\psi_2 \circ {\psi_1}^{-1}$ nije neprekidno preslikavanje (Slika 9.). Iz prethodnog imamo da M može biti snabdeveno sa različitim C^∞ −strukturama. Sa svakom od tih struktura, M je primer C^∞ −mnogostrukosti koja nije podmnogostrukost od R^n. ■

.



Slika 9.

Za glatku mnogostrukost M sa atlasom $\mathcal{A}$, postoji jedinstven maksimalan atlas (to je atlas koji nije sadržan u nekom većem atlasu) na M koji sadrži $\mathcal{A}$.

U nastavku ćemo pod kartom glatke mnogostrukosti M podrazumevati elemenat maksimalnog atlasa od M. Sledeći korak je da glatku mnogostrukost M snabdemo prirodnom topologijom indukovanom kartama od M. Ako je M mnogostrukost sa maksimalnim atlasom $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid_\alpha \alpha \in A\}$, onda je $B \coloneqq \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ baza topologije koja se naziva *prirodna* ili *topologija mnogostrukosti* M.

Topologija mnogostrukosti uvek zadovoljava aksiomu separacije T_1 i prvu aksiomu prebrojivosti, ali u opštem slučaju nije T_2 i ne važi druga aksioma prebrojivosti. U nastavku ćemo izučavati samo one glatke mnogostrukosti koje jesu Hauzdorfove (tj. zadovoljavaju aksiomu separacije T_2) i koje zadovoljavaju drugu aksiomu prebrojivosti.

S obzirom na topologiju mnogostrukosti od M, svaka karta (ψ, V) je homeomorfizam otvorenog skupa V od M na otvoren podskup $\psi(V)$ od R^n.

1.2.3 Definicija

Neka su M i N C^∞ −mnogostrukosti i $f: M \longrightarrow N$ preslikavanje. f se naziva glatko ako je neprekidno i za svako $p \in M$ postoje karta φ od M oko p i karta ψ od N oko $f(p)$ takve da je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatko. f se naziva difeomorfizam ako je bijekcija i ako su i f i f^{-1} glatka preslikavanja. ■

Lako se pokazuje da definicija ne zavisi od izbora karti i da je kompozicija glatkih preslikavanja glatko.

1.3 PARTICIJA JEDINICE

U diferencijalnoj geometriji i analizi na mnogostrukostima često se pojavljuju problemi koji mogu biti rešeni lokalno (u karti). Da bi se dobila globalna tvrđenja, potrebno je spojiti ove lokalne konstrukcije. Za to će od velike koristi biti *particija jedinice*.

1.3.1 Definicija

Neka je M mnogostrukost.

- *Nosač* preslikavanja $f: M \longrightarrow R$ se definiše
$$supp\ (f) := \{p \in M | f(p) \neq 0\}.$$
- Familija $\mathcal{V}$ podskupova od M se naziva *lokalno konačna* ako svaka tačka $p \in M$ ima okolinu koja seče samo konačno mnogo skupova $V \in \mathcal{V}$.
- Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od M. *Particija jedinice* koja odgovara pokrivaču U je familija $\{\chi_\alpha | \alpha \in A\}$ glatkih preslikavanja $\chi_\alpha: M \longrightarrow R^+$ za koje važi:
  1. Familija nosača $\{supp\ \chi_\alpha | \alpha \in A\}$ je lokalno konačna.
  2. $\forall\, \alpha \in A$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da $supp\ (\chi_\alpha) \subseteq U$.
  3. $\forall\, p \in M :\ \sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha(p) = 1.$ ■

Primetimo da iz 1. sledi da je suma u 3. konačna za svako $p \in M$.

1.3.2 Teorema

Neka je M Hausdorfova mnogostrukost koja zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Tada za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od M postoji particija jedinice $\{\chi_j |\ j \in N\}$ koja odgovara pokrivaču $\mathcal{U}$ takva da je za sve $j \in N$, $supp\ \chi_j$ kompaktan skup i sadržan u karti. ■

1.3.3 Posledica

Neka je M Hausdorfova mnogostrukost koja zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti i $\mathcal{U} = \{U_\propto | \alpha \in A\}$ otvoren pokrivač od M. Tada postoji particija jedinice $\{\chi_\alpha | \alpha \in A\}$ sa osobinom $supp\ \chi_\alpha \subseteq U_\propto, \forall\, \alpha \in A$. ($\chi_\alpha$ neće imati kompaktan nosač u opštem slučaju). ■

1.4 DIFERENCIRANJE. TANGENTNI PROSTOR

U prethodnim poglavljima smo definisali glatka preslikavanja između mnogostrukosti, ali nismo definisali izvod glatkog preslikavanja. U R^n, izvod preslikavanja je njegova najbolja linearna aproksimacija, što ima smisla samo u vektroskim prostorima, ali mnogostrukosti nemaju strukturu vektorskog prostora u opštem slučaju. Prema tome, diferenciranje na mnogostrukostima ćemo posmatrati kao proces aproksimacije u dva koraka: prvo, u bilo kojoj tački mnogostrukost se aproksimira vektorskim prostorom (tangentnim prostorom, koji odgovara tangentnoj ravni na površ). Zatim se izvod definiše kao linearno preslikavanje na tim tangentnim prostorima.

Pre svega definišimo regularnu parametrizovanu krivu.

Regularna parametrizovana kriva je neprekidno diferencijabilno preslikavanje $c: I \longrightarrow R^n$, definisano na nekom intervalu $I \subseteq R$ sa

$$\dot{c}(t) \equiv \frac{dc}{dt}(t) \neq 0, \qquad \forall t \in I.$$

1.4.1 Teorema

Neka je M podmnogostrukost od R^n i $p \in M.$ Tada se sledeći podskupovi od R^n poklapaju:

1. $imD\varphi(0)$, gde je φ lokalna parametrizacija od M i $\varphi(0) = p$.
2. $\{c'(0)|\ c: I \longrightarrow M\ \ C^\infty,\ I \subseteq R,\ c(0) = p\}$
3. $kerDf(p)$, gde je, lokalno oko p, M nula skup regularnog preslikavanja
$$f: R^n \longrightarrow R^{n-k} \quad (k = \dim M).$$
4. $graph\left(Dg(p')\right)$, gde je lokalno oko p, M je grafik glatke funkcije g i $p = \left(p', g(p')\right)$. ■

1.4.2 Definicija

Neka je M mnogostrukost od R^n i $p \in M$. Linearni potprostor od R^n karakterisan u 1.4.1 naziva se *tangentni prostor* od M u p i označava sa T_pM $\left(\dim T_pM = k = \dim M\right)$. Elementi prostora T_pM se nazivaju *tangentni vektori* od M u p. Ako je N podmnogostrukost od R^n i $f: M \longrightarrow N$ glatko preslikavanje, tada neka je

$$T_pf: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

$$c'(0) \longmapsto (f \circ c)'(0)$$

T_pf se naziva *tangentno preslikavanje* preslikavanja f u tački p. ■

Preslikavanje T_pf je dobro definisano: neka su $c_1, c_1: I \longrightarrow M,$ dve krive koje prolaze kroz p, tj. $c_1(0) = p = c_2(0)$, za koje je $c_1{}'(0) = c_2{}'(0)$. Kako je f glatko, sledi da lokalno oko p postoji glatka funkcija $\tilde{f}: U \longrightarrow R^{n'},\ U \subseteq R^n$ otvoren, tako da važi $\tilde{f}|_{U\cap M} = f|_{U\cap M}$.

Tada je

$$\tilde{f} \circ c_i = f \circ c_i,\ i = 1,2,$$

pa je

$$(f \circ c_1)'(0) = \left(\tilde{f} \circ c_1\right)'(0) = D\tilde{f}(p) \cdot c_1'(0) = \ D\tilde{f}(p) \cdot c_2'(0) = \cdots = (f \circ c_2)'(0).$$

Šta više, imamo da je $T_p f\left(c'(0)\right) = D\tilde{f}(p)c'(0)$, pa je $T_p f$ linearno preslikavanje.

1.4.3 Lema

Neka su M, N, P podmnogostrukosti, $f: M \longrightarrow N,\ g: N \longrightarrow P\quad C^\infty$ i neka je $p \in M$. Tada važi:

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f. \blacksquare$$

Želimo proširiti pojam tangentnog prostora i na apstraktne mnogostrukosti. Primetimo da za apstraktnu mnogostrukost M i $c: I \longrightarrow M$ glatku krivu na M, izvod $c'(0)$ trenutno nema smisla zbog nedostatka Euklidskog prostora koji okružuje M. Zato ćemo posmatrati karte:

1.4.4 Definicija

Neka je M mnogostrukost, $p \in M$ i (ψ, V) karta oko p. Dve glatke krive $c_1, c_1: I \longrightarrow M$ koje prolaze kroz p (tj. $c_1(0) = p = c_2(0)$) nazivaju se *tangente* u p s obzirom na kartu ψ ako je

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0). \blacksquare$$

Gore navedena definicija je dobra, tj. tangentnost krivih u tački ne zavisi od izbora karte ψ.

Na prostoru krivih koje prolaze kroz p definišemo *relaciju ekvivalencije*: $c_1 \sim c_2$ ako i samo ako je c_1 tangentno na c_2 u p s obzirom na jednu (pa onda i svaku) kartu oko p. Za krivu $c: I \longrightarrow M$, $c(0) = p$ označimo sa $[c]_p$ klasu ekvivalencije kojoj pripada c s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$. Tada se $[c]_p$ naziva *tangentni vektor* u p.

1.4.5 Definicija

Tangentni prostor mnogostrukosti M u $p \in M$ je $T_p M = \left\{[c]_p \mid c: I \longrightarrow M\ C^\infty,\ I \subseteq R, c(0) = p\right\}. \blacksquare$

Primetimo, gore navedena definicija se u slučaju podmnogostrukosti od R^n svodi na 1.4.2, jer je u tom slučaju preslikavanje $c'(0) \longleftrightarrow [c]_p$ bijekcija između „starog" i „novog" tangentnog prostora. Naime,

$$[c_1]_p = [c_2]_p \Rightarrow (\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0),$$

to je u stvari jednako

$$D\,\psi(p) c_1{}'(0) = D\,\psi(p) c_2{}'(0) \Rightarrow c_1{}'(0) = c_2{}'(0),$$

pa je preslikavanje $c'(0) \longrightarrow [c]_p$ injekcija. Očigledno je i sirjekcija.

1.4.6 Definicija

Neka su M i N mnogostrukosti i $f: M \longrightarrow N$ glatka funkcija. Preslikavanje

$$T_p f: T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

$$[c]_p \longmapsto [f \circ c]_{f(p)}$$

se naziva *tangentno preslikavanje* funkcije f u tački p. ■

U slučaju kada su M i N podmnogostrukosti od R^m i R^n, $T_p f$ je upravo preslikavanje iz 1.4.2 u smislu gornje identifikacije $\left(c'(0) \longrightarrow [c]_p\right)$.

1.4.7 Propozicija

Neka su M, N i P mnogostrukosti, $f: M \longrightarrow N$ i $g: N \longrightarrow P$ glatke funkcije i $p \in M$. Tada je

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f.$$

Šta više, kako je $T_p(id_M) = id_{T_p M}$, za difeomorfizam $f: M \longrightarrow N$ je $T_p f$ bijekcija i

$$(T_p f)^{-1} = T_{f(p)} f^{-1}. ■$$

U nastavku ćemo snabdeti $T_p M$ strukturom vektorskog prostora. Kako bismo to uradili prvo ćemo detaljnije analizirati lokalnu situaciju:

1.4.8 Lema

Neka je $U \subseteq R^n$ otvoren skup i $p \in U$. Tada je preslikavanje $i: T_p U \longrightarrow R^n$ dato sa $[c]_p \longmapsto c'(0)$ bijekcija, pa se $T_p U$ može identifikovati sa R^n. U terminima ove identifikacije, za glatko preslikavanje $f: U \longrightarrow V, V \subseteq R^m$, imamo $T_p f = Df(p)$. ■

Neka je M mnogostrukost, $p \in M$ i (ψ, V) karta oko p. Struktura vektorskog prostora je indukovana na $T_p M$ bijekcijom $T_p \psi: T_p M \longrightarrow T_{\psi(p)} \psi(V) \cong R^n$. Na ovaj način smo $T_p M$ snabdeli unutrašnjom strukturom (nezavisnom od karti) vektorskog prostora. Šta više ako je $f: M \longrightarrow N$ glatko, onda je $T_p f: T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ *linearno* s obzirom na odgovarajuće strukture vektorskog prostora na $T_p M$ i $T_{f(p)} N$.

Proizvoljna karta od M generiše bazu prostora $T_p M$: neka je (ψ, V) karta od M oko p i neka je $\psi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ (x^i se nazivaju koordinatne funkcije od ψ). Označimo sa e_i, $1 \leq i \leq n$, i −ti jedinični vektor u R^n. Neka je $\psi(p) = 0$. Tada definišemo

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\,|_p := \left(T_p \psi\right)^{-1}(e_i) \in T_p M.$$

Preciznije, u smislu 1.4.9 imamo

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\,|_p := \left(T_p \psi\right)^{-1}([t \mapsto t e_i]_0) = [t \mapsto \psi^{-1}(t e_i)]_p.$$

Dakle, $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ se dobija kao rezultat prenošenja tangentnog vektora koordinatne linije $t \mapsto te_i$ na mnogostrukost M pomoću karte ψ. Kako je $T_p\psi$ linearni izomorfizam sledi da $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right\}$ formira bazu prostora T_pM.

Ako je recimo, M mnogostrukost od R^n i φ lokalna parametrizacija oko p (sa $\varphi(0) = p$), tada je $\psi = \varphi^{-1}$ karta oko p, pa imamo

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = T_0\varphi(e_i) = \left(\varphi \circ (te_i)\right)'(0) = D\varphi(0)e_i.$$

Odatle je $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ *i –ta kolona Jakobiana* od φ i $\varphi(0) = p$. Oznaka $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ sugeriše i drugu interpretaciju tangentnih vektora, kao *izvoda u pravcu*. Zapravo, svaki tangentni vektor može da se posmatra kao izvod u pravcu u sledećem smislu: neka je $v = [c]_p \in T_pM$. Neka $f \in C^\infty(M, R)$ (ili $C^\infty(M)$ kraće, prostor glatkih funkcija iz M u R). Definišemo:

$$\partial_v : C^\infty(M, R) \longrightarrow R, \qquad \partial_v f := T_pf(v) \in R.$$

Koristeći identifikaciju iz 1.4.9 imamo

$$\partial_v(f) = T_pf(v) = T_pf\left([c]_p\right) = [f \circ c]_{f(p)} = (f \circ c)'(0), \tag{1.4.1}$$

što odgovara diferenciranju u pravcu v.

Konkretno, za $v = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ imamo (pisaćemo v umesto ∂_v)

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f) = \left(f \circ \psi^{-1}(t \mapsto te_i)\right)'(0) = D_i(f \circ \psi^{-1})\left(\psi(p)\right), \tag{1.4.2}$$

pa $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ odgovara parcijalnom diferenciranju u karti ψ.

1.4.9 Definicija

Preslikavanje $\partial : C^\infty(M) \longrightarrow R$ se naziva *izvod* u $p \in M$ ako je ∂ linearno i zadovoljava Lajbnicovo pravilo:

1. $\partial(f + \alpha g) = \partial f + \alpha\, \partial g$
2. $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g$, za sve $f, g \in C^\infty(M)$ i sve $\alpha \in R$.

Vektorski prostor svih izvoda u p se označava sa $Der_p(C^\infty(M), R)$. ■

1.4.10 Teorema

Preslikavanje

$$A: T_pM \longrightarrow Der_p(C^\infty(M), R)$$

$$v \mapsto \partial_v$$

je *linearni izomorfizam*. ■

Zahvaljujući ovom rezultatu možemo da identifikujemo T_pM i $Der_p(C^\infty(M), R)$.

1.4.11 Napomena

U literaturi se često sreće i obrnut prilaz tangentnim vektorima, tj. tangentni vektori se uvode kao izvodi u tački glatkih preslikavanja na mnogostrukostima (videti [10]). Preciznije, kako izvod funkcije zavisi samo od lokalnih osobina funkcije, tj. osobina u proizvoljno maloj okolini tačke u kojoj se izvod traži, uvodi se pojam *klice* funkcije na sledeći način: neka je $p \in M$. Za funkcije f i g, koje su definisane na otvorenom skupu koji sadrži p, kažemo da imaju istu klicu u p ako se poklapaju u nekoj okolini od p. Ovo predstavlja relaciju ekvivalencije na skupu glatkih funkcija definisanih u okolini tačke p: za dve funkcije kažemo da su *ekvivalentne* ako i samo ako imaju iste klice. Klasa ekvivalencije se naziva *klica*, a skup klica u p se označava $\overline{F_p}$. Ako je f glatka funkcija u okolini tačke p, onda će f označavati i klicu u p kojoj pripada. Operacije sabiranja, množenja skalarom i množenja funkcija indukuje na $\overline{F_p}$ *strukturu algebre* nad R. Klica f ima dobro definisanu vrednost u p koja se označava sa $f(p)$. Neka je $F_p \subset \overline{F_p}$ skup klica koje imaju vrednost nula u p.

Tangentni vektor v u tački $p \in M$ je linearan izvod algebre $\overline{F_p}$. Za sve $f, g \in \overline{F_p}$ i $\lambda \in R$ važi:

1. $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda\, v(g)$
2. $v(f \cdot g) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

Sa T_pM smo označili skup svih tangentnih vektora na M u p, taj skup se naziva tangentni prostor na M u p. Ako se definiše $(v + w)(f)$ i $(\lambda v)(f)$ sa:

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f)$$

$$(\lambda v)(f) = \lambda\big(v(f)\big),$$

gde su $v, w \in T_pM$ i $\lambda \in R$, tada su $v + w$ i λv ponovo tangentni vektori u p. Otuda je T_pM realan vektorski prostor. ■

1.4.12 Propozicija

Neka su M^m, N^n C^∞ −mnogostrukosti, $f \in C^\infty(M, N), p \in M, \varphi = (x^1, \dots, x^m)$ je karta od M oko p, $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ je karta od N oko $f(p)$. Tada je matrična reprezentacija linearnog preslikavanja $T_pf: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ s obzirom na baze $B_{T_pM} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\,|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\,|_p\right\}$ i $B_{T_{f(p)}N} = \left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\,|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\,|_{f(p)}\right\}$ baš Jakobian lokalne reprezentacije $f_{\psi\varphi} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ funkcije f. Odatle

$$T_pf\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\,|_p\right) = \sum_{k=1}^{n} D_i(\psi^k \circ f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)\frac{\partial}{\partial y^k}\,|_{f(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_{\psi\varphi}^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}. \blacksquare$$

1.4.13 Posledica

Neka je M^n mnogostrukost, $p \in M, \varphi = (x^1, \dots, x^n)$ i $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ karte oko p. Tada je

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\,|_p = \sum_{k=1}^{n} D_i(\psi^k \circ \varphi^{-1})\left(\varphi(p)\right)\frac{\partial}{\partial y^k}\,|_{f(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}. \blacksquare$$

1.5 TANGENTNO RASLOJENJE. VEKTORSKA POLJA

Vektorsko polje na mnogostrukosti M predstavlja preslikavanje koje svakoj tački $p \in M$ pridružuje tangentni vektor iz $T_pM.$ Međutim, pošto pojedinačni tangentni prostori još uvek nisu povezani u mnogostrukost, onda nam nedostaje pojam glatkosti takvih preslikavanja. Zbog ovoga uvodimo pojam tangentnog raslojenja koje predstavlja specijalan slučaj vektorskog raslojenja.

1.5.1 Definicija

Neka je M glatka mnogostrukost. *Tangentno raslojenje* (ili *tangentni prostor*) od M definisan je kao disjunktna unija vektorskih prostora T_pM $(p \in M)$:

$$TM := \coprod_{p\in M} T_pM := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM\,.$$

Preslikavanje $\pi_M: TM \longrightarrow M,\ (p, v) \longrightarrow p$ se naziva *kanonička projekcija*. Ako je $f: M \longrightarrow N$ glatka funkcija, onda je tangentno preslikavanje Tf funkcije f definisano sa

$$Tf(p, v) = \left(f(p), T_pf(v)\right). \blacksquare$$

Za glatke funkcije $f: M \longrightarrow N$ i $g: N \longrightarrow P$ važi $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. Šta više, $T(id_M) = id_{TM}$, pa za difeomorfizam $f: M \longrightarrow N$ imamo $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.

Ako je M^n glatka mnogostrukost sa atlasom $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, tada je $\tilde{\mathcal{A}} = \left\{\left(T\psi_\propto, TM|_{V_\propto}\right) \mid \alpha \in A\right\}$ C^∞ $-$atlas za TM. Topologija mnogostrukosti od TM je Hausdorfova i zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, odatle sledi da je TM glatka mnogostrukost dimenzije $2n$.

1.5.2 Napomena

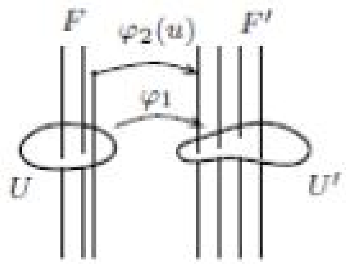
1. Ako je $f: M^m \longrightarrow N^n$ glatko, tada je i $Tf: TM \longrightarrow TN$ glatko, jer za karte (ψ, V) od N i (φ, U) od M imamo
$$\begin{aligned} T\psi \circ Tf \circ T\varphi^{-1}(x, \omega) &= T(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x, \omega) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \cdot \omega), \end{aligned}$$
što je glatko na svom otvorenom domenu $\varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \times R^m = T\left(\varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right)\right)$.

2. $\pi_M : TM \longrightarrow M$ je glatko. To sledi iz činjenice da je π_M *lokalna projekcija*: Neka je (ψ, V) karta od M^n, tada
$\psi \circ \pi_M \circ T\psi^{-1}(x,\omega) = \psi \circ \pi_M\big(\psi^{-1}(x), T_x\psi^{-1}(\omega)\big) = \psi\big(\psi^{-1}(x)\big) = x = pr_1\,(x,\omega).$ ∎

Detaljnijm ispitivanjem može se pokazati da TM ima bogatiju strukturu od „čiste“ mnogostrukosti: slike karti $T\psi_\propto(TV_\propto) = \psi_\propto(V_\propto) \times R^n$ su proizvodi otvorenih podskupova od R^n sa vektorskim prostorima. Promena karti očuvava ovu strukturu, pa su one oblika $(x,\omega) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x)\cdot\omega)$, gde je $\varphi_2(x)$ linearna funkcija za svako x. Odatle sledi da je TM prvi primer vektorskog raslojenja u smislu sledeće definicije.

1.5.3 Definicija

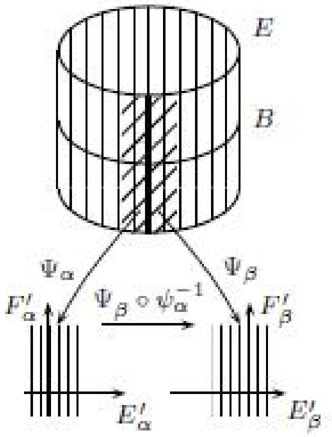
1. Lokalna vektorska raslojenja (LVR): Neka su E i F (konačno dimenzioninalni, realni) vektorski prostori i $U \subseteq E$ otvoren. Tada se $U \times F$ naziva *lokalno vektorsko raslojenje* sa bazom U. U se identifikuje sa $U \times \{0\}$. Za $u \in U, \{u\} \times F$ se naziva *vlakno* nad u. Vlakno je snabdeveno strukturom vektorskog prostora od F. Preslikavanje
$$\pi: U \times F \longrightarrow U, \quad (u,f) \mapsto u$$
se naziva *projekcija* od $U \times F$. Tada je vlakno nad u baš $\pi^{-1}(u)$.
Preslikavanje $\varphi: U \times F \longrightarrow U' \times F'$ između lokalnih vektorskih raslojenja se naziva *homomorfizam lokalnih vektorskih raslojenja* (resp. izomorfizam LVR) ako je φ glatko (resp. difeomorfizam) i ima oblik
$$\varphi(u,f) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u)\cdot f),$$
gde je $\varphi_2(u)$ linearno (resp. linearni izomorfizam) iz F u (resp. na) F' za svako $u \in U$ (Slika 10).



Slika 10.

2. Vektorska raslojenja: Neka je E skup. *Karta vektorskog raslojenja* (u nastavku ćemo koristiti skaćenicu *VR-karta*) od E je par (ψ, W), gde je $W \subseteq E$ i $\psi: W \longrightarrow W' \times F'$ je bijekcija na LVR $W' \times F'$ (W' i F' zavise od ψ). *Atlas VR* je familija $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, W_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ LVR-karti takvih da W_α prekrivaju E i da su svake dve VR-karte (ψ_α, W_α) i (ψ_β, W_β) iz $\mathcal{A}$ sa $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ kompatibilne u smislu da je
$$\psi_\beta \circ {\psi_\alpha}^{-1}: \psi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \psi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$$
LVR-*izomorfizam* i da su $\psi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$ i $\psi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$ LVR (Slika 11.).

Dva VR-atlasa $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ su ekvivalentna ako je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ponovo VR-atlas. VR-*struktura* v je klasa ekvivalencije VR-atlasa. *Vektorsko raslojenje* (VR) je skup E zajedno sa VR-strukturom. Kako je svaki VR-atlas istovremeno C^∞-atlas, E je automatski i C^∞-mnogostrukost. Ponovo ćemo zahtevati da je topologija mnogostrukosti od E Hausdorfova i da zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. ∎



Slika 11.

1.5.4 Napomena

1. U svakom vektorskom raslojenju E postoji izdvojen podskup B, koji se naziva *baza* od E, definisan sa:

   $$B{:}=\{e \in E \mid \exists VR-karta\ (\psi, W), takva\ da\ je\ e=\psi^{-1}(w', 0), za\ neko\ w' \in\ W'\ \}.$$

   Može se pokazati da skup B ima strukturu mnogostrukosti.

   Postoji dobro definisana projekcija $\pi{:}\,E \longrightarrow B$: neka $e \in E$, ψ_α je VR-karta oko e i $\psi_\alpha(e)=(w', f')$, ($\psi_\alpha{:}\,W \longrightarrow W' \times F'$). Tada neka je $\pi(e) \coloneqq {\psi_\alpha}^{-1}(w', 0)$. Može se pokazati da je π glatko preslikavanje. Za $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ se naziva vlakno nad b. Ono ima strukturu vektorskog prostora indukovanu VR-kartama.

   Za otvoren skup $U \subseteq B$, neka je

   $$E|_U \coloneqq \bigcup_{b \in U}\{b\} \times E_b,$$

   gde je $E_b \coloneqq \pi^{-1}(b)$ vlakno nad b.

2. Vektorska raslojenja mogu da se opišu i na drugi način, koji se često koristi kao definicija: Vektorsko raslojenje je trojka (E, B, π) koja se sastoji iz dve C^∞-mnogostrukosti E i B, a $\pi{:}\,E \longrightarrow B$ je glatka sirjekcija takva da za svako $b \in B$ važi:
   - Vlakno $\pi^{-1}(b) \coloneqq E_b$ je vektorski prostor.
   - Postoji otvorena okolina V od b u B i difeomorfizam $\tilde{\psi}{:}\,W \coloneqq \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times F'$, koji je linearan u vlaknima (tj. $\tilde{\psi}\,|_{\pi^{-1}(b)}$ je linearno, $\forall b \in V$) i takav da sledeći dijagram komutira. U našem slučaju je $\tilde{\psi} \coloneqq ((\psi\,|_{\boldsymbol{B}})^{-1} \times id_{F'}) \circ \psi)$. ■

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(V) \arrow[r, "\tilde{\psi}"'] \arrow[d, "\pi"'] & V \times F' \arrow[d, "pr_1"] \\
V \arrow[r, "\imath d"'] & V
\end{tikzcd}$$

Iz prethodno rečenog proizilazi da je tangentno raslojenje (TM, M, π_M) vektorsko raslojenje sa bazom M.

Sada ćemo definisati vektorsko polje na mnogostrukostima. Naime, tražimo preslikavanja koja glatko pridružuju svakom $p \in M$ elemenat $X_p = X(p)$ iz T_pM.

1.5.5 Definicija

Neka je (E, B, π) vektorsko raslojenje. Preslikavanje $X: B \longrightarrow E$ se naziva *sečenje* od E (preciznije od $\pi: E \longrightarrow B$), ako je $\pi \circ X = id_B$. Skup svih glatkih sečenja od E se označavaju sa $\Gamma(B, E)$ ili $(\Gamma(E))$. ■

Dakle, *vektorsko polje* je sečenje od $TM\ \big(\pi(X_p) = p, \forall p \in M\big)$. Ako je (ψ, V), $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$ karta od M, tada za svako $p \in V$ vektori $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ formiraju bazu od T_pM. Kako $X_p \in T_pM$, sledi da za svako p postoje jedinstveno definisani $X^i(p) \in R$ takvi da je

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p ,$$

što se naziva *lokalnom reprezentacijom* X na V.

1.5.6 Propozicija

Neka je X vektorsko polje na mnogostrukosti M. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. $X: M \longrightarrow TM$ je glatko, tj. $X \in \Gamma(TM)$.
2. Za svako $f \in C^\infty(M)$, preslikavanje $p \mapsto X_p(f): M \longrightarrow R$ je glatko.
3. Za svaku kartu (ψ, V) od M, $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$, u lokalnoj reprezentaciji imamo:
$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p ,$$
gde $X^i \in C^\infty(V, R)$, za sve $i = 1,2, \ldots, n$. ■

Prostor glatkih vektorskih polja na M se označava sa $\mathfrak{X}(M)$.

1.5.7 Primer

Vektorska polja na R^n.

Neka je $U \subseteq R^n$ otvoren. Znamo: vektorsko polje je C^∞ funkcija $X: U \longrightarrow R^n$,

$$X(p) = \big(X^1(p), \ldots, X^n(p)\big) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) e_i .$$

S druge strane, U je mnogostrukost sa jednom kartom $\psi = id_U$ i odgovarajućim atlasom $\mathcal{A} = \{(id_U, U)\}$. Iz 1.4.9 sledi da je $T_p\psi = D\psi(p) = id$, pa je $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \big(T_p\psi\big)^{-1}(e_i) = e_i$.

Kao izvod, $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ deluje na sledeći način:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f) = D_i(f \circ id^{-1})\big(id(p)\big) = D_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Odatle sledi

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p)e_i\,,\ \text{resp. } X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

odgovara vektorskom polju posmatranom kao vektor, resp. kao diferencijalni operator (izvod u pravcu $\big(X^1(p), \dots, X^n(p)\big)$). ■

U slučaju podmnogostrukosti M od R^n može se pokazati da je

$$\mathfrak{X}(M) = \{X: M \longrightarrow R^n |\ X\ je\ klase\ C^\infty\ i\ X_p \in T_pM\ \ \forall p \in M\}.$$

U 1.4.11 smo identifikovali T_pM sa prostorom izvoda $Der_p(C^\infty(M), R)$ u tački p. Dakle, za proizvoljno $X \in \mathfrak{X}(M)$ i $p \in M, X_p$ je izvod u p. Preslikavanje $C^\infty(M) \ni f \mapsto X(f)$, gde je $X(f) \coloneqq p \mapsto X_p(f,)$, je linearno i zadovoljava:

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g).$$

Naime, za $p \in M$ imamo

$$\big(X(f \cdot g)\big)(p) = X_p(f \cdot g) = f(p) \cdot\ X_p(g) + g(p) \cdot X_p(f)$$

$$= \big(f \cdot X(g) + g \cdot X(f)\big)(p).$$

Kao posledicu imamo da je X izvod u sledećem smislu:

R-linearno preslikavanje $D: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ se naziva *izvod algebre* $C^\infty(M)$ ako zadovoljava

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f).$$

Prostor svih izvoda na $C^\infty(M)$ se označava sa $Der\,\big(C^\infty(M)\big)$.

Izvodi na $C^\infty(M)$ su upravo glatka vektorska polja na M, tj. $Der\,\big(C^\infty(M)\big) = \mathfrak{X}(M)$. Preciznije, svako glatko vektorsko polje je izvod na $C^\infty(M)$ i obrnuto, svaki izvod na $C^\infty(M)$ je dat kao dejstvo glatkog vektorskog polja.

1.5.8 Definicija

Neka $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. *Lijeve zagrade* vektorskih polja X i Y je definisana kao

$$[X, Y](f) \coloneqq X(Yf) - Y(Xf), \qquad \big(f \in C^\infty(M)\big).$$

Sledi da je $[X, Y]: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ linearno i zadovoljava Lajbnicovo pravilo, pa je $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$. ■

1.5.9 Propozicija (Osobine Lijeve zagrade)

Neka $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada:

1. $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ je R −bilinearno.
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ (tj. [,] je antisimetrično).
3. $\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] = 0$ (Jakobijev identitet).
4. $[fX, gY] = f \cdot g[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.
5. [,] je lokalna: Ako je V otvoren skup u M, tada je $[X, Y] |_V = [X |_V, Y |_V]$.
6. Lokalna reprezentacija: Ako je (ψ, V) karta, $\psi = (x^1, \dots, x^n)$,

   $X |_V = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\quad Y |_V = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, tada je

   $[X, Y] |_V = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$. ■

Glava 2

TENZORSKA POLJA I DIFERENCIJALNE FORME NA GLATKIM MNOGOSTRUKOSTIMA

Ova glava je posvećena tenzorima, spoljašnjem izvodu, diferencijanim formama, integralnom računu na mnogostrukostima i Stoksovoj teoremi. Ove pojmove ćemo prvo uvesti i izučavati na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru, a zatim ćemo proširiti na mnogostrukosti. Prvo ćemo definisati tenzore tipa $\binom{r}{s}$, a zatim tenzorsko raslojenje, tenzorska polja, kontrakcije, simetrične tenzore, Rimanovu metriku, pullback i push-forward preslikavanja i ispitivati njihove osobine i međusobne veze. Na kraju definišemo integralni račun na mnogostrukostima i dokazujemo Stoksovu teoremu. Za više detalja o pomenutim pojmovima pogledati [1], [4], [5] i [6].

2.1 TENZORI

Većina koncepata u teoriji glatkih mnogostrukosti je uvedena kako bi se omogućila primena linearne algebre na mnogostrukosti. Na primer, tangentni vektor se može posmatrati kao linearna aproksimacija krive, tangentni prostor na mnogostrukosti se može posmatrati kao linearna aproksimacija mnogostrukosti, push-forward glatkog preslikavanja kao linearna aproksimacija samog preslikavanja. Račun nam govori kako da aproksimiramo glatke objekte linearnim, a teorija apstraktnih mnogostrukosti omogućava interpretaciju ovih linearnih aproksimacija na koordinatno-invarijantan način. U ovom poglavlju, proširujemo ovu ideju uopštavanjem linearnih objekata na multilinearne. To dovodi do pojma tenzora i tenzorskih polja na mnogostrukostima. Na početku se definišu tenzori i tenzorski proizvod na realnim konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima, a zatim i tenzorska polja i tenzorsko raslojenje. Uvešćemo kontrakciju kao važnu operaciju na tenzorima, posebnu klasu tenzora simetrične tenzore, čija se vrednost ne menja prilikom permutacije argumenata i Rimanovu metriku.

2.1.1 TENZORI U VEKTORSKIM PROSTORIMA

Da bi se odredila površina neke zakrivljene površi, ili opštije, zapremina neke mnogostrukosti, potrebno je prvo aproksimirati tu površ sa njenim tangentnim prostorom, odrediti površinu tih aproksimativnih prostora, pa sumirati (ili integraliti) dobijene rezultate. Prema tome, prvo trebamo naći način na koji ćemo paralelopipedima u vektorskim prostorima pridružiti zapremine. Preslikavanje ω koje pridružuje zapreminu paralelopipedu sa ivicama u, v, z, treba da zadovoljava:

1. $\omega(\alpha u, v, z, \dots) = \omega(u, \alpha v, z, \dots) = \cdots = \alpha \cdot \omega(u, v, z, \dots)$
2. $\omega(u_1 + u_2, v, z, \dots) = \omega(u_1, v, z, \dots) + \omega(u_2, v, z, \dots)$ analogno važi za v i $z, \dots$
3. $\omega(u, u, z, \dots) = \omega(u, v, v, \dots) = \cdots = 0.$

Kako je $0 = \omega(u + v, u + v, z, \dots) = \omega(u, v, z, \dots) + \omega(v, u, z, \dots)$, onda sledi da je 3. ekvivalentno sa činjenicom da je ω antisimetrično. Iz 1. i 2. zaključujemo da treba posmatrati multilinearna preslikavanja na vektorskim prostorima (za nas najinteresantnija su T_pM). Antisimetričnost iz 3. ćemo koristiti u sledećem poglavlju.

Podsetimo se osnovnih činjenica iz linearne algebre. Konačno dimenzionalne prostore, u nastavku, ćemo označavati sa $E_1, \dots, E_k, E, F$. Prostor multilinearnih preslikavanja iz $E_1 \times \dots \times E_k$ u F označavamo sa $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$. Specijalan slučaj je $(k = 1)$ $L(E, R) = E^*$, dual prostora E tj. vektorski prostor linearnih funkcionela na E. Ako je $B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza od E, tada funkcionele definisane sa

$$\propto^j (e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \qquad i, j = 1,2, \dots, n$$

formiraju bazu od E^*, dualnu bazu od B_E. Za svako $e \in E$ imamo reprezentaciju

$$e = \sum_{i=1}^{n} \propto^i (e) e_i,$$

i za svako $\propto \in E^*$

$$\propto = \sum_{i=1}^{n} \propto (e_i) \propto^i.$$

Bidualni prostor $E^{**} = (E^*)^*$ je kanonički izomorfan sa E preslikavanje

$$i: E \longrightarrow E^{**}$$

$$i(e) = \propto \mapsto \propto (e), \quad (\propto \in E^*)$$

je linearan izomorfizam.

2.1.1.1 Definicija

Neka je E vektorski prostor. Tada se

$$T_s^r(E) \coloneqq L^{r+s}(\underbrace{E^*, \dots, E^*}_{r-puta}, \underbrace{E, \dots, E}_{s-puta}; R)$$

naziva prostor r −puta kontra- i s −puta kovarijantnih tenzora, ili kraće $\binom{r}{s}$ −*tenzora*. Elementi iz $T_s^r(E)$ se nazivaju *tenzori tipa* $\binom{r}{s}$.

Za $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$, $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$ *tenzorski proizvod* $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(E)$ je definisan sa

$$t_1 \otimes t_2(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2})$$

$$\coloneqq t_1(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, f_1, \dots, f_{s_1}) \cdot t_2(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, g_1, \dots, g_{s_2}),$$

gde je $\beta^j, \gamma^j \in E^*$, $f_j, g_j \in E$. ■

Jasno je da je $\otimes$ asocijativno i bilinearno.

2.1.1.2 Primeri

1. Po definiciji je, $T_1^0(E) = L(E, R) = E^*$ i $T_0^1(E) = L(E^*, R) = E^{**} = E$. Elementi od E(*vektori*) su $\binom{1}{0}$ −tenzori, a elementi iz E^* (*kovektori*) su $\binom{0}{1}$ −tenzori.
2. Neka je E vektorski prostor sa *skalarnim proizvodom* $g(e, f) = \langle e, f \rangle$. Tada je bilinearno preslikavanje $g: E \times E \longrightarrow R$, tj. g je $\binom{0}{2}$ −tenzor. ■

2.1.1.3 Propozicija

Neka je $\dim(E) = n$. Tada je $\dim(T_s^r(E)) = n^{r+s}$. Ako je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza od E, a $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ baza dualnog prostora E^*, tada je

$$B_s^r \coloneqq \{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s} | 1 \leq i_k, j_k \leq n\}$$

baza od $T_s^r(E)$.

Dokaz:

Vektori u B_s^r su linearno nezavisni, posmatrajmo

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s} = 0.$$

Primenjujući ovaj tenzor na vektore $(\alpha^{k_1}, \dots, \alpha^{k_r}, e_{l_1}, \dots, e_{l_s})$ i koristeći da je $\alpha^i(e_j) = e_j(\alpha^i) = \delta_{ij}$, dobijamo da su svi $t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = 0$. B_s^r generiše $T_s^r(E)$: svako $t \in T_s^r(E)$ može se zapisati kao

$$t = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} t(\alpha^{i_1}, \dots, \alpha^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s}.$$

Da bismo ovo proverili dovoljno će biti da pokažemo da obe strane ove jednakosti definišu isto multilinearno preslikavanje. Neka je $\beta^1 = \sum \lambda_{i_1}^1 \propto^{i_1}, \dots, \beta^r = \sum \lambda_{i_r}^r \propto^{i_r} \in E^*$ i $x_1 = \sum u_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, x_s = \sum u_s^{j_s} e_{j_s} \in E$. Tada je

$$t(\beta^1, \dots, \beta^r, x_1, \dots, x_s) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_s}} \lambda_{i_1}^1 \dots \lambda_{i_r}^r u_1^{j_1} \dots u_s^{j_s} \, t\big(\propto^{i_1}, \dots, \propto^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}\big) =$$

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_s}} t(\propto^{i_1}, \dots, \propto^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})\, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_i} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s}(\beta^1, \dots, x_s). \blacksquare$$

Za svako linearno preslikavanje $\varphi: E \longrightarrow F$ postoji adjungovano preslikavanje $\varphi^* \in L(F^*, E^*)$, za $\beta \in F^*$, $e \in E$ stavimo $\varphi^*(\beta)(e) \coloneqq \beta\big(\varphi(e)\big)$. Ako je A matrica preslikavanja φ s obzirom na baze od E, resp. F, tada je A^t matrica od φ^* s obzirom na odgovarajuće dualne baze od F^*, resp. E^*.

Opštije, želimo da svakom linearnom preslikavanju $\varphi \in L(E, F)$ pridružimo linearno preslikavanje $\varphi_s^r \in L\big(T_s^r(E), T_s^r(F)\big)$. Ako je φ linearni izomorfizam, takvo preslikavanje se dobija kombinovanjem φ^{-1} i φ^*.

2.1.1.4 Definicija

Neka je $\varphi \in L(E, F)$ bijekcija. Tada je $T_s^r(\varphi) = \varphi_s^r \in L(T_s^r E, T_s^r F)$ definisano sa

$$(\varphi_s^r t)(\beta^1, \dots, \beta^r, f_1, \dots, f_s) \coloneqq t\big(\varphi^*(\beta^1), \dots, \varphi^*(\beta^r), \varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_s)\big),$$

za $t \in T_s^r(E)$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in F^*$, $f_1, \dots, f_s \in F$. $\blacksquare$

2.1.1.5 Primer

$$\varphi_0^1: E = T_0^1(E) \longrightarrow T_0^1(F) = F, \qquad \varphi_0^1(e)(\beta) = e\big(\varphi^*(\beta)\big) = \varphi(e)(\beta),$$

pa se φ_0^1 može identifikovati sa φ.

$$\varphi_1^0: E^* = T_1^0(E) \longrightarrow T_1^0(F) = F^*, \qquad \varphi_1^0(\propto)(f) = \propto\big(\varphi^{-1}(f)\big) = (\varphi^{-1})^*(\propto)(f),$$

pa se φ_1^0 može identifikovati sa $(\varphi^{-1})^*$.

Dakle, $T_s^r(\varphi) = \varphi_s^r$ je istovremeno produženje od φ i $(\varphi^{-1})^*$ na uopštene tenzorske prostore. $\blacksquare$

2.1.1.6 Propozicija

Neka su $\varphi: E \longrightarrow F$, $\psi: F \longrightarrow G$ linearni izomorfizmi. Tada:

1. $(\psi \circ \varphi)_s^r = \psi_s^r \circ \varphi_s^r$
2. $(id_E)_s^r = id_{T_s^r(E)}$
3. $\varphi_s^r: T_s^r E \longrightarrow T_s^r F$ je linearni izomorfizam i $(\varphi_s^r)^{-1} = (\varphi^{-1})_s^r$.
4. Ako $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$, $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$, tada je $\varphi_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(t_1 \otimes t_2) = \varphi_{s_1}^{r_1}(t_1) \otimes \varphi_{s_2}^{r_2}(t_2)$.

Dokaz:

1. Primetimo prvo da je za $\gamma \in G^*,\ e \in E$ imamo
$$(\varphi^* \circ \psi^*)(\gamma)(e) = \Big(\varphi^*\big(\psi^*(\gamma)\big)\Big)(e) = \psi^*(\gamma)\big(\varphi(e)\big) = \gamma\Big(\psi\big(\varphi(e)\big)\Big) = (\psi \circ \varphi)^*(\gamma)(e).$$
Neka $\gamma^1, \dots, \gamma^r \in G^*,\ g_1, \dots, g_s \in G$ i $t \in T_s^r(E)$. Tada je
$$(\psi_s^r\big(\varphi_s^r(t)\big)(\gamma^1, \dots, \gamma^r, g_1, \dots, g_s) = \big(\varphi_s^r(t)\big)\big(\psi^*\gamma^1, \dots, \psi^*\gamma^r, \psi^{-1}(g_1), \dots, \psi^{-1}(g_s)\big) =$$
$$= t\left(\underbrace{\varphi^*(\psi^*\gamma^1)}_{(\psi\circ\varphi)^*\gamma^1}, \dots, \varphi^*(\psi^*\gamma^r), \underbrace{\varphi^{-1}\big(\psi^{-1}(g_1)\big)}_{(\psi\circ\varphi)^{-1}(g_1)}, \dots, \varphi^{-1}\big(\psi^{-1}(g_s)\big)\right)$$
$$= \big((\psi \circ \varphi)_s^r(t)\big)(\gamma^1, \dots, \gamma^r, g_1, \dots, g_s).$$
2. Kako je $id_E^{-1} = id_E$ i $id_E^* = id_{E^*}$ tvrđenje sledi iz definicije.
3. Sledi iz 1. i 2.
4. $$\begin{aligned}&\varphi_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(t_1 \otimes t_2)\big(\beta^1, \dots, \beta^{r_1+r_2}, f_1, \dots, f_{s_1+s_2}\big)\\ &= (t_1 \otimes t_2)(\varphi^*\beta^1, \dots, \varphi^*\beta^{r_1+r_2}, \varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_{s_1+s_2}))\\ &= t_1(\varphi^*\beta^1, \dots, \varphi^*\beta^{r_1}, \varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_{s_1}))\\ &\quad \cdot\ t_2(\varphi^*\beta^{r_1+1}, \dots, \varphi^*\beta^{r_1+r_2}, \varphi^{-1}\big(f_{s_1+1}\big), \dots, \varphi^{-1}(f_{s_1+s_2}))\\ &= \varphi_{s_1}^{r_1}(t_1) \otimes \varphi_{s_3}^{r_2}(t_2)\big(\beta^1, \dots, \beta^{r_1+r_2}, f_1, \dots, f_{s_1+s_2}\big). \blacksquare\end{aligned}$$

Radi pojednostavljenja notacije koristićemo Ajštajnovu konvergenciju o sumiranju: ako se sumiranje vrši po indeksima koji se pojavljuju i kao gornji i kao donji, oznaka za sumu će se izostavljati. Tako će se npr. umesto

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\\ j_1,\dots,j_s}} t_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r}\ e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes\ \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s}$$

pisati samo $t_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes\ \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s}$.

2.1.2 KONTRAKCIJA

U multilinearnoj algebri, postoji važna operacija koja se definiše na tenzorima i koja se naziva kontrakcija. Kao rezultat kontrakcije nastaje tenzor čiji je rang smanjen za 2, na primer $\binom{r}{s}-$tenzor se smanji primenom kontrakcije na $\binom{r-1}{s-1}-$tenzor.

Pre svega definišimo unutrašnji proizvod. *Unutrašnji proizvod* vektora $v \in E$ (resp. $\beta \in E^*$) sa tenzorom $t \in T_s^r(E;F)$ je $\binom{r}{s-1}$ (resp., $\binom{r-1}{s}$) tenzor definisan sa

$$(i_v t)(\beta^1, \dots, \beta^r, v_1, \dots, v_{s-1}) = t(\beta^1, \dots, \beta^r, v, v_1, \dots, v_{s-1})$$

$$\left(i^\beta t\right)(\beta^1, \dots, \beta^{r-1}, v_1, \dots, v_s) = t(\beta, \beta^1, \dots, \beta^{r-1}, v_1, \dots, v_s).$$

Jasno, $i_v: T_s^r(E;F) \longrightarrow T_{s-1}^r(E;F)$ i $i^\beta: T_s^r(E;F) \longrightarrow T_s^{r-1}(E;F)$ su linearno neprekidna preslikavanja, kao što su i $v \mapsto i_v$ i $\beta \mapsto i^\beta$. Ako je $F = R$ i $\dim(E) = n,$ onda ove operacije u komponentama uzimaju sledeći oblik. Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza prostora E, a $\{\propto^1, \dots, \propto^n\}$ odgovarajuća dualna baza prostora E^*. Tada imamo da važi

$$i_{e_k}\left(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \propto^{j_1} \otimes \dots \otimes \propto^{j_s}\right) = \delta_k^{j_1} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \propto^{j_2} \otimes \dots \otimes \propto^{j_s},$$

$$i^{\propto_k}\left(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \propto^{j_1} \otimes \dots \otimes \propto^{j_s}\right) = \delta_k^{i_1} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \propto^{j_1} \otimes \dots \otimes \propto^{j_s}.$$

Sa 2.1.1.3 ove formule i linearnost omogućavaju računanje svakog unutrašnjeg proizvoda.

2.1.2.1 Definicija

Neka je $\dim(E) = n.$ Kontrakcija k-tog kontravarijantnog sa l-tim kovarijantnim indeksom, ili kraće $(k,l)-$*kontrakcija*, je familija linearnih preslikavanja $C_l^k: T_s^r(E;F) \longrightarrow T_{s-1}^{r-1}(E;F)$ definisana za bilo koji par prirodnih brojeva $r, s \geq 1$ sa:

$$C_l^k(t_{j_1,\dots,j_r}^{i_1\dots i_s}\, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes \propto^{j_1} \otimes \dots \otimes \propto^{j_r})$$

$$= t_{j_1,\dots,j_{l-1} p j_{l+1}\dots j_r}^{i_1\dots i_{k-1} p i_{k+1}\dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{i_k} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes \propto^{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{\propto}^{j_l} \otimes \dots \otimes \propto^{j_r},$$

gde je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza od E, a $\{\propto^1, \dots, \propto^n\}$ dualna baza od E^*, a simbol ^ nad vektorom ili kovektorom znači da je on izostavljen. ■

Jednostavno se proverava da C_l^k ne zavisi od izbora baze.

Kroneker delta je tenzor $\delta \in T_1^1(E)$ definisan sa $\delta(\alpha, e) = \langle \alpha, e \rangle$. Ako je E konačno dimenzionalan, onda δ odgovara identitetu $I \in L(E,E)$ pri izomorfizmu $T_1^1(E) \cong L(E,E)$. U odnosu na proizvoljnu bazu, komponente od δ su uobičajeni Kronekerovi simboli δ_j^i tj. $\delta = \delta_j^i e_i \otimes \alpha^j$.

Pretpostavimo da je E konačno dimenzionalan realan prostor sa skalarnim proizvodom i bazom $\{e_1, \dots, e_n\}$ i odgovarajućom dualnom bazom $\{\propto^1, \dots, \propto^n\}$ u E^*. Koristeći unutrašnji proizvod, sa matricom $[g_{ij}]$ gde je $g_{ij} = \langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle$, dobijamo izomorfizam

$\flat: E \longrightarrow E^*$ dat sa $x \mapsto \langle\langle x,\cdot\rangle\rangle$, i njegov inverz $\sharp: E^* \longrightarrow E$.

Matrica od $\flat$ je $[g_{ij}]$, tj. $(x^\flat)_i = g_{ij}x^j$,

a matrica od $\sharp$ je $[g^{ij}]$, tj. $(\propto^\sharp)^i = g^{ij} \propto_j$,

gde su x^j i $\propto_j$ redom komponente od e i $\propto$. $\flat$ se naziva *operator spuštanja indeksa*, a $\sharp$ se naziva *operator podizanja indeksa.*

Ovi operatori se mogu primeniti na tenzore, kako bismo proizveli nove. Na primer, ako je t tenzor tipa $\binom{0}{2}$, onda možemo definisati *asocirani tenzor* t' tipa $\binom{1}{1}$ sa

$$t'(e,\propto) = t(e,\propto^\sharp).$$

Komponente su

$$(t')_i^j = g^{jk}t_{ik}. \text{ (zbir je po } k\text{).}$$

Uobičajeno je da se piše t_i^j umesto $g^{jk}t_{ik}$.

2.1.2.2 Primer

Neka je E konačno dimenzionalan realan prostor sa bazom $\{e_1,\dots,e_n\}$ i odgovarajućom dualnom bazom $\{\propto^1,\dots,\propto^n\}$.

1. Ako je $t \in T_3^2(E)$, tada je $(2,1)$ −kontrakcija data sa
$$C_1^2(t_{klm}^{ij}e_i \otimes e_j \otimes\propto^k\otimes\propto^l\otimes\propto^m) = t_{jlm}^{ij}e_i \otimes\propto^l\otimes\propto^m .$$
2. Važan primer kontrakcije je *trag* od $\binom{1}{1}$ −tenzora. Naime, ako je $t \in T_1^1(E)$, tada je
$$trag\ (t) = C_1^1(t) = t_i^i$$
gde je $t = t_j^i e_i \otimes\propto^j$.
3. Komponente asociranog tenzora sa g podizanjem drugog indeksa su $g^{jk}g_{ik} = g^{jk}g_{ki} = \delta_i^j$.
4. Neka
$$t \in T_2^3(E), \quad t = t_{lm}^{ijk}e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes\propto^l\otimes\propto^m.$$
Tada t ima veliki broj asociranih tenzora, što zavisi od toga koji indeks je spušten ili podignut. Na primer:
$$\begin{aligned} t_l^{ijkm} &= g^{mp}t_{lp}^{ijk}\ , \\ t_{jkl}^{im} &= g_{ja}g_{kb}g^{mc}t_{lc}^{iab}\ , \\ t_{ij}^{klm} &= g_{ia}g_{jb}g^{lc}g^{md}t_{cd}^{abk}\ , \\ t_{ikm}^{jl} &= g_{ia}g_{kb}g^{lc}t_{cm}^{ajb}, \end{aligned}$$
i tako dalje.

5. Pozicioniranje indeksa u komponentama povezanog tenzora je veoma važno. Na primer, ako $t \in T_2^0(E)$, ranije smo videli da je $t_i^j = g^{jk}t_{ik}$. Međutim, $t_i^j = g^{ij}t_{ki}$, što je generalno drugačije od t_i^j kada t nije simetričan tenzor. Na primer; ako je $E = R^3$ sa $g_{ij} = \delta_{ij}$ i devet komponenti od t u standardnoj bazi su $t_{12} = 1, t_{21} = -1, t_{ij} = 0$, za sve parove i, j, onda ${t_i}^j = t_{ij}$, ${t^j}_i = t_{ji}$, tako da ${t_1}^2 = t_{12} = 1$, dok ${t^2}_1 = t_{21} = -1$.
6. Trag od $\binom{2}{0}$ $-$tenzora se definiše da bude trag asociranog $\binom{1}{1}$ $-$tenzora, tj. ako je $t = t^{ij} e_i \otimes e_j$, onda je

$$trag\ (t) = t_i^i = g_{ik}t^{ik}.$$

Nameće se prirodno pitanje da li bi se dobio isti rezultat kada bi se smanjivao prvi a ne drugi indeks. Iz simetričnosti od g_{ij} imamo $t_i^i = g_{ki}t^{ik} = t_k^k$, pa je zato definicija traga nezavisna od izbora indeksa koji će biti smanjen. Slično, ako

$$t \in T_2^0(E), \qquad trag\ (t) = t_i^i = g^{ik}t_{ik} = t_k^k.$$

Posebno, $trag\ (g) = g_i^i = g^{ik}g_{ik} = \dim(E)$. ■

2.1.3 TENZORI NA MNOGOSTRUKOSTIMA

Sve konstrukcije koje smo uveli do sada proširićemo na tangentne vektore, tj. na elemente vektorskih raslojenja. Prvo posmatramo slučaj lokalnih vektorskih raslojenja.

2.1.3.1 Definicija

Neka je $\varphi: U \times F \longrightarrow U' \times F'$, $\varphi(u, f) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) \cdot f)$ lokalni VR-izomorfizam. Definišemo preslikavanje $\varphi_s^r: U \times T_s^r F \longrightarrow U' \times T_s^r F'$ sa

$$\varphi_s^r(u, t) = \left(\varphi_1(u), \left(\varphi_2(u)\right)_s^r(t)\right), t \in T_s^r F. \blacksquare$$

Primetimo da je $\varphi_2(u)$ izomorfizam za svako u, pa je $\left(\varphi_2(u)\right)_s^r$ dobro definisano.

2.1.3.2 Lema

Preslikavanje definisano u 2.1.3.1 $\varphi_s^r: U \times T_s^r F \longrightarrow U' \times T_s^r F'$ je *lokalni VR-izomorfizam.*

Dokaz:

Iz 2.1.1.6 (3.) imamo da je svako $\left(\varphi_2(u)\right)_s^r$ linearni izomorfizam, pa je φ_s^r bijekcija. Treba još pokazati da je $(u, t) \mapsto \varphi_s^r(u, t)$ glatko (odakle će takođe slediti da je $(\varphi_s^r)^{-1} = (\varphi^{-1})_s^r$ glatko). Znamo da je φ_1 glatko.

Posmatrajmo φ_2. Primetimo da je na prostoru linearnih funkcija $L(F, F')$ (tj. prostoru matrica), preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi^*$ $(= A \mapsto A^t)$ linearno, pa je onda i glatko. Šta više, prostor invertibilnih matrica $GL(F, F')$ je otvoren u $L(F, F')$ (jer je $GL(F, F') = \{A \in L(F, F') | \det(A) \neq 0\}$) i preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ (što odgovara $A \mapsto A^{-1}$) je glatko na $GL(F, F')$ na osnovu formule za inverznu matricu. Dakle, funkcije $u \mapsto \varphi_2(u)^*$ i $u \mapsto \varphi_2(u)^{-1}$ su glatke. Takođe su i funkcije $i_k, i_k': (\beta^1, \dots, \beta^r, f_1, \dots, f_s) \mapsto \beta^k$ resp. $\mapsto f_k$ linearne, pa otuda i glatke. Uzimajući sve ovo u obzir dobijamo da je

$$(u, t) \mapsto \left(\varphi_2(u)\right)_s^r(t) = (u, t) \mapsto (t, \varphi_2(u)^*, \dots, \varphi_2(u)^*, \varphi_2(u)^{-1}, \dots, \varphi_2(u)^{-1})$$

$$\mapsto t \circ (\varphi_2(u)^* \circ i_1, \dots, \varphi_2(u)^* \circ i_r, \varphi_2(u)^{-1} \circ i_1', \dots, \varphi_2(u)^{-1} \circ i_s')$$

glatko (jer je poslednje preslikavanje multilinearno, a samim tim i glatko). ■

Svakom VR E možemo pridružiti odgovarajuće $\binom{r}{s}$ tenzorsko raslojenje, čija su vlakna baš $(E_b)_s^r$.

2.1.3.3 Definicija

Neka je (E, B, π)VR sa vlaknima $E_b = \pi^{-1}(b)$. Definišemo

$$T_s^r(E) := \coprod_{b \in B} T_s^r(E_b) = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times (E_b)_s^r$$

$\binom{r}{s}$ $-$*tenzorsko raslojenje* (TR) na E. Neka $\pi_s^r: T_s^r(E) \longrightarrow B,\ \pi_s^r(e) = b,$ za $e \in T_s^r(E_b)$, označava kanoničku projekciju. Ako je $A \subseteq B$ definišemo

$$T_s^r(E)|_A := \coprod_{b \in A} T_s^r(E_b)\,. \blacksquare$$

Pokazaćemo da $T_s^r(E)$ ima strukturu VR sa bazom B. Koristeći sledeću definiciju definisaćemo VR-karte za $T_s^r(E)$ od VR-karti od E.

2.1.3.4 Definicija

Neka su E, E' VR i $f: E \longrightarrow E'$. f se naziva *VR-homeomorfizam*, ako za svako $e \in E$ postoji VR-karta (ψ, V) oko e i VR-karta (ψ', V') oko $f(e)$ tako da $f(W) \subseteq W'$ i $f_{\psi', \psi} = \psi' \circ f \circ \psi^{-1}$ je *lokalni VR- homomorfizam* (pogledaj 1.5.3 (1.)). Ako je f difeomorfizam i $f|_{E_b}: E_b \longrightarrow E'_{f(b)}$ linearni izomorfizam za svako $b \in B$, tada se f naziva *VR-izomorfizam.* U tom slučaju definišemo

$$f_s^r: T_s^r E \longrightarrow T_s^r E'$$

$$f_s^r|_{T_s^r(E_b)} := (f|_{E_b})_s^r, \quad \forall b \in B. \blacksquare$$

Može se pokazati da je glatka funkcija $f: E \longrightarrow E'$ VR-homomorfizam ako i samo ako je f linearno u vlaknima, tj. ako i samo ako je $f|_{E_b}: E_b \longrightarrow E'_{f(b)}$ linearno $\forall b \in B$.

2.1.3.5 Primer

1. Neka su M i N mnogostrukosti i $f: M \longrightarrow N$ glatko. Tada je $Tf: TM \longrightarrow TN$ VR-homomorfizam, jer iz 1.5.2. (1.) imamo
$$\begin{aligned} T\psi \circ Tf \circ T\varphi^{-1}(x, \omega) &= T(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x, \omega) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \cdot \omega). \end{aligned}$$
Ako je f difeomorfizam tada je Tf VR-izomorfizam.
2. Neka je E VR i (ψ, V) VR-karta. Tada je $\psi: W \longrightarrow U \times R^n$ VR-izomorfizam. Dakle, ako je $E = TM$ imamo da je $\psi = T\psi$ VR-izomorfizam, gde je ψ proizvoljna karta od M. $\blacksquare$

2.1.3.6 Teorema

Neka je (E, B, π) VR sa VR-atlasom $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Tada je $(T_s^r(E), B, \pi_s^r)$ VR sa VR-atlasom $\mathcal{A}_s^r = \{(\psi_\alpha)_s^r, (T_s^r(E)|_{W_\alpha \cap B}) \mid \alpha \in A\}$. $(T_s^r(E), B, \pi_s^r)$ se naziva *tenzorsko raslojenje tipa* $\binom{r}{s}$ nad E.

Dokaz:

Jasno je da $(T_s^r E)|_{W_\propto \cap B}$ pokrivaju $T_s^r E$. Neka su $\psi_\propto$ i ψ_β VR-karte iz $\mathcal{A}$ za koje je $W_{\propto\beta} \coloneqq W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$. Kako je

$$E|_{W_{\propto\beta}\cap B} \cong \bigcup_{b \in W_{\propto\beta}\cap B} \{b\} \times E_b,$$

sledi da je $\psi_\propto$ oblika $\psi_\propto(b,e) = \left(\psi_{\propto_1}(b), \psi_{\propto_2}(b) \cdot e\right)$, za $b \in B$, $e \in E_b$ i $\psi_{\propto_2}(b)$ je linearno za svako b.

Sada se $(\psi_\alpha)_s^r$ može definisati kao

$$(b,t) \mapsto \left(\psi_{\propto_1}(b), \left(\psi_{\propto_2}(b)\right)_s^r (t)\right) \left(t \in T_s^r(E_b)\right).$$

Tada imamo

$$\psi_\beta \circ {\psi_\alpha}^{-1}(x,\omega) = \psi_\beta \left(\underbrace{\psi_{\propto_1}^{-1}(x)}_{=:b}, \psi_{\propto_2}(b)^{-1} \cdot \omega\right)$$

$$= (\psi_{\beta_1}\left(\psi_{\propto_1}^{-1}(x)\right), \psi_{\beta_2}(b)\psi_{\propto_2}(b)^{-1}\omega)$$

$$=: \left(\psi_{\beta\propto_1}(x), \psi_{\beta\propto_2}(x) \cdot \omega\right).$$

Iz 2.1.1.6 (1.) i 2.1.3.1 sledi

$$(\psi_\beta)_s^r \circ ((\psi_\alpha)_s^r)^{-1}(x,t') = \left(\psi_\beta\right)_s^r (\psi_{\propto_1}^{-1}(x), (\psi_{\propto_2}(b)^{-1})_s^r)(t'))$$

$$= (\psi_{\beta_1}\left(\psi_{\propto_1}^{-1}(x)\right), \left(\psi_{\beta_2}(b)\psi_{\propto_2}(b)^{-1}\right)_s^r (t'))$$

$$= (\psi_{\beta\propto_1}(x), \left((\psi_{\beta\propto_2}(x))_s^r(t')\right) = (\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1})_s^r (x,t'),$$

što je na osnovu 2.1.3.2 lokalni VR-izomorfizam. Odatle je $T_s^r(E)$ VR. Kao i za TM, imamo da je $T_s^r(E)$ Hauzdorfova mnogostrukost i da zadovoljava aksiomu prebrojivosti. ■

Za dalje ispitivanje bitan nam je specijalan slučaj ove konstrukcije tj. $E = TM$.

2.1.3.7 Definicija

Neka je M mnogostrukost i $\tau_M: TM \longrightarrow M$ tangentno raslojenje. Tada se $T_s^r(M) := T_s^r(TM)$ naziva *vektorsko raslojenje r-puta kontravarijantnih i s-puta kovarijantnih* tenzora na M (resp. tenzori tipa $\binom{r}{s}$). Identifikujemo $T_1^0(M)$ sa T^*M ($T^*M \coloneqq T_1^0(M)$) i $T_1^0(M)$ se naziva *kotangentno raslojenje* od M i označava se sa $\tau_M^*: T^*M \longrightarrow M$. ■

Iz 2.1.1.5 imamo $T_0^1(M) = TM: \pi^{-1}(p) = T_pM \ \forall p \in M$ i $T_0^1(T_pM) = T_pM$. Za svaku kartu ψ od M je $(T\psi)_0^1 = T\psi$. Ako je $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ atlas od M, tada je

$$\mathcal{A}_s^r = \{((T\psi_\alpha)_s^r, (T_s^r M)|_{V_\alpha}) \mid \alpha \in A\}$$

VR-atlas od $T_s^r M$.

2.1.3.8 Definicija

Glatka sečenja od $T_s^r M$ (tj. glatke funkcije $t: M \longrightarrow T_s^r M$, $\pi_s^r \circ t = id_M$) se nazivaju $\binom{r}{s}$ *−tenzori* (resp. $\binom{r}{s}$ *−tenzorska polja*) na M. *Prostor* $\Gamma(\mathrm{M}, T_s^r M)$ glatkih $\binom{r}{s}$ *−tenzorskih polja* se označava sa $\mathcal{T}_s^r(M)$. Imamo $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$. Slično, umesto $\mathcal{T}_1^0(M)$ pisaćemo $\Omega^1(M)$. Elementi od $\Omega^1(M)$ se nazivaju *diferencijalne forme* reda 1 (ili 1 *−forme*, kovektorska polja). ■

Ako $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$ i $f \in C^\infty(M)$, tada je $ft: p \mapsto f(p)t(p) \in (T_pM)_s^r$ tenzorsko polje na M. To znači da je $\mathcal{T}_s^r(M)$ sa operacijama $+, f \cdot C^\infty(M)$ *−modul*.

Kao i u slučaju $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{T}_0^1(M)$ hoćemo da nađemo lokalnu reprezentaciju tenzorskih polja u kartama. Posmatrajmo još jedan specijalan slučaj $\Omega^1(M) = \mathcal{T}_1^0(M) = \Gamma(\mathrm{M}, T_1^0 M)$,

$$T_1^0 M = \coprod_{p \in M} (T_pM)^* = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times (T_pM)^*.$$

VR-karte od $T_1^0 M = T^*M$ su oblika $(T\psi)_1^0: T_1^0 M|_V \longrightarrow \psi(V) \times (R^n)_1^0 = \psi(V) \times (R^n)^*$ gde je (ψ, V) proizvoljna karta od M. Kao i u slučaju $TM = T_0^1 M$ hoćemo da koristimo VR-karte da bismo definisali bazu od $(T_pM)^*$. Podsetimo se da je na taj način dobijena i baza $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \mid 1 \le i \le n\right\}$ od T_pM, gde su $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = (T_p\psi)^{-1}(e_i)$, tj. $\frac{\partial}{\partial x^i} = p \mapsto (T\psi)^{-1}(\psi(p), e_i)$.

U slučaju $T_1^0 M$ označimo sa $\{\alpha^j | 1 \le j \le n\}$ dualnu bazu od $\{e_i | 1 \le i \le n\}$ u $(R^n)^*$. Za bilo koje $p \in V$ familija

$$dx^i|_p := \left[(T_p\psi)_1^0\right]^{-1} (\psi(p), \propto^i), \qquad (1 \le i \le n)$$

definiše bazu od $(T_pM)^*$. Imamo

$$dx^i|_p := [(T\psi)_1^0]^{-1}(\psi(p), \propto^i) =$$

$$= \left(p, \left[(T_p\psi)_1^0\right]^{-1} (\propto^i)\right) \overset{2.1.1.5.}{\cong} (p, \left(\left((T_p\psi)^{-1}\right)^*\right)^{-1} (\propto^i))$$

$$= \left(p, (T_p\psi)^* (\propto^i)\right). \qquad (2.1.3.1.)$$

Kako $dx^j|_p \in (T_pM)^*$ i $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$, možemo primeniti $dx^j|_p$ na $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$:

$$dx^j|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) = \left(T_p\psi\right)^*(\propto^j)(\left(T_p\psi\right)^{-1}(e_i))$$

$$=\propto^j\ (T_p\psi(\left(T_p\psi\right)^{-1}(e_i)))$$

$$=\propto^j\ (e_i) = \delta_{ij},$$

pa je $\left\{dx^j|_p\, , 1 \leq j \leq n\right\}$ baš dualna baza za $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\, , 1 \leq i \leq n\right\}$ u $(T_pM)^*$.

Drugi način posmatranja dx^i proizilazi iz sledeće definicije:

2.1.3.9 Definicija

Neka je $f \in C^\infty(M)$. Tada se

$$df: M \longrightarrow T^*M, \qquad p \mapsto T_pf$$

naziva *spoljašnji izvod* funkcije f. ■

2.1.3.10 Napomena

1. $df \in \mathcal{T}_1^0(M)$. To sledi iz činjenice da za proizvoljno $p \in M$ je $T_pf \in L\left(T_pM, R\right) = (T_pM)^*$, i da je df glatko, jer za proizvoljnu kartu ψ oko p $(\psi(p) = x)$ imamo
$$(T\psi)_1^0 \circ df \circ \psi^{-1}(x) = \left(x, \left(\left(T_p\psi\right)^{-1}\right)^* \circ T_pf\right) = \left(x, T_pf \circ \left(T_p\psi\right)^{-1}\right)$$
$$= \left(x, T_x(f \circ \psi^{-1})\right) = \left(x, D(f \circ \psi^{-1})(x)\right).$$

$$\begin{tikzcd} T_1^0M \arrow[r, "(T\psi)_1^0"'] & \psi(V) \times (R^n)^* \\ M \supseteq V \arrow[u, "df"] \arrow[r, "\psi"'] & \psi(V) \arrow[u, "id \times D(f \circ \psi^{-1})"'] \end{tikzcd}$$

2. Ako $f \in C^\infty(M)$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$, tada za svako $p \in M$, $X_p \in T_pM$ i $df|_p \in T_pM^*$, pa je $df(X) \coloneqq p \mapsto df|_p\left(X_p\right): M \longrightarrow R$ dobro definisano i važi:
$$df|_p\left(X_p\right) = T_pf|_p\left(X_p\right) = X(f)|_p\, .$$
Dakle, $df(X) = X(f)$. Takođe je $df(X) \in C^\infty(M)$.
3. Neka je (ψ, V) karta, $\psi = (x^1, \dots, x^n)$. Tada je $d(x^i)$ u smislu 2.1.3.9 baš gore definisano dx^i. Zaista, iz (2.) imamo da je
$$d\left(x^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(x^i\right) = \delta_{ij}$$
tj. $\left\{d\left(x^i\right)|_p\ |1 \leq i \leq n\right\}$ je baš dualna baza od $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\ \ |1 \leq i \leq n\right\}$, za svako $p \in V$. ■

Ako je (ψ, V) karta od M, $\psi = (x^1, \dots, x^n)$, tada je za svako $p \in M$ $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \ \ |1 \le i \le n\right\}$ baza od T_pM, a $\{dx^j|_p \ |1 \le j \le n\}$ je odgovarajuća dualna baza od T_pM^*. Otuda je na osnovu 2.1.1.3 za proizvoljno $p \in M$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}|_p \ \mid 1 \le i_k, j_k \le n\right\}$$

baza od $(T_pM)^r_s$.

Prema tome, ako je t sečenje od T^r_sM tada postoje jedinstveno određene funkcije $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ na V takve da je

$$t|_V = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \tag{2.1.3.2}$$

(pogledaj specijalan slučaj vektorskih polja u 1.5.5 : $X|_V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$). Kao i kod vektorskih polja i ovde postoji karakterizacija glatkosti tenzorskih polja u lokalnim koordinatama:

2.1.3.11 Definicija

Ako je $\psi: M \longrightarrow N$ difeomorfizam i $t \in T^r_s(M)$, tada se $\psi_*(t) = (T\psi)^r_s \circ t \circ \psi^{-1}$ naziva *push-forward* (guranje napred) od t sa ψ. Ako je $t \in T^r_s(N)$, onda se $\psi^* t = (\psi^{-1})_* \, t$ naziva *pull-back* (povlačenje unazad). ■

2.1.3.12 Propozicija

Neka je t sečenje od $T^r_s(M)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. t je glatko, tj. $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$.
2. U svakoj lokalnoj reprezentaciji (2.1.3.2.) svi koeficijenti $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ su glatke funkcije.

Dokaz:

Neka je (ψ, V) karta od M. Tada je $(T\psi)^r_s$ VR-karta od T^r_sM. Po definiciji t je glatko ako i samo ako je push-forward

$$\psi_*(t) \coloneqq (T\psi)^r_s \circ t \circ \psi^{-1} : \psi(V) \longrightarrow \psi(V) \times (R^n)^r_s$$

glatka funkcija za svaku kartu ψ.

Za svako $x \in \psi(V)$ imamo (stavljajući da je $p \coloneqq \psi^{-1}(x)$):

$$(T\psi)^r_s \circ t \circ \psi^{-1}(x) \overset{(2.1.3.2.)}{\cong} (T\psi)^r_s \left(t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}|_p\right)$$

$$= \left(x, \left(T_p\psi\right)^r_s \left(t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}|_p\right)\right)$$

$$\overset{2.1.1.6.(4.)}{\cong}\left(x, t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}(p)\underbrace{\left(T_p\psi\right)^1_0}_{=T_p\psi}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p\right)\otimes\dots\otimes\underbrace{\left(T_p\psi\right)^0_1}_{=\left(\left(T_p\psi\right)^*\right)^{-1}}\left(dx^{j_s}|_p\right)\right)$$

$$=\left(x, t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\left(\psi^{-1}(x)\right)\underbrace{e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\otimes\propto^{j_1}\otimes\dots\otimes\propto^{j_s}}_{\in(R^n)^r_s}\right).$$

Ovo preslikavanje je glatko ako i samo ako su sve funkcije $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\circ\psi^{-1}$ glatke, tj. ako i samo ako su funkcije $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ glatke na $V.$ ■

Ako je $t\in\mathcal{T}^r_s(M)$ i $\propto^1,\dots,\propto^r\in\Omega^1(M),\ X_1,\dots,X_s\in\mathfrak{X}(M)$, tada je

$$p\mapsto t(p)(\propto^1(p),\dots,\propto^r(p),X^1(p),\dots,X_s(p))$$

dobro definisano preslikavanje $M\longrightarrow R$, koje ćemo označiti sa $t(\propto^1,\dots,\propto^r,X_1,\dots,X_s)$.

Za $f\in C^\infty$(M) imamo

$$t(f\propto^1,\propto^2,\dots)=t(\propto^1,f\propto^2,\dots)=\cdots=t(\propto^1,\dots,fX_s)=ft(\propto^1,\dots,X_s).$$

To znači da je preslikavanje

$(\propto^1,\dots,\propto^r,X_1,\dots,X_s)\mapsto t(\propto^1,\dots,X_s)\quad C^\infty(M)$ −multilinearno.

2.1.3.13 Propozicija

Neka je t sečenje od T^r_sM. Tada su eledeći uslovi ekvivalentni:

1. t je glatko (tj. $t\in\mathcal{T}^r_s(M)$).
2. $\forall\propto^1,\dots,\propto^r\in\Omega^1(M),\forall X_1,\dots,X_s\in\mathfrak{X}(M)$, preslikavanje $t(\propto^1,\dots,\propto^r,X_1,\dots,X_s)\in C^\infty(M)$.

Dokaz:

Neka je (ψ,V) karta od M, $\psi=(x^1,\dots,x^n)$.

$(1.)\Rightarrow(2.)$ Neka su

$$X_k=X^{a_k}_k\frac{\partial}{\partial x^{a_k}}\ (1\le k\le s),\qquad\alpha^m=\alpha^m_{b_m}dx^{b_m}(1\le m\le r)$$

lokalne reprezentacije s obzirom na kartu ψ. Iz 2.1.3.12 sledi da su svi koeficijenti $X^{a_j}_j$, $\propto^i_{b_i}$, $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ glatke funkcije na V, pa je glatko i

$$t(\propto^1,\dots,X_s)=\propto^1_{b_1}\dots\propto^r_{b_r}X^{a_1}_1\dots X^{a_s}_st(dx^{b_1},\dots,dx^{b_r},\frac{\partial}{\partial x^{a_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{a_s}})$$

$$\overset{(2.1.3.2.)}{\cong}\propto^1_{b_1}\dots\propto^r_{b_r}X^{a_1}_1\dots X^{a_s}_s\,t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}.$$

$(2.) \Rightarrow (1.)$ Iz 2.1.3.12 sledi da trebamo pokazati da je $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ glatko na V za sve $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$. Iz 1.5.6 sledi da možemo produžiti $dx^{i_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}$ u elemente od $\Omega^1(M)$, resp. $\mathfrak{X}(M)$. Tada je

$$t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = t(dx^{i_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}})$$

glatko na osnovu $(2.)$. ■

Prethodna razmatranja dovode do sledeće algebarske karakterizacije glatkih tenzorskih polja. Neka je

$$L^{r+s}_{C^\infty(M)}(\underbrace{\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s}, C^\infty(M))$$

prostor $C^\infty(M)-$ multilinearnih preslikavanja iz $\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)$ u $C^\infty(M)$. Tada važi sledeće tvrđenje:

2.1.3.14 Teorema

Preslikavanje

$$A: \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow L^{r+s}_{C^\infty(M)}\big(\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M), C^\infty(M)\big)$$

$$t \mapsto [(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s) \mapsto t(\alpha^1, \dots, X_s)]$$

je $C^\infty(M)$ $-$linearni izomorfizam.

Dokaz:

Iz 2.1.3.13 imamo da je za sve $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $A(t) \in L^{r+s}_{C^\infty(M)}\big(\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}M, C\infty M$, jasno A je $C\infty M$–linearno.

<u>A je injekcija</u>: Neka je $A(t) = 0$, tada za svako $p \in M$ i sve $\alpha^1, \dots, X_s$, $t(p)\big(\alpha^1 (p), \dots, X_s(p)\big) = 0$. Svi elementi od T_pM, resp. $(T_pM)^*$ mogu se napisati na ovaj način (tj. oblika su $X_i(p)$, resp. $\alpha^j\ (p)$ za određena glatka polja X_i, α^j: to važi jer se svaki dat konstantan (ko-)vektor može produžiti u glatko polje korišćenjem particije jedinice). Prema tome je $t(p) = 0, \forall p$, tj. $t = 0$.

<u>A je sirjekcija</u>: Neka $\Phi \in L^{r+s}_{C^\infty(M)}\big(\Omega^1(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M), C^\infty(M)\big)$. Treba pokazati da postoji $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$ takvo da je $A(t) = \Phi$. Pokažimo prvo da $\Phi(\alpha^1, \dots, X_s)|_{\mathrm{p}}$ zavisi samo od $\alpha^1\ (p), \dots, X_s(p)$. Dovoljno je proveriti da li je $\alpha^i\ (p) = 0$, jer će iz toga slediti da je $\Phi(\alpha^1, \dots, X_s)|_{\mathrm{p}} = 0$ (analogno važi za $\alpha^2, \dots, X_s$). Pokažimo ovo u dva koraka:

1. Ako je V otvorena okolina od p i $\alpha^1\ |_V = 0$, tada je $\Phi(\alpha^1, \dots, X_s)|_{\mathrm{p}} = 0$ (tj. Φ zavisi samo od lokalnog ponašanja α^1). Izaberimo okolinu U od p takvu da je $\overline{U} \subseteq V$, tada postoji particija jedinice (χ_1, χ_2) koja odgovara pokrivaču $\{V, M \setminus \overline{U}\}$. Tada je $\alpha^1 = \chi_2 \cdot \alpha^1$, pa je

$$\Phi(\alpha^1, \dots, X_s)|_{\mathrm{p}} = \Phi\big(\chi_2\ \alpha^1, \alpha^2, \dots, X_s\big)|_p = \underbrace{\chi_2(p)}_{=0}\ \Phi(\alpha^1, \alpha^2, \dots, X_s)|_p = 0.$$

2. Neka je $\propto^1(p) = 0$, neka je V karta oko p i neka je $\propto^1|_{\mathrm{V}} = \propto^1_{\mathrm{j}}\, dx^j$. Iz 1. imamo
$$\Phi(\propto^1, \propto^2, \dots, X_s)|_p = \Phi\big(\propto^1_j\, dx^j, \propto^2, \dots, X_s\big)|_p = \propto^1_j(p)\Phi\big(dx^j, \propto^2, \dots, X_s\big)|_p = 0.$$
Prema tome, za svako $p \in M$ možemo definisati $t(p) \in (T_pM)^r_s$ na sledeći način:
$$t(p)\big(\propto^1(p), \dots, X_s(p)\big) \coloneqq \Phi(\propto^1, \propto^2, \dots, X_s)|_p,$$
pa je t sečenje od T^r_sM. Iz konstrukcije imamo da je za sve $\propto^i \in \Omega^1(M)$ i sve $X_j \in \mathfrak{X}(M)$
$$t(\propto^1, \dots, X_s) = \Phi(\propto^1, \propto^2, \dots, X_s) \in C^\infty(M),$$
pa $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$ na osnovu 2.1.3.13. Očigledno je $A(t) = \Phi$, dakle A jeste sirjekcija. ■

Sve uobičajene operacije u multilinearnim algebrama se mogu preneti po vlaknima na tenzorska polja. Susreli smo se do sada sa:

- $f \in C^\infty(M), t \in \mathcal{T}^r_s(M) \Rightarrow f \cdot t \coloneqq p \mapsto f(p) \cdot t(p) \in \mathcal{T}^r_s(M)$.
- $t \in \mathcal{T}^r_s(M), \propto^1, \dots, \propto^r \in \Omega^1(M), X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow t(\propto^1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)$.

Šta više, za $t_1 \in \mathcal{T}^{r_1}_{s_1}(M), t_2 \in \mathcal{T}^{r_2}_{s_2}(M)$ tenzorski proizvod $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(M)$ je definisan kao

$$t_1 \otimes t_2 : p \mapsto t_1(p) \otimes\ t_2(p),$$

to je glatko preslikavanje, što sledi iz 2.1.3.12 ili iz 2.1.3.13.

2.1.4 SIMETRIČNI TENZORI

Simetrični tenzori su oni tenzori čija se vrednost ne menja prilikom preuređenja njegovih argumenata. Oni imaju veoma važnu ulogu u diferencijalnoj geometriji. Bavićemo se samo kovarijantnim simetričnim tenzorima, na sličan način se opisuju i kontavarijantni.

Kao i do sada uvešćemo prvo simetrične tenzore na vektorskim prostorima. Neka je E konačno-dimenzionalan vektorski prostor. Za kovarijantni $k-$tenzor t na E (tj. tenzor tipa $\binom{0}{k}$) kažemo da je *simetričan* ako njegova vrednost ostaje nepromenjena prilikom promene bilo kog para argumenata:

$$t(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_k) = t(f_1, \dots, f_j, \dots, f_i, \dots, f_k),$$

za $1 \leq i, j \leq k$.

2.1.4.1 Propozicija

Za proizvoljan kovarijantni $k-$tenzor t na E sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. t je simetrično.
2. Za bilo koje vektore $f_1, \dots, f_k \in E$, vrednost $t(f_1, \dots, f_k)$ je nepromenjena kada se redosled $f_1, \dots, f_k$ izmeni.
3. Komponente $t_{i_1,\dots,i_k}$ od t, u odnosu na proizvoljnu bazu prostora E, su nepromenjene za bilo koju permutaciju indeksa.

Dokaz sledi iz definicije. ■

Označimo skup simetričnih kovarijantnih $k-$tenzora na E sa $\Sigma^k(E)$, on je očigledno vektorski potprostor od $T_k^0(E)$. Postoji prirodna projekcija $Sym: T_k^0(E) \longrightarrow \Sigma^k(E)$ koja se naziva *simetrizacija*, koja je definisana na sledeći način. Prvo, neka S_k označava grupu permutacija skupa $\{1, .., k\}$. Za dati kovarijantni $k-$tenzor t i permutaciju $\sigma \in S_k$, definisaćemo novi kovarijantni $k-$tenzor t^σ sa

$$t^\sigma(f_1, \dots, f_k) = t(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}).$$

Sada ćemo definisati $Sym\, t$ sa

$$Sym\, t = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} t^\sigma.$$

2.1.4.2 Lema (Osobine simetrizacije)

a) Za svaki kovarijantni tenzor t, $Sym\, t$ je simetričan.
b) t je simetričan ako i samo ako je $Sym\, t = t$.

Dokaz:

Pretpostavimo da $t \in T_k^0(E)$. Ako je $\tau \in S_k$ bilo koja permutacija, onda

$$
\begin{aligned}
(Sym\, t)\big(f_{\tau(1)}, \dots, f_{\tau(k)}\big) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} t^{\sigma}\,(f_{\tau(1)}, \dots, f_{\tau(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} t^{\sigma\tau}\,(f_1, \dots, f_k) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\eta \in S_k} t^{\eta}(f_1, \dots, f_k) \\
&= (Sym\, t)(f_1, \dots, f_k),
\end{aligned}
$$

gde je $\eta = \sigma\tau$, pri čemu η prolazi kroz sve elemente iz S_k, kao što to čini i σ. Ovim smo pokazali da je $Sym\ t$ simetrično.

Ako je t simetrično, onda iz 2.1.3.1. sledi da je $t^{\sigma} = t$ za sve $\sigma \in S_k$, a iz toga imamo da je $Sym\ t = t$. S druge strane, ako je $Sym\ t = t$, onda je t simetrično na osnovu a). ■

Ako su s i t simetrični tenzori na E, onda $s \otimes t$ nije simetrično u opštem slučaju. Međutim korišćenjem operatora simetrizacije, moguće je definisati novi proizvod koji će biti simetričan. Neka $s \in \Sigma^k(E)$ i $t \in \Sigma^l(E)$. Definisaćemo njihov simetričan proizvod koji će biti $(k+l)$ −tenzor st (nećemo koristiti oznaku za proizvod), sa

$$st = Sym\ (s \otimes t).$$

Eksplicitno, delovanje st na vektore $f_1, \dots, f_{k+l}$ je dato sa

$$st(f_1, \dots, f_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} s\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big) t\big(f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+l)}\big).$$

2.1.4.3 Propozicija (osobine simetričnog proizvoda)

a) Simetričan proizvod je simetričan i bilinearan za sve simetrične tenzore r, s, t i sve $a, b \in R$, tj.

$$st = ts,$$
$$(ar + bs)t = art + bst = t(ar + bs).$$

b) Ako su β i γ kovektori, onda važi

$$\beta\gamma = \frac{1}{2}(\beta \otimes \gamma + \gamma \otimes \beta).$$

Dokaz:

Neka $s, r \in \sum^k(E), t \in \sum^n(E)$ i neka su $f_1, \dots, f_{k+n}$ proizvoljni vektori.

a) Pokažimo: $st = ts$.

$$st(f_1, \dots, f_{k+n}) = Sym\,(s \otimes t)(f_1, \dots, f_{k+n}) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (s \otimes t)^\sigma (f_1, \dots, f_{k+n}) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (s \otimes t)\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} s\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big) \cdot t\big(f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} t\big(f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) \cdot s\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (t \otimes s)\big(f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}, f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (t \otimes s)^\sigma (f_1, \dots, f_{k+n}) =$$
$$Sym\,(t \otimes s)(f_1, \dots, f_{k+n}) = ts(f_1, \dots, f_{k+n})$$

Kako su vektori $f_1, \dots, f_{k+n}$ proizvoljni sledi $st = ts$.
Jednakost $(ar + bs)t = t(ar + bs)$ sledi iz $st = ts$.

Pokažimo: $(ar + bs)t = art + bst$.

$$(ar + bs)t(f_1, \dots, f_{k+n}) = Sym\,\big((ar + bs) \otimes t\big)(f_1, \dots, f_{k+n}) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} ((ar + bs) \otimes t)^\sigma (f_1, \dots, f_{k+n}) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} ((ar + bs) \otimes t)\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (ar + bs)\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big) \cdot t\big(f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} \Big[ar\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big) \cdot t\big(f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) + bs\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big) \cdot t\big(f_{\sigma(k+1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big)\Big] =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} \Big[(ar \otimes t)\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) + (bs \otimes t)\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big)\Big] =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (ar \otimes t)\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) + \frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (bs \otimes t)\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k+n)}\big) =$$
$$\frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (ar \otimes t)^\sigma (f_1, \dots, f_{k+n}) + \frac{1}{(k+n)!} \sum_{\sigma \in S_{k+n}} (bs \otimes t)^\sigma (f_1, \dots, f_{k+n}) =$$

$Sym\ (ar\otimes t)(f_1, \dots, f_{k+n}) + Sym\ (bs \otimes t)(f_1, \dots, f_{k+n}) =$
$art(f_1, \dots, f_{k+n}) + bst(f_1, \dots, f_{k+n}) = (art + bst)(f_1, \dots, f_{k+n})$

Kako su vektori $f_1, \dots, f_{k+n}$ proizvoljni sledi $(ar + bs)t = art + bst$.

b) Neka su β, γ kovektori tj. $\binom{0}{1}$ $-$tenzori.
<u>Pokažimo</u>: $\beta\gamma = \frac{1}{2}(\beta\otimes\gamma + \gamma \otimes \beta)$.

$$\beta\gamma(f_1, f_2) = Sym\ (\beta\otimes\gamma)(f_1, f_2) = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2}(\beta\otimes\gamma)^\sigma(f_1, f_2) =$$
$$\frac{1}{2}\big((\beta\otimes\gamma)(f_1, f_2) + (\gamma\otimes\beta)(f_2, f_1)\big) = \frac{1}{2}\big((\beta\otimes\gamma)(f_1, f_2) + (\gamma\otimes\beta)(f_1, f_2)\big) =$$
$$\frac{1}{2}(\beta\otimes\gamma + \gamma\otimes\beta)(f_1, f_2)$$

Kako su vektori $f_1, \dots, f_{k+n}$ proizvoljni sledi $\beta\gamma = \frac{1}{2}(\beta\otimes\gamma + \gamma \otimes \beta)$. ■

Simetrično tenzorsko polje na mnogostrukosti je kovarijantno tenzorsko polje čija je vrednost u svakoj tački simetričan tenzor. Simetrični proizvod dva ili više tenzorskih polja je definisan tačkasto, baš kao i tenzorski proizvod.

2.1.5 RIMANOVA METRIKA

Jedan od najvažnijih primera simetričnih tenzora na vektorskom prostoru su unutrašnji proizvodi (pogledaj 2.1.2). Unutrašnji proizvod omogućava da definišemo dužinu vektora i uglove između njih.

Prenošenjem ove ideje na mnogostrukosti, dobićemo jednu od najvažnijih primena tenzora u diferencijalnoj geometriji. Neka je M glatka mnogostrukost. *Rimanova metrika* na M je glatko simetrično 2 $-$tenzorsko polje koje je pozitivno definitno u svakoj tački. *Rimanova mnogostrukost* je par (M, g), gde je M glatka mnogostrukost, a g Rimanova metrika na M.

Ako je g Rimanova metrika na M, onda za svaku tačku $p \in M$, g_p je unutrašnji proizvod na T_pM. Iz tog razloga često se koristi notacija $\langle X, Y\rangle_g$ da bi se označio realan broj $g_p(X, Y)$, za $X, Y \in T_pM$.

U proizvoljnoj karti $\psi = (x^1, \dots, x^n)$, Rimanova metrika može da se zapiše lokalno kao

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j,$$

gde je g_{ij} simetrična pozitivno definitna matrica [2] glatkih funkcija.

---

[2] Simetrična matrica $\left[g_{ij}\right]$ je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad , \dots , \quad \left|g_{ij}\right| > 0.$$

Primetimo, simetrija od g nam omogućava da zapišemo g u obliku simetričnog proizvoda:

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$$

$$= \frac{1}{2}(g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{ji}dx^i \otimes dx^j) \text{ (pošto je } g_{ij} = g_{ji})$$

$$= \frac{1}{2}(g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{ij}dx^j \otimes dx^i)$$

$$= g_{ij}dx^i\, dx^j.$$

2.1.5.1 Primer

Najjednostavniji primer Rimanove metrike je Euklidska metrika $\bar{g}$ na R, definisana standardnim koordinatama

$$\bar{g} = \delta_{ij}dx^i\, dx^j.$$

Uobičajena je upotreba skraćenice ω^2 za simetrični proizvod tenzora ω sa samim sobom, pa se zato Euklidska metrika često zapisuje

$$\bar{g} = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2.$$

Primenjujući na vektore $v, \omega \in T_pR^n$, dobija se

$$\bar{g}_p(v, \omega) = \delta_{ij}v^i\omega^j = \sum_{i=1}^{n} v^i\omega^i = v \cdot \omega. \blacksquare$$

Evo nekoliko *geometrijskih konstrukcija* koje se mogu definisati na Rimanovoj mnogostrukosti (M, g):

- Dužina ili *norma* tangentnog vektora $X \in T_pM$ se definiše:
$$|X|_g = \langle X, X\rangle_g^{1/2} = g_p\langle X, X\rangle^{1/2}.$$
- *Ugao* između dva nenula tangentna vektora $X, Y \in T_pM$ je jedinstven ugao $\theta \in [0, \pi]$ koji zadovoljava
$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle_g}{|X|_g|Y|_g}.$$
- Za dva vektora $X, Y \in T_pM$ kažemo da su *ortogonalna* ako je $\langle X, Y\rangle_g = 0$.
- Ako je $\gamma: [a, b] \longrightarrow M$ po delovima glatka kriva, *dužina* γ je:
$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g dt.$$
Pošto je $|\gamma'(t)|_g$ neprekidna osim u najviše konačno mnogo vrednosti t, onda je integral dobro definisan.

Pretpostavimo da su (M, g) i $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Rimanove mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $F: M \longrightarrow \widetilde{M}$ se naziva *izometrija*, ako je to difeomorfizam koji zadovoljava $\tilde{F}^*\tilde{g} = g$. Ako postoji izometrija između M i $\widetilde{M}$, onda kažemo da su M i $\widetilde{M}$ *izometrijske* kao Rimanove mnogostrukosti. F se naziva *lokalna izometrija* ako u svakoj tački $p \in M$ postoji okolina U takva da je $F|_U$ izometrija iz U u otvoren podskup od $\widetilde{M}$.

Još jedna veoma korisna alatka na Rimanovoj mnogostrukosti je *ortogonalni okvir*. Neka je (M, g) n-dimenzionalna Rimanova mnogostrukost. *Lokalni okvir* $(E_1, \dots, E_n)$ za M definisan na nekom otvorenom podskupu $U \subset M$ se naziva *ortonormiran* ako je $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ ortonormirana baza za T_pM u svakoj tački $p \in U$ ili drugim rečima ako je $\langle E_i, E_j \rangle_g = \delta_{ij}$.

Na primer: koordinatni okvir $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ je globalni ortonormirani okvir na R^n.

2.1.5.2 Propozicija (egzistencija ortonormiranog okvira)

Neka je (M, g) Rimanova mnogostrukost. Za svako $p \in M$ postoji glatki ortonormiran okvir u okolini od p. (Dokaz pogledati u [5]). ■

2.1.5.3 Propozicija (egzistencija Rimanove metrike)

Na svakoj glatkoj mnogostrukosti može se definisati Rimanova metrika.

Dokaz:

Mnogostrukost M se može pokriti koordinatnim kartama $(U_\propto, \varphi_\alpha)$. U svakom koordinatnom domenu, postoji Rimanova metrika $g_\propto$ data sa Euklidskom metrikom $\delta_{ij} dx^i\, dx^j$ u koordinatama. Neka je $\{\psi_\alpha\}$ particija jedinice koja odgovara pokrivaču $\{U_\propto\}$ i definiše

$$g = \sum_{\propto} \psi_\alpha g_\propto .$$

Zbog lokalne konačnosti uslova za particiju jedinice, postoji samo konačno nenula sabiraka u okolini proizvoljne tačke, odatle sledi da je gore navedeni izraz glatko tenzorsko polje. Očigledno je i simetrično, pa nam ostaje samo da pokažemo pozitivnu definitnost. Ako je $X \in T_pM$ nenula vektor, onda važi

$$g_p(X, X) = \sum_{\propto} \psi_\alpha(p)\, g_\propto|_p(X, X).$$

Ova suma je nenegativna, jer je svaki sabirak nenegativan. Najmanje jedna od funkcija ψ_α je strogo pozitivna u p (jer je zbir 1). Pošto je $g_\propto|_p(X, X) > 0$ sledi da je $g_p(X, X) > 0$. ■

2.2 DIFERENCIJALNE FORME

U ovom poglavlju proučavamo alternirajuće multilinearne forme, prvo u vektorskim prostorima, a potom i na vektorskim raslojenjima.

2.2.1 SPOLJAŠNJA ALGEBRA

2.2.1.1 Definicija

Neka je E konačno dimenzionalan vektorski prostor, multilinearno preslikavanje $t \in L^*(E, R)$ se naziva *alternirajuće* ako važi:

$$t(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_k) = -t(f_1, \dots, f_j, \dots, f_i, \dots, f_k), \ \ 1 \leq i < j \leq k.$$

Označimo sa $\lambda^k E^* \coloneqq L^k_{alt}(E, R)$ prostor svih multilinearnih alternirajućih funkcija iz $E^k = E \times \dots \times E$ u R. ■

Neka je $S_k \coloneqq \{\varphi: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, k\} | \ \varphi \ je \ bijekcija\}$ grupa permutacija reda k. Tada za $\sigma \in S_k$ i $t \in \lambda^k E^*$ važi

$$t(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}) = sgn\,(\sigma)\, t(f_1, \dots, f_k),$$

Za $\sigma, \tau \in S_k$, $sgn\,(\sigma \circ \tau) = sgn\,(\sigma) \cdot sgn\,(\tau)$. Pošto je S_k grupa sledi da je za svako $\tau_0 \in S_k$ preslikavanje

$$\tau \mapsto \tau \circ \tau_0 : S_k \longrightarrow S_k$$

bijekcija.

Primetimo, iz definiciji imamo da je $\lambda^0 E^* = R$. Šta više,

$$\lambda^1 E^* \coloneqq L^1_{alt}(E, R) = L(E, R) = E^*.$$

$\lambda^k E^*$ je potprostor od $T^0_k(E)$, prostor svih multilinearnih preslikavanja $E \times \dots \times E \longrightarrow R$.

2.2.1.2 Definicija

Preslikavanje

$$Alt: T^0_k(E) \longrightarrow T^0_k(E),$$

$$Alt\,(t)(f_1, \dots, f_k) \coloneqq \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn\,(\sigma) t(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)})$$

se naziva *alternator*. ■

2.2.1.3 Lema

Alt je linearna projekcija $T_k^0(E)$ na $\lambda^k E^*$, tj.

1. Alt je linearno, $Alt\left(T_k^0(E)\right) \subseteq \lambda^k E^*$.
2. $Alt|_{\lambda^k E^*} = id_{\lambda^k E^*}$.
3. $Alt \circ Alt = Alt$.
4. $Alt\left(T_k^0(E)\right) = \lambda^k E^*$.

Dokaz:

1. Jasno je da je Alt linearno. Neka $t \in T_k^0(E)$, $\tau \in S_k$. Tada

$$Alt(t)\big(f_{\tau(1)}, \dots, f_{\tau(k)}\big) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn\,(\sigma)t(f_{\tau\sigma(1)}, \dots, f_{\tau\sigma(k)})$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn\,(\tau)sgn\,(\tau\circ\sigma)t(f_{\tau\sigma(1)}, \dots, f_{\tau\sigma(k)})$$

$$= sgn(\tau)Alt(t)(f_1, \dots, f_k).$$

2. Ako $t \in \lambda^k E^*$, tada je

$$Alt\,(t)(f_1, \dots, f_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn\,(\sigma)t(f_{\tau\sigma(1)}, \dots, f_{\tau\sigma(k)}) = t(f_1, \dots, f_k).$$

3 i 4. slede iz 1. i 2. ■

2.2.1.4 Definicija

Neka su $\propto \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$. *Spoljašnji proizvod* $\propto$ i β se definiše kao:

$$\propto\wedge\,\beta := \frac{(k+l)!}{k!\,l!}Alt\,(\propto\otimes\,\beta).$$

Za $\propto \in T_0^0(E) = \lambda^0 E^* = R$ stavimo $\propto\wedge\beta = \beta\wedge\propto = \propto\cdot\beta$. ■

2.2.1.5 Primer

Neka $\propto, \beta \in \lambda^1 E^* = T_1^0(E) = E^*$. Tada je

$$(\propto\wedge\,\beta)(f_1, f_2) = \frac{2!}{1!\,1!}\,\frac{1!}{2!}\sum_{\sigma\in S_2} sgn\,(\sigma)(\propto\otimes\,\beta)(f_{\sigma(1)}, f_{\sigma(2)})$$

$$= (\propto\otimes\,\beta)(f_1, f_2) - (\propto\otimes\,\beta)(f_2, f_1) =$$

$$= (\propto\otimes\,\beta - \beta\otimes\propto)(f_1, f_2).$$ ■

2.2.1.6 Propozicija

Neka $\propto \in T_k^0(E), \beta \in T_l^0(E)$ i $\gamma \in T_m^0(E)$. Tada:

1. $\propto \wedge \beta = Alt(\propto) \wedge \beta = \propto \wedge Alt(\beta)$.
2. $\wedge$ je bilinearno.
3. $\propto \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \propto$.
4. $\wedge$ je asocijativno: $\propto \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\propto \wedge \beta) \wedge \gamma$.

Dokaz:

1. Za $\tau \in S_k$ i $\propto \in T_k^0(E)$ neka je $(\tau\alpha)(f_1, \dots, f_k) \coloneqq \alpha\big(f_{\tau(1)}, \dots, f_{\tau(k)}\big)$. Tada je

$$Alt(\tau\alpha)(f_1, \dots, f_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn\,(\sigma) \propto (f_{\tau\sigma(1)}, \dots, f_{\tau\sigma(k)})$$

$$= sgn\,(\tau) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn\,(\sigma\tau) \alpha(f_{\sigma\tau(1)}, \dots, f_{\sigma\tau(k)})$$

$$= sgn\,(\tau)\, Alt(\alpha)(f_1, \dots, f_k).$$

Odatle je

$$Alt(\tau\alpha) = sgn\,(\tau) \cdot Alt(\alpha). \qquad (2.2.1.1.)$$

Koristeći jednakost (2.2.1.1.) dobijamo

$$Alt(Alt(\propto) \otimes \beta)(f_1, \dots, f_{k+l}) = Alt(Alt(\propto)(f_1, \dots, f_k)\beta(f_{k+1}, \dots, f_{k+l}))$$

$$= Alt(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} sgn\,(\tau) \alpha(f_{\tau(1)}, \dots, f_{\tau(k)}) \beta(f_{k+1}, \dots, f_{k+l}))$$

$$= Alt(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} sgn\,(\tau)\, ((\tau\alpha) \otimes \beta)(f_1, \dots, f_{k+l}))$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} sgn\,(\tau)\, Alt((\tau\alpha) \otimes \beta)(f_1, \dots, f_{k+l})) = (*).$$

Definišemo $\tau' \in S_{k+l}$ sa

$$\tau'(1, \dots, k+l) \coloneqq (\tau(1), \dots, \tau(k), k+1, \dots, k+l).$$

Tada je $sgn\,(\tau') = sgn(\tau)$ i $(\tau\alpha) \otimes \beta = \tau'(\propto \otimes \beta)$, pa je

$$(*) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} sgn\,(\tau')\, Alt(\tau'(\alpha \otimes \beta))(f_1, \dots, f_{k+l})$$

$$\overset{2.2.1.1.}{\triangleq} Alt(\alpha \otimes \beta)(f_1, \dots, f_{k+l}).$$

Dakle, $Alt(Alt(\propto) \otimes \beta) = Alt(\alpha \otimes \beta)$, i $Alt(\propto) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta$. Druga jednakost u 2. sledi na isti način.

2. je jasno, jer je $\otimes$ bilinearno, a Alt je linearno.
3. Neka je $\sigma_0 \in S_{k+l}$ dato sa $\sigma_0(1, \dots, k+l) := (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$. Tada je $sgn\ (\sigma_0) = (-1)^{k \cdot l}$ i $\alpha \otimes \beta(f_1, \dots, f_{k+l}) = \beta \otimes\!\propto \left(f_{\sigma_0(1)}, \dots, f_{\sigma_0(k+l)}\right)$. Iz (2.2.1.1.) sledi
$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} Alt\ (\ \alpha \otimes \beta) = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} Alt\big(\sigma_0(\beta \otimes\!\propto)\big) = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha.$$
4.
$$\begin{aligned}
\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &= \frac{(l+m)!}{l!\,m!} \propto \wedge\, Alt(\beta \otimes \gamma) \overset{1.}{\cong} \frac{(l+m)!}{l!\,m!} \propto\wedge\, (\beta \otimes \gamma) \\
&= \frac{(l+m)!}{l!\,m!} \frac{(k+l+m)!}{k!\,(l+m)!} Alt\ \underbrace{(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma))}_{(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma} \\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} \frac{(k+l)!\,m!}{(k+l+m)!} (\alpha \otimes \beta) \wedge \gamma \\
&\overset{1.}{\cong} \underbrace{\frac{(k+l)!}{k!\,l!} Alt(\alpha \otimes \beta)}_{=\alpha\wedge\beta} \wedge \gamma \\
&= (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma. \blacksquare
\end{aligned}$$

2.2.1.7 Definicija

$\lambda E^* = \otimes_{k=0}^{\infty}\ \lambda^k E^*$ sa operacijama $+, c\,\cdot$ i $\wedge$ se naziva *spoljašnja algebra* (ili *Grasmanova algebra*) od E. $\blacksquare$

Kao što ćemo ubrzo pokazati, $\lambda^k E^* = \{0\}$ za $k > n$, pa je

$$\lambda E^* = \otimes_{k=0}^{n}\ \lambda^k E^*.$$

Da bismo ovo pokazali potreban je pomoćni rezultat:

2.2.1.8 Lema

Neka $\propto^1, \dots, \propto^k \in \lambda^1 E^* = E^*$ i $f_1, \dots, f_k \in E$. Tada je

$$(\propto^1 \wedge \dots \wedge \propto^k)(f_1, \dots, f_k) = \sum_{\sigma \in S_2} sgn\ (\sigma) \propto^1 \left(f_{\sigma(1)}\right) \cdot \dots \cdot \propto^k \left(f_{\sigma(k)}\right).$$

Dokaz:

Koristićemo matematičku indukciju da bismo dokazali da je

$$\propto^1 \wedge \dots \wedge \propto^k = k! \cdot Alt(\propto^1 \otimes \dots \otimes \propto^k).$$

Za $k = 1$ tvrđenje je tačno, pretpostavimo da važi i za $k-1$. Pokažimo da važi za k

$$\begin{aligned}
\propto^1 \wedge \dots \wedge \propto^k &\overset{2.2.1.6(4.)}{\cong} \propto^1 \wedge (\propto^2 \wedge \dots \wedge \propto^k) \\
&\overset{IH}{\cong} (k-1)!\ \propto^1 \wedge\, Alt(\propto^2 \otimes \dots \otimes \propto^k)
\end{aligned}$$

$$\overset{2.2.1.6\ (1.)}{\cong} \quad (k-1)!\propto^1\wedge(\propto^2\otimes\ldots\otimes\propto^k)$$

$$= (k-1)!\ \frac{(k-1+1)!}{(k-1)!1!} Alt\ (\propto^1\otimes\ldots\otimes\propto^k)$$

$$= k!\, Alt(\propto^2\otimes\ldots\otimes\propto^k).\ \blacksquare$$

2.2.1.9 Propozicija

Neka je $n = \dim(E)$. Tada je $\dim(\lambda^k E^*) = \binom{n}{k}$, za $0 \le k \le n$. Za $k > n$, $\lambda^k E^* = \{0\}$. Prema tome je $\dim(\lambda E^*) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od E i $\{\propto^1, \ldots, \propto^n\}$ odgovarajuća dualna baza, tada je

$$B \coloneqq \left\{\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_k} | 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\right\}$$

baza od $\lambda^k E^*$.

Dokaz:

B generiše $\lambda^k E^*$: neka $t \in \lambda^k E^* \subseteq T_k^0(E)$. Iz 2.1.3 sledi da je t oblika

$$t = t\big(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\big)\alpha^{i_1}\otimes\ldots\otimes\alpha^{i_k}.$$

Iz 2.2.1.3 (2.) i 2.2.1.8 sledi

$$t = Alt(t) = t\big(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\big)Alt\big(\alpha^{i_1}\otimes\ldots\otimes\alpha^{i_k}\big) = \frac{1}{k!}t\big(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\big)\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_k}.$$

Pošto je t antisimetrično, onda se svi članovi sume analiraju ako se pojave dva ista indeksa. Odavde sledi da je $t = 0$ za $k > n$, pa je $\lambda^k E^* = \{0\}$ za $\forall k > n$. Ako su svi indeksi i_j različiti, tada za svako $\sigma \in S_k$ imamo

$$t\big(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\big)\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_k} = sgn\,(\sigma)^2 t\left(e_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, e_{i_{\sigma(k)}}\right)\alpha^{i_{\sigma(1)}}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_{\sigma(k)}}.$$

Postoji $k!$ takvih članova, pa dobijamo:

$$t = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} t(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\,\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_k}.$$

Ostalo je da pokažemo da je B linearno nezavisan: neka je

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} t_{i_1\ldots i_k}\,\alpha^{i_1}\wedge\ldots\wedge\alpha^{i_k} = 0.$$

Treba da pokažemo da su svi $t_{i_1\ldots i_k} = 0$. Neka je $1 \le {i_1}' < \cdots < {i_k}' \le n$ fiksirana k −torka indeksa i izaberimo $j'_{k+1} < \cdots < j'_n$ tako da je $\{i'_1, \ldots, i'_k\} \cup \{j'_{k+1}, \ldots, j'_n\} = \{1,2, \ldots, n\}$.

Tada iz 2.2.1.6 sledi

$$0 = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} t_{i_1 \dots i_k}\, \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k} \wedge \alpha^{j'_{k+1}} \wedge \dots \wedge \alpha^{j'_n} = \pm\, t_{i'_1 \dots i'_k}\, \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n.$$

Kako je $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n \neq 0$ (Iz 2.2.1.8 sledi da je $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n\ (e_1, \dots, e_n) = 1$), dobijamo da je $t_{i'_1 \dots i'_k} = 0$. ■

2.2.1.10 Definicija

Neka je $\dim(E) = n$, $\omega \in \lambda^n E^*, \omega \neq 0$. ω se naziva *zapreminski element* na E. Dva zapreminska elementa ω_1, ω_2 su ekvivalentna ako je $\omega_1 = c \cdot \omega_2$, za neko $c > 0$ (od ranije znamo da je $\dim(\lambda^n E^*) = 1$). Klasa ekvivalencije zapreminskih elemenata na E se naziva *orijentacija* od E. ■

Ubrzo ćemo videti vezu između zapreminskih elemenata i determinanti.

2.2.1.11 Propozicija

Neka su $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in E^*$. Tada su $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ linearno zavisni ako i samo ako $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = 0$.

Dokaz:

Ako su $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ linearno zavisni, tada za svako i važi

$$\alpha^i = \sum_{j \neq i} c_j\, \alpha^j$$

Zatim, pošto je $\alpha \wedge \alpha = 0$, vidimo da je $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = 0$.

Nasuprot tome, ako su $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ linearno nezavisni, onda se mogu proširiti do baze $\alpha^1, \dots, \alpha^n$. Tada je $\alpha^1, \dots, \alpha^n \neq 0$ na osnovu 2.2.1.6, pa je samim tim $\alpha^1, \dots, \alpha^k \neq 0$. ■

2.2.1.12 Propozicija

Neka je $\dim(E) = n$ i $\varphi \in L(E, E)$. Tada postoji jedinstven broj $\det \varphi \in R$, determinanta od φ, tako da za pull-back preslikavanje (povlačenje unazad)

$$\varphi^* \colon \lambda^n E^* \longrightarrow \lambda^n E^*$$

$$(\varphi^* \omega)(f_1, \dots, f_n) \coloneqq \omega(\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n))$$

važi $\varphi^* \omega = \det \varphi \cdot \omega$, za sve $\omega \in \lambda^n E^*$.

Dokaz:

Očigledno da je φ^* linearno preslikavanje iz $\lambda^n E^*$ u $\lambda^n E^*$. Iz 2.2.1.9 sledi da je $\dim(\lambda^n E^*) = 1$. Prema tome je s obzirom na proizvoljnu bazu $\{\omega_0\}$ od $\lambda^n E^*$, preslikavanje φ^* dato 1×1 matricom $c \in R$. Odatle za proizvoljno $\omega = a \cdot \omega_0$ važi $\varphi^* \omega = c \cdot a \cdot \omega_0$, a otuda se dobija da je $\det \varphi \coloneqq c$. ■

2.2.1.13 Napomena

Determinanta u smislu 2.2.1.12 je upravo determinanta iz linearne algebre: neka je $\{e_1, \dots, e_n\} =: B$ baza od E, a $\{\propto^1, \dots, \propto^n\}$ odgovarajuća dualna baza, i $\omega \coloneqq \propto^1 \wedge \dots \wedge \propto^n$.

Tada je

$$\det\varphi = \det\varphi\omega(e_1, \dots, e_n) = \varphi^*\omega(e_1, \dots, e_n) = \omega(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

$$\overset{2.2.1.8}{\triangleq} \sum_{\sigma\in S_n} sgn\,(\sigma) \propto^1 \left(\varphi\big(e_{\sigma(1)}\big)\right) \cdot \dots \cdot \propto^n \left(\varphi\big(e_{\sigma(n)}\big)\right)$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sgn\,(\sigma)\, \varphi_{1\sigma(1)} \cdots \varphi_{n\sigma(n)},$$

gde je $(\varphi_{ij})_{ij}$ matrična reprezentacija od φ s obzirom na B. ■

2.2.1.14 Definicija

Neka je $\varphi \in L(E, F), \alpha \in T_k^0(E),\ \beta \in T_k^0(F)$.

- *Pullback* od β pod dejstvom φ je definisano sa
$$\varphi^* : T_k^0(F) \longrightarrow T_k^0(E),$$
$$\varphi^*(\beta)(e_1, \dots, e_k) \coloneqq \beta\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k)\big), \quad e_1, \dots, e_k \in E.$$
- Ako je φ bijekcija, tada je *push-forward* definisan sa
$$\varphi_* : T_k^0(E) \longrightarrow T_k^0(F), \qquad \varphi_* \coloneqq (\varphi^{-1})^*,$$
pa je
$$\varphi_* \propto (f_1, \dots, f_k) = \propto \big(\varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_k)\big), \qquad f_1, \dots, f_k \in F.$$

Tada je $\varphi_* = \varphi_k^0$ u smislu 2.1.4.■

2.2.1.15 Propozicija

Neka je $\varphi \in L(E, F), \psi \in L(F, G)$. Tada važi:

1. $\varphi^*: T_k^0(F) \longrightarrow T_k^0(E)$ je linearno, $\varphi^*(\lambda^k F^*) \subseteq \lambda^k E^*$.
2. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.
3. Ako je $\varphi = id_E$, onda je $\varphi^* = id_{T_k^0(E)}$.
4. Ako je φ bijekcija, onda je i φ^* bijekcija i $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.
5. Ako je φ bijekcija, onda je i φ_* bijekcija i $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$. Ako je i ψ bijekcija, onda je $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ\ \varphi_*$.
6. Ako $\alpha \in \lambda^k F^*, \beta \in \lambda^l F^*$, onda je $\varphi^*(\propto \wedge\, \beta) = \varphi^* \propto \wedge\ \varphi^*\beta$.

Dokaz:

1. i 2. su očigledno jasni.

3. $$(\psi \circ \varphi)^* \propto (e_1, \dots, e_k) = \propto \Big(\psi\big(\varphi(e_1)\big), \dots, \psi\big(\varphi(e_k)\big)\Big) = (\psi^* \propto)\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k)\big)$$
$$= \varphi^*(\psi^* \propto)(e_1, \dots, e_k).$$

4. sledi iz 2. i 3.

5. $$(\varphi_*)^{-1} = ((\varphi^{-1})^*)^{-1} \overset{4.}{=} ((\varphi^*)^{-1})^{-1} = \varphi^*.$$

6. $$\varphi^*(\propto \wedge\, \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}) = (\propto \wedge\, \beta)\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_{k+l})\big)$$
$$= \overset{2.2.1.2 \;\; 2.2.1.4}{\cdots} = \big((\varphi^* \propto) \wedge (\varphi^* \beta)\big)(e_1, \dots, e_{k+l}).\ \blacksquare$$

2.2.2 DIFERENCIJALNE FORME NA MNOGOSTRUKOSTIMA

Konstrukcije koje smo prethodno definisali sada ćemo preneti na vektorska raslojenja. Počećemo sa lokalnim vektorskim raslojenjima.

2.2.2.1 Definicija

Neka je $\varphi\colon U \times F \longrightarrow U' \times F'$ lokalni VR-izomorfizam, definisan sa

$$\varphi(u, f) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) \cdot f).$$

Preslikavanje φ_* je definisano sa $\varphi_*\colon U \times \lambda^k F^* \longrightarrow U' \times \lambda^k F'^*,\ (u, \omega) \mapsto \big(\varphi_1(u), \varphi_2(u)_*(\omega)\big).$ $\blacksquare$

2.2.2.2 Napomena

Kako je $\varphi_* = \varphi_k^0$, iz 2.1.2.2 (i 2.2.1.15) sledi da je φ_* je lokalni VR-izomorfizam (LVR). $\blacksquare$

2.2.2.3 Definicija

Neka je (E, B, π) VR, $E_b = \pi^{-1}(b)$ vlakno nad $b \in B$. Tada

$$\lambda^k E^* := \coprod_{b \in B} \lambda^k E_b^* = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times \lambda^k E_b^*$$

i $\pi_k^0\colon \lambda^k E^* \longrightarrow B,\ \pi_k^0(e) = b$ za $e \in \lambda^k E_b^*$. Za $A \subseteq B$ stavimo da je $\lambda^k E^*|_A = \coprod_{b \in A} \lambda^k E_b^*$. $\blacksquare$

2.2.2.4 Teorema

Neka je (E, B, π) VR sa atlasom $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, W_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Tada je $(\lambda^k E^*, B, \pi_k^0)$ VR sa atlasom $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\psi_\alpha)_*, \lambda^k E^*|_{W_\alpha \cap B} \mid \alpha \in A\}$, gde je $(\psi_\alpha)_* = (\psi_\alpha)_k^0$ (pogledati 2.1.2.4), tj. $(\psi_\alpha)_*|_{\lambda^k E_b^*} = (\psi_\alpha|_{E_b})_*$.

Dokaz:

$\lambda^k E^*|_{W_\alpha \cap B}$ pokriva $\lambda^k E^*$. Iz 2.2.1.15 (5.), $(\psi_\alpha)_*|_{\lambda^k E_b^*}$ su linearni izomorfizmi sa slikom $\{\psi_{\propto 1}(b)\} \times \lambda^k\ (R^n)^*$. Promena VR- karti su LVR-izomorfizmi u skladu sa 2.1.3.6 i 2.2.1.15. U stvari, $(\psi_\alpha)_* = (\psi_\alpha)_k^0$. Slično kao i u 1.5.1 i ovde sledi da je topologija $\lambda^k E^*$ Hausdorfova i da zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. ■

Posmatrajmo specijalan slučaj $E = TM$.

2.2.2.5 Definicija

Neka je M mnogostrukost. $\lambda^k T^*M \coloneqq \lambda^k(TM)^*$ se naziva *vektorsko raslojenje spoljašnjih* k *−formi* na TM. Prostor glatkih sečenja od $\lambda^k T^*M$ se označava sa $\Omega^k(M)$ i njegovi elementi se nazivaju *diferencijalne forme reda* k ili (*spoljašnje*) k *−forme* na M. ■

Primetimo da je $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ i $\Omega^1(M)$ prostor $1 -$ formi (pogledati 2.1.3.8).

2.2.2.6 Napomena

1. Iz 2.2.1.1 sledi da je svako vlakno od $\lambda^k T^*M$, tj. svako $\lambda^k T_p^* M$ je potprostor od $(T_pM)_k^0$ koji se sastoji od alternirajućih $\binom{0}{k}$ −tenzora. Odatle sledi da su sečenja od $\lambda^k T^*M$ određena $\binom{0}{k}$ −tenzorska polja koja su u svakom $p \in T^*M$ alternirajuća multilinearna preslikavanja.
2. Neka je (ψ, V)karta od M, $\psi = (x^1, \dots, x^n)$. Iz 2.2.1.9 imamo da za svako $p \in V$ familija $\{dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\}$ formira bazu od $\lambda^k T_p^* M^*$. Prema tome, svako sečenje ω od $\lambda^k T^*M$ može se lokalno predstaviti kao
$$\omega|_V = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k}\ dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \tag{2.2.2.1.}$$
gde su $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)$. Pošto su VR-karte od $\lambda^k T^*M$ oblika $(T\psi)_k^0$, ω je glatko ako i samo ako je za svaku kartu (ψ, V) preslikavanje
$$\psi_* \omega = (T\psi)_k^0 \circ \omega \circ \psi^{-1} = (T\psi)_* \circ \omega \circ \psi^{-1}$$
glatko. Kao i u dokazu 2.1.3.12 i ovde sledi da je
$$\psi_* \omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k} \circ \psi^{-1} \propto^{i_1} \wedge \dots \wedge \propto^{i_k}.$$
Dakle, ω je glatko ako i samo ako su za svaku kartu sve lokalne komponente $\omega_{i_1 \dots i_k}$ glatke.
3. Iz 2. i 2.1.3.13 imamo da je sečenje ω od $\lambda^k T^*M$ glatko ako i samo ako je za $\forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$.
4. Iz 1. i 2.1.3.14 sledi da je $\Omega^k(M)$ prostor svih $C^\infty(M)$ −multilinearnih i alternirajućih preslikavanja $(\mathfrak{X}(M))^k \longrightarrow C^\infty(M)$.

5. Pored operacija $+, f\cdot$ i $\otimes$ koje smo do sada izučavali, za diferencijalne forme postoji i *spoljašnji proizvod*: neka $\propto \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^k(M)$. Tada imamo:
$$\propto \wedge \beta \coloneqq p \mapsto \alpha(p) \wedge \beta(p) \in \lambda^{k+l} T_p M^*.$$
Sledi da je $\propto \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(M)$ (glatkost sledi iz 2. ili 3.).
$$\Omega(\mathrm{M}) \coloneqq \otimes_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \Omega^k(M)$$
sa ovim operacijama se naziva *algebra diferencijalnih formi* na M. ■

U 2.1.3.9 i 2.1.3.10 uveli smo spoljašnji izvod df glatke funkcije f. Ovu operaciju ćemo proširiti sa $\Omega^0(M)$ na $\Omega^k(M)$.

2.2.2.7 Teorema

Neka je M mnogostrukost. Za svaki otvoren skup $U \subseteq M$ postoji jedinstveno definisana familija preslikavanja

$$d^k(U): \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U),$$

koju ćemo označiti sa d, takva da važi

1. d je R −linearno i za $\propto \in \Omega^k(U),\ \beta \in \Omega^l(U)$ imamo
$$d(\propto \wedge \beta) = d \propto \wedge \beta + (-1)^k \propto \wedge d\beta.$$
2. Za $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(M),\ df$ je spoljašnji izvod iz 2.1.3.9.
3. $d \circ d = 0$.
4. Ako su U, V otvoreni skupovi takvi da je $U \subseteq V \subseteq M$ i $\propto \in \Omega^k(V)$ tada je $d(\propto|_U) = (d \propto)|_U$ tj. dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(V) \arrow[r, "|_U"'] \arrow[d, "d"'] & \Omega^k(U) \arrow[d, "d"] \\
\Omega^{k+1}(V) \arrow[r, "|_U"'] & \Omega^{k+1}(U)
\end{tikzcd}$$

d se naziva *spoljašnji izvod.*

Dokaz:

<u>Jedinstvenost</u>: Iz 4. sledi da je dovoljno pokazati da je d jedinstveno definisano u proizvoljnoj karti (ψ, U). Neka $\omega \in \Omega^k(U)$. Iz 2.2.2.6 (2.),

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge\, dx^{i_k}.$$

Prema tome, iz (1.),(2.) i (3.) dobijamo

$$d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} d(\omega_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge\, dx^{i_k})$$

$$= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d\omega_{i_1\dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \qquad (*)$$

$$+ \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega_{i_1\dots i_k} \wedge \underbrace{d(dx^{i_1})}_{0} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + 0 + \cdots + 0,$$

odakle sledi jedinstvenost.

Egzistencija: Za proizvoljnu kartu definišemo d sa $(*)$. Pokazaćemo da ovako definisano d ima tražene osobine $(1.) - (4.)$:

(1.) linearnost je očigledna, pa je dovoljno izračunati $d(\propto \wedge \beta)$ za $\propto = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k$, $\beta = g_0 dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l$. Primetimo da za proizvoljno $X \in \mathfrak{X}(M)$ važi
$d(f_0g_0)(X) = X(f_0g_0) = X(f_0)g_0 + X(g_0)f_0 = (g_0df_0 + f_0dg_0)(X)$, pa je

$$d(f_0g_0) = g_0df_0 + f_0dg_0.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned} d(\propto \wedge \beta) &= d(f_0g_0df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l) \\ &\overset{(*)}{=} d(f_0g_0) \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l \\ &= g_0df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge dg_l + f_0dg_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge \dots \wedge dg_l \\ &= d \propto \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

(2.) i (4.) su očigledni.

(3.) Dovoljno je pokazati da važi $d(df) = 0, \ \forall f \in C^\infty(U)$. Iz (2.2.2.1.) je

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Prema tome,

$$d(df) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)}_{simetrično\ po\ i,j} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{antisimetrično} = 0.$$

Ostalo je da pokažemo da je d dobro definisan globalno na M. Neka je $\tilde{\psi} = (y^1, \dots, y^n)$ druga karta, bez gubitka opštosti sa istim domenom U. Definišimo $\tilde{d}$ sa $(*)$ (zamenjujući $x \mapsto y$). Iz dokaza jedinstvenosti sledi da je

$$\tilde{d}\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \underbrace{\tilde{d}\omega_{i_1\dots i_k}}_{=d\omega_{i_1\dots i_k}} \wedge \underbrace{\tilde{d}x^{i_1}}_{=dx^{i_1}} \wedge \dots \wedge \underbrace{\tilde{d}x^{i_k}}_{=dx^{i_k}} = d\omega.$$

Prema tome, d je istog oblika u svakoj karti, pa je globalno dobro definisano. ■

2.2.2.8 Primer

1. Neka je $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ $1-$forma na R^2. Tada je

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

2. Neka je $\omega = P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy$. Tada je
$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz. \blacksquare$$

2.2.2.9 Definicija

Neka su M i N mnogostrukosti i $F: M \longrightarrow N$ glatko preslikavanje. Za $\omega \in \mathcal{T}_k^0(N)$, pullback od ω pod dejstvom F je definisano sa

$$F^*\omega(p) := \left(T_pF\right)^*(\omega(F(p)))$$

(pogledati 2.2.1.14).

Odatle za $X_1, \dots, X_k \in T_pM$ imamo

$$F^*\omega(p)(X_1, \dots, X_k) = \omega\big(F(p)\big)\Big(T_pF(X_1), \dots, T_pF(X_k)\Big).$$

Posebno, $F^*f = f \circ F$ za $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$. $\blacksquare$

2.2.2.10 Lema

Neka su funkcije $F: M \longrightarrow N,\ G: N \longrightarrow P$ glatke. Tada

1. $F^*: \mathcal{T}_k^0(N) \longrightarrow \mathcal{T}_k^0(M),\ F^*: \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$.
2. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
3. $id_M^* = id_{\Omega^k(M)}$ (resp. $= id_{\mathcal{T}_k^0(M)}$).
4. Ako je F difeomorfizam, onda je F^* linearan izomorfizam i $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$.

Dokaz:

1. Iz 2.2.1.15 (1.) imamo da $\left(T_pF\right)^*(\omega(F(p))) \in T_k^0(T_pM)$ resp. $\in \lambda^k\left(T_pM\right)^*$. Prema tome, treba pokazati da je $F^*\omega$ glatko. Neka su $(\varphi, U), (\psi, V)$ karte od M resp. N takve da je $F(U) \subseteq V$. Tada su i $F_{\psi\varphi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ i $\psi_*\omega = (T\psi)_* \circ \omega \circ \psi^{-1}$ glatke funkcije (pogledati 2.1.3.12 i 2.2.2.6 (2.)). Iz 2.2.1.15 (2.) dobijamo (stavljajući $p = \varphi^{-1}(x)$):
$$\begin{aligned}(DF_{\psi\varphi}(x))^* &= (T_pF_{\psi\varphi})^* = (T_{F(p)}\psi \circ T_pF \circ (T_p\varphi)^{-1})^* \\ &= \underbrace{((T_p\varphi)^{-1})^*}_{=(T_p\varphi)_*} \circ (T_pF)^* \circ (T_{F(p)}\psi)^* \qquad (*)\end{aligned}$$
Prema tome, iz 2.1.3.12 i 2.2.2.6 (2.) sledi da je lokalna reprezentacija $\varphi_*(F^*\omega)(x)$ od $F^*\omega$ s obzirom na kartu φ data sa

$$\begin{aligned}(T\varphi)_* \circ F^*\omega \circ \varphi^{-1}(x) &= \left(T_p\varphi\right)_* \circ \left(T_pF\right)^*\left(\omega \circ F \circ \varphi^{-1}(x)\right) \\ &= \left(T_p\varphi\right)_* \circ \left(T_pF\right)^* \circ \left(T_{F(p)}\psi\right)^*(\left(T_{F(p)}\psi\right)_* \circ \omega \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)) \\ &\overset{(*)}{=} \underbrace{(DF_{\psi\varphi}(x))^*}_{C^\infty}\,(\underbrace{(\psi_*\omega)}_{C^\infty} \circ \underbrace{F_{\psi\varphi}}_{C^\infty}(x))\end{aligned}$$

što je glatko.

2. $$(G \circ F)^*(\omega)(p) = \left(T_p(G \circ F)\right)^* \left(\omega\left(G \circ F(p)\right)\right)$$
$$= \left(T_{F(p)}G \circ T_pF\right)^* \left(\omega\left(G \circ F(p)\right)\right)$$
$$\overset{2.2.1.15\ (2.)}{=} \left(T_pF\right)^* \circ \left(T_{F(p)}G\right)^* \left(\omega\left(G\left(F(p)\right)\right)\right)$$
$$= \left(T_pF\right)^* \left(G^*\omega\left(F(p)\right)\right)$$
$$= F^*(G^*\omega)(p).$$

3. Očigledno
4. Sledi iz 2. i 3. ■

2.2.2.11 Teorema

Neka je preslikavanje $F: M \longrightarrow N$ glatko. Tada

1. $F^*: \Omega(N) \longrightarrow \Omega(M)$ je *algebarski homomorfizam*, tj. F^* je linearno i važi
$$F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta).$$
2. Za svako $\omega \in \Omega(N)$, $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.

Dokaz:

1. Neka je prvo $\propto = f \in \Omega^0(N) = C^\infty(N)$. Tada je
$$F^*(f \wedge \beta)(p) = F^*(f \cdot \beta)(p)$$
$$= \left(T_pF\right)^* \left(f\left(F(p)\right)\beta\left(F(p)\right)\right)$$
$$= \underbrace{f\left(F(p)\right)}_{F^*f(p)} \underbrace{\left(T_pF\right)^*(\beta(F(p)))}_{F^*\beta(p)}$$
$$= (F^*f \wedge F^*\beta)(p).$$
U opštem slučaju važi
$$F^*(\alpha \wedge \beta)(p) = \left(T_pF\right)^* \left(\propto\left(F(p)\right) \wedge \beta\left(F(p)\right)\right)$$
$$\overset{2.2.1.15\ (6.)}{=} \left(T_pF\right)^* \left(\propto\left(F(p)\right)\right) \wedge \left(T_pF\right)^* \left(\beta\left(F(p)\right)\right)$$
$$= \left((F^* \propto) \wedge (F^*\beta)\right)(p).$$
2. Na osnovu definicije od F^* i 2.2.2.7 (4.) dovoljno je pokazati da svako $p \in M$ ima okolinu U takvu da važi $d(F^*\omega|_U) = (F^*d\omega)|_U$ za sve $\omega \in \Omega(N)$. Neka je (ψ, V) karta oko $F(p)$ i U okolina od p takva da je $F(U) \subseteq V$. Tada za $\omega \in \Omega^{\mathrm{k}}(V)$ imamo
$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$
$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$
Iz 1. je
$$F^*\omega|_U = \sum F^*\, \omega_{i_1 \dots i_k} F^*\left(dx^{i_1}\right) \wedge \dots \wedge F^*\left(dx^{i_k}\right). \qquad (**)$$
U opštem slučaju, za $f \in C^\infty(N)$, važi $F^*(df) = d(F^*f)$. Zapravo, ako $X \in T_pM$, onda je
$$F^*(df)(p)(X) = df\left(F(p)\right)\left(T_pF(X)\right) = T_{F(p)}f(T_pF(X))$$

$$= T_p(f \circ F)(X) = d\underbrace{(f \circ F)}_{=F^*f}(p)(X).$$

Iz $(**)$ zaključujemo da je

$$\begin{aligned} d(F^*\omega|_U) &= d(\sum F^*\omega_{i_1 \dots i_k} d(F^*x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(F^*x^{i_k})) \\ &= \sum d(F^*\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge d(F^*x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(F^*x^{i_k}) \\ &= \sum F^*(d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge F^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge F^*(dx^{i_k}) \\ &= F^*(\sum d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= (F^*d\omega)|_U. \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.2.12 Propozicija

Neka je M mnogostrukost, $p \in M$, (φ, U), (ψ, V) karte oko p, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ $\psi = (y^1, \dots, y^n)$. Tada:

1. $dx^i|_p = \sum_{k=1}^n D_k(\varphi^i \circ \psi^{-1})\,(\psi(p))dy^k|_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}|_p\, dy^k|_p$
2. $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|_p = \det D(\varphi \circ \psi^{-1})\,(\psi(p))dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n|_p$
3. Ako $\omega \in \Omega^n(M)$, $\varphi_*\omega = \omega_\varphi \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n$, $\psi_*\omega = \omega_\psi \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n$ $(\alpha^1, \dots, \propto^n$ je standardna baza od $(R^n)^*)$, tada
$$\omega_\psi(y) = \omega_\varphi(\varphi \circ \psi^{-1}(y)) \cdot \det D(\varphi \circ \psi^{-1})(y), \quad \forall y \in \psi(V).$$

Dokaz:

1. Kako je $\{dx^i|_p | 1 \le i \le n\}$ dualna baza od $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p | 1 \le j \le n\right\}$, dovoljno je pokazati da je
$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}|_p \; dy^k|_p\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right) = \delta_{ij}.$$

   Zaista,
$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}|_p \; \underbrace{dy^k|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right)}_{=\frac{\partial y^k}{\partial x^j}|_p} = \sum_{k=1}^n \underbrace{D_k(\varphi^i \circ \psi^{-1})(\psi(p))}_{[D(\varphi\circ\psi^{-1})]_{ik}} \cdot \underbrace{D_j(\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))}_{[D(\psi\circ\varphi^{-1})]_{kj}} = \delta_{ij}.$$

2. Iz 1. dobijamo (koristimo konvenciju o sabiranju):
$$\begin{aligned} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|_p &= \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma_1}}|_p dy^{\sigma_1}|_p\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma_n}}|_p dy^{\sigma_n}|_p\right) \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma_1}}|_p \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma_n}}|_p \quad \underbrace{dy^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_n}|_p}_{=\begin{cases} sgn\,(\sigma) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n|_p, & \sigma \in S_n \\ 0, & inače \end{cases}} \\ &= \underbrace{(\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma_1}}|_p \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma_n}}|_p\, sgn\,(\sigma))}_{\det(D(\varphi\circ\psi^{-1})(\psi(p)))} \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n|_p. \end{aligned}$$

3. Neka je $\omega = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge\, dx^n = g dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$. Tada iz 2.2.2.6 (2.) sledi da je $\omega_\varphi = f \circ \varphi^{-1}$, $\omega_\psi = g \circ \psi^{-1}$, pa 2. daje

$$\begin{aligned} f(p) dx^1 \wedge \ldots \wedge\, dx^n|_p &= f(p) \det D(\varphi \circ \psi^{-1}) \big(\psi(p)\big)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n|_p \\ &= g(p) dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n|_p. \end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned} \omega_\psi(y) = g\big(\psi^{-1}(y)\big) &= f\big(\psi^{-1}(y)\big) \det D(\varphi \circ \psi^{-1})(y) \\ &= \omega_\psi\big(\varphi \circ \psi^{-1}(y)\big) \det D(\varphi \circ \psi^{-1})(y)\,. \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.2.13 Napomena

Direktni dokaz od 2.2.2.12 (3.) može biti baziran na 2.2.1.12: Neka je

$$\psi_* \omega = \omega_\psi \propto^1 \wedge \ldots \wedge \propto^n, \quad \varphi_* \omega = \omega_\varphi \propto^1 \wedge \ldots \wedge \propto^n.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \omega_\psi(y) \propto^1 \wedge \ldots \wedge \propto^n &= (\psi^{-1})^* \circ \varphi^* \big(\omega_\varphi \propto^1 \wedge \ldots \wedge \propto^n\big)(y) \\ &= \Big(T_y(\varphi \circ \psi^{-1})\Big)^* (\omega_\varphi(\varphi \circ \psi^{-1}(y)) \propto^1 \wedge \ldots \wedge \propto^n) \\ &\overset{2.2.1.12}{=} \det\big(D(\varphi \circ \psi^{-1})\big)(y)\, \omega_\varphi\big(\varphi \circ \psi^{-1}(y)\big) \propto^1 \wedge \ldots \wedge \propto^n, \end{aligned}$$

pa je

$$\omega_\psi(y) = \omega_\varphi\big(\varphi \circ \psi^{-1}(y)\big) \cdot \det D(\varphi \circ \psi^{-1})(y). \blacksquare$$

2.3 INTEGRALNI RAČUN NA MNOGOSTRUKOSTIMA

Cilj ovog poglavlja je da se razvije teorija integraljenja diferencijalnih formi na mnogostrukostima. To će omogućiti da se dokaže Stoksova teorema, koja uopštava sve klasične teoreme integralnog računa (Gausovu, Stoksovu, Grinovu teoremu). Kao osnovno sredstvo koristićemo pravilo o transformaciji za integrale (metodu smene).

2.3.1. Teorema

Neka su $U, V \subseteq R^n$ otvoreni, $\Phi\colon \mathrm{U} \longrightarrow V$ difeomorfizam i $f \in C(V)$, tako da je $supp\, f$ kompaktan. Tada je

$$\int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\; d^n x = \int_V f(y) d^n y. \blacksquare \qquad (2.3.1.)$$

Strategija za definisanje $\int_M \omega$ za $\omega \in \Omega_c^n(V)$, (Ω_c^n predstavlja prostor $n-$formi sa kompaktnim nosačem, V je karta od M) će biti da stavimo da je

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(V)} \omega_\varphi(x)\; d^n x.$$

Da bi ovo bio dobro definisan izraz potrebno je da ne zavisi od izbora karte. Međutim, ponašanje ω_φ usled transformacije karti u skladu sa 2.2.2.12 (3.) se razlikuje od $(2.3.1.)$, jer nema apsolutne vrednosti od $\det D(\varphi \circ \psi^{-1})$. Zbog toga ćemo posmatrati samo mnogostrukosti sa posebnim atlasima:

2.3.2. Definicija

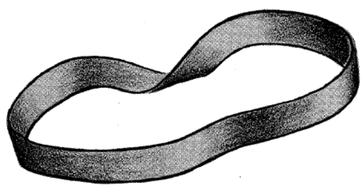
Mnogostrukost M se naziva *orijentabilna* ako poseduje orijentisani atlas $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ takav da je

$$\det D\big(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}\big)(x) > 0, \quad \forall x \in \psi_\alpha\big(V_\alpha \cap V_\beta\big),\ \forall \alpha, \forall \beta.$$

Kao i u slučaju glatkih mnogostrukosti i za orijentisane mnogostrukosti se definiše odgovarajuća $C^\infty-$struktura. Karte iz orijentisanog atlasa se nazivaju *pozitivno orijentisane*. Mnogostrukost M zajedno sa orijentisanim atlasom se naziva *orijentisana mnogostrukost*. ■

2.3.3. Napomena

1. Nije svaka mnogostrukost orijentabilna. Najpoznatiji primer neorijentabilne mnogostrukosti je Mobiusova traka (Slika 12.).



Slika 12.

2. Može se pokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni
   - M je orijentabilna.
   - $\exists \omega \in \Omega^n(M)$ sa $\omega(p) \neq 0$, $\forall p \in M$. Takvo ω se naziva *zapreminska forma* na M (pogledati 2.2.1.10)
   - C^∞ −modul $\Omega^n(M)$ je 1 −dimenzionalan (svaka zapreminska forma je baza). ∎

U specijalnom slučaju $M = R^n$ imamo:

Za $\omega = a(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ sa kompaktnim nosačem $K \subseteq U$, U je otvoren skup u R^n, stavimo

$$\int_U \omega := \int_K a(x)\, d^n x.$$

Da bi se ova definicija proširila na proizvoljnu mnogostrukost prvo ćemo posmatrati slučaj $\omega \in \Omega_c^n(M)$, $supp\,(\omega) \subseteq U$, gde je (φ, U) karta od M. Stavimo

$$\int_{(\varphi)} \omega \coloneqq \int \varphi_*(\omega|_U) = \int_{\varphi(U)} \omega_\varphi(x)\, d^n x.$$

2.3.4. Lema

Neka je M orijentisana mnogostrukost, $\omega \in \Omega_c^n(M)$ i $(\varphi, U), (\psi, V)$ pozitivno orijentisane karte takve da je $supp\,(\omega) \subseteq U \cap V$. Tada je

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{(\psi)} \omega,$$

pa možemo pisati samo $\int \omega$.

Dokaz:

Neka je $\varphi_* \omega = \omega_\varphi \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n$, $\quad \psi_* \omega = \omega_\psi \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n$. Tada je

$$\int_{(\psi)} \omega = \int_{\psi(V)} \omega_\psi(y)\, d^n y = \int_{\psi(U \cap V)} \omega_\psi(y)\, d^n y =$$

$$\overset{2.2.2.12.(3.)}{\triangleq} \int_{\psi(U \cap V)} \omega_\varphi(\varphi \circ \psi^{-1}(y)) \underbrace{\det D(\varphi \circ \psi^{-1})(y)}_{|\det D(\varphi \circ \psi^{-1})(y)|}\, d^n y$$

$$= \int_{\varphi(U \cap V)} \omega_\varphi(x) d^n x = \int_{\varphi(U)} \omega_\varphi(x) d^n x = \int_{(\varphi)} \omega\,. \blacksquare$$

2.3.5. Definicija

Neka je M orijentisana mnogostrukost i $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ orijentisani atlas. Neka je $\{\chi_\propto \mid \alpha \in A\}$ particija jedinice koja odgovara pokrivaču $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Neka $\omega \in \Omega_c^n(M)$ i $\omega_\propto \coloneqq \chi_\propto \cdot \omega$ (prema tome $supp\ (\omega_\propto)$ je kompaktan i sadržan u V_α). Tada je

$$\int_M \omega \coloneqq \sum_{\propto \in A} \int \omega_\propto \ . \blacksquare$$

2.3.6. Propozicija

1. Suma u 2.3.5. sadrži samo konačno mnogo nenula sabiraka.
2. Definicija 2.3.5. ne zavisi od izbora orijentisanog atlasa (u datoj orijentaciji $C^\infty -$ strukturi), a ni od particije jedinice.

Dokaz:

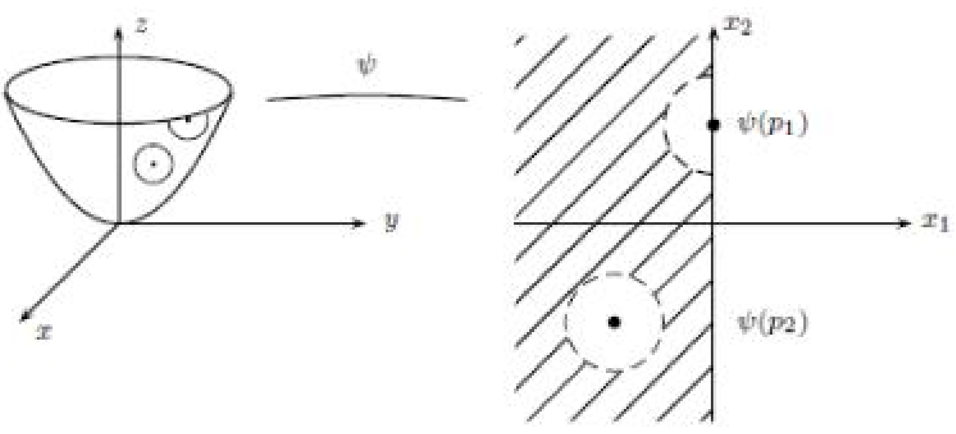
1. Pošto je familija $\{supp\ \chi_\propto \mid \alpha \in A\}$ lokalno konačna, samo konačno mnogo $supp\ \chi_\propto$ seče kompaktan skup $supp\ (\omega)$ (svako $p \in supp\ (\omega)$ ima okolinu koja seče samo konačno mnogo $supp\ \chi_\propto$, i konačno mnogo takvih okolina pokriva $supp\ (\omega)$).
2. Neka je $\mathcal{A}' = \{(\varphi_\beta, U_\beta) \mid \beta \in B\}$ neki drugi orijentisani atlas u istoj orijentisanoj $C^\infty -$ strukturi, i $\{\mu_\beta \mid \beta \in B\}$ particija jedinice koja odgovara pokrivaču $\{U_\beta \mid \beta \in B\}$. Tada

$$\sum_{\propto \in A} \int \omega_\propto \overset{\sum_\beta \mu_\beta = 1}{=} \sum_{\propto \in A} \int \sum_{\beta \in B} \mu_\beta \chi_\propto \omega = \sum_{\propto, \beta} \int \mu_\beta \chi_\propto \omega = \cdots = \sum_{\beta \in B} \int \mu_\beta \omega \ . \blacksquare$$

U teoremama iz integralnog računa u vektorskoj analizi, tipični domeni integracije su $n -$dimenzionalni domeni sa rubom, gde je sam rub $(n-1) -$dimenzionalni domen integracije. Takvi domeni trenutno nisu obuhvaćeni našim pojmom mnogostrukosti.

2.3.7 Primer

Neka je $M = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq z_0,\ z_0 > 0\}$ (Slika 13.).



Slika 13.

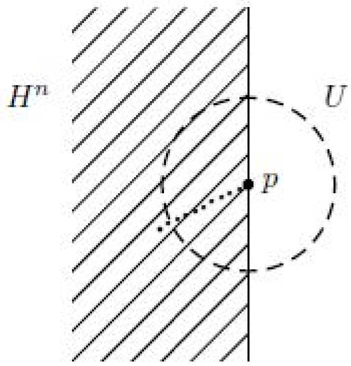
M nije mnogostrukost, jer tačke kao što je p_1 nemaju otvorenu okolinu u M koja je homeomorfna sa R^2. Sa druge strane je očigledno da M ima karte koje su homeomorfne sa relativno otvorenim podskupovima odgovarajućeg poluprostora. Tačke kao što je p_1 formiraju rub (ali ne rub u topološkom smislu) od M, koji je sam 1 −dimenzionalna mnogostrukost (bez ruba). ∎

U sledećoj definiciji precizno ćemo uvesti ove pojmove.

2.3.8 Definicija

Neka je poluprostor $H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in R^n | x^1 \leq 0\}$ snabdeven indukovanom topologijom od R^n (tj. $V \subseteq H^n$ je otvoren ako i samo ako $\exists U \subseteq R^n$ otvoren takav da je $U \cap H^n = V$). Neka je $V \subseteq H^n$ otvoren. Preslikavanje $f: V \longrightarrow R^m$ se naziva glatko na V ako postoji otvoren podskup $U \supseteq V$ od R^n i glatko produženje $\tilde{f}$ od f na U. Za proizvoljno $p \in V$ uzimamo $Df(p) \coloneqq D\tilde{f}(p)$. ∎

Potrebno je proveriti da $Df(p)$ ne zavisi od $\tilde{f}$. To je jasno, ako je $V \subseteq (H^n)^0$. Zato neka je $p = (0, x^2, \dots, x^n)$, $\tilde{f}$ i $\tilde{\tilde{f}}$ su dva glatka produženja od f na otvorenoj okolini U od p u R^n. Neka je $g \coloneqq \tilde{f} - \tilde{\tilde{f}}$. Treba pokazati da je $Dg(p) = 0$. Uzmimo niz tačaka $p_m \in (H^n)^0$, $p_m \mapsto p$. Tada je $Dg(p_m) = 0 \quad \forall m$, pa je i $Dg(p) = \lim_{m \to \infty} Dg(p_m) = 0$ (Slika 14.)



Slika 14.

2.3.9 Definicija

Mnogostrukost sa rubom je skup M zajedno sa atlasom $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, gde su $\psi_\propto : V_\alpha \longrightarrow \psi_\propto(V_\alpha) \subseteq H^n$ bijekcije, a $\psi_\propto(V_\alpha)$ (relativno) otvoreni skupovi u H^n, tako da $\bigcup_{\propto \in A} V_\alpha = M$ i za sve $\propto, \beta$ sa $V_\alpha \cap V_\beta \neq 0$ važi da je

$$\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1} : \psi_\propto(V_\alpha \cap V_\beta) \longrightarrow \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

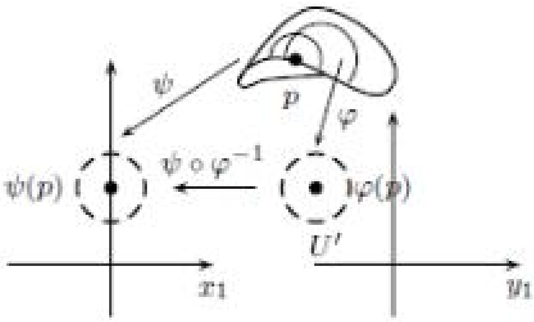
glatka funkcija u smislu 2.3.8. Kao i za mnogostrukosti bez ruba i ovde tražimo da je prirodna topologija od M (indukovana kartama) Hausdorfova i da zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. ∎

2.3.10 Lema

Neka je M mnogostrukost sa rubom. Tačka $p \in M$ se naziva rubna tačka od M ako postoji karta $(\psi = (x^1, \dots, x^n), V)$ takva da je $x^1(p) = 0$. Ako je p rubna tačka, što označavamo sa $p \in \partial M$, tada za svaku kartu $(\varphi = (y^1, \dots, y^n), U)$ oko p važi $y^1(p) = 0$.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, da postoji karta $\varphi = (y^1, \dots, y^n)$ takva da je $y^1(p) < 0$ (Slika 15.).



Slika 15.

Izaberimo okolinu U' od $\varphi(p)$ koja je otvorena u R^n i sadržana u $\varphi(U \cap V) \subseteq H^n$. Kako je $\det\big(D(\psi \circ \varphi^{-1})\big)\big(\varphi(p)\big) \neq 0$, odavde sledi da je $\psi \circ \varphi^{-1}$ difeomorfizam na okolinu od $\psi \circ \varphi^{-1}\big(\varphi(p)\big) = \psi(p)$ koja je otvorena u R^n. Ova okolina mora biti sadržana u H^n, što dovodi do kontradikcije sa $\psi^1(p) = x^1(p) = 0$. ■

Sve konstrukcije koje već znamo za mnogostrukosti bez ruba, kao što su tangentni prostori, tenzori, diferencijabilne forme, orijentabilnost itd. mogu se analogno preneti i na mnogostrukosti sa rubom. Sledeći rezultat pokazuje da je ∂M takođe mnogostrukost (bez ruba).

2.3.11 Propozicija

Neka je M n −dimenzionalna mnogostrukost sa rubom. Tada je $\partial M (n-1)$ −dimenzionalna mnogostrukost (bez ruba). Ako je M orijentisana tada orijentacija od M indukuje orijentaciju od ∂M.

Dokaz:

Neka je $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ atlas od M. Stavimo $A' \coloneqq \{\alpha \in A \mid V_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset\}$ i $\mathcal{A}' \coloneqq \big\{(\psi_\alpha|_{V_\alpha \cap \partial M}, V_\alpha \cap \partial M) \mid \alpha \in A'\big\}$. Pokazaćemo da je $\mathcal{A}'$ atlas od ∂M.

Neka $\tilde{V}_\propto \coloneqq V_\alpha \cap \partial M$, $\tilde{\psi}_\propto \coloneqq \psi_\alpha|_{\tilde{V}_\propto}$. Tada je $\tilde{\psi}_\propto \colon \tilde{V}_\propto \longrightarrow \psi_\alpha(\tilde{V}_\propto)$ bijekcija i iz 2.3.10. sledi da je $\tilde{\psi}_\propto(\tilde{V}_\propto) = \psi_\alpha(\tilde{V}_\propto) \cap \{x^1 = 0\}$. Jasno, $\bigcup_{\alpha \in A'} \tilde{V}_\propto = \partial M$. Neka $\alpha, \beta \in A'$ tako da je $\tilde{V}_\propto \cap \tilde{V}_\beta \neq \emptyset$. Kako je $\psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \subseteq H^n$ otvoren, imamo da je $\tilde{\psi}_\propto(\tilde{V}_\propto \cap \tilde{V}_\beta) = \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \cap \{x^1 = 0\}$ otvoren u $\{x^1 = 0\} \cong R^{n-1}$. Šta više, $\tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\propto^{-1}$ je glatko na $\tilde{\psi}_\propto(\tilde{V}_\propto \cap \tilde{V}_\beta)$ kao restrikcija glatkog preslikavanja $\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1}$. Pretpostavimo sada da je dodatno $\mathcal{A}$ orijentisan, tj. da je $\det D(\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1}) > 0$ za sve $\propto, \beta$ za koje je $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$. Neka je $\psi_\alpha = (x_\propto^1, \dots, x_\propto^n)$ i $\psi_\beta = (x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$. Tada za svako $(0, x_\propto^2, \dots, x_\propto^n) \in \tilde{\psi}_\propto(\tilde{V}_\propto \cap \tilde{V}_\beta)$

$$\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1}\left(0, \underbrace{x_\propto^2, \dots, x_\propto^n}_{=:x'_\alpha}\right) = \left(0, \tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\propto^{-1}(x'_\alpha)\right).$$

Odatle je

$$D\big(\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1}\big)(0, x'_\alpha) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\psi_\beta^1 \circ \psi_\propto^{-1})}{\partial x^1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & D(\tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\propto^{-1}) & \\ * & & & \end{pmatrix} |_{(0, x'_\alpha)}$$

$$\Rightarrow \det D\big(\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1}\big)(0, x'_\alpha) = \frac{\partial(\psi_\beta^1 \circ \psi_\propto^{-1})}{\partial x^1} |_{(0, x'_\alpha)} \det D(\tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\propto^{-1})\,(0, x'_\alpha) \qquad (***)$$

Sada je $\psi_\beta^1 \circ \psi_\propto^{-1}(0, x'_\alpha) = 0$ i $\psi_\beta^1 \circ \psi_\propto^{-1}(x^1, x'_\alpha) < 0$ za $x^1 < 0$ (jer $\psi_\beta \circ \psi_\propto^{-1}$: $H^n \longrightarrow H^n$). Odatle je $\frac{\partial\left(\psi_\beta^1 \circ \psi_\propto^{-1}\right)}{\partial x^1} \geq 0$ i $\neq 0$ (iz $(***)$), prema tome sledi da je izraz pozitivan tj. > 0. Iz $(*)$ sledi da je $\det D\big(\tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\propto^{-1}\big) > 0$, pa je $\mathcal{A}'$ orijentisan. ■

2.3.1 STOKSOVA TEOREMA

Navodimo i poslednji deo koji nam je potreban za dokaz Stoksove teoreme. Posmatrajmo restrikciju diferencijabilne forme definisane na M, na ∂M. Neka je $i\colon \partial M \hookrightarrow M$ prirodna inkluzija. Primetimo da je i glatko, jer za proizvoljnu kartu $\psi = (x^1, \dots, x^n)$ od M imamo

$$\begin{array}{ccc} \partial M & \xrightarrow{\iota} & M \\ \tilde{\psi} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \psi \\ \tilde{\psi}(\tilde{V}) & \xrightarrow{\iota} & \psi(V) \end{array}$$

gde je j: $(x^2, \dots, x^n) \mapsto (0, x^2, \dots, x^n)$. j je očigledno glatko.

Restrikcija proizvoljnog $\omega \in \Omega^k(M)$ je definisana kao $i^*\omega \in \Omega^k(\partial M)$. Kao i u (2.2.2.1.) lokalna reprezentacija od ω s obzirom na ψ je data sa

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge\, dx^{i_k}\,.$$

Tada je $\psi_*\, \omega$ dato sa

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \circ \psi^{-1} \propto^{i_1} \wedge \dots \wedge \propto^{i_k} =: \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega^{\psi}_{i_1 \dots i_k} \propto^{i_1} \wedge \dots \wedge \propto^{i_k}\,.$$

Lokalna reprezentacija od $i^*\omega$ s obzirom na $\tilde{\psi}$ je data sa

$$\tilde{\psi}_*(i^*\omega) = \left(\tilde{\psi}^{-1}\right)^*(i^*\omega) = (i \circ \tilde{\psi}^{-1})^*\,\omega = (\psi^{-1} \circ j)^*\omega = j^*((\psi^{-1})^*\omega) = j^*(\psi_*\omega)$$

$$\overset{2.2.2.11\ (1.)}{\cong} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega^{\psi}_{i_1\dots i_k} \circ j\, j^*\left(\propto^{i_1}\right) \wedge \dots \wedge j^*\left(\propto^{i_k}\right).$$

Primetimo da je

$$j^*(\propto^k)(v)|_x \overset{2.2.2.9}{\cong} \propto^k \left(\underbrace{Dj(x)}_{=j \text{ iz linearnosti}} (v) \right) = \propto^k \left(j(v)\right) = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ v_k = \propto^k (v), & k \neq 1 \end{cases}$$

Odatle dobijamo

$$\tilde{\psi}_*(i^*\omega) = \sum_{1<i_1<\cdots<i_k\le n} \omega^{\psi}_{i_1\dots i_k} \circ j \propto^{i_1} \wedge \dots \wedge \propto^{i_k}. \qquad (2.3.1.1.)$$

2.3.1.1 (Stoksova teorema)

Neka je M orijentisana mnogostrukost sa rubom, $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$, i $i: \partial M \longrightarrow M$. Tada je:

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M d\,\omega\,.$$

Dokaz:

Označimo sa K kompaktan nosač od ω. Razmatraćemo dva slučaja:

1. Postoji karta $(\psi = (x^1, \dots, x^n), V)$ sa $K \subseteq V$. Pošto $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$, onda se lokalna reprezentacija od ω u odnosu na ψ zapisuje

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k dx^1 \wedge \dots \wedge\ dx^{k-1} \wedge\ dx^{k+1} \wedge \dots \wedge\ dx^n \qquad (2.3.1.2)$$

   gde $\omega_j \in C^\infty(V)$ za sve j. Odatle,

$$d\omega = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^k}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge\ dx^n, \qquad (2.3.1.3)$$

   sa $\frac{\partial \omega_k}{\partial x^k} = D_k(\omega_k \circ \psi^{-1})\big(\psi(.)\big)$. Sada ćemo izdvojiti podslučajeve:

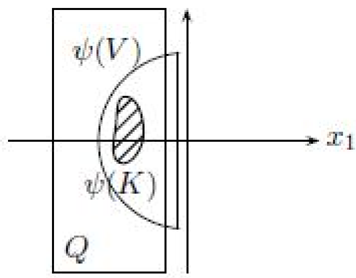
1a) $V \cap \partial M = \emptyset$. Onda $i^*\omega = 0$ (na osnovu (2.3.1.1)), odatle $\int_{\partial M} i^*\omega = 0$ i želimo da pokažemo da je takođe

$$\int_M d\,\omega \overset{2.3.4}{\cong} \int_{\psi(V)} \psi_*(d\omega) \overset{(2.3.1.3),\ 2.2.2.6\ (2.)}{\cong} \int_{\psi(V)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega^{\psi}_k}{\partial x^k}\, dx^1 \dots dx^n = 0.$$

Sada ćemo izabrati paralelopiped $Q \subseteq H^n$ (Slika 16.) oblika:

$$Q = \{(x^1, \dots, x^n) |\ a^k \leq x^k \leq b^k, 1 \leq k \leq n\}$$

tako da $\psi(K)$ leži u unutrašnjosti od Q. Ako se proširi kompaktan nosač ω_k^ψ od 0 na sve u H^n, dobijamo (primenom osnovne teoreme računa):



Slika 16.

$$\int_{\psi(V)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega_k^\psi}{\partial x^k}\, dx^1 \dots dx^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_Q \frac{\partial \omega_k^\psi}{\partial x^k}\, dx^1 \dots dx^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int \Big(\overbrace{\omega_k^\psi(x^1, \dots, x^{k-1}, b^k, x^{k+1}, \dots, x^n)}^{=0}$$

$$- \underbrace{\omega_k^\psi(x^1, \dots, x^{k-1}, a^k, x^{k+1}, \dots, x^n)}_{=0}\Big)\, dx^1 \dots dx^{k-1} dx^{k+1} \dots\, dx^n = 0.$$

1b) Pretpostavimo da je $V \cap \partial M \neq \emptyset$. Tada

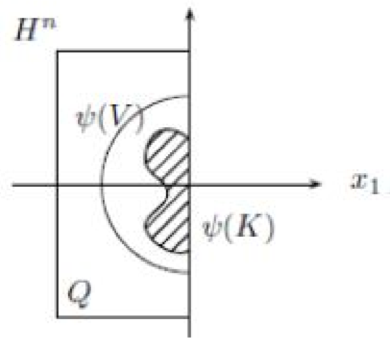
$$\int_{\partial M} i^*\omega \overset{2.3.4.}{\cong} \int_{\tilde{\psi}(V \cap \partial M)} \tilde{\psi}_* (i^*\omega)$$

$$\overset{(2.3.1.2),(2.3.1.1)}{\cong} \underbrace{\int_{\tilde{\psi}(V \cap \partial M)} \omega_1^\psi(0, x^2, \dots, x^n) d\, x^2 \dots dx^n}_{= \int \psi(K) \cap \{x^1 = 0\}}. \qquad (2.3.1.4)$$

Opet smo proširili ω_k^ψ od 0 na sve u H^n i izabrali paralelopiped $Q \subseteq H^n$ (Slika 17.), ovog puta ima oblik

$$Q = [a^1, 0] \times [a^2, b^2] \times \dots \times [a^n, b^n],$$

tako da $\psi(K) \subseteq Q^0 \cup \{x^1 = 0\}$. Tada kao i u prethodnom slučaju imamo:



Slika 17.

$$\int_M d\,\omega = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_Q \frac{\partial \omega_k^{\psi}}{\partial x^k}\,dx^1 \dots\, dx^n$$

$$= \int_{[a^2,b^2]\times\ldots\times[a^n,b^n]\quad (=Q\cap\{x^1=0\})} (\omega_1^{\psi}(0,x^2,\ldots,x^n) - \underbrace{\omega_1^{\psi}(a^1,x^2,\ldots,x^n)}_{0})dx^1 \dots\, dx^n$$

$$+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\int (\underbrace{\omega_k^{\psi}(x^1,\ldots,b^k,\ldots,x^n)}_{0} - \underbrace{\omega_k^{\psi}(x^1,\ldots,a^k,\ldots,x^n)}_{0})\,dx^1 \dots dx^{k-1}dx^{k+1}\dots\, dx^n$$

$$= \int_{\psi(K)\cap\{x^1=0\}} \omega_1^{\psi}(0,x^2,\ldots,x^n)\,dx^2 \dots\, dx^n$$

$$\overset{(2.3.1.4)}{\triangleq} \int_{\partial M} i^*\omega.$$

2. U opštem slučaju: Neka je $\{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ orijentisani atlas, $\{\chi(\propto) | \; \alpha \in A\}$ odgovarajuća particija jedinice. Onda $\omega_\alpha \coloneqq \chi_\propto \cdot \omega$ zadovoljava uslove slučaja 1. Takođe $\sum_\propto d\,\chi_\propto = d\big(\sum_\propto \chi_\propto\big) = d(1) = 0$. Tada je $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha$ i
$$\sum_\alpha d\omega_\alpha = \sum_\propto d\,(\chi_\propto \cdot \omega\,) = \sum_\propto (d\,\chi_\propto)\omega + \sum_\propto \chi_\propto\, d\omega = d\omega.$$
Iz ovoga konačno dobijamo
$$\int_M d\,\omega = \sum_\propto \int_M d\,\omega_\propto \overset{1.}{\triangleq} \sum_\propto \int_{\partial M} i^*\omega_\propto = \int_{\partial M} i^*(\sum_\propto \omega_\propto) = \int_{\partial M} i^*\omega\,.\blacksquare$$

2.3.1.2 Primer

1. Primenjujući 2.3.1.1. na ω iz 2.2.2.8. dobijamo Grinovu teoremu u ravni:
$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$
2. Iz 2.2.2.8 i 2.3.1.1. izvodi se Gausova teorema o divergenciji (u R^3):
$$\int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy\,.\blacksquare$$

LITERATURA

[1] Abraham R., Marsden J. E., *Foundation of Mechanics* , Addison-Wesley, 1987.

[2] Abraham R., Marsden J. E., Ratiu T., *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Third Edition, Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] Boothby W. M, *An Intoduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* , Academic Press, 1986.

[4] Brickell F., Clark R.S., *Differentiable Manifolds , Van Nostrand Reinhold*, 1970.

[5] Dragović V., Milinković D., *Analiza na mnogostrukostima* , Matematički fakultet u Beogradu, 2003.

[6] Kunzinger M., *Differential Geometry 1*, Lecture notes, University of Vienna, 2008.

[7] Lee J. M., *Introduction to Smooth Manifolds* , University of Washington, 2000.

[8] O'Neill B., *Semi-Riemannian geometry* , Academic press, 1983.

[9] Perišić D., Pilipović S., Stojanović M., *Funkcije više promenljivih, diferencijalni i integralni račun* , Univerzitet u Novom Sadu, 1997.

[10] Warner F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scot, Foresman and Company, London 1983.

BIOGRAFIJA

Tamara Maksimović-Tot, rođena je 14.12.1987. u Splitu. Osnovnu školu „Branko Brinić i Drago Milović“ završila je u Tivtu. Gimnaziju Kotor, opšti smer, završila je u Kotoru.

Prirodno-matematički fakultet, odsek za matematiku, smer profesor matematike, upisala je 2006. godine i završila 2010. sa prosečnom ocenom 9.42. Iste godine, upisala je master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer matematika. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija i tako stekla pravo za odbranu master rada.

Od septembra 2010. do avgusta 2011. godine je radila kao profesor matematike u Srednjoj mašinskoj školi „Radoje Dakić“ u Beogradu, trenutno radi u Osnovnoj školi „Kosta Abrašević“ u Resniku.

Novi Sad, *2012.* *Tamara Maksimović-Tot*

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni Štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Tamara Maksimović-Tot

AU

Mentor: Docent dr Sanja Konjik

MN

Naslov rada: Tenzorska polja i diferencijalne forme na glatkim mnogostrukostima

MR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *srpski / engleski*

JI

Zemlja publikacije: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2012

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (2/78/0/0/17/0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Diferencijalna geometrija

ND

Ključne reči: tenzori, tenzorsko raslojenje, tenzorska polja, kontrakcija, simetrični tenzori, Rimanova metrika, spoljašnji izvod , spoljašnji proizvod, Grasmanova algebra, raslojenje spoljašnjih formi, pullback i push-forward preslikavanja, diferencijalne forme, Stoksova teorema.

PO

UDK:

Čuva se:

Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno- matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

ČU

Važna napomena: nema

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 17. 01. 2012.

DP

Datum odbrane: Februar 2012.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	dr Mirjana Stojanović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor:	dr Sanja Konjik, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE KEY

WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printer text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Tamara Maksimović-Tot

AU

Mentor: Sanja Konjik, Ph. D.

MN

Title: Tensor fields and diferential forms on smooth manifolds

XI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author’s reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Square Dositeja Obradovića 4.

PP

Physical description: (2/78/0/0/17/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Differential geometry

Key words: tensors, tensor bundle, tensor fields, contraction, symmetric tensors, Riemannain metrics, exterior derivative, exterior product, Grassmann algebra, the vector bundle of exterior forms, the pullback and the pull-forward maps, diferential forms, Stokes’ theorem.

UC:

Holding date:

The Library of the Departement of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad.

HD

Note:

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board on: 17. Januar 2012.

Defended: February 2012.

Thesis defend board:

President:	prof. dr Mirjana Stojanović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	prof. dr Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Mentor:	prof. dr Sanja Konjik, assistent professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad