UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Sanja Prokić

Singularno perturbovani problemi sa kašnjenjem i rekurzivne mreže

-master rad-

Novi Sad, 2016

Sadržaj

Predgovor

Singularno perturbovani problemi imaju primenu u raznim naučnim poljima, a najpoznatija primena je u fizici, dinamici fluida. Više o tome može se naći u [3]. Singularno perturbovani problemi su parametarski zavisne parcijalne diferencijalne jednačine čija se neuniformnost ogleda u pojavi slojeva u kojima se rešenje naglo menja kada perturbacioni parametar teži nuli. Adekvatne metode za rešavanje ovakvih problema su postupci konačnih elemenata. Kod ovakvih postupaka, prvo se izvrši razlaganje polaznog domena, a potom vrši aproksimacija rešenja problema po delovima polinomnom funkcijom. Mogu se primeniti na probleme sa domenom proizvoljnog oblika, uz proizvoljno razlaganje i stepen polinoma. U ovom radu koristi se postupak konačnih elemenata Galerkina.

Rad se sastoji od 6 poglavlja. U prvom poglavlju opisani su prostori funkcija koje koristimo kao i postupak konačnih elemenata Galerkina. U drugom poglavlju se za postojanje slabog i diskretnog rešenja proveravaju uslovi Laks-Milgramove teoreme za datu bilinearnu formu. Pokazuje se da je bilinearna forma neprekidna i koercitivna. Numeričko rešenje se dobija primenom postupka Galerkina sa deo po deo linearnim baznim funkcijama. U trećoj glavi opisana je konstrukcija Duranove mreže i dokazane su osobine koraka mreže koje su neophodne za dalju analizu. Dalje, u četvrtoj glavi u energetskoj normi se najpre izvodi ocena za grešku interpolacije, a zatim i za grešku diskretizacije. Konačna ocena greške sledi na osnovu prethodnih rezultata. Na samom kraju rada, u petoj glavi, predstavljaju se rezultati numeričkih testova, a u šestoj glavi navedeni su programi koji su korišćeni za izradu istih.

Na kraju želim da izrazim zahvalnost svom mentoru, dr Heleni Zarin, na ažurnosti, korisnim savetima i svesrdnoj pomoći. Zahvalnost dugujem i dr Đorđe Hercegu, kao i dr Dragoslavu Hercegu.

Sanja Prokić

Glava 1

Prostori funkcija i postupak konačnih elemenata Galerkina

Sve definicije i teoreme u ovom odeljku preuzete su iz [1].

1.1 Prostori integrabilnih funkcija

Označimo sa $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, skup merljivih funkcija u za koje je

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty.$$

Za dve funkcije $u, v \in L^p(\Omega)$ kažemo da su jednake ako je $u(x) = v(x)$ za $x \in \Omega$, osim na skupu mere nula. $L^p(\Omega)$ je Banahov prostor sa normom

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Prostor $L^2(\Omega)$ je osim toga i Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom definisanim sa

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

Očigledno je $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)}$. Za $p = \infty$ sa $L^p(\Omega)$ označen je skup funkcija sa konačnim esencijalnim supremumom. On je takodje

Banahov prostor sa normom

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = essup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Lema 1.1 (Helderova nejednakost) Za svake dve funkcije $v \in L^p(\Omega)$ i $v \in L^q(\Omega)$, za koje je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, važi $uv \in L^1(\Omega)$ i

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

U slučaju $p=q=2$ Helderova nejednakost poznata je pod imenom Koši-Švarcova nejednakost.

Sa $L^p_{loc}(\Omega),\ p\in[1,\infty)$, označen je skup svih funkcija $u:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ takvih da za svako $x\in\Omega$ postoji otvorena okolina U takva da je $U\subset\Omega$ i $u\in L^p(U)$.
Funkcije iz $L^p_{loc}(\Omega)$ nazivamo *lokalno $p-$integrabilnim funkcijama.*

1.2 Prostori Soboljeva

U ovom delu ćemo dati definiciju i navesti neke osobine prostora Soboljeva. Prostori Soboljeva su značajni za analizu numeričkih metoda za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Neka je $\mathbb{N}_0$ skup nenegativnih celih brojeva. *Multi-indeks* je naziv za n-torku

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dužina multi-indeksa je nenegativan ceo broj

$$|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Multi-indeks $(0,...,0)$ označavamo sa $\mathbf{0}$ i jasno $|\mathbf{0}|=0$.

Sada ćemo se podsetiti pojma slabog izvoda funkcije. Neka je sa $C_0^\infty(\Omega)$ označen prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u Ω.

Definicija 1.2 *Lokalno 1-integrabilna funkcija $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ ima slabi izvod $\omega = D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$ reda α ako je ako je*

$$(\omega,\phi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha\phi)_{L^2(\Omega)},$$

za svako $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Ako je funkcija diferencijabilna u klasičnom smislu, tada njen slabi izvod postoji i jednak je klasičnom izvodu. Radi jednostavnijeg zapisa koriste se oznake

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}}.$$

Sada ćemo dati definiciju prostora Soboljeva.

Definicija 1.3 *Za dati ceo broj $k \geq 0$ i $p \in [1, \infty]$ prostor Soboljeva reda k definisan je sa*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ su definisane norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty) \\ \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty, \end{cases}$$

i seminorma

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty) \\ \\ \sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

$W^{k,p}(\Omega)$ je normiran prostor. Imamo i sledeći rezultat.

Teorema 1.4 *Prostor Soboljeva $W^{k,p}(\Omega)$ je Banahov prostor.*

U nastavku ćemo umesto $W^{k,2}(\Omega)$ upotrebljavati oznaku $H^k(\Omega)$. $H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \ u, v \in H^k(\Omega).$$

Važan je prostor Soboljeva $H_0^k(\Omega)$ definisan kao komplementiranje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u odnosu na normu $\| \cdot \|_{H^k(\Omega)}$. $H_0^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)}$ i normom $\| \cdot \|_{H^k(\Omega)}$. U slučaju kada je Ω otvoren, ograničen i povezan skup sa Lipšic-neprekidnim (regularnim) rubom $\partial\Omega$, prostor $H_0^1(\Omega)$ ima osobinu

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Lema 1.5 (Poenkare-Fridrihova nejednakost) *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *povezan i otvoren skup i neka je* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Tada postoji konstanta* c^*, *nezavisna od* u, *takva da je*

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \le c^* \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx.$$

Vezu između prostora $W^{k,p}(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ i $C^m(\overline{\Omega})$ daje nam *teorema o potapanju.* Mi ćemo navesti samo jedan njen deo.

Teorema 1.6 *Neka je* Ω *otvoren i ograničen podskup prostora* $\mathbb{R}^n$ *sa regularnim rubom* $\partial\Omega$. *Tada se za* $kp > n$, *prostor Soboljeva* $W^{k,p}(\Omega)$ *može potopiti u Helderov prostor* $C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor -1,\beta}(\overline{\Omega})$, *gde je*

$$\beta = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \\ \\ \textit{proizvoljan realan broj iz } (0,1), & \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Direktna posledica prethodne teoreme je $H^k(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$, kada je $k - m > \frac{n}{2}$. Dakle, neprekidne funkcije su H^1- funkcije u jednodimenzionalnom slučaju i H^2- funkcije u dvodimenzionalnom slučaju.

1.3 Postupak konačnih elemenata Galerkina

Najpre navodimo definicije i teoremu koje ćemo koristiti u ovom pododeljku.

Definicija 1.7 *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *realni normirani prostor.*
Bilinearna forma $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *je*

i) neprekidna (ograničena) ako postoji konstanta $M_a > 0$ *tako da je*

$$|a(w,v)| \le M_a \|w\| \|v\|, \ \ \textit{za svako} \ \ w, v \in V,$$

ii) $V-$ *eliptična (ili koercitivna) ako postoji konstanta* $\alpha > 0$ *tako da je*

$$a(w,w) \ge \alpha \|w\|^2, \ \ \textit{za svako} \ \ w \in V.$$

Definicija 1.8 *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *realni normirani prostor. Linearna funkcionela* $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *je ograničena ako postoji konstanta* $M_l > 0$ *tako da je*

$$|l(v)| \le M_l \|v\|, \ \ \textit{za svako} \ \ v \in V.$$

Teorema 1.9 (Laks-Milgram) *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ realni Hilbertov prostor. Za neprekidnu $V-$ eliptičnu bilinearnu formu $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ i ograničenu linearnu funkcionelu $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$, apstraktni varijacioni problem*

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in V \text{ tako da je} \\ a(u,v) = l(v), \quad \text{za svako } v \in V, \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje.

Sada započinjemo sa kratkim opisom Galerkinove metode. Neka je V Hilbertov prostor, $a(\cdot,\cdot)$ bilinearna forma koja je ograničena i koercitivna i l ograničena linearna funkcionela. Posmatramo problem:

$$\text{Traži se } u \in V \text{ tako da je } a(u,v) = l(v) \text{ za svako } v \in V. \tag{1.1}$$

Prema Laks-Milgramovoj teoremi, varijacioni problem (1.1) ima jedinstveno rešenje. Uopšteno govoreći, nemoguće je naći egzaktno rešenje u problema (1.1) zato što je V beskonačno dimenzionalni prostor. Prirodno je probati konstruisati aproksimaciju rešenja u konačno dimenzionalnom prostoru $V_N \subset V$. Razmotrimo projekciju problema (1.1) na V_N :

$$\text{Traži se } u_N \in V_N \text{ tako da je } a(u_N,v) = l(v) \text{ za svako } v \in V_N. \tag{1.2}$$

Iz pretpostavke da je bilinearna forma a ograničena , $V-$ eliptična i l ograničena linearna funkcionela, opet primenom Laks-Milgramove teoreme sledi da (1.2) ima jedinstveno rešenje u_N.

Neka je $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ baza konačnodimenzionalnog prostora V_N. Tada možemo zapisati

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j \phi_j$$

za neke, trenutno nepoznate, skalare $\epsilon_i, \;\; i = 1, ..., N$. Uzmimo da $v \in V_N$ budu baš ϕ_i pa dobijamo

$$\sum_{j=1}^{N} a(\phi_j, \phi_i)\epsilon_j = l(\phi_i) \quad i = 1, ..., N.$$

Očito, ovo možemo zapisati kao linearni sistem

$$\mathbf{K}\epsilon = \mathbf{b}$$

gde je nepoznati vektor $\epsilon = (\epsilon_{\mathrm{j}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{K} = (a(\phi_j, \phi_i)) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matrica sistema i $\mathbf{b} = (l(\phi_i)) \in \mathbb{R}^N$ vektor desne strane.

Aproksimacija rešenja u_N je različita od rešenja u, stoga je prirodno tražiti približno rešenje u_N u potprostoru V_N što veće dimenzije. Za niz potprostora V_{N_i} takvih da važi $V_{N_1} \subset V_{N_2} \subset ... \subset V_N$, računamo rešenja u_{N_i}, $i = 1, 2....$ Ovaj postupak nazivamo Galerkinovom metodom.

Ako oduzmemo (1.2) od (1.1) zbog linearnosti sledi

$$a(u - u_N, v) = 0 \quad \text{za svako } v \in V_N.$$

Vidimo da je greška $u - u_N$ ortogonalna projekcija na potprostor V_N. Drugim rečima, u_N je ortogonalna projekcija egzaktnog rešenja u na potprostor V_N. Ova osobina poznata je kao Galerkinova ortogonalnost.

Prvi korak u dokazu konvergencije Galerkinove metode je sledeći teorijski rezultat.

Teorema 1.10 (lema Céa) *Neka je $(V, \|\cdot\|_V)$ Hilbertov prostor, $V_N \subset V$, $a(\cdot,\cdot)$ ograničena, $V-$ eliptična bilinearna forma na V i l ograničena linearna funkcionela. Neka je $u \in V$ rešenje problema (1.1) i $u_N \in V_N$ Galerkinova aproksimacija (1.2). Tada postoji konstanta C takva da*

$$\|u - u_N\|_V \leq C \inf_{v\in V_N} \|u - v\|_V$$

Dokaz. Prema pretpostavci $a(\cdot,\cdot)$ je $V-$ eliptična, ograničena bilinearna forma pa za svaku funkciju $v \in V_N$ imamo,

$$\begin{aligned} \alpha\|u - u_N\|_V^2 &\leq a(u - u_N, u - u_N) = a(u - u_N, u - v) \\ &\leq M\|u - u_N\|_V \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

Deljenjem sa $\alpha\|u - u_N\|$ sledi tvrđenje.

□

U slučaju kada je $a(\cdot,\cdot)$ simetrična bilinearna forma ona definiše skalarni proizvod na V i njime indukovanu normu $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$.

Posledica 1.11 *Uz pretpostavke prethodne teoreme pretpostavimo još da je dat niz potprostora* $V_{N_1} \subset V_{N_2} \subset ...$ *takvih da je* $\overline{\bigcup_i V_{N_i}} = V$. *Tada Galerkinova metoda konvergira,*

$$\|u - u_{N_i}\| \longrightarrow 0 \ \textit{kad}\ i \longrightarrow \infty.$$

Dokaz. Zbog pretpostavke postoji niz $v_i \in V_{Ni},\ i \geq 1$, takav da

$$\|u - v_i\|_V \ \longrightarrow \ 0 \ \text{ kad } \ i \ \longrightarrow \ \infty.$$

Primenom leme Céa sledi tvrđenje, jer je

$$\|u - u_{N_i}\|_V \leq C\|u - v_i\|_V.$$

$\square$

Glava 2

Formulacija problema

U ovom radu razmatraće se singularno perturbovani problem sa kašnjenjem iz [2], [5]. Traži se $u \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_- \cup \Omega_+)$ tako da

$$\left\{ \begin{aligned} -\epsilon^2 u''(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x-1) = f(x), \;\; x \in \Omega = (0,2), \\ \\ u(x) = \phi(x), \;\; x \in (-1,0), \;\; u(2) = L, \end{aligned} \right. \tag{2.1}$$

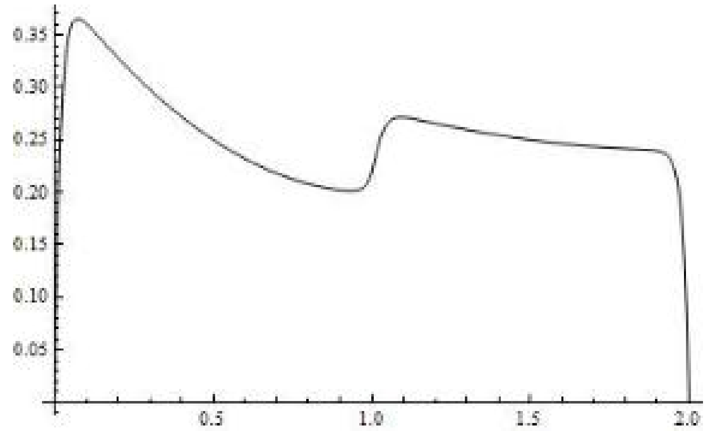
gde je $\epsilon \in (0,1]$ realan broj, a, b, f su glatke funkcije na $[0,2]$, ϕ je glatka na $[-1,0]$ tako da je

$$a(x) \geq \alpha > 0, \quad \beta_0 \leq b(x) \leq \beta < 0, \quad \alpha + \beta_0 \geq \eta > 0$$

za sve $x \in [0,2]$ i pozitivne konstante $\alpha, \beta, \beta_0, \eta$. Parametar $\epsilon \in (0,1]$ i konstanta L iz (2.1) su takođe dati. Problem tipa (2.1) za $\epsilon = 0$ naziva se redukovani problem i njegovo rešenje se označava sa $u_0 = u(\cdot, 0)$. Za problem (2.1) kažemo da je singularno perturbovan ako njegovo rešenje $u = u(\cdot, \epsilon)$ ne konvergira ka rešenju odgovarajućeg redukovanog problema kada $\epsilon \longrightarrow 0$. U tom slučaju ϵ se naziva singularno perturbovanim parametrom.

Ponašanje rešenja je poznato, [2]. Ono se naglo menja na određenim delovima domena. Uske podoblasti na kojima se javljaju promene nazivaju se slojevima i mogu se nalaziti u okolini ruba ili u unutrašnjosti domena. Rešenje polaznog problema (2.1) ima dva konturna sloja i jedan unutrašnji sloj u okolini tačke $x = 1$.

Slika 2.1: Rešenje u problema (2.1) za $a(x) = 5, b(x) = -1, f(x) = 1, L = 0, \phi(x) = x^2, \epsilon = 0.04$



Poznata je i dekompozicija rešenja $u = S + E$ gde je

$$\left|S^{(k)}(x)\right| \leq C, \quad \left|E^{(k)}(x)\right| \leq C\epsilon^{-k} \begin{cases} e^{\frac{-x\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-(1-x)\alpha}{\epsilon}}, & x \in (0,1), \\ e^{\frac{-(x-1)\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-(2-x)\alpha}{\epsilon}}, & x \in (1,2), \end{cases}$$

C pozitivna konstanta i $k = 0, 1, ..., q$.
Polazni problem rešava se postupkom konačnih elemenata Galerkina sa linearnim baznim funkcijama.

2.1 Slabo rešenje

Neka je $\Omega_- = (0,1)$, $\Omega_+ = (1,2)$ i ako označimo sa u_- (respektivno u_+) restrikcije rešenja u na Ω_- (respektivno Ω_+), problem (2.1) je ekvivalentan sledećem problemu: Naći (u_-, u_+) tako da

$$\begin{cases} -\epsilon^2 u_-''(x) + a(x)u_-(x) = f(x) - b(x)\phi(x-1), & x \in \Omega_-, \\ -\epsilon^2 u_+''(x) + a(x)u_+(x) + b(x)u_-(x-1) = f(x), & x \in \Omega_+, \\ u_-(0) = \phi(0), \quad u_+(2) = L, \\ u_-(1) = u_+(1), \quad u_-'(1) = u_+'(1). \end{cases} \tag{2.2}$$

Bez umanjenja opštosti pretpostavljamo da je

$$\phi(0) = 0 \text{ i } L = 0.$$

Kada $\epsilon \longrightarrow 0$ problem (2.2) postaje

$$\begin{cases} a(x)u_-(x) = f(x) - b(x)\phi(x-1), & x \in \Omega_-, \\ \\ a(x)u_+(x) + b(x)u_-(x-1) = f(x), & x \in \Omega_+, \end{cases}$$

i, kao što smo rekli, rešenje u će ispoljiti konturne/unutrašnje slojeve desno od tačke $x = 0$, sa obe strane tačke $x = 1$ i levo od tačke $x = 2$ (jer u_- i u_+ dati iznad ne moraju da zadovoljavaju sve uslove iz (2.2)).

Počinjemo tako što posmatramo (2.2) kao varijacioni problem: Naći $u \in H_0^1(\Omega)$ tako da

$$B(u, v) = F(v) \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.3}$$

gde je

$$\begin{aligned} B(w, v) &= \epsilon^2 \int_0^1 w'_-(x)v'_-(x)dx + \int_0^1 a(x)w_-(x)v_-(x)dx \\ &+ \epsilon^2 \int_1^2 w'_+(x)v'_+(x)dx + \int_1^2 a(x)w_+(x)v_+(x)dx \\ &+ \int_1^2 b(x)w_-(x-1)v_+(x)dx, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} F(v) &= \int_0^1 f(x)v_-(x)dx - \int_0^1 b(x)\phi(x-1)v_-(x)dx \\ &+ \int_1^2 f(x)v_+(x)dx \\ &= \int_0^1 [f(x) - b(x)\phi(x-1)]v_-(x) + \int_1^2 f(x)v_+(x)dx. \end{aligned}$$

Za postojanje slabog rešenja varijacionog problema (2.3) proveravamo da li važe uslovi Laks-Milgramove teoreme za datu bilinearnu formu, odnosno pokazujemo da je bilinearna forma B koercitivna i ograničena u odnosu na energetsku normu definisanu sa

$$\|v\|_\epsilon^2 := \epsilon^2 |v|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ za svaku } v \in H_0^1(\Omega),$$

gde je $\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ i $|v|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, kao i to da je funkcionela F linearna i ograničena u odnosu na istu normu.

Najpre pokazujemo da je bilinearna forma B koercitivna. Za proizvoljnu funkciju $v \in H_0^1(\Omega)$ je

$$
\begin{aligned}
B(v,v) &= \epsilon^2 \int_0^1 (v'_-(x))^2 dx + \int_0^1 a(x)(v_-(x))^2 dx \\
&+ \epsilon^2 \int_1^2 (v'_+(x))^2 dx + \int_1^2 a(x)(v_+(x))^2 dx \\
&+ \int_1^2 b(x) v_-(x-1) v_+(x) dx \\
&\geq \epsilon^2 \int_0^1 (v'_-(x))^2 dx + \alpha \int_0^1 (v_-(x))^2 dx + \epsilon^2 \int_1^2 (v'_+(x))^2 dx \\
&+ \alpha \int_1^2 (v_+(x))^2 dx + \frac{\beta_0}{2} \int_1^2 [(v_-(x-1))^2 + (v_+(x))^2] dx \\
&= \epsilon^2 \left[\int_0^1 (v'_-(x))^2 dx + \int_1^2 (v'_+(x))^2 dx \right] \\
&+ (\alpha + \frac{\beta_0}{2}) \left[\int_0^1 (v_-(x))^2 dx + \int_1^2 (v_+(x))^2 dx \right] \\
&= \epsilon^2 \int_0^2 (v'(x))^2 dx + (\alpha + \frac{\beta_0}{2}) \int_0^2 (v(x))^2 dx \\
&\geq \Theta \left[\epsilon^2 \int_0^2 (v'(x))^2 dx + \int_0^2 (v(x))^2 dx \right] \\
&= \Theta \|v\|_\epsilon^2.
\end{aligned}
$$

gde je $\Theta = \min\{1, \alpha + \frac{\beta_0}{2}\}$.

U prethodnom nizu nejednakosti, u analizi člana $b(x)v_-(x-1)v_+(x)$, najpre smo koristili nejednakost $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$, za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dalje je $v_-(x-1)v_+(x) \leq \frac{1}{2}((v_-(x-1))^2 + (v_+(x))^2)$, pa kada tu nejednakost pomnožimo sa $b(x) < 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} b(x)v_-(x-1)v_+(x) &\geq \frac{b(x)}{2}((v_-(x-1))^2 + (v_+(x))^2) \\ &\geq \frac{\beta_0}{2}((v_-(x-1))^2 + (v_+(x))^2), \quad x \in [1,2]. \end{aligned}$$

Sada pokazujemo da je bilinearna forma B ograničena. Za proizvoljne funkcije $w, v \in H_0^1(\Omega)$ je

$$\begin{aligned} |B(w,v)| &\leq \epsilon^2 \left| \int_0^1 w'_-(x)v'_-(x)dx \right| + \left| \int_0^1 a(x)w_-(x)v_-(x)dx \right| \\ &+ \epsilon^2 \left| \int_1^2 w'_+(x)v'_+(x)dx \right| + \left| \int_1^2 a(x)w_+(x)v_+(x) \right| \\ &+ \left| \int_1^2 b(x)w_-(x-1)v_+(x)dx \right| \\ &\leq \epsilon^2 \left(\int_0^1 |w'_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v'_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \|a\|_{L^\infty(\Omega_-)} \left(\int_0^1 |w_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \epsilon^2 \left(\int_1^2 |w'_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^2 |v'_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \|a\|_{L^\infty(\Omega_+)} \left(\int_1^2 |w_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^2 |v_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \|b\|_{L^\infty(\Omega_+)} \left(\int_1^2 |w_-(x-1)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^2 |v_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \epsilon^2 \left[\left(\int_0^1 |w'_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_1^2 |w'_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\times \left[\left(\int_0^1 |v'_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_1^2 |v'_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Gamma\left[\left(\int_0^1 |w_-(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_1^2 |w_+(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\times \quad \left[\left(\int_0^1 |v_-(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_1^2 |v_+(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \quad 2\epsilon^2\left[\int_0^1 |w'_-(x)|^2 dx + \int_1^2 |w'_+(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \quad \left[\int_0^1 |v'_-(x)|^2 dx + \int_1^2 |v'_+(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&+ \quad 2\Gamma\left[\int_0^1 |w_-(x)|^2 dx + \int_1^2 |w_+(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \quad \left[\int_0^1 |v_-(x)|^2 dx + \int_1^2 |v_+(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \quad 2\epsilon^2\left(\int_0^2 |w'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^2 |v'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \quad 2\Gamma\left(\int_0^2 |w(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^2 |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad \Gamma_1\left[\left(\epsilon^2\int_0^2 |w'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^2 |w(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\times \quad \left[\left(\epsilon^2\int_0^2 |v'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^2 |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \quad 2\Gamma_1\left[\epsilon^2\int_0^2 |w'(x)|^2 dx + \int_0^2 |w(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \quad \left[\epsilon^2\int_0^2 |v'(x)|^2 dx + \int_0^2 |v(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \quad \Gamma_2\|w\|_\epsilon\|v\|_\epsilon,
\end{aligned}
$$

gde je $\Gamma = \max\{\|a\|_{L^\infty(\Omega_-)}, \|a\|_{L^\infty(\Omega_+)}, \|b\|_{L^\infty(\Omega_+)}\}$,
$\Gamma_1 = \max\{2, 2\Gamma\},\ \Gamma_2 = 2\Gamma_1$.

U prethodnom nizu nejednakosti koristili smo Koši-Švarcovu nejednakost, kao i nejednakost $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}, \;\; a, b \in \mathbb{R}^+$.

Ostalo nam je da pokažemo da je funkcionela F linearna i ograničena.

F je linearna jer za svake dve funkcije $w, v \in H_0^1(\Omega)$ važi

$$
\begin{aligned}
F(\alpha w+\beta v) &= \int_0^1 \Big[f(x)-b(x)\phi(x-1)\Big]\Big(\alpha w_-(x)+\beta v_-(x)\Big)dx \\
&+ \int_1^2 f(x)\Big(\alpha w_+(x)+\beta v_+(x)\Big)dx \\
&= \alpha\int_0^1 \Big[f(x)-b(x)\phi(x-1)\Big]w_-(x)dx \\
&+ \beta\int_0^1 \Big[f(x)-b(x)\phi(x-1)\Big]v_-(x)dx \\
&+ \alpha\int_1^2 f(x)w_+(x)dx+\beta\int_1^2 f(x)v_+(x)dx \\
&= \alpha\Big(\int_0^1 \Big[f(x)-b(x)\phi(x-1)\Big]w_-(x)dx \\
&+ \int_1^2 f(x)w_+(x)dx\Big) \\
&+ \beta\Big(\int_0^1 \Big[f(x)-b(x)\phi(x-1)\Big]v_-(x)dx \\
&+ \int_1^2 f(x)v_+(x)dx\Big) \\
&= \alpha F(w)+\beta F(v).
\end{aligned}
$$

F je ograničena jer za svaku funkciju $v \in H_0^1(\Omega)$ važi

$$
\begin{aligned}
|F(v)| &\leq \left|\int_0^1 \Big[f(x)-b(x)\phi(x-1)\Big]v_-(x)dx\right| \\
&+ \left|\int_1^2 f(x)v_+(x)dx\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^1 |f(x) - b(x)\phi(x-1)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_1^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^2 |v_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f - b\phi\|_{L^2(\Omega_-)} \left(\int_0^1 |v_-(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \|f\|_{L^2(\Omega_+)} \left(\int_1^2 |v_+(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

pa opet, primenom nejednakosti

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
|F(v)| &\leq \sqrt{2}\Psi \left[\left(\int_0^1 |v_-(x)|^2 dx \right) + \left(\int_1^2 |v_+(x)|^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \Psi_1 \left(\int_0^2 |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \Psi_1 \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \Psi_1 \|v\|_\epsilon,
\end{aligned}
$$

gde je $\Psi = \max\{\|f - b\phi\|_{L^2(\Omega_-)}, \|f\|_{L^2(\Omega_+)}\}$, i $\Psi_1 = \sqrt{2}\Psi$.

Kako su ispunjeni uslovi Laks-Milgramove teoreme sledi da varijacioni problem (2.3) ima jedinstveno rešenje $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.2 Diskretno rešenje

Najpre ćemo podeliti domen Ω proizvoljnim tačkama $x_0, ..., x_{2N}$ i sa I_i označiti podintervale (x_{i-1}, x_i) dobijene tom podelom. Razmotrimo sada projekciju problema (2.3) na $V_N \subset H_0^1(\Omega)$, gde je $V_N = \{v_N : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} : v_N|_{I_i=(x_{i-1},x_i)} \in P_k(I_i),\ k \in \mathbb{N}\}$. Dakle, za aproksimaciju rešenja smo koristili tzv. splajn funkcije. Te funkcije su po delovima polinomi određenog, fiksnog (niskog) stepena. Naime, ako su zadate tačke $x_0, x_1, ..., x_{2N}$ onda se splajn funkcija na svakom podintervalu $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ (u našem slučaju mrežnom elementu, što ćemo videti kasnije) svodi na polinom nekog stepena k. Koristili smo najjednostavniji oblik splajn funkcije−po delovima linearnu (što znači stepena najviše 1), pa je naš prostor V_N prostor neprekidnih, po delovima linearnih funkcija.

Diskretni problem koji odgovara (2.3) glasi:

Traži se $u_N \in V_N$ tako da

$$B(u_N, v_N) = F(v_N),\ \text{ za sve }\ v_N \in V_N. \tag{2.4}$$

Kako je bilinearna forma B neprekidna i koecitivna, a linearna funkcionela F ograničena sledi da (2.4) ima jedinstveno rešenje.

Kao što smo opisali ranije, ako za $v_N \in V_N$ uzmemo baš ϕ_i, gde je $\{\phi_i\}_{i=0}^{2N}$ baza prostora V_N, diskretno rešenje jeste rešenje sistema linearnih jednačina

$$\sum_{j=0}^{2N} B(\phi_j, \phi_i)\epsilon_j = F(\phi_i),\ i = 0, 1, ..., 2N.$$

Bazne funkcije ϕ_i su tzv. "hat" funkcije definisane sa

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\ x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i},\ x \in [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

$i = 1, ..., 2N - 1,$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, \ x \in [x_0, x_1], \\ \\ 0, \ x \notin [x_0, x_1], \end{cases}$$

i

$$\phi_{2N}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{2N-1}}{x_{2N}-x_{2N-1}}, \ x \in [x_{2N-1}, x_{2N}], \\ \\ 0, \ x \notin [x_{2N-1}, x_{2N}], \end{cases}$$

a dimenzija ovako konstruisanog prostora je $2N+1$.

Važno je pomenuti i *interpolacionu funkciju* $u^I \in V_N$ koju ćemo koristiti prilikom analize greške. To je po delovima linearna funkcija za koju je

$$u^I(x)|_{I_i} = u(x_{i-1})\phi_{i-1}(x) + u(x_i)\phi_i(x), \ x \in [x_{i-1}, x_i],$$

odnosno važi

$$u^I(x_i) = u(x_i), \ i = 0, 1, ..., 2N.$$

Glava 3

Slojno-adaptivne mreže

Pri numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema, za aproksimaciju rešenja van slojeva koristimo grubu mrežu. Međutim, u slojnim delovima domena poželjno je da mreža bude dovoljno gusta da bi sa prihvatljivom tačnošću dobili numeričko rešenje.

Definicija 3.1 *Na intervalu [0,2], mreža je konačan skup*

$$I_h = \{x_0, x_1, ..., x_{2N}\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

sa osobinom

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{2N-1} < x_{2N} = 2.$$

Čvorovi (tačke) mreže su x_i, za $i = 0, 1, ..., 2N$, a unutrašnji čvorovi su x_i za $i = 1, 2, ..., 2N - 1$.

Koraci mreže su

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, ..., 2N.$$

Definicija 3.2 *Mreža je ekvidistantna ako su njeni koraci jednaki, tj. ako je*

$$h_i = h_{i-1} \;\; i = 2, 3, ..., 2N.$$

U suprotnom, mreža je neekvidistantna.

Kao mrežu diskretizacije koristićemo Duranovu mrežu iz [4], ovde adaptiranu za polazni problem (2.1).

3.1 Konstrukcija tačaka Duranove mreže

Pri konstrukciji najpre definišemo tačke na intervalu $[0, 1]$, a zatim i na ostatku domena Ω.

Neka je $h \in (0, 1)$ proizvoljno izabrano. Na intervalu $[0, 1]$ mreža se zadaje rekurzivno definisanim tačkama $x_i, \;\; i = 0, 1, ..., N$,

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= h\epsilon \\
x_i &= x_{i-1} + hx_{i-1} = (1+h)x_{i-1}, \;\; i = 2, 3, ..., M-1 \\
x_M &= \frac{1}{2} \\
x_{2M-i} &= 1 - x_i \;\; i = M-1, ..., 1 \\
x_{2M} &= x_N = 1.
\end{aligned}$$

Broj M (a samim tim i $N = 2M$) se bira iz uslova

$$h\epsilon(1+h)^{M-2} < \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad h\epsilon(1+h)^{M-1} \geq \frac{1}{2}.$$

Kako je

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = h\epsilon, \;\; x_2 = (1+h)h\epsilon, \;\; x_3 = (1+h)x_2 = (1+h)^2 h\epsilon, ...$$

lako se pokazuje da je $x_i = (1+h)^{i-1}h\epsilon, \;\; i = 2, 3, ..., M-1$. Broj M se bira tako da je

$$x_{M-1} = h\epsilon(1+h)^{M-2} < \frac{1}{2}, \;\; x_M = \frac{1}{2} \;\; \text{i} \;\; h\epsilon(1+h)^{M-1} \geq \frac{1}{2}.$$

Tačke koje pripadaju intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$ se konstruišu tako što se "simetrično preslikaju": $x_{N-1} = 1 - x_1, \;\; x_{N-2} = 1 - x_2, ...$

Duranova mreža se na ostatku domena Ω, tj. na intervalu $[1, 2]$, zadaje tačkama x_N, x_{N+1}, ... , x_{2N} datim sa

$$x_{N+i} = 1 + x_i, \quad i = 0, 1, ..., N.$$

3.2 Osobine za korak mreže

Najpre ćemo pokazati osobine za korak Duranove mreže na intervalu $[0,1]$, a zatim i na ostatku domena.

Lema 3.3 *Na intervalu [0,1] važe sledeće osobine za korak mreže*

1) $h_{i-1} < h_i, \;\; i = 3, ..., M-1 \;\; i \;\; h_{i-1} > h_i, \;\; i = M+3, ..., N-1;$
2) $h_i < h, \;\; i = 1, ..., 2M;$
3) $h_i \leq hx, \;\; x \in [x_{i-1}, x_i], \;\; i = 2, 3, ..., M;$
4) $h_i \leq h(1-x), \;\; x \in [x_{i-1}, x_i], \;\; i = M+1, ..., N-1.$

Dokaz.

1) Neka $i = 3, ..., M-1$. Tada:
$$\begin{aligned} h_i &= x_i - x_{i-1} \\ &= (1+h)x_{i-1} - (1+h)x_{i-2} \\ &= (1+h)(x_{i-1} - x_{i-2}) \\ &= (1+h)h_{i-1}. \end{aligned}$$
Kako je $1 + h > 1$, važi $h_{i-1} < h_i$.

Dalje, neka je $i = 2M - j, \;\; j = M-3, ..., 1$. Treba da pokažemo da je $h_{(2M-j)-1} > h_{2M-j}, \;\; j = M-3, ..., 1$. Kako je

$h_{2M-j} = x_{2M-j} - x_{(2M-j)-1} = 1 - x_j - 1 + x_{j+1} = x_{j+1} - x_j = h_{j+1},$

slično dobijamo $h_{(2M-j)-1} = h_{j+2}$, i kako važi da je $h_{j+1} < h_{j+2}$ za $j = 1, ..., M-3$, dobijamo da je $h_{2M-j} = h_{j+1} < h_{j+2} = h_{(2M-j)-1}$, odnosno
$$h_i < h_{i-1}, \;\; i = M+3, ..., N-1.$$

2) Kada je $i = 1$, trivijalno važi $h_1 = h\epsilon < h$. Za ostale indekse i, ova osobina je pokazana u nastavku.

3) Iz konstrukcije tačaka možemo primetiti da važi $h_i = hx_{i-1}$, $i = 2, ..., M-1$. Koristeći tu jednakost dobijamo:
$$h_i = hx_{i-1} \leq hx < h, \;\; x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Ostaje nam još da vidimo šta se dešava kada je $i = M$. Tada je

$$\begin{aligned}
h_M &= \frac{1}{2} - h\epsilon(1+h)^{M-2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{(1+h)} h\epsilon(1+h)^{M-1} \\
&\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+h)} \\
&= \frac{h}{2(1+h)} \\
&\leq hx \\
&< h, \;\; x \in [x_{M-1}, x_M],
\end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned}
(1+h)x &\geq (1+h)x_{M-1} \\
&= (1+h)(h\epsilon(1+h)^{M-2}) \\
&= h\epsilon(1+h)^{M-1} \\
&\geq \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

odnosno $x \geq \frac{1}{2(1+h)}$.

4) Lako se može proveriti da važi $h_i = h(1 - x_i)$, za $i = M+2, ..., N-1$. Koristeći tu jednakost imamo:

$$\begin{aligned}
h_i = h(1 - x_i) &\leq h(1-x) \\
&\leq hx \\
&< h, \;\; x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [\frac{1}{2}, 1].
\end{aligned}$$

Kada je $i = M+1$, $x \in [x_M, x_{M+1}]$ imamo:

$$\begin{aligned}
h_{M+1} = \frac{1}{2} - h\epsilon(1+h)^{M-2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(1+h)} h\epsilon(1+h)^{M-1} \\
&\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+h)} \\
&= \frac{h}{2(1+h)} \\
&\leq h(1-x) \\
&\leq hx \\
&< h,
\end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned}
(1-x)(1+h) &= (1+h)-(1+h)x \\
&\geq (1+h)-(1+h)x_{M+1} \\
&= (1+h)-(1+h)(1-h\epsilon(1+h)^{M-2}) \\
&= (1+h)-(1+h)+h\epsilon(1+h)^{M-1} \\
&= h\epsilon(1+h)^{M-1} \\
&\geq \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

odnosno $(1-x) \geq \frac{1}{2(1+h)}$.

□

Lema 3.4 *Na ostatku domena važe sledeće osobine za korak mreže*

$$\begin{aligned}
1) \quad & h_{i-1} < h_i, \;\; i = N+3, ..., N+M-1 \;\; i \;\; h_{i-1} > h_i, \\
i = \quad & N+M+3, ..., 2N-1; \\
2) \quad & h_i < h, \;\; i = 2M+1, ..., 2N; \\
3) \quad & h_i \leq h(x-1), \;\; x \in [x_{i-1}, x_i], \;\; i = N+2, ..., N+M; \\
4) \quad & h_i \leq h(2-x), \;\; x \in [x_{i-1}, x_i], \;\; i = N+M+1, ..., 2N-1.
\end{aligned}$$

Dokaz.

1) Kako je $h_i = h_j$ za $j = N - i \in \{3, ..., M-1\} \cup \{M+3, ..., N-1\}$, ova osobina direktno sledi iz prethodne leme.

2) Kada je $i = N+1$, trivijalno važi $h_{N+1} = h\epsilon < h$. Za ostale indekse i, ova osobina je pokazana u nastavku.

3) Neka je $i = N + j, \;\; j = 2, ..., M-1$. Tada:

$$\begin{aligned}
h_i = h_{N+j} = h_j &= hx_{j-1} \\
&= h(x_{N+(j-1)} - 1) \\
&\leq h(x-1), \;\; x \in [x_{i-1}, x_i].
\end{aligned}$$

Sada želimo da vidimo šta se dešava kada je $i = N + M$ tj. kada je $j = M$. Tada je

$$\begin{aligned} h_{N+M} = h_M &= \frac{1}{2} - h\epsilon(1+h)^{M-2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(1+h)} h\epsilon(1+h)^{M-1} \\ &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+h)} \\ &= \frac{h}{2(1+h)} \\ &\leq h(x-1), \quad x \in [x_{N+M-1}, x_{N+M}], \end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned} (1+h)x \geq (1+h)x_{N+M-1} &= (1+h)(1+x_{M-1}) \\ &= (1+h)(1+h\epsilon(1+h)^{M-2}) \\ &= (1+h) + h\epsilon(1+h)^{M-1} \\ &\geq (1+h) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

pa sledi da je $x \geq 1 + \frac{1}{2(1+h)}$, tj. $x - 1 \geq \frac{1}{2(1+h)}$.

Kako je $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$, imamo da je $x - 1 \leq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, tj. $h_i \leq \frac{h}{2} < h$.

4) Za $i = N + M + 2, ..., 2N - 1$ imamo da važi $h_i = h(2 - x_i)$, pa $h_i = h(2 - x_i) \leq h(2 - x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Sada proveravamo šta se dešava kada je $i = N + M + 1$:

$$\begin{aligned} h_{N+M+1} &= x_{N+M+1} - x_{N+M} = 1 + x_{M+1} - (1 + x_M) \\ &= x_{M+1} - x_M \\ &= (1 - x_{M-1}) - \frac{1}{2} \\ &= 1 - (1+h)^{M-2}h\epsilon - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - h\epsilon(1+h)^{M-2} \\ &\leq \frac{h}{2(1+h)} \\ &\leq h(2-x), \quad x \in [x_{N+M}, x_{N+M+1}], \end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned}(2-x)(1+h) &= 2(1+h)-(1+h)x \\ &\geq 2(1+h)-(1+h)x_{N+M+1} \\ &= 2(1+h)-(1+h)(1+x_{M+1}) \\ &= 2(1+h)-(1+h)(2-h\epsilon(1+h)^{M-2}) \\ &= h\epsilon(1+h)^{M-1} \\ &\geq \frac{1}{2},\ \ x\in[x_{N+M},x_{N+M+1}],\end{aligned}$$

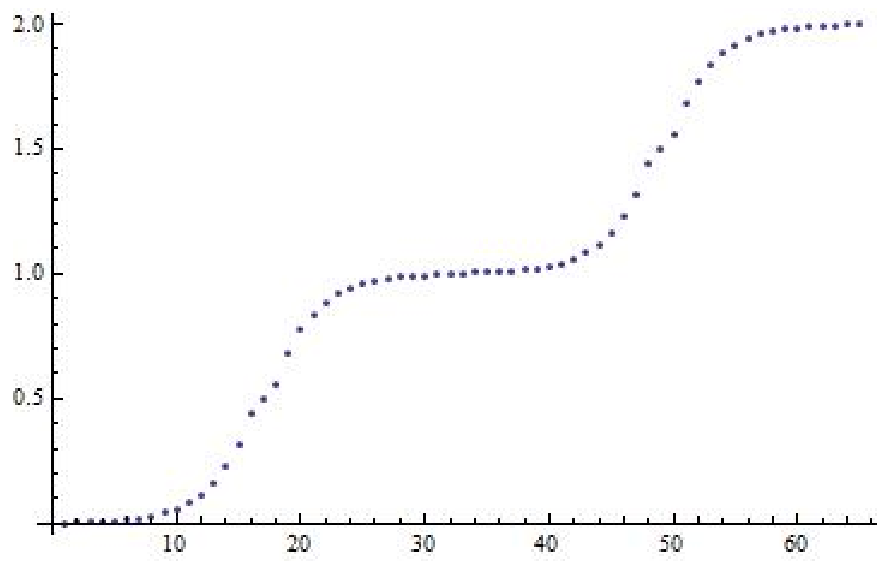
pa sledi da je $(2-x)(1+h)\geq\frac{1}{2}$, tj. $(2-x)\geq\frac{1}{2(1+h)}$.

Kako je $\frac{3}{2}\leq x\leq 2$ imamo da važi $2-x\leq 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ tj. $h_i\leq\frac{h}{2}<h$.

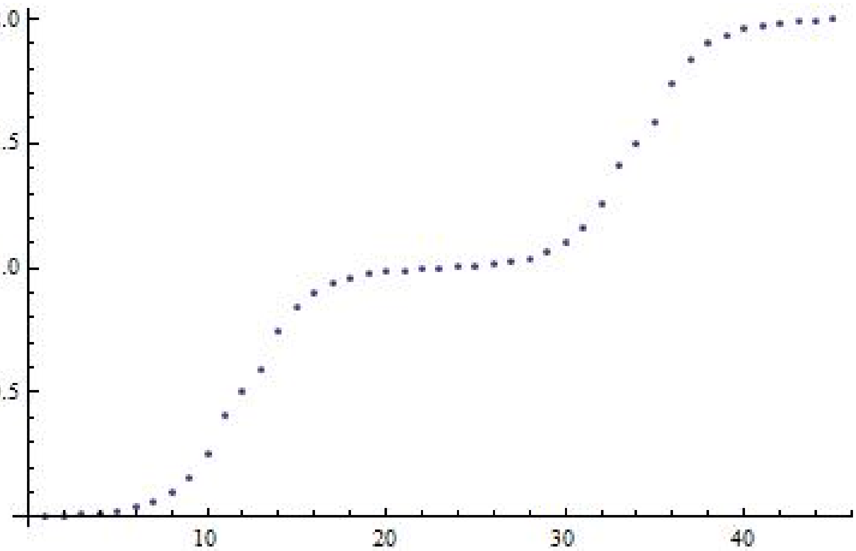
□

Na Slici 3.1 i Slici 3.2 prikazan je raspored tačaka Duranove mreže za različit izbor parametara h i ϵ.

Slika 3.1: Duranova mreža za $h=0.4$, $\epsilon=0.01$



Slika 3.2: Duranova mreža za $h = 0.6$, $\epsilon = 0.01$



Glava 4

Ocena greške na mreži Duranovog tipa

U ovom delu ćemo najpre u energetskoj normi izvesti ocene za grešku interpolacije η, gde je $\eta := u - u^I$, uz primenu dekompozicije rešenja, a potom oceniti i grešku diskretizacije χ koja predstavlja razliku između standardnog Lagranžovog interpolanta i numeričkog rešenja, $\chi := u^I - u^N$. Konačna ocena greške sledi iz nejednakosti trougla primenjene na dekompoziciju greške $u - u^N = \eta + \chi$ i prikazuje parametarsku uniformnost postupka Galerkina primenjenog na mreži Duranovog tipa.

4.1 Greška interpolacije

Neka je $\Omega_1 = (0,1)$, $\Omega_2 = (1,2)$. Na mrežnom elementu $I_i = (x_{i-1}, x_i)$, u dokazima koji slede koristićemo sledeće poznate rezultate, [4],

$$\|g - g^I\|_{L^2(I_i)} \leq C h_i^2 \|g''\|_{L^2(I_i)}, \quad |g - g^I|_{H^1(I_i)} \leq C h_i \|g''\|_{L^2(I_i)},$$

i takođe

$$\|g - g^I\|_{L^2(I_i)} \leq C h^2 \|x^2 g''\|_{L^2(I_i)}, \quad |g - g^I|_{H^1(I_i)} \leq C h \|x g''\|_{L^2(I_i)},$$

kada $h_i \leq hx$.

Kako je $\eta = u - u^I$, kada primenimo dekompoziciju rešenja $u = S + E$, dobićemo da je $\eta = \eta_S + \eta_E$, gde je $\eta_S = S - S^I$ i $\eta_E = E - E^I$.

$S^I \in V_N$ predstavlja Lagranžov interpolant regularne komponente, dok $E^I \in V_N$ predstavlja Lagranžov interpolant slojne komponente rešenja.

Lema 4.1 *Na mreži Duranovog tipa važi*

$$\|\eta_S\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2, \ \ \|\eta_E\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Dokaz. Najpre ćemo pokazati da tvrđenje za η_E važi na $\Omega_1 \backslash (I_1 \cup I_N)$. Kako $h_i \leq hx$ važi samo na $[0, \frac{1}{2}] \setminus I_1$, dok na $[\frac{1}{2}, 1] \setminus I_N$ važi da je $h_i \leq (1-x)h$, prvo ćemo pokazati da ocena važi na $[0, \frac{1}{2}] \backslash I_1$ koristeći

$$\|E - E^I\|_{L^2(I_i)} \leq Ch^2 \|x^2 E''\|_{L^2(I_i)},$$

gde je $|E''(x)| \leq C\epsilon^{-2}(e^{\frac{-x\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-(1-x)\alpha}{\epsilon}}) \leq C\epsilon^{-2}e^{\frac{-x\alpha}{\epsilon}}$. Potom pokazujemo da ocena važi i na $[\frac{1}{2}, 1] \setminus I_N$ koristeći

$$\|E - E^N\|_{L^2(I_i)} \leq Ch^2 \|(1-x)^2 E''\|_{L^2(I_i)},$$

gde je $|E''(x)| \leq C\epsilon^{-2}(e^{\frac{-x\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-(1-x)\alpha}{\epsilon}}) \leq C\epsilon^{-2}e^{\frac{-(1-x)\alpha}{\epsilon}}$.

$$\begin{aligned}
\|E - E^I\|^2_{L^2([0,\frac{1}{2}]\backslash I_1)} &= \sum_{i=2}^{M} \|E - E^I\|^2_{L^2(I_i)} \\
\leq \ & Ch^4 \sum_{i=2}^{M} \|x^2 E''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^4 \|x^2 E''\|^2_{L^2([0,\frac{1}{2}])} \\
\leq \ & Ch^4 \int_0^{\frac{1}{2}} x^4 \epsilon^{-4} e^{\frac{-2x\alpha}{\epsilon}} dx \\
= \ & Ch^4 \epsilon \left[\frac{3}{4\alpha^5} - \left(\frac{1}{16\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-4} + \frac{1}{8\alpha^2} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-3} + \frac{3}{8\alpha^3} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-2} \right.\right. \\
+ \ & \left.\left. \frac{3}{4\alpha^4} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-1} + \frac{3}{4\alpha^5} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^0 \right) \right] \leq Ch^4 \epsilon.
\end{aligned}$$

Prilikom rešavanja integrala koristili smo smenu $s = \frac{x}{\epsilon}$ i rekurzivnu vezu

$$\int s^n e^{-2s\alpha} ds = -\frac{1}{2\alpha} s^n e^{-2s\alpha} + \frac{n}{2\alpha} \int s^{n-1} e^{-2s\alpha} ds.$$

Smene koje smo koristili za parcijalnu integraciju su

$$U = s^n, \ dV = e^{-2s\alpha} ds.$$

Na $[\frac{1}{2},1]\setminus I_N$ imamo

$$
\begin{aligned}
&\|E-E^I\|^2_{L^2([\frac{1}{2},1]\setminus I_N)} = \sum_{i=M}^{N-1}\|E-E^I\|^2_{L^2(I_i)}\\
\leq\ & Ch^4\sum_{i=M}^{N-1}\|(1-x)^2E''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^4\|(1-x)^2E''\|^2_{L^2([\frac{1}{2},1])}\\
\leq\ & Ch^4\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^4\epsilon^{-4}e^{\frac{-2(1-x)\alpha}{\epsilon}}dx\\
=\ & Ch^4\epsilon\Bigg[\frac{3}{4\alpha^5}-\Bigg(\frac{1}{16\alpha}e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}}\epsilon^{-4}+\frac{1}{8\alpha^2}e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}}\epsilon^{-3}+\frac{3}{8\alpha^3}e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}}\epsilon^{-2}\\
+\ & \frac{3}{4\alpha^4}e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}}\epsilon^{-1}+\frac{3}{4\alpha^5}e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}}\epsilon^{0}\Bigg)\Bigg] \leq Ch^4\epsilon.
\end{aligned}
$$

Na mrežnom elementu I_1 važi

$$
\begin{aligned}
&\|E-E^I\|^2_{L^2(I_1)} \leq Ch_1^4\|E''\|^2_{L^2(I_1)}\\
\leq\ & Ch_1^4\int_{x_0=0}^{x_1=h\epsilon}\epsilon^{-4}e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}x}dx + Ch_1^4\int_{x_0=0}^{x_1=h\epsilon}\epsilon^{-4}e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(1-x)}dx\\
\leq\ & Ch_1^4\int_0^{h\epsilon}\epsilon^{-4}e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}x}dx \leq Ch^4\epsilon,
\end{aligned}
$$

jer je $h_1 = h\epsilon$ i $e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(1-x)} \leq e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}x}$, $x\in[x_0,x_1]\subset[0,\frac{1}{2}]$. Prilikom rešavanja integrala koristili smo smenu $s=\frac{x}{\epsilon}$.

Posmatrajmo sada I_N :

$$
\begin{aligned}
&\|E-E^I\|^2_{L^2(I_N)} \leq Ch_N^4\|E''\|^2_{L^2(I_N)}\\
\leq\ & Ch_N^4\int_{x_{N-1}=1-h\epsilon}^{x_N=1}\epsilon^{-4}e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}x}dx + Ch_N^4\int_{x_{N-1}=1-h\epsilon}^{x_N=1}\epsilon^{-4}e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(1-x)}dx\\
\leq\ & Ch_N^4\int_{1-h\epsilon}^{1}\epsilon^{-4}e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(1-x)}dx \leq Ch^4\epsilon,
\end{aligned}
$$

jer je $h_N = h\epsilon$ i $e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}x} \leq e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(1-x)}$, $x\in[x_{N-1},x_N]\subset[\frac{1}{2},1]$.

Kao posledicu dobijamo da je

$$\|E-E^I\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^4\epsilon,$$

tj.

$$\|E-E^I\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Pokazujemo da ocena važi i na intervalu Ω_2, tako što ćemo pokazati da važi na $\Omega_2 \setminus (I_{N+1} \cup I_{2N})$, a zatim i na mrežnim elementima I_{N+1} i I_{2N} posebno.

Kako važi da je $h_i \leq (x-1)h$ na $[1, \frac{3}{2}] \setminus I_{N+1}$ i $h_i \leq (2-x)h$ na $[\frac{3}{2}, 2] \setminus I_{2N}$, Ω_2 delimo na odgovarajući način, pa najpre pokazujemo da ocena važi na $[1, \frac{3}{2}] \setminus I_{N+1}$. Dakle,

$$\|E - E^I\|^2_{L^2([1,\frac{3}{2}]\setminus I_{N+1})} = \sum_{i=N+2}^{N+M} \|E - E^I\|^2_{L^2(I_i)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Ch^4 \sum_{i=N+2}^{N+M} \|(x-1)^2 E''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^4 \|(x-1)^2 E''\|^2_{L^2([1,\frac{3}{2}])} \\
&\leq Ch^4 \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)^4 \epsilon^{-4} e^{\frac{-2\alpha(x-1)}{\epsilon}} dx \\
&= Ch^4 \epsilon \Bigg[\frac{3}{4\alpha^5} - \Bigg(\frac{1}{16\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-4} + \frac{1}{8\alpha^2} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-3} + \frac{3}{8\alpha^3} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-2} \\
&+ \frac{3}{4\alpha^4} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-1} + \frac{3}{4\alpha^5} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{0} \Bigg) \Bigg] \leq Ch^4 \epsilon.
\end{aligned}$$

Na $[\frac{3}{2}, 2] \setminus I_{2N}$ imamo

$$\|E - E^I\|^2_{L^2([\frac{3}{2},2]\setminus I_{2N})} = \sum_{i=N+M}^{2N-1} \|E - E^I\|^2_{L^2(I_i)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Ch^4 \sum_{i=N+M}^{2N-1} \|(2-x)^2 E''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^4 \|(2-x)^2 E''\|^2_{L^2([\frac{3}{2},2])} \\
&\leq Ch^4 \int_{\frac{3}{2}}^{2} (2-x)^4 \epsilon^{-4} e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(2-x)} dx \\
&= Ch^4 \epsilon \Bigg[\frac{3}{4\alpha^5} - \Bigg(\frac{1}{16\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-4} + \frac{1}{8\alpha^2} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-3} + \frac{3}{8\alpha^3} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-2} \\
&+ \frac{3}{4\alpha^4} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{-1} + \frac{3}{4\alpha^5} e^{-\frac{\alpha}{\epsilon}} \epsilon^{0} \Bigg) \Bigg] \leq Ch^4 \epsilon.
\end{aligned}$$

Na mrežnom elementu I_{N+1} važi

$$\begin{aligned}
&\|E - E^I\|^2_{L^2(I_{N+1})} \leq Ch^4_{N+1} \|E''\|^2_{L^2(I_{N+1})} \\
&\leq Ch^4_{N+1} \int_1^{1+h\epsilon} \epsilon^{-4} e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(x-1)} dx + Ch^4_{N+1} \int_1^{1+h\epsilon} \epsilon^{-4} e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(2-x)} dx
\end{aligned}$$

$$\leq \; Ch^4 \int_1^{1+h\epsilon} e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(x-1)} dx \leq Ch^4 \epsilon,$$

jer je $h_{N+1} = h\epsilon$ i $e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(2-x)} \leq e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(x-1)}, \; x \in [x_N, x_{N+1}] \subset [1, \frac{3}{2}]$.

Posmatrajmo sada I_{2N} :

$$\begin{aligned} & \|E - E^I\|^2_{L^2(I_{2N})} \leq Ch^4_{2N} \|E''\|^2_{L^2(I_{2N})} \\ \leq \; & Ch^4_{2N} \int_{2-h\epsilon}^2 \epsilon^{-4} e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(x-1)} dx + Ch^4_{2N} \int_{2-h\epsilon}^2 \epsilon^{-4} e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(2-x)} dx \\ \leq \; & Ch^4 \int_{2-h\epsilon}^2 e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(2-x)} dx \leq Ch^4 \epsilon, \end{aligned}$$

jer je $h_{2N} = h\epsilon$ i $e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(x-1)} \leq e^{\frac{-2\alpha}{\epsilon}(2-x)}, \; x \in [x_{2N-1}, x_{2N}] \subset [\frac{3}{2}, 2]$.

Kao posledicu dobijamo da važi:

$$\|E - E^I\|^2_{L^2(\Omega_2)} \leq Ch^4 \epsilon,$$

tj.

$$\|E - E^I\|_{L^2(\Omega_2)} \leq Ch^2 \epsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) sledi da je

$$\|\eta_E\|_{L^2(\Omega)} = \|E - E^I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Sada pokazujemo ocenu za η_S :

$$\begin{aligned} & \|\eta_S\|^2_{L^2(\Omega)} = \|S - S^I\|^2_{L^2(\Omega)} \\ = \; & \sum_{i=1}^{2N} \|S - S^I\|^2_{L^2(I_i)} \\ \leq \; & Ch_1^4 \|S''\|^2_{L^2(I_1)} + C \sum_{i=2}^{N-1} h_i^4 \|S''\|^2_{L^2(I_i)} \\ + \; & Ch_N^4 \|S''\|^2_{L^2(I_N)} + Ch^4_{N+1} \|S''\|^2_{L^2(I_{N+1})} \\ + \; & C \sum_{i=N+2}^{2N-1} h_i^4 \|S''\|^2_{L^2(I_i)} + Ch^4_{2N} \|S''\|^2_{L^2(I_{2N})} \\ \leq \; & Ch^4. \end{aligned}$$

Koristili smo $h_i < h, \; i = 1, ..., 2N$, kao i to da je $\|S''\|_{L^2(\Omega)} \leq C$.

$\square$

Kako je $\eta = \eta_S + \eta_E$, dobijamo da važi

$$\|\eta\|_{L^2(\Omega)} = \|\eta_S + \eta_E\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\eta_S\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta_E\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 + Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 4.2 *Na mreži Duranovog tipa važi*

$$|\eta_S|_{H^1(\Omega)} \leq Ch, \quad |\eta_E|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Dokaz. Isto kao i u Lemi 4.1 podelićemo Ω na $\Omega_1 = (0,1)$ i $\Omega_2 = (1,2)$. Prvo pokazujemo da ocena za η_E važi na Ω_1, tj. da važi na I_1, $[0, \frac{1}{2}] \setminus I_1$, $[\frac{1}{2}, 1] \setminus I_N$ i I_N redom.

Najpre je

$$\begin{aligned} & |E - E^I|^2_{H^1(I_1)} \leq Ch_1^2 \|E''\|^2_{L^2(I_1)} \\ \leq \; & Ch_1^2 \epsilon^{-4} \int_0^{h\epsilon} \left(e^{\frac{-2x\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-2\alpha(1-x)}{\epsilon}} \right) dx \\ \leq \; & Ch^2 \epsilon^{-1}, \end{aligned}$$

nakon uvođenja smene $s = \frac{x}{\epsilon}$ i jednakosti $h_1 = h\epsilon$.

Na $[0, \frac{1}{2}] \setminus I_1$ važi

$$\begin{aligned} & |E - E^I|^2_{H^1([0,\frac{1}{2}]\setminus I_1)} = \sum_{i=2}^{M} |E - E^I|^2_{H^1(I_i)} \\ \leq \; & Ch^2 \sum_{i=2}^{M} \|xE''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^2 \|xE''\|^2_{L^2([0,\frac{1}{2}])} \\ \leq \; & Ch^2 \epsilon^{-4} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \left(e^{\frac{-2x\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-2\alpha(1-x)}{\epsilon}} \right) dx \\ \leq \; & Ch^2 \epsilon^{-1}, \end{aligned}$$

nakon uvođenja smene $s = \frac{x}{\epsilon}$ i primenom uzastopne parcijalne integracije (slično kao u Lemi 4.1).

Dalje, na $[\frac{1}{2}, 1] \setminus I_N$ je

$$\begin{aligned} & |E - E^I|^2_{H^1([\frac{1}{2},1]\setminus I_N)} = \sum_{i=M}^{N-1} |E - E^I|^2_{H^1(I_i)} \\ \leq \; & Ch^2 \sum_{i=M}^{N-1} \|(1-x)E''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^2 \|(1-x)E''\|^2_{L^2([\frac{1}{2},1])} \\ \leq \; & Ch^2 \epsilon^{-4} \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^2 \left(e^{\frac{-2x\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-2\alpha(1-x)}{\epsilon}} \right) dx \\ \leq \; & Ch^2 \epsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Na mrežnom elementu I_N imamo

$$
\begin{aligned}
& |E - E^I|^2_{H^1(I_N)} \leq Ch_N^2 \|E''\|^2_{L^2(I_N)} \\
\leq \;& Ch_N^2 \epsilon^{-4} \int_{1-h\epsilon}^{1} \left(e^{\frac{-2x\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-2\alpha(1-x)}{\epsilon}} \right) dx \\
\leq \;& Ch^2 \epsilon^{-1}.
\end{aligned}
$$

Iz prethodno dokazanog sledi da je

$$
|E - E^I|_{H^1(\Omega_1)} \leq Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.3}
$$

Sada pokazujemo da ta ocena važi i na Ω_2. Prvo pokazujemo da ona važi na mrežnom elementu I_{N+1} :

$$
\begin{aligned}
& |E - E^I|^2_{H^1(I_{N+1})} \leq Ch_{N+1}^2 \|E''\|^2_{L^2(I_{N+1})} \\
\leq \;& Ch_{N+1}^2 \epsilon^{-4} \int_{1}^{1+h\epsilon} \left(e^{\frac{-(x-1)\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-(2-x)\alpha}{\epsilon}} \right) dx \\
\leq \;& Ch^2 \epsilon^{-1}.
\end{aligned}
$$

Na $[1, \frac{3}{2}] \setminus I_{N+1}$ je

$$
\begin{aligned}
& |E - E^I|^2_{H^1([1,\frac{3}{2}]\setminus I_{N+1})} = \sum_{i=N+2}^{N+M} |E - E^I|^2_{H^1(I_i)} \\
\leq \;& Ch^2 \sum_{i=N+2}^{M+N} \|(x-1)E''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^2 \|(x-1)E''\|^2_{L^2([1,\frac{3}{2}])} \\
\leq \;& Ch^2 \epsilon^{-4} \int_{1}^{\frac{3}{2}} (x-1)^2 \left(e^{\frac{-(x-1)\alpha}{\epsilon}} + e^{\frac{-(2-x)\alpha}{\epsilon}} \right) dx \\
\leq \;& Ch^2 \epsilon^{-1}.
\end{aligned}
$$

Dalje je na $[\frac{3}{2}, 2] \setminus I_{2N}$

$$
\begin{aligned}
& |E - E^I|^2_{H^1([\frac{3}{2},2]\setminus I_{2N})} = \sum_{i=N+M}^{2N-1} |E - E^I|^2_{H^1(I_i)} \\
\leq \;& Ch^2 \sum_{i=N+M}^{2N-1} \|(2-x)E''\|^2_{L^2(I_i)} \leq Ch^2 \|(2-x)E''\|^2_{L^2([\frac{3}{2},2])}
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad Ch^2\epsilon^{-4}\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2-x)^2\left(e^{\frac{-(x-1)\alpha}{\epsilon}}+e^{\frac{-(2-x)\alpha}{\epsilon}}\right)dx$$
$$\leq \quad Ch^2\epsilon^{-1}.$$

Preostalo nam je da pokažemo da ocena važi i na I_{2N} :

$$|E-E^I|^2_{H^1(I_{2N})}\leq Ch^2_{2N}\|E''\|^2_{L^2(I_{2N})}$$
$$\leq \quad Ch^2_{2N}\epsilon^{-4}\int_{2-h\epsilon}^{2}\left(e^{\frac{-(x-1)\alpha}{\epsilon}}+e^{\frac{-(2-x)\alpha}{\epsilon}}\right)dx$$
$$\leq \quad Ch^2\epsilon^{-1}.$$

Sada dobijamo da je

$$|E-E^I|_{H^1(\Omega_2)}\leq Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Konačno iz (4.3) i (4.4) sledi da je

$$|E-E^I|_{H^1(\Omega)}\leq Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Ostaje nam da pokažemo da važi $|\eta_S|_{H^1(\Omega)}\leq Ch$. Lako se dobija da je

$$|\eta_S|^2_{H^1(\Omega)}=|S-S^I|^2_{H^1(\Omega)}=\sum_{i=1}^{2N}|S-S^I|^2_{H^1(I_i)}$$
$$\leq \quad Ch_1^2\|S''\|^2_{L^2(I_1)}+C\sum_{i=2}^{N-1}h_i^2\|S''\|^2_{L^2(I_i)}+Ch_N^2\|S''\|^2_{L^2(I_N)}$$
$$+ \quad Ch_{N+1}^2\|S''\|^2_{L^2(I_{N+1})}+C\sum_{i=N+2}^{2N-1}h_i^2\|S''\|^2_{L^2(I_i)}+Ch_{2N}^2\|S''\|^2_{L^2(I_{2N})}$$
$$\leq \quad Ch^2,$$

jer je $h_i<h$ za $i=1,...,2N$ i $\|S''\|_{L^2(\Omega)}\leq C$.

Kao posledicu dobijamo da je

$$|S-S^I|_{H^1(\Omega)}\leq Ch.$$

$\square$

Sada imamo

$$|\eta|_{H^1(\Omega)}=|\eta_S+\eta_E|_{H^1(\Omega)}\leq|\eta_S|_{H^1(\Omega)}+|\eta_E|_{H^1(\Omega)}\leq Ch+Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Sada uz pomoć Leme 4.1 i Leme 4.2 možemo oceniti η u energetskoj normi. Dakle,

$$\begin{aligned}
\|\eta\|_\epsilon^2 &= \epsilon^2|\eta|^2_{H^1(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= (\epsilon(Ch + Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}))^2 + (Ch^2 + Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})^2 \\
&\leq \left(\epsilon(Ch + Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}) + Ch^2 + Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\|\eta\|_\epsilon &\leq \epsilon(Ch + Ch\epsilon^{-\frac{1}{2}}) + Ch^2 + Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}} \\
&= Ch\epsilon^{\frac{1}{2}}(1 + \epsilon^{\frac{1}{2}}) + Ch^2(1 + \epsilon^{\frac{1}{2}}) \\
&\leq Ch\epsilon^{\frac{1}{2}} + Ch^2.
\end{aligned}$$

4.2 Greška diskretizacije

Teorema 4.3 *Na mreži Duranovog tipa važi sledeće*

$$\|\chi\|_\epsilon \le Ch^2 + Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Dokaz. Koristićemo Galerkinovu ortogonalnost i koercitivnost bilinearne forme B u odnosu na energetsku normu. Neka je $\Theta = \min\{1, \alpha + \frac{\beta_0}{2}\}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\Theta\|\chi\|_\epsilon^2 &\le B(\chi,\chi) = -B(\eta,\chi) \le |B(\eta,\chi)| \\
&\le \epsilon^2|(\eta',\chi')_{\Omega_1}| + \epsilon^2|(\eta',\chi')_{\Omega_2}| \\
&+ |(a\eta,\chi)_{\Omega_1}| + |(a\eta,\chi)_{\Omega_2}| \\
&+ \left|\int_1^2 b(x)\eta(x-1)\chi(x)dx\right|.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Sada analiziramo svaki sabirak u (4.5) posebno. Najpre je

$$\begin{aligned}
\epsilon^2(\eta',\chi')_{\Omega_1} &= \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta'\chi' dx \\
&= \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N} \left(\eta\chi' \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta\chi'' \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

jer je $\eta(x_{k-1}) = \eta(x_k) = 0$ i $\chi'' = 0$.

Prilikom rešavanja integrala

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta'\chi' dx$$

koristili smo parcijalnu integraciju sa smenama

$$U = \chi' \text{ i } dV = \eta' dx.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}
\epsilon^2(\eta',\chi')_{\Omega_2} &= \epsilon^2 \sum_{k=N+1}^{2N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta'\chi' dx \\
&= \epsilon^2 \sum_{k=N+1}^{2N} \left(\eta\chi' \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta\chi'' \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

iz istih razloga kao i na Ω_1.

Da bismo pokazali ocenu za treći i četvrti sabirak iz (4.5) koristićemo Koši-Švarcovu nejednakost. Tako dobijamo da je

$$\begin{aligned}|(a\eta,\chi)_{\Omega_1}| &\leq C\|\eta\|_{L^2(\Omega_1)}\|\chi\|_{L^2(\Omega_1)}\\ &\leq (Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})\|\chi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq (Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})\|\chi\|_{\epsilon},\end{aligned}$$

jer je $\|\eta\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}$ i $\|\chi\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|\chi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\chi\|_{\epsilon}$.

Analogno je

$$\begin{aligned}|(a\eta,\chi)_{\Omega_2}| &\leq C\|\eta\|_{L^2(\Omega_2)}\|\chi\|_{L^2(\Omega_2)}\\ &\leq (Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})\|\chi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq (Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})\|\chi\|_{\epsilon},\end{aligned}$$

jer je $\|\eta\|_{L^2(\Omega_2)} \leq Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}$ i $\|\chi\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \|\chi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\chi\|_{\epsilon}$.

U analizi poslednjeg sabirka u (4.5), opet koristeći Koši-Švarcovu nejednakost, imamo

$$\begin{aligned}\left|\int_1^2 b(x)\eta(x-1)\chi(x)dx\right| &\leq C_1\Big(\int_1^2 |\eta(x-1)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\times \Big(\int_1^2 |\chi(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= C_1\Big(\int_0^1 |\eta(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_1^2 |\chi(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= C_1\|\eta\|_{L^2(\Omega_1)}\|\chi\|_{L^2(\Omega_2)}\\ &\leq (Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})\|\chi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq (Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})\|\chi\|_{\epsilon},\end{aligned}$$

gde je $C_1 = \|b\|_{L^\infty(\Omega_2)}$.

Iz prethodno dokazanog sledi da je

$$\Theta\|\chi\|_{\epsilon}^2 \leq (Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}})\|\chi\|_{\epsilon},$$

pa je

$$\|\chi\|_{\epsilon} \leq Ch^2+Ch^2\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

□

4.3 Konačna ocena greške

Kao što smo rekli, konačnu ocenu greške dobijamo na osnovu prethodnih rezultata.

Teorema 4.4 *Neka je u^N diskretno rešenje problema (2.1), a u njegovo tačno rešenje. Na mreži Duranovog tipa važi*

$$\|u - u^N\|_\epsilon \leq Ch\epsilon^{\frac{1}{2}} + Ch^2.$$

Dokaz. Kako je $\eta = u - u^I$ i $\chi = u^I - u^N$ imamo da je

$$\begin{aligned} \|u - u^N\|_\epsilon &= \|\eta + \chi\|_\epsilon \leq \|\eta\|_\epsilon + \|\chi\|_\epsilon \\ &\leq Ch\epsilon^{\frac{1}{2}} + Ch^2. \end{aligned}$$

□

Glava 5

Numerički eksperimenti

U ovom delu rada predstavljamo rezultate numeričkih testova u cilju verifikacije teoretski dobijenih rezultata. U tabelama koje se nalaze u okviru ovog odeljka su za različite vrednosti ϵ i h izmerene greške

$$E^N = \left(\epsilon^2 \int_0^2 |u'(x) - u'^N(x)|^2 dx + \int_0^2 |u(x) - u^N(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

gde je u tačno rešenje, a u^N diskretno rešenje problema koje je na mrežnom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ definisano sa

$$u^N(x) = u^N_{i-1}\phi_{i-1}(x) + u^N_i \phi_i(x),$$

gde je $[u^N_0, u^N_1, ..., u^N_{2N}]^T$ rešenje sistema

$$\sum_{j=0}^{2N} B(\phi_j, \phi_i)\epsilon_j = F(\phi_i), \; i = 0, 1, ..., 2N$$

za fiksne vrednosti ϵ i h.

Problem koji je testiran je

$$\begin{cases} -\epsilon^2 u''(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x-1) = f(x), \; x \in (0, 2), \\ \\ \hfill u(x) = \phi(x), \; x \in (-1, 0), \; u(2) = L, \end{cases}$$

za $a(x) = 5, \; b(x) = -1, \; f(x) = 1, \; L = 0, \; \phi(x) = x^2.$

Tačno rešenje ovog problema je

$$u_-(x) = \frac{1}{25}(-10x + 5x^2 + 2(5+\epsilon^2)) + e^{\frac{\sqrt{5}x}{\epsilon}} C_1 + e^{\frac{-\sqrt{5}x}{\epsilon}} C_2, \ x \in (0,1)$$

i

$$\begin{aligned} u_+(x) &= \frac{e^{\frac{-\sqrt{5}(1+x)}{\epsilon}}\left(4e^{\frac{\sqrt{5}(1+x)}{\epsilon}}\epsilon(50 - 20x + 5x^2 + 4\epsilon^2)\right)}{500\epsilon} \\ &+ \frac{e^{\frac{-\sqrt{5}(1+x)}{\epsilon}}\left(-25e^{\frac{2\sqrt{5}x}{\epsilon}}(2\sqrt{5}x - \epsilon)C_1 + 25e^{\frac{2\sqrt{5}}{\epsilon}}(2\sqrt{5}x + \epsilon)C_2\right)}{500\epsilon} \\ &+ \frac{e^{\frac{-\sqrt{5}(1+x)}{\epsilon}}\left(500e^{\frac{\sqrt{5}(1+2x)}{\epsilon}}\epsilon C_3 + 500e^{\frac{\sqrt{5}}{\epsilon}}\epsilon C_4\right)}{500\epsilon}, \ x \in (1,2), \end{aligned}$$

gde su $C_i, \ i = 1,2,3,4$ konstante koje zavise od ϵ, a dobijamo ih iz uslova $u_-(0) = 0$, $u_+(2) = 0$, $u_-(1) = u_+(1)$, $u'_-(1) = u'_+(1)$.

U tabelama koje slede prikazane su greške E^N za fiksirane vrednosti ϵ i različite vrednosti h, a na Slici 5.1 i Slici 5.2 je grafički prikazano kako greška E^N zavisi od h.

Tabela 5.1: $\epsilon = 0.04$

h	M	E^N
0.8	6	0.0458669
0.7	7	0.0408405
0.6	8	0.0354190
0.4	12	0.0234124
0.3	16	0.0169413
0.2	24	0.0104024

Tabela 5.2: $\epsilon = 0.02$

h	M	E^N
0.8	7	0.0324444
0.7	8	0.0288870
0.6	9	0.0250532
0.4	14	0.0165586
0.3	18	0.0119815
0.2	28	0.0073570

Tabela 5.3: $\epsilon = 0.01$

h	M	E^N
0.8	9	0.0229492
0.7	10	0.0204328
0.6	11	0.0177165
0.4	16	0.0117098
0.3	21	0.0084728
0.2	32	0.0052026

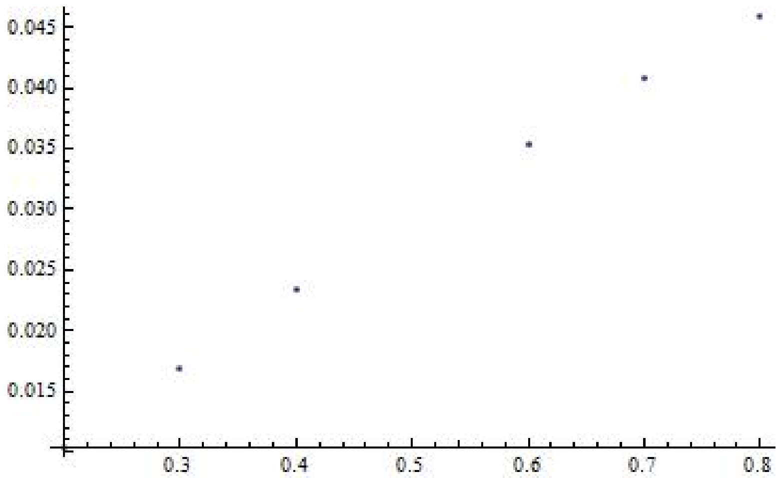
Tabela 5.4: $\epsilon = 0.008$

h	M	E^N
0.8	9	0.0205223
0.7	10	0.0182725
0.6	11	0.0158475
0.4	17	0.0104746
0.3	22	0.0075786
0.2	33	0.0046533

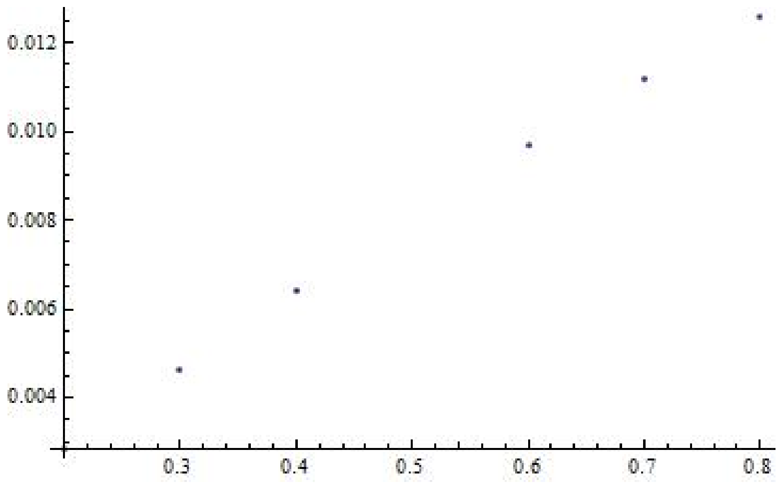
Tabela 5.5: $\epsilon = 0.003$

h	M	E^N
0.8	11	0.0125771
0.7	12	0.0111938
0.6	13	0.0097094
0.4	19	0.0064155
0.3	26	0.0046421
0.2	38	0.0028499

Slika 5.1: Zavisnost E^N od h za $\epsilon = 0.04$



Slika 5.2: Zavisnost E^N od h za $\epsilon = 0.003$



Glava 6

Mathematica programi

Programi koji slede korišćeni su za izvođenje numeričkih eksperimenata u radu.

6.1 Program za dobijanje Duranove mreže

Duran $[m\_,\ \epsilon\_,\ h\_] :=$
Join$[\{0\},\ \{h * \epsilon\},$
Table$[h * \epsilon * (1+h)^{(i-1)},\ \{i,\ 2,\ m-1\}],\ \{1/2\},$
Reverse[Table$[1 - h * \epsilon * (1+h)^{(i-1)},\ \{i,\ 1,\ m-1\}]],$
$\{1\},\ \{1 + h * \epsilon\},$
Table$[1 + h * \epsilon * (1+h)^{(i-1)},\ \{i,\ 2,\ m-1\}],\ \{3/2\},$
Reverse[Table$[2 - h * \epsilon * (1+h)^{(i-1)},\ \{i,\ 1,\ m-1\}]],$
$\{2\}];$

Kako M dobijamo iz uslova

$$h\epsilon(1+h)^{M-2} < \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad h\epsilon(1+h)^{M-1} \geq \frac{1}{2},$$

za unapred zadate ϵ i h računamo M uz pomoć naredbe

Reduce$[\{\epsilon * h * (1+h)^m/(1+h)^2 < 1/2, \epsilon * h * (1+h)^m/(1+h) \geq 1/2\},$

$m,$ Reals].

6.2 Program za dobijanje približnog rešenja

PKE$[a_,\ b_,\ f_,\ \phi_,\ x_,\ \{m_,\ \epsilon_,\ h_\}] :=$

Module$\Big[\{$mreza$,\ g,\ u,\ v,\ w,\ w1,\ w2,\ w3,\ r,\ MS,\ i\}$,

mreza = Duran$[m,\ \epsilon,\ h]$;

g =Table[mreza$[[i+1]]-$ mreza$[[i]],\ \{i, 4*m\}]$;

u =Table$[-\epsilon^2/g[[i]] + a[x]/g[[i]]^2$
$*$ NIntegrate[(mreza$[[i+1]]-x)*(x-$mreza$[[i]])$,
$\{x,$ mreza$[[i]]$,mreza$[[i+1]]\}],\ \{i,\ 2,\ 4*m-1\}]$;

$v =$ Table$[-\epsilon^2/g[[i+1]] + a[x]/g[[i+1]]^2$
$*$ NIntegrate$[(x-$mreza$[[i+1]])*($mreza$[[i+2]]-x)$,
$\{x,$ mreza$[[i+1]]$, mreza$[[i+2]]\}],\ \{i,\ 1,\ 4*m-2\}]$;

$w =$ Table$[\epsilon^2/g[[i]] + \epsilon^2/g[[i+1]] + a[x]/g[[i]]^2$
$*$ NIntegrate$[(x-$mreza$[[i]])^2,\ \{x,$ mreza$[[i]],$ mreza$[[i+1]]\}]$
$+\ a[x]/g[[i+1]]^2$
$*$ NIntegrate[(mreza$[[i+2]]-x)^2,\ \{x,$ mreza$[[i+1]]$, mreza$[[i+2]]\}]$,
$\{i,\ 1,\ 4*m-1\}]$;

$w1$ =Table$[b[x]/(g[[i]]*g[[2*m+i]])$
$*$ NIntegrate[(mreza$[[i+1]]-(x-1))*(x-$mreza$[[2*m+i]])$,
$\{x,$ mreza$[[2*m+i]]$, mreza$[[2*m+i+1]]\}],\ \{i,\ 2,\ 2*m-1\}]$;

$w2$ =Table$[b[x]/(g[[i]]*g[[2*m+i]])$
$*$ NIntegrate$[((x-1)-$mreza$[[i]])*(x-$mreza$[[2*m+i]])$,
$\{x,$ mreza$[[2*m+i]]$, mreza$[[2*m+i+1]]\}]$
$+\ b[x]/(g[[i+1]]*g[[(2*m+i)+1]])$
$*$ NIntegrate[(mreza$[[i+2]]-(x-1))*($mreza$[[(2*m+i)+2]]$
$-\ x),\ \{x,$ mreza$[[(2*m+i)+1]]$, mreza$[[(2*m+i)+2]]\}]$,
$\{i,\ 1,\ 2*m-1\}]$;

$w3 = \text{Table}[b[x]/(g[[i+1]] * g[[2*m+i+1]])$
$* \text{ NIntegrate}[((x-1) - \text{mreza}[[i+1]]) * (\text{mreza}[[2*m+i+2]] - x),$
$\{x, \text{ mreza}[[2*m+i+1]], \text{ mreza}[[2*m+i+2]]\}], \ \{i, \ 0, \ 2*m-1\}];$

$r = \text{Join}[$
$\text{Table}[f[x]/g[[i]]* \text{ NIntegrate}[(x - \text{mreza}[[i]]),$
$\{x, \text{ mreza}[[i]], \text{ mreza}[[i+1]]\}]$
$- \, b[x]/g[[i]]* \text{ NIntegrate}[\phi[x-1] * (x - \text{mreza}[[i]]),$
$\{x, \text{ mreza}[[i]], \text{ mreza}[[i+1]]\}]$
$+ \, f[x]/g[[i+1]]* \text{ NIntegrate}[(\text{mreza}[[i+2]] - x),$
$\{x, \text{ mreza}[[i+1]], \text{ mreza}[[i+2]]\}]$
$- \, b[x]/g[[i+1]]* \text{ NIntegrate}[\phi[x-1] * (\text{mreza}[[i+2]] - x),$
$\{x, \text{ mreza}[[i+1]], \text{ mreza}[[i+2]]\}], \ \{i, \ 1, \ 2*m\}],$
$\text{Table}[f[x]/g[[i]]* \text{ NIntegrate}[(x - \text{mreza}[[i]]),$
$\{x, \text{ mreza}[[i]], \ \ \text{mreza}[[i+1]]\}]$
$+ \, f[x]/g[[i+1]]* \text{ NIntegrate}[(\text{mreza}[[i+2]] - x),$
$\{x, \text{ mreza}[[i+1]], \text{ mreza}[[i+2]]\}], \ \{i, \ 2*m+1, \ 4*m-1\}]$
$];$

$MS = \text{DiagonalMatrix}[w] + \text{DiagonalMatrix}[u, -1]$
$+ \text{ DiagonalMatrix}[v, 1] + \text{DiagonalMatrix}[w2, -2*m]$
$+ \text{ DiagonalMatrix}[w1, -(2*m+1)]$
$+ \text{ DiagonalMatrix}[w3, -(2*m-1)];$

$\text{Join}[0, \text{ LinearSolve}[MS, r], \ 0]$

$\Big];$

6.3 Naredbe za dobijanje tačnog rešenja

$u1[x\_] = u[x]/.$
$\text{Flatten}[\text{DSolve}[\{-\epsilon^2 u''[x]+a[x]u[x] == f[x]-b[x]\phi[x-1]\},\ u[x],\ x]];$

$u2[x\_] = u[x]/.$
$\text{Flatten}[\text{DSolve}[\{-\epsilon^2 u''[x] + a[x]u[x] + b[x]u1[x-1] == f[x]\},$
$u[x],\ x]];$

$\text{konst} = \text{Flatten}[\ \text{Solve}$
$[u1[0] == 0,\ u2[2] == 0,\ u1[1] == u2[1],\ u1'[1] == u2'[1],$
$\{C[1],\ C[2],\ C[3],\ C[4]\}]];$

$C1 = C[1]/.\ \text{konst};$
$C2 = C[2]/.\ \text{konst};$
$C3 = C[3]/.\ \text{konst};$
$C4 = C[4]/.\ \text{konst};$

6.4 Program za dobijanje greške $\|u - u^N\|_\epsilon$

uN =PKE$[a,\ b,\ f,\ \phi,\ x,\ \{m,\ \epsilon,\ h\}]$;

mreza = Duran$[m,\ \epsilon,\ h]$;

g =Table[mreza$[[i+1]]-$mreza$[[i]],\ \{i,\ 1,\ 4*m\}]$;

$Du1[x\_] := D[u1[x], x]$;

$Du2[x\_] := D[u2[x], x]$;

gr = Sqrt $[\epsilon^2*$ Sum [NIntegrate [Abs $[Du1[x] + uN[[i]]/g[[i]]$
$-uN[[i+1]]/g[[i]]]^2,\ \{x,$ mreza$[[i]]$, mreza$[[i+1]]\}],\ \{i,\ 1,\ 2*m\}]$
$+\ \epsilon^2*$ Sum [NIntegrate [Abs $[Du2[x] + uN[[i]]/g[[i]]$
$-\ uN[[i+1]]/g[[i]]]^2,\ \{x,$ mreza$[[i]]$, mreza$[[i+1]]\}],$
$\{i,\ 2*m+1,\ 4*m\}]$
+ Sum [NIntegrate [Abs $[u1[x] - uN[[i]]*($mreza$[[i+1]] - x)/g[[i]]$
$-uN[[i+1]]*(x-$mreza$[[i]])/g[[i]]]^2,\ \{x,$ mreza$[[i]]$, mreza$[[i+1]]\}],$
$\{i,\ 1,\ 2*m\}]$
+ Sum [NIntegrate [Abs $[u2[x] - uN[[i]]*($mreza$[[i+1]] - x)/g[[i]]$
$-uN[[i+1]]*(x-$mreza$[[i]])/g[[i]]]^2,\ \{x,$ mreza$[[i]]$, mreza$[[i+1]]\}],$
$\{i,\ 2*m+1,\ 4*m\}]]$;

Zaključak

Glavni deo rada posvećen je singularno perturbovanom problemu sa kašnjenjem (2.1) kod koga se javljaju slojevi desno od tačke $x = 0$, sa obe strane tačke $x = 1$ i levo od tačke $x = 2$. Predstavljen je postupak konačnih elemenata Galerkina za rešavanje ovog problema i konstruisana mreža diskretizacije pomoću koje smo izvršili aproksimaciju rešenja. Pokazano je da greška rešenja zavisi od proizvoljno izabrane vrednosti $h \in (0, 1)$ i perturbacionog parametra ϵ, tj. da je za dovoljno male ϵ i h greška mala. Teoretski dobijene ocene verifikovane su eksperimentalno, a numerički eksperiment potvrdio je dobijene rezultate.

Literatura

[1] E. Süli, Finite Element Methods for Partial Differential Equations, University of Oxford, 2007.

[2] H. Zarin , On discontinuous Galerkin finite element method for singularly perturbed delay differential equations, Appl. Math. Letters 38 (2014), 27-32

[3] J.J.H. Miller, E. O' Riordan, G.I. Shishkin, Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems, Revised Edition (2012)

[4] M. Brdar, H. Zarin, On graded meshes for a two-parameter singularly perturbed problem, Applied Mathematics and Computation (2016), doi: 10.1016/j.amc.2016.01.060

[5] S. Nicaise, Ch. Xenophontos, Robust Approximation of Singularly Perturbed Delay Differential Equations by the hp Finite Element Method, Computational Methods in Applied Mathematics 13 (2013), 21-37

Biografija

Rođena sam 23.09.1990. u Subotici, gde sam završila osnovnu školu "Sonja Marinković", a potom upisala gimnaziju "Svetozar Marković" i maturirala 2009. godine. Na Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer Diplomirani profesor matematike upisala sam se 2009. godine i diplomirala 27.06.2014. godine. Nakon završetka osnovnih studija upisala sam master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer Master profesor matematike. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija.

u Novom Sadu, februara 2016.

Sanja Prokić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Sanja Prokić
AU
Mentor: dr Helena Zarin
MN
Naslov rada: Singularno perturbovani problemi sa kašnjenjem i rekurzivne mreže
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2016.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja

Obradovia 3

MA

Fizički opis rada: 6 poglavlja/ 50 strana /5 literatura /5 slika

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Numerička matematika

ND

Ključne reči: Singularno perturbovani problemi, postupak konačnih elemenata, standardni postupak Galerkina, rekurzivne mreže, unutrašnji sloj, konturni sloj.

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

U ovom radu numerički se rešava singularno perturbovani problem sa kašnjenjem iz [2], [5]. Poznato je ponašanje rešenja kao i njegova dekompozicija. Za postojanje slabog i diskretnog rešenja provereni su uslovi Laks-Milgramove teoreme za datu bilinearnu formu i opisan je postupak konačnih elemenata Galerkina pomoću kog se dobija numeričko rešenje. Kao mreža diskretizacije koristi se Duranova mreža koja se zadaje rekurzivno definisanim tačkama, a za korake mreže pokazane su određene osobine. Sledeći ideju iz [4], u energetskoj normi se izvodi konačna ocena greške rešenja, a na samom kraju rada predstavljeni su rezultati numeričkih testova koji potvrđuju teoretski dobijene rezultate.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 16.6.2015.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Helena Zarin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Sanja Prokić
AU
Mentor: dr Helena Zarin
MN
Title: Delay singularly perturbed problems and recursive meshes
XI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2016.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: 6 chapters/ 50 pages /5 references /5 photograph

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words: Singularly perturbed problems, finite element method, Galerkin finite element method, recursive meshes, interior layer, boundary layer.

SKW UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

Abstract: In this paper, singularly perturbed problem [2],[5] is numerically solved by a Galerkin finite element method. The behavior of the solution is known as its decomposition. For existence of weak and discrete solution the Lax-Milgram theorem conditions were tested for given bilinear form and also Galerkin finite element method is described. As a discretization mesh we use Duran-type mesh which is given by recursive defined points, and some mesh sizes properties are shown. Following the idea from [4], we give error estimates on the Duran mesh, and at the end of the paper we present the results of numerical tests that confirms teoretical results.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 16.6.2015.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: dr Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad