Sadržaj

Predgovor

Rešavanje nelinearnih jednačina je značajna oblast numeričke matematike. Postupci za rešavanje jednačina imaju veliku primenu u raznim naukama, gde se mnogi problemi svedu na rešavanje nelinearnih jednačina. Za mnoge jednačine nije moguće odrediti tačno rešenje pomoću formula koje sadrže elementarne algebarske operacija i funkcije. Zato se ovakve jednačine rešavaju samo približno, primenom nekog numeričkog (iterativnog) postupka.

U master radu posmatramo neke numeričke postupke šestog reda konvergencije za numeričko rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom $f(x)=0$ zasnivane na modifikacijama postupka Ostrovskog. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a,b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha)\neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, dajemo modifikacije čiji je red konvergencije šest. Postupajući na sličan način kao u radu [15] dajemo nove familije postupaka šestog reda konvergencije.

Master rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu rada dajemo oznake, definicije i teoreme koje ćemo koristiti u daljem radu. Drugi deo rada sadrži teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupke šestog reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina. U tom delu opisujemo neke poznate postupke šestog reda konvergencije.

U trećem delu, kao originalni rezultat, uvodimo jednu familiju postupaka šestog reda konvergencije. Ona zavisi od četiri parametra, a za posebne vrednosti parametara pokazujemo da su postupci iz trećeg dela specijalni slučajevi posmatrane familije. Pod određenim pretpostavkama, dokazujemo konvergenciju šestog reda ove familije postupaka i određujemo asimptotsku konstantu greške konvergencije. U poslednjem delu rada prikazaćemo numeričke eksperimente urađene u programskom paketu *Mathematica*.

Za određivanje izvoda funkcija koraka iterativnih postupaka, njihovo sređivanje i pojednostavljivanje koristili smo *Mathematica*-u. Intersantno je da je Neta još 1979. godine u iste svrhe koristio paket MACSYMA.

Na korisnim sugestijama i savetima zahvaljujem se svom mentoru dr Dragoslavu Hercegu.

Novi Sad, maj 2014. Renata Firstner

1 Neke oznake, definicije i teoreme

1.1 Oznake

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\{x_k\}$	niz brojeva $x_0, x_1, \ldots$
$D = [a, b]$	interval kojem pripada niz $\{x_k\}$
$C^k[a, b]$	skup k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$
$Lip_\gamma[a, b]$	skup funkcija koje na intervalu $[a, b]$ zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom γ
α	rešenje jednačine $f(x) = 0$
$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$	asimptotska konstanta greške
$e_n = x_n - \alpha$	greška u n-toj iteraciji
$e_{n+1} = Ce_n{}^p + O(e_n{}^{p+1})$	jednačina greške
$C = \frac{e_{n+1}}{e_n{}^p}$	asimptotska konstanta greške
p	red konvergencije iterativnog postupka
m	broj funkcionalnih evaluacija datog postupka
$p^{\frac{1}{m}}$	indeks efikasnosti postupka

1.2 Definicije

Definicija 1. *Za dve jednačine kažemo da su ekvivalentne na intervalu* $[a, b]$ *ako su rešenja koja pripadaju intervalu* $[a, b]$ *jedne jednačine rešenja druge jednačine i obrnuto.*

Definicija 2. *Svaki realan broj α, za koji važi da je* $f(\alpha) = 0$, *nazivamo rešenje jednačine* $f(x) = 0$.

Definicija 3. *Broj α je rešenje višestrukosti k jednačine* $f(x) = 0$ *ako je*

$$f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$$

pri čemu je funkcija g ograničena u α i važi $g(\alpha) \neq 0$. *Za k se uvek uzima pozitivan ceo broj. Ako je* $k = 1$, *onda kažemo da je koren prost ili jednostruk, a ako je* $k > 1$ *onda je višestruk.*

Definicija 4. *Neka je* $\varphi: D \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Broj* $\alpha \in D$ *za koji važi* $\alpha = \varphi(\alpha)$ *je rešenje jednačine* $x = \varphi(x)$ *i naziva se nepokretna tačka funkcije φ.*

Neka je x_0 proizvoljan broj iz intervala $[a, b]$. Formirajmo niz brojeva $x_0, x_1, \dots$ prema

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1, \dots$$

Ovaj niz je moguće formirati samo ako $\varphi(x_k) \in [a, b]$, $k = 0,1, \dots$ zbog definisanosti funkcije φ na intervalu $[a, b]$. Očigledno, ako funkcija φ preslikava interval $[a, b]$ u samog sebe, važi $\varphi(x_k) \in [a, b]$, $k = 0,1, \dots$. Ako je niz $x_0, x_1, \dots$ dobro definisan i ima graničnu vrednost, tj. za neko $\alpha \in [a, b]$ važi $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$, onda je α rešenje jednačine $x = \varphi(x)$ ako je funkcija φ neprekidna na intervalu $[a, b]$. Naime, iz $\varphi(x) \in [a, b]$, za svako $x \in [a, b]$ sledi $\alpha \in [a, b]$, a zbog neprekidnosti funkcije φ važi

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Dakle, ako niz $x_0, x_1, \dots$ konvergira, njegova granična vrednost α je rešenje jednačine $x = \varphi(x)$, a članovi tog niza aproksimiraju to rešenje.

Ovaj postupak, u kome računamo vrednosti $x_0, x_1, \dots$ prema $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0,1 \dots$ se naziva iterativni postupak (postupak sukcesivnih aproksimacija), gde je $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iterativno pravilo, funkcija φ je funkcija koraka, a niz $x_0, x_1, \dots$ je iterativni niz. Prvi član tog niza je početna aproksimacija. Kada iterativni niz konvergira kažemo da iterativni postupak konvergira.

Definicija 5. *Funkcija* φ *zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D ako postoji konstanta* γ *takva da za svako* $x, y \in D$ *važi*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Konstanta γ se naziva Lipšicova konstanta. Ako je $\gamma < 1$ onda se ova konstanta naziva konstanta kontrakcije, a funkcija φ se naziva kontrakcija ili kontraktivno preslikavanje.

Definicija 6. *Neka je* $lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$. *Ako postoji konstanta* $C \in [0,1)$ *i ceo broj* $K \geq 0$ *takav da za* $k \geq K$ *važi*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|$$

kaže se da je niz $x_0, x_1, \ldots$ *linearno konvergentan.*

Ako postoje konstante $p > 1, C \geq 0$ *i ceo broj* $K \geq 0$ *takav da za* $k \geq K$ *važi*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p$$

kaže se da niz $x_0, x_1, \ldots$ *konvergira ka* α *sa redom bar* p. *Za* $p = 2$ *konvergencija je kvadratna, a za* $p = 3$ *kubna.*

Definicija 7. *Red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog posmatranim iterativnim postupkom.*

Da bi se odredio red konvergencije često se posmatra konstanta

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}.$$

Ukoliko ovakva konstanta postoji postupak je bar reda p. Ako je $\eta \neq 0$, postupak je reda p i η se naziva asimptotska konstanta postupka. Ako je $\eta = 0$, posmatra se granična vrednost sa $p + 1$ u eksponentu imenioca. Ako je opet $\eta = 0$, uzima se $p + 2$ itd, dok se ne dobije konstanta različita od nule.

Definicija 8. *Kažemo da je iterativni postupak sa redom konvergencije* p_1 *brži od iterativnog postupka sa redom konvergencije* p_2 *ako je* $p_1 > p_2$.

Definicija 9. *Jednačina greške postupka je*

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$ *greška u n-toj iteraciji, C asimptotska konstanta greške i p red konvergencije.*

Definicija 10. *Indeks efikasnosti iterativnog postupka je* $p^{\frac{1}{m}}$, *gde je p red konvergencije iterativnog postupka, a m broj izračunavanja funkcija po iteraciji.*

Definicija 11. *Lagranžov oblik interpolacionog polinoma za date čvorne tačke* (x_i, y_i), *i = 0, 1, ... , n, je*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Određivanje reda konvergencije nije uvek jednostavno i time se ovde nećemo baviti. Navešćemo samo red konvergencije onih postupaka koje budemo posmatrali. Red konvergencije se koristi za upoređivanje brzine konvergencije.

1.3 Teoreme

Za rešavanje jednačina oblika $f(x) = 0$ posmatraćemo ekvivalentne jednačine oblika $x = \varphi(x)$ i odgovarajuće iterativne postupke oblika

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \ k = 0,1,\ldots.$$

Navodimo nekoliko teorema iz [3] koje se odnose na jednačinu $x = \varphi(x)$ i teoremu o redu konvergencije jednokoračnog postupka koja je data u [14].

Teorema 1. *Neka je $g(x) \neq 0$ za $x \in [a,b]$. Tada su jednačine $f(x) = 0$ i $x = \varphi(x)$ sa $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ ekvivalentne na intervalu $[a,b]$.*

Teorema 2. *Neka je φ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$ i $\varphi(a), \varphi(b) \in [a,b]$. Tada postoji $\alpha \in [a,b]$ takvo da je $\varphi(\alpha) = \alpha$.*

Teorema 3. *Funkcija koja zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D je neprekidna na tom intervalu.*

Obrnuto ne mora da važi, tj. neprekidna funkcija na intervalu D ne mora da zadovoljava Lipšicov uslov na istom intervalu.

Teorema 4. *Ako funkcija φ ima u intervalu $[a,b]$ prvi izvod za koji na tom intervalu važi $|\varphi'(x)| \leq \gamma$, onda $\varphi \in Lip_\gamma[a,b]$.*

Teorema 5. *Neka je φ kontrakcija na intervalu $[a,b]$ i neka preslikava taj interval u samog sebe. Tada iterativni niz $\{x_k\}$ određen sa*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1,\ldots$$

sa proizvoljnim $x_0 \in [a,b]$, konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in [a,b]$ jednačine $x = \varphi(x)$ i važi

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|, \qquad k = 1,2,\ldots$$

gde je γ Lipšicova konstanta kontrakcije funkcije φ.

Vrednosti $\frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}|$ i $\frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|$ definisane u prethodnoj teoremi nazivaju se aposteriorna i apriorna ocena greške.

Pored apriorne i aposteriorne, često se koristi i sledeća ocena greške koja ne zavisi od iterativne funkcije φ.

Teorema 6. *Neka* $f \in C^1(D)$ *i* $|f'(x)| \geq m > 0$ *za* $x \in D$. *Ako je* $\alpha \in D$ *rešenje jednačine* $f(x) = 0$ *i* $x_k \in D, k = 0,1,\ldots$, *onda je*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}.$$

Ova ocena se naziva Lagranžova ocena greške

Teorema 7. *Red konvergencije jednokoračnog postupka*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,\ldots$$

je pozitivan ceo broj. Ovaj postupak ima red konvergencije p ako i samo ako je

$$\alpha = \varphi(\alpha),\ \varphi^{(j)}(\alpha) = 0,\quad j = 1,2,\ldots,p-1,\ \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Red konvergencije i asimptotske konstante greške svih postupaka koje posmatramo u ovom radu određujemo koristeći prethodnu teoremu. U zavisnosti od p za asimptotske konstante greške uzimamo

$$\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

a dobijeni rezultat izražavamo preko konstanti $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)},\ j = 2,3,\ldots$.

Kako su funkcije koraka posmatranih iterativnih postupaka složene i izračunavanje njihovih izvoda nije jednostavno, taj posao smo prepustili programskom paketu *Mathematica*.

2 Iterativni postupci šestog reda konvergencije

Jedan od najpopularnijih postupaka za rešavanje jednačina oblika $f(x)=0$ je Njutnov (ili Njutn-Rafsonov) potupak. Ovaj postupak potiče od Njutna, ali ga je u današnjem obliku formulisao Rafson 1690. godine. Njutnov postupak za računanje jednostruke nule nelinearne jednačine je modifikovan na mnogo načina. Cilj tih modifikacija je povećanje reda konvergencije uz što manji broj evaluacija funkcija i njenih izvoda. U ovom delu navodimo nekoliko postupaka šestog reda konvergencije, a u sledećem delu i neka naša uopštenja ovih postupaka. Za određene posebne vrednosti parametara naši postupci sadrže neke dobro poznate postupke.

2.1 Njutnov iterativni postupak

U osnovi Njutnovog postupka je aproksimacija funkcije, čije se nule traže, linearnom funkcijom. Ova aproksimacija se posmatra u blizini nule koja se traži. Kao aproksimaciona funkcija se koristi linearna funkcija čiji grafik je tangenta funkcije f u izabranoj tački $(x_0, f(x_0))$, gde je x_0 početna aproksimacija rešenja. Presek tangente i $x-$ose je x_1, nova aproksimacija traženog rešenja. Zatim se postavlja nova tangenta na krivu u tački $(x_1, f(x_1))$ i postupak se nastavlja.

Jednačina tangente u tački $(x_0, f(x_0))$ je

$$y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Kao aproksimaciju rešenja α jednačine $f(x)=0$ uzimamo x_1 rešenje jednačine $y(x)=$ 0.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

ako je

$$f'(x_0)\neq 0.$$

Ovaj postupak se može ponavljati sve dok je $f'(x_k) \neq 0$. Ako je x_k k-ta aproksimacija rešenja posmatrane jednačine, onda je sledeća aproksimacija

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Njutnov postupak se može posmatrati i kao postupak oblika

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

gde je

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Teorema 8. *(O lokalnoj konvergenciji [3]) Neka postoje konstante γ i $m > 0$ takve da za svako $x,y \in (a,b)$ važi*

$$|f'(y) - f'(x)| \leq \gamma |y - x| \quad \text{i} \quad |f'(x)| \geq m$$

Ako jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje $\alpha \in (a,b)$, onda postoji $\delta > 0$ takvo da za x_0 sa osobinom da $|x_0 - \alpha| \leq \delta$, niz $x_0, x_1, \ldots$ definisan Njutnovim iterativnim postupkom postoji i konvergira ka α. Pri tome važi

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_k - \alpha|^2, \; k = 0, 1, \ldots .$$

Na osnovu te teoreme i definicije o redu konvergencije iterativnog postupka dobijamo da je Njutnov iterativni postupak barem drugog reda konvergencije.

Teorema 9. *(O globalnoj konvergenciji [3]) Neka funkcija f pripada skupu $C^2[a,b]$. Ako f' i f'' ne menjaju znak na $[a,b]$ i $f(a)f(b) < 0$, onda za svako $x_0 \in [a,b]$ za koje važi*

$$f(x_0) f''(x_0) > 0$$

Njutnov iterativni postupak konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in (a,b)$ jednačine $f(x) = 0$ i važi

$x \in [a,b]$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$	$x_k > x_{k+1}$	$x_k < x_{k+1}$
$f''(x) < 0$	$x_k < x_{k+1}$	$x_k > x_{k+1}$

2.2 Familije šestog reda konvergencije

Postupci šestog reda konvergencije su brojni u naučnoj literaturi. Navodimo samo neke [1], [2], [6], [8-10], [13] i [15]. Mnogi od postupaka šestog reda koriste ideju postupka Ostrovskog da se Njtnov postupak ubrza preko dva dodatna koraka upotrebom funkcija koje kao argument koriste tekuću aproksimaciju dobijenu Njutnovim postupkom i njenu sledeću aproksimaciju. Jedan od značajnijih postupaka tog oblika je postupak Neta [10]. Kasnije su istu ideju koristili Grau, Diaz-Barrero [2] i Sharma, Guha [15]. Neta i Sharma, Guha uvode po jedan parameter sa ciljem da se smanji asimptotska konstanta greške.

U ovom radu dajemo jednu beskonačnu familiju postupaka šestog reda, koja kao specijalne slučajeve sadrži navedene postupke Neta [10], Grau, Diaz-Barrero [2] i Sharma, Guha [15].

Postupke koje posmatramo možemo zapisati u obliku

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} h(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} H(s) \,,$$

gde je

$$s = \frac{f(y_n)}{f(x_n)} .$$

Funkcije h i H se definišu za svaki postupak posebno.

Polazeći od aproksimacije x_n nova aproksimacija x_{n+1} kod posmatranih postupaka dobija se kao vrednost $F(x_n)$ funkcije F

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} h\left(\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}\right) -$$

$$- \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} h\left(\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}\right)\right)}{f'(x)} H\left(\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}\right)$$

Red konvergencije postupka

$$x_{n+1} = F(x_n), n = 0,1,\ldots$$

može se odrediti na osnovu teoreme 7.

Teorema 10. *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *realna funkcija definisana na I, gde je I okolina prostog korena* α *od* $f(x)$. *Pretpostavimo da* $f(x)$ *ima neprekidne izvode sve do šestog reda na I. Red konvergencije postupka*

$$x_{n+1} = F(x_n), n = 0,1,\ldots$$

je 6 ako je

$$\alpha = F(\alpha), \quad F^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,5, \quad F^{(6)}(\alpha) \neq 0.$$

Asimptotska konstanta greške je $\frac{F^{(6)}(\alpha)}{6!}$.

Izvode funkcije *F* možemo odrediti koristeći programski paket *Mathematica.* Izrazi kojima su definisani izvodi su glomazni, te ćemo posmatrati samo vrednosti tih izvoda za $x = \alpha$. Posmatrajući dobijene izraze odredićemo koje osobine funkcije *h* i *H* treba da zadovoljavaju da bi naš postupak $x_{n+1} = F(x_n),\ n = 0,1,\ldots$ bio šestog reda. Da bismo mogli odrediti izvode funkcije *F* potrebno je da poznajemo vrednosti izvoda funkcije $s(x) = \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}$. Direktno posmatranje funkcije $s(x)$ i njenih izvoda nije moguće zbog toga što $s(\alpha)$ nije definisano ($s(\alpha) = \frac{0}{0}$). Međutim, ako se posmatra

Tejlorov razvoj funkcije $s(x)$ ovaj problem se može prevazići. Kako je za neko τ između x i $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$s(x)=\frac{f(x)f''(x)}{2f'(x)^2}-\frac{f^{(3)}(x)f(x)^2}{6f'(x)^3}+\frac{f^{(4)}(\tau)f(x)^3}{24f'(x)^4},$$

dobijamo

$$s(\alpha)=0,\quad s'(\alpha)=C_2,\quad s''(\alpha)=-6C_2^2+4C_3,\quad s'''(\alpha)=6\left(8C_2^3-10C_2C_3+3C_4\right)$$
$$s^{(4)}(\alpha)=-24\left(20C_2^4-37C_2^2C_3+8C_3^2+14C_2C_4-5C_5\right)$$
$$s^{(5)}(\alpha)=120\left(48C_2^5-118C_2^3C_3+51C_2^2C_4-22C_3C_4+C_2\left(55C_3^2-24C_5\right)+10C_6\right)$$
$$s^{(6)}(\alpha)=-720(112C_2^6-344C_2^4C_3-26C_3^3+163C_2^3C_4+15C_4^2+7C_2^2(36C_3^2-13C_5)$$
$$+39C_3C_5+C_2(-150C_3C_4+51C_6)-21C_7)$$

Imajući to u vidu dobijamo

$$F(\alpha)=\alpha,\quad F'(\alpha)=0,\quad F''(\alpha)=2C_2\left(h(0)\text{-}1\right)\left(H(0)\text{-}1\right).$$

Da bi dobili $F''(\alpha)=0$ mora biti $h(0)=1$ ili $H(0)=1$. Posmatraćemo prvi slučaj $h(0)=1$. Ovim uslovom dobijamo

$$F'''(\alpha)=6C_2^2(H(0)-1)\left(h'(0)-2\right).$$

Uzimajući $h'(0)=2$ dobijamo $F'''(\alpha)=0$ i

$$F^{(4)}(\alpha)=12C_2(H(0)-1)\left(C_2^2\left(h''(0)-10\right)+2C_3\right).$$

Sada sa $H(0)=1$ dobijamo $F^{(4)}(\alpha)=0$ i

$$F^{(5)}(\alpha)=60C_2^2\left(H'(0)-2\right)\left(C_2^2\left(h''(0)-10\right)+2C_3\right).$$

Očigledno, $F^{(5)}(\alpha)=0$ ako je $H'(0)=2$. U tom slučaju je

$$F^{(6)}(\alpha)=180C_2\left(C_2^2\left(h''(0)-10\right)+2C_3\right)\left(C_2^2\left(H''(0)-12\right)+2C_3\right).$$

Uz dodatne uslove $h''(0)=10,\quad H''(0)=12$ dobijamo

$$F^{(6)}(\alpha) = 720 C_2 C_3^2 .$$

Vidli smo da bi dobili $F''(\alpha) = 0$ da mora biti $h(0) = 1$ ili $H(0) = 1$. Posmatrali smo prvi slučaj $h(0) = 1$. Na isti način i sa istim rezultatima mogli smo umesto $h(0) = 1$ izabrati $H(0) = 1$.

Vidimo da se izborom funkcija h i H koje ispunjavaju uslove $h(0) = H(0) = 1$, $h'(0) = H'(0) = 2$ dobijamo postupak šestog reda konvergencije sa asimptotskom konstantom greške

$$\frac{F^{(6)}(\alpha)}{720} = \frac{1}{4} C_2 \left(C_2^2 \left(h''(0) - 10 \right) + 2C_3 \right) \left(C_2^2 \left(H''(0) - 12 \right) + 2C_3 \right).$$

Ako je još $h''(0) = 10, \quad H''(0) = 12$ asimptotska konstanta greške je

$$\frac{F^{(6)}(\alpha)}{720} = C_2 C_3^2 .$$

Na osnovu izloženog, dokazali smo sledeću teoremu.

Teorema 11. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ realna funkcija definisana na I, gde je I okolina prostog korena α od $f(x)$. Pretpostavimo da $f(x)$ ima neprekidne izvode sve do šestog reda na I. Red konvergencije postupka*

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} h(s)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} H(s),$$

gde je

$$s = \frac{f(y_n)}{f(x_n)} .$$

je 6 ako je $h(0) = H(0) = 1$, $h'(0) = H'(0) = 2$. Asimptotska konstanta greške je

$$\frac{1}{4} C_2 \left(C_2^2 \left(h''(0) - 10 \right) + 2C_3 \right) \left(C_2^2 \left(H''(0) - 12 \right) + 2C_3 \right).$$

U radovima u kojima se posmatraju postupci koji slede dokazana je njihova konvergecnija šestog reda i dati su numerički primeri koji ilustruju njihovu efikasnost.

2.2.1 Postupak Ostrovskog

Postupak *Ostrovskog*, [12],

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}$$

je četvrtog reda konvergencije. U ovom slučaju se zahteva izračunavanje funkcije f na svakom potkoraku, a izvod f' se izračunava samo u svakom drugom potkoraku. Povišenje reda konvergencije Njutnovog postupka sa 2 na 4 postignuto je u drugom potkoraku pogodno izabranom racionalnom funkcijom u kojoj se pojavljuju samo dve vrednosti funkcije *f*, $f(x_n)$ (koja se pojavljuje u prvom potkoraku) i $f(y_n)$ (vrednost funkcije za Njutnovu aproksimaciju y_n). Očigledno, ovaj postupak se može definisati sa

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} h(s),$$

gde je

$$h(s) = \frac{1}{1 - 2s}.$$

2.2.2 Postupak Grau&Diaz-Barrero

Povišenje reda konvergencije Njutnovog postupka sa 2 na 4 postignuto je kod postupka Ostrovskog uvođenjem drugog potkoraka. Novo povišenje reda konvergencije sa 4 na 6 *Grau* i *Diaz-Barrero* su prikazali u radu [2] uvodeći trokoračni postupak definisan sa

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}$$

U ovom postupku su prva dva koraka ista kao kod postupka Ostrovskog.

Posle jednostavnih transformacija dobija se novi zapis istog postupka.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = x_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{1-2s}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{1-2s}$$

koji se uklapa u našu šemu sa

$$h(s) = H(s) = \frac{1}{1-2s}.$$

Za ove funkcije važi $h(0) = H(0) = 1$, $h'(0) = H'(0) = 2$ i $h''(0) = H''(0) = 8$, što znači da je postupak šestog reda konvergencije i da ima asimptotsku konstantu greške

$$\frac{F^{(6)}(\alpha)}{720} = 2C_2\left(C_2^2 - C_3\right)\left(2C_2^2 - C_3\right).$$

2.2.3 Familija postupaka Neta

U radu [10] predložen je postupak koji se sastoji od jednog Njutnovog potkoraka kojeg prate dva modifikovana Njutnova potkoraka

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + af(y_n)}{f(x_n) + bf(y_n)}$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \frac{f(x_n) + cf(y_n) + df(z_n)}{f(x_n) + gf(y_n) + hf(z_n)}$$

a, b, c, d, g, h su proizvoljne konstante. U svakom koraku je potrebno izračunati funkciju $f(x)$ u tri tačke x_n, y_n, z_n i njen prvi izvod u jednoj tački x_n. Neta predlaže sledeći izbor parametara $b = a - 2$, $c = -1$, $g = -3$ i $h = d$ i dobija familiju

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + af(y_n)}{f(x_n) + (a-2)f(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \frac{f(x_n) - f(y_n) + df(z_n)}{f(x_n) - 3f(y_n) + df(z_n)}$$

koja ima konvergenciju šestog reda i zadovoljava jednačinu greške

$$e_{n+1} = \frac{1}{144}\left(2C_2C_3^2 - 3(2a+1)C_2^3C_3\right)e_n^6 + O\left(e_n^7\right).$$

Pošto greška ne zavisi od d možemo staviti $d = 0$ i ako za a biramo $-\frac{1}{2}$ dobijamo traženi postupak čija je greška manja od prethodne

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n) - 3f(y_n)}$$

Ovaj postupak je šestog reda i zadovoljava jednačinu greške

$$e_{n+1} = \frac{1}{72}C_2C_3^2e_n^6 + O\left(e_n^7\right)$$

Ovaj metod zahteva isti broj izračunavanja funkcija po iteraciji, kao i metod konstruisan iz jednog potkoračnog Njutnovog metoda, praćen sa dva potkoraka metode sečice, pa je njihov indeks efikasnosti jednak i iznosi 1.43. Red je poboljšan, jer red metode sečice je približno 1.62, a predložene metode je 5.2 .

Očigledno, sa

$$h(s) = \frac{2-s}{2-5s}$$

$$H(s) = \frac{1-s}{1-3s}$$

postupak Neta se uklapa u opštu šemu.

Za ove funkcije važi $h(0) = H(0) = 1$, $h'(0) = H'(0) = 2$ i $h''(0) = 10$, $H''(0) = 12$, što znači da je postupak šestog reda konvergencije i da ima asimptotsku konstantu greške

$$\frac{F^{(6)}(\alpha)}{720} = C_2C_3^2 .$$

2.2.4 Familija postupaka Sharma&Guha

Sharma i *Guha* u radu [15] su razvili postupak koji poboljšava red konvergencije Ostrovskog prema iterativnoj šemi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + a\,f(y_n)}{f(x_n) + b\,f(y_n)}$$

gde su a i b parametri, povezani na način dat u sledećoj teoremi. Postupak *Grau&Diaz-Barrero* je specijalan slučaj ove familije postupaka šestog reda za $a = 0$ i $b = -2$.

Teorema 12. *[15] Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *realna funkcija definisana na I, gde je I okolina prostog korena α od* $f(x)$. *Pretpostavimo da* $f(x)$ *ima neprekidne izvode sve do četvrtog reda na I. Onda data iterativna šema definiše familiju jednog parametra (npr. a) konvergencije šestog reda ako je* $b = a - 2$.

U dokazu ove teoreme u [15] dobijena je jednačina greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha &= \big((2 - a + b)C_2 e_n - \big((4 - (a-b)(b+5))C_2^2 - (3 - 2(a-b))C_3\big)e_n^2\big)(z_n - \alpha) + O(e_n^7) \\ &= C_2\left(C_2^2 - C_3\right)\big((2 - a + b)C_2 - \big((4 - (a-b)(b+5))C_2^2 - (3 - 2(a-b))C_3\big)e_n\big)e_n^5 + O(e_n^7) \end{aligned}$$

Da bi postupak bio šestog reda konvergencije dovoljno je da se elimiše e_n^5 u jednačini greške. Ako biramo $b = a - 2$ dobijamo

$$\tilde{e}_{n+1} = C_2\left(C_2^2 - C_3\right)\left(2(a+1)C_2^2 - C_3\right)e_n^6 + O(e_n^7).$$

Tako dobijamo postupak

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + af(y_n)}{f(x_n) + (a-2)f(y_n)}$$

gde je $a \in \mathbb{R}$, takođe šestog reda konvergencije. Za $a = 0$ dobijamo postupak Grau i Diaz-Barrero-a kao specijalni slučaj upravo navedenog postupka. Ovaj postupak zahteva tri izračunavanja funkcije i jedan prvi izvod po iteraciji, pa je indeks efikasnosti jednak 1.565.

Dajemo dokaz prethodne teoreme za $b = a - 2$.

Dokaz. Prvo ćemo odrediti grešku $y_n - \alpha$. Posmatrajmo Tejlorov razvoj funkcije $f(x_n)$ u okolini tačke α za koju važi da je $f'(\alpha) \neq 0$

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2}{2!} + \\ + \frac{f'''(\alpha)(x_n - \alpha)^3}{3!} + \frac{f(\alpha)^{IV}(x_n - \alpha)^4}{4!} + O((x_n - \alpha)^5)$$

Ako uvedemo oznake $e_n = x_n - \alpha$ i $C_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\, f'(\alpha)}$ gornji izraz dobija sledeći oblik

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n{}^2 + C_3 e_n{}^3 + C_4 e_n{}^4 + O(e_n^5)\right)$$

Za prvi izvod funkcije $f(x_n)$ dobijamo

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n{}^2 + 4C_4 e_n{}^3 + O(e_n^4)\right),$$

odnosno deljenjem ova dva izraza

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n{}^2 + C_3 e_n{}^3 + C_4 e_n{}^4 + O(e_n^5)\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n{}^2 + 4C_4 e_n{}^3 + O(e_n^4)\right)} \\ &= e_n - C_2 e_n^2 + 2\left(C_2^2 - C_3\right)e_n^3 + \left(7C_2C_3 - 4C_2^3 - 3C_4\right)e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned}$$

Dakle, tražena greška je

$$\begin{aligned} y_n - \alpha &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha \\ &= x_n - \alpha - e_n + C_2 e_n^2 - 2\left(C_2^2 - C_3\right)e_n^3 - \left(7C_2C_3 - 4C_2^3 - 3C_4\right)e_n^4 + O(e_n^5) \\ &= C_2 e_n^2 - 2\left(C_2^2 - C_3\right)e_n^3 - \left(7C_2C_3 - 4C_2^3 - 3C_4\right)e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned}$$

Zatim ćemo odrediti grešku $z_n - \alpha$. Za $f(y_n)$ imamo

$$\begin{aligned} f(y_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(y_n - \alpha) \\ &= f'(\alpha)\left(C_2 e_n^2 - 2\left(C_2^2 - C_3\right)e_n^3 - \left(7C_2C_3 - 4C_2^3 - 3C_4\right)e_n^4 + O(e_n^5)\right) \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = C_2 e_n^2 + 2\left(-2C_2^2 + C_3\right)e_n^3 + \left(-14C_2C_3 + 13C_2^3 + 3C_4\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)$$

Posmatrajmo transformaciju izraza

$$\frac{1}{1-2s}=\frac{1}{1-2\frac{f(y_n)}{f(x_n)}}=\frac{1}{\frac{f(x_n)-2f(y_n)}{f(x_n)}}=\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}$$

Oduzimanjem već poznatih izraza dolazimo do

$$f(x_n)-2f(y_n)=f'(\alpha)\left(e_n-C_2e_n^2+\left(4C_2^2-3C_3\right)e_n^3+\left(14C_2C_3-10C_2^3-5C_4\right)e_n^4+O\left(e_n^5\right)\right)$$

i deljenjem dobijamo

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}=1+2C_2e_n+2\left(-C_2^2+2C_3\right)e_n^2+2\left(-2C_2C_3+3C_4\right)e_n^3+O\left(e_n^4\right)$$

Zatim njihovim množenjem

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}=C_2e_n^2+2\left(-C_2^2+C_3\right)e_n^3+3\left(-2C_2C_3+C_2^3+C_4\right)e_n^4+O\left(e_n^5\right)$$

dolazimo do tražene greške

$$\begin{aligned}z_n-\alpha&=y_n-\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\frac{1}{1-2s}-\alpha\\&=\alpha+C_2\left(C_2^2-C_3\right)e_n^4+O\left(e_n^5\right)-\alpha\\&=C_2\left(C_2^2-C_3\right)e_n^4+O\left(e_n^5\right).\end{aligned}$$

Ostalo je još da se odredi greška $x_{n+1}-\alpha$. Prvo posmatrajmo Tejlorov razvoj funkcije $f(z_n)$ u okolini tačke α

$$f(z_n)=f'(\alpha)\left((z_n-\alpha)+O(z_n-\alpha)^2\right)$$

Deljenjem već datih izraza imamo

$$\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}=\left(1-2C_2e_n+4\left(C_2^2-3C_3\right)e_n^2\right)(z_n-\alpha)+O\left(e_n^7\right)$$

Transformacijom izraza dobijamo

$$\frac{1+as}{1+(a-2)s}=\frac{1+a\frac{f(y_n)}{f(x_n)}}{1+(a-2)\frac{f(y_n)}{f(x_n)}}=\frac{\frac{f(x_n)+af(y_n)}{f(x_n)}}{\frac{f(x_n)+(a-2)f(y_n)}{f(x_n)}}=\frac{f(x_n)+af(y_n)}{f(x_n)+(a-2)f(y_n)}$$

Posmatrajmo brojilac

$$f(x_n)+af(y_n)=f'(\alpha)\left(e_n+(1+a)C_2e_n^2+\left(-2aC_2^2+(1+2a)C_3\right)e_n^3+O\left(e_n^4\right)\right),$$

odnosno imenilac gore navedenog razlomka

$$f(x_n)+(a-2)f(y_n)=f'(\alpha)\left(e_n+(a-1)C_2e_n^2+\left((-2a+4)C_2^2+(2a-3)C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)\right)$$

Deljenjem novo dobijenih izraza dolazimo do

$$\frac{f(x_n)+af(y_n)}{f(x_n)+(a-2)f(y_n)}=1+2C_2e_n+2\left(-(a+1)C_2^2+2C_3\right)e_n^2+O(e_n^3)$$

Množenjem odgovarajućih razlomaka dobijamo

$$\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)+af(y_n)}{f(x_n)+(a-2)f(y_n)}=\left(1+\left((4-2(a+3))C_2^2+C_3\right)e_n^2\right)(z_n-\alpha)+O(e_n^7)$$

Dakle, tražena greška je

$$\begin{aligned}x_{n+1}-\alpha&=\left(\left(2(a+1)C_2^2-C_3\right)e_n^2\right)(z_n-\alpha)+O(e_n^7)\\&=C_2\left(C_2^2-C_3\right)\left(2(a+1)C_2^2-C_3\right)e_n^6+O\left(e_n^7\right)\end{aligned}$$

Na osnovu definicije reda konvergencije iterativnog postupka vidimo da je red ovog postupka šest. Time je dokaz teoreme završen.

Familija postupaka Sharma i Guha uklapa se u opštu formu za

$$h(s)=\frac{1}{1-2s}$$

$$H(s)=\frac{1+as}{1+(a-2)s}$$

Za ove funkcije važi $h(0)=H(0)=1$, $h'(0)=H'(0)=2$ i $h''(0)=8$, $H''(0)=8-4a$, što znači da je postupak šestog reda konvergencije i da ima asimptotsku konstantu greške

$$\frac{F^{(6)}(\alpha)}{720}=C_2\left(C_2^2-C_3\right)\left(2(a+1)C_2^2-C_3\right).$$

3 Nova familija postupaka

Po ugledu na rad [5] definišemo familiju φ funkcija sa

$$\varphi_1(s,a)=\frac{1+as}{1+(a-2)s}$$

$$\varphi_{n+1}(s,a)=\frac{1}{1-2s\varphi_n(s,a)},\quad n>1$$

Navodimo prvih šest članova ove familija

n	$\varphi_n(s,a)$
1	$\dfrac{1+as}{1-2s+as}$
2	$\dfrac{-1+2s-as}{-1+4s-as+2as^2}$
3	$\dfrac{-1+4s-as+2as^2}{-1+6s-as-4s^2+4as^2}$
4	$\dfrac{1-8s+as+12s^2-6as^2+4as^3}{1-10s+as+24s^2-8as^2-8s^3+12as^3}$
5	$\dfrac{1-8s+as+12s^2-6as^2+4as^3}{1-10s+as+24s^2-8as^2-8s^3+12as^3}$
6	$\dfrac{-1+10s-as-24s^2+8as^2+8s^3-12as^3}{-1+12s-as-40s^2+10as^2+32s^3-24as^3+8as^4}$

Tabela 1.

Lako se proverava da je

$$\varphi_n(0,a)=1,\ \varphi_n'(0,a)=2,\quad n=1,2,\ldots$$

$$\varphi_1''(0,a)=2(-2+a)^2-2(-2+a)a,\quad \varphi_2''(0,a)=8-4(-2+a)+4a,$$

$$\varphi_n''(0,a)=16,\ n=3,4,\ldots.$$

Koristeći ovu familiju možemo dobiti beskonačne familije postupaka, koje kao specijalne slučajeve sadrže postupke Grau&Diaz-Barrero, Neta i Sharma&Guha. Posmatraćemo postupke oblika

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\varphi_k(s,a)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\varphi_l(s,b),$$

gde je $s = \dfrac{f(y_n)}{f(x_n)}$ za različite vrednosti *k, l, a* i *b.*

3.1 Postupak Grau&Diaz-Barrero

Postupak *Grau* i *Diaz-Barrero* možemo posmatrati kao specijalan slučaj ovog postupka za $k = l = 1$ i $a = b = 0$.

Asimptotsku konstantu greške smo računali posebno koristeći rezultate teoreme 10. Posmatrajući za svako $k = 1,2,3$ promenu parametra *l* od 1 do 3, dobijamo sledeću tabelu.

<table>
<tr><th>k</th><th>l</th><th>Asimptotska konstanta greške</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$c_2\left(c_2^2 - c_3\right)\left(2c_2^2 - c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td rowspan="2">$-c_2\left(c_2^2 - c_3\right)\left(2c_2^2 + c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td rowspan="3">$c_2\left(2c_2^2 + c_3\right)\left(3c_2^2 + c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

Tabela 2.

3.2 Familija postupaka tipa Neta

Postupak Neta možemo posmatrati kao specijalan slučaj za $k = 1$ sa proizvoljnim a i $l = 1,\ b = -1$. U cilju smanjenja asimptotske konstante greške, Neta je posebno posmatrao slučajeve $k = 1$ sa $a = -\dfrac{1}{2}$ i $l = 1,\ b = -1$.

Asimptotsku konstantu greške smo računali posebno koristeći rezultate teoreme 10. Posmatrajući za svako $k = 1,2,3$ promenu parametra *l* od 1 do 3, dobijamo sledeću tabelu.

<table>
<tr><th>k</th><th>l</th><th>Asimptotska konstanta greške za $b=-1$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$-c_2c_3\left((1+2a)c_2^2-c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td rowspan="2">$-c_2\left((1+2a)c_2^2-c_3\right)\left(2c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>$c_2c_3(3c_2^2+c_3)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td rowspan="2">$c_2\left(2c_2^2+c_3\right)\left(3c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>$c_2c_3\left(3c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td rowspan="2">$c_2\left(2c_2^2+c_3\right)\left(3c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

Tabela 3.

3.3 Familija postupaka tipa Sharma&Guha

Postupak Sharma&Guha možemo posmatrati kao specijalan slučaj ovog postupka za $k=1$ sa $a=0$ i $l=1,\ \ b=-1$ ili $k=1$ sa $a=0$ i $l=1,\ \ b=-\frac{1}{2}$.

Asimptotsku konstantu greške smo računali posebno koristeći rezultate teoreme 10. Posmatrajući za svako $k=1,2,3$ promenu parametra l od 1 do 3, dobijamo sledeću tabelu.

<table>
<tr><th>k</th><th>l</th><th>Asimptotska konstanta greške</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$c_2\left(c_2^2-c_3\right)\left(2(1+b)c_2^2-c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td rowspan="2">$c_2\left(-2c_2^4+c_2^2c_3+c_3^2\right)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>$-c_2\left(2(1+b)c_2^2-c_3\right)\left(3c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td rowspan="2">$c_2\left(2c_2^2+c_3\right)\left(3c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>$-c_2\left(2(1+b)c_2^2-c_3\right)\left(3c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td rowspan="2">$c_2\left(2c_2^2+c_3\right)\left(3c_2^2+c_3\right)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

Tabela 4.

Imajući u vidu prethodne tri tabele, osobine funkcija $\varphi_n\left(s,a\right)$ i rezultate teoreme 11, dobijamo da je asimptotska konstanta greške za celu familiju data sa

$$C=C_2\left(C_3-(2a_1+1)C_2^2\right)\left(C_3-2(b_1+1)C_2^2\right)$$

gde je

$$a_1 = \begin{cases} a, & k = 1 \\ -2, & k > 1 \end{cases}, \quad b_1 = \begin{cases} b, & l = 1 \\ -2, & l > 1 \end{cases}.$$

4 Numerički eksperiment

U ovom delu prikazaćemo numeričke rezultate sa postupcima opisanim u trećem poglavlju. Sva računanja su urađena u programskom paketu *Mathematica 8*. Preciznost je povećana na 20000 cifara sa *SetPrecision* funkcijom. Koristili smo sledeći izlazni kriterijum: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ i $|f(x_k)| < \varepsilon$ gde je α tačno rešenje posmatrane jednačine i $\varepsilon = 10^{-20000}$. U slučajevima kada tačno rešenje nije dostupno, koristili smo njegovu aproksimaciju $\alpha *$ koja je računata sa 30000 cifara, ali smo prikazali samo 20 cifara. Numerički red konveregencije ord je računat prema

$$ord_k = \frac{\ln(|x_{k+1} - \alpha| / |x_k - \alpha|)}{\ln(|x_k - \alpha| / |x_{k-1} - \alpha|)}, k = 1,2, \ldots$$

i predstavlja aproksimaciju reda konvergencije p, a aproksimacije C_k asimptotske konstante greške C računate su prema

$$C_k = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}, k = 1,2, \ldots$$

Kod svih postupaka $C_k \approx 6$.

Posmatrali smo sledeće jednačine.

$f_1(x) = x^3 - 10$, [5], [10], $\alpha_1^* \approx 2.1544346900318837218$, $x_0 = 2$

$f_2(x) = 3x^2 - e^x$, [5], [10], $\alpha_2^* \approx 0.91000757248870906066$, $x_0 = 2$

$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, [5], [6], [7], [9], $\alpha_3^* \approx 1.3652300134140968458$, $x_0 = 2$

$f_4(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$, [5], [6], [7], [10], $\alpha_4 = 3$, $x_0 = 2.8$

$f_5(x) = 8x - \cos x - 2x^2$, [10], $\alpha_5 = 0.12807710275379877853$, $x_0 = 1$

$f_6(x) = e^{-x} + \cos(x)$, [2], [15], $\alpha_6 = 1.7461395304080124177$, $x_0 = 1.5$

$f_7(x) = x^3 + 1$, [2], [15], $\alpha_7 = -1$, $x_0 = -0.8$

$$f_8(x) = e^x - 4x^2, \text{ [2], [15], } \alpha_8 = 0.71480591236277780614, \ x_0 = 0.75$$

$$f_9(x) = x - 3\ln(x), \text{ [2], [15], } \alpha_9 = 1.85718386020783533365, \ x_0 = 2$$

$$f_{10}(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{4}, \text{[2],[15], } \alpha_{10} = 0.40999201798913713162, \ x_0 = 0.5$$

.

Uz svaku jednačinu su navedene reference u kojima je posmatrana ista jednačina, njeno tačno ili dobro približno rešenje i početna vrednost iterativnog postupka.

U tabelama 5, 6, 7 prikazujemo rezultate dobijene pojedinim predstavnicima posmatrane familije. Situacija prikazana u tabeli 5 je tipična za sve postupke familije.

$f_6,\ k=1,\ \ l=1,\ \ a=-\frac{1}{2},\ \ b=-1$				
k	x_k	$-\log(\lvert\alpha - x_k\rvert)$	red konvergencije	vodeći član greške
0	2.0000000000000000000	0.6	-	-
1	1.7461388738092249432	6.2	-	-0.002453181054
2	1.7461395304080124177	39.8	6.01424	-0.002042621053
3	1.7461395304080124177	241.4	6.00000	-0.002042622992
4	1.7461395304080124177	1451.1	6.00000	-0.002042622992
5	1.7461395304080124177	8709.4	6.00000	-0.002042622992

Tabela 5.

U tabelama 6 i 7 ispitujemo efikasnost postupaka Grau&Diaz-Barrero, Neta, Sharma&Guha i naše beskonačne familije postupaka za gore navedene jednačine. Kod naše familije postupaka smo birali različite vrednosti parametara *k, l* i *a, b* i dobili da je u mnogim slučajevima efikasnija od gore navedenih, poznatih metoda.

f	Grau& Diaz-Barrero	Neta	Sharma& Guha	$k=1,\ l=2$		$k=3,\ l=3$	
					a, b		a, b
f_1	8688.4	9997.3	9660	18433.3	$-\frac{1}{3}$,-3	9818.3	11,10
f_2	9316.8	10968.3	10289	11071.9	-1,6	9194.3	-3,100
f_3	4485.6	10017.8	7887.8	9101.2	$-\frac{1}{2}$,5	2931.4	3000,3000
f_4	620.1	788.7	165	853.4	$-\frac{1}{2}$,-2	15.6	0,0
f_5	4521.9	7004.5	5774.1	5421.8	$-\frac{1}{2}$,20	6624.1	2,1
f_6	9044.8	9208.9	9151.7	9352.3	$-\frac{1}{2}$,-1	9600.8	0,-1
f_7	4987.4	5877.7	5730.9	6867.3	$-\frac{1}{4}$,-1	5692.1	3,2
f_8	11515.3	14348.8	13114.5	15213	$-\frac{1}{2}$,30	10922.1	10,10
f_9	7776	8422.2	8488.4	9368.2	$-\frac{1}{4}$,-1	8642	8,7
f_{10}	8023.3	12207	10270.4	11264.5	$-\frac{1}{2}$,10	7236.3	150,100

Tabela 6. Upoređenje postupaka $-\log(|x_5-\alpha|)$

f	$k=1,\ l=1$	$k=2,\ l=2$	$k=2,\ l=3$	$k=3,\ l=4$
	$a=-\frac{1}{2}, b=-2$	$a=-\frac{1}{3}, b=10$	$a=-1, b=1$	$a=-1, b=\frac{1}{2}$
f_1	8819.6	6402.9	7624.9	7628
f_2	10360.4	10644.7	9140.2	9071.5
f_3	7330	3518.7	1977.6	-1.1
f_4	760.6	949.6	-0.5	71.2
f_5	5644.2	3414.1	5941.3	4449.3
f_6	9348.3	9552.9	9595.5	9601.2
f_7	4881.9	3332	4855.9	4221.8
f_8	12858.2	11361.4	10923	10894.1
f_9	7423.1	4235	6526	6502.7
f_{10}	9972.1	8599.7	7031.6	6911.7

Tabela 7. Upoređenje postupaka $-\log(|x_5-\alpha|)$

Na osnovu rezultata prikazanih u tabelama vidi se da postupci koje posmatramo imaju red konvergencije koji smo očekivali na osnovu dokazanih teorema. Takođe, iz tabela vidimo da se rezultati razlikuju.

5 Zaključak

U radu posmatramo postupke šestog reda konvergencije zasnovane na postupcima Ostrovskog. Kod ovih postupaka povišenje reda konvergencije postiže se odgovarajućim kombinacijama vrednosti funkcija i ubrzavanjem Njutnovog postupka u dva dodatna koraka. Pri tome se izvod funkcije računa samo jednom, u osnovnom koraku, tj. u Njutnovom postupku, a zatim se ta vrednost prenosi u sledeća dva koraka.

Analiza postupaka Neta [10], Grau, Diaz-Barrero [2] i Sharma, Guha [15] omogućila je formiranje jednoparametarske familije pomoćnih funkcija koje se mogu koristiti za dobijanje postupaka šestog reda konvergencije. Kako se pri tom članovi ove familije koriste u dva potkoraka, mogu se upotrebiti različiti članovi ove familije i različite vrednosti parametra. Na taj način se dobijaju četiri stepena slobode u formiranju funkcije koraka iterativnog postupka šestog reda konvergencije. Dokazali smo teoremu o lokalnoj konvergenciji posmatrane familije i odredili asimptotsku konstantu greške. Postupci Neta, Grau, Diaz-Barrero i Sharma, Guha su specijalni slučajevi konstruisane familije.

Formiranje navedene familije, dokaz njene konvergencije i određivanje asimptotske konstante greške predstavlja originalni doprinos ovog rada.

U četvrtom delu prikazano je više rezultata izvedenih eksperimenata koji su urađeni u programskom paketu *Mathematica*. Primeri su uzeti iz relevantnih radova. Numerički rezultati su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

6 Literatura

[1] Chun, C., Some improvements of Jarratt's method with sixth-order convergence, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 1432–1437.

[2] Grau, G., Diaz-Barrero, J.L., An improvement to Ostrowski root-finding method, Applied Mathematics and Computation 173 (2006), 450–456.

[3] Herceg D., Krejić N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[4] Herceg, D., Herceg, Đ., Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126-6133.

[5] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1-9.

[6] Herceg, Đ., Herceg, D., Sixth-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics, 267(2014), 244–253.

[7] Herceg, Đ., Herceg, D., Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.

[8] Kou, J., On Chebyshev–Halley methods with sixth-order convergence for solving non-linear equations, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 126–131.

[9] Kou, J., Wang, X., Sixth-order variants of Chebyshev–Halley methods for solving non-linear equations, Appl. Math. Comput. 190 (2007)1839–1843.

[10] Neta, B., A sixth order family of methods for nonlinear equations, Int. J. Comput. Math. 7 (1979) 157–161.

[11] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[12] Ostrowski A.M., Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press Inc., 1966.

[13] Parhi, S.K., Gupta, D.K., A sixth order method for nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 203 (2008) 50–55.

[14] Ralston, A., A First Course in Numerical Analysis, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.

[15] Sharma, J. R., Guha, R. K., A family of modified Ostrowski methods with accelerated sixth order convergence, Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 111-115.

[16] Traub J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.

[17] Weerakoon, S., Fernando, T.G.I., A variant of Newton's method with accelerated third order convergence, Appl. Math. Lett. 13 (2000), 87-93.

7 Biografija

Rođena sam 2. aprila 1990. godine. U Somboru sam završila Osnovnu školu ”Bratstvo Jedinstvo” i Gimnaziju “Veljko Petrović”. Godine 2008. upisala sam se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematičar. Osnovne studije sam završila u septembru 2011. godine. Te iste godine, posle uspešno položenog prijemnog ispita, upisala sam se na master studije, smer master matematika - nastava matematike.

Zaposlena sam od 2012. godine u Osnovnoj školi ”Bratstvo Jedinstvo” u Somboru.

Novi Sad, maj 2014. Renata Firstner

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Renata Firstner
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Postupci šestog reda zasnovani na postupcima Ostrovskog
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2014.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/ 34 strana/ 7 tabela / 17 literatura
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: red konvergencije, postupak, jednačina greške
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: U radu posmatramo neke iterativne postupke šestog reda konvergencije za rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom $f(x)=0$ koji se zasnivaju na modifikacijama postupka Ostrovskog. Dajemo jednu familiju postupaka koja zavisi od četiri parametra i pokazujemo da su neki poznati postupci specijalni slučajevi ove familije. Kao originalni deo rada

dajemo familiju postupaka, dokaz njene konvergencije šestog reda i određivanje asimptotoske konstante greške. Numerički rezultati potvrđuju teorijska razmatranja.

IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.9.2013.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Helena Zarin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Renata Firstner
AU
Mentor: dr. Dragoslav Herceg
MN
Title: A sixth order methods based on Ostrowsky's methods
XI
Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description 4 chapters/ 34 pages/ 7 tables/ 17 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: order of convergence, method, equation error
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N
Abstract: The aim of this paper is to study some iterative methods with sixth-order convergence in order to solve nonlinear equations with one unknown $f\left(x\right)=0$. They are based on modifications of the Ostrovsky method. A family of methods are given that depend on four parameters and it is demonstrated that some well-known methods are

special cases of this family. As part of the original paper, a family of methods are presented as well as evidence of its convergence of sixth order and determination of the asymptotic constant error. Numerical data prove theoretical considerations.

AB
Accepted by the Scientific Board on: 25. 9. 2013.
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB

President:	dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	dr Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad