UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milena Stojković

H I P E R P O V R Š I

-master rad-

Mentor:
Docent dr Sanja Konjik

Novi Sad, 2011.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Razvoj kalkulusa u 17. veku velikim delom podstakli su problemi u geometriji krivih. Diferenciranje se razvilo od metoda za konstrukciju tangenti, dok se integracija razvila usled pokušaja određivanja površina i dužine luka. Diferencijalna geometrija je matematička disciplina u kojoj se proučavaju problemi u geometriji upravo diferencijalnim i integralnim računom. Teorija krivih u ravni i prostoru, kao i površi u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru, bila je osnova za razvoj diferencijalne geometrije, a kasnije se izučavaju pre svega geometrijske strukture na diferencijabilnim mnogostrukostima.

Jedan od najvažnijih pojmova u diferencijalnoj geometriji je krivina. Intuitivno, krivina je mera odstupanja geometrijskog objekta od ravni, ili prave u slučaju krive, ali se, u zavisnosti od konteksta, definiše na različite načine. Razvoj ove ideje od krivih do površi a potom na višedimenzionalne prostore, imalo je značajan uticaj na razjašnjenje kako matematičkog, tako i fizičkog značenja prostora, vremena i gravitacije. Početak ove teorije bavi se određivanjem krivine krivih u ravni, dok se za krive u prostoru mora uzeti u obzir i torzija. Zatim možemo definisati krivinu površi S u tački p u trodimenzionalnom prostoru, koja će biti izražena krivinama krivih u ravni, posmatrajući presek površi S sa ravnima koje sadrže normalu u tački p. Na taj način možemo dobiti različite krive sa različitim krivinama, ali ćemo ipak imati jednu krivu sa maksimalnom krivinom i jednu krivu sa minimalnom krivinom, κ_1 i κ_2. Međutim, Gauss je pokazao da se krivina površi može odrediti na „unutrašnji način“, odnosno merenjima koja se odvijaju samo na površi. Došao je do neverovatnog otkrića: da se proizvod $\kappa_1 \kappa_2$, koji se po njemu naziva Gauss-ova krivina, može definisati kao unutrašnje svojstvo. Bio je veoma ponosan na svoj rezultat i teoremu nazvao „Theorema Egregium“, koju ćemo u ovom radu dokazati.

Predmet izučavanja ovog rada su hiperpovrši, veza između Gauss-ovog i Weingarten-ovog preslikavanja i geodezijske linije. Cilj je da uopštimo pojam površi u $\mathbb{R}^3$.

U prvoj glavi bavimo se krivama u $\mathbb{R}^n$. Definisaćemo parametrizovane krive, parametrizaciju dužinom luka, krivinu krive, torziju i dati formulaciju teoreme lokalne teorije krivih.

U drugoj glavi centralni pojam je apstraktna mnogostrukost. Prvo ćemo izučavati podmnogostrukosti u $\mathbb{R}^n$, a potom dati definicije glatkog preslikavanja na mnogostrukostima, tangentnog prostora i tangentnog raslojenja, vektorskih polja, tenzora, diferencijalnih formi i formulisati Stokes-ovu teoremu.

Treća glava posvećena je hiperpovršima. Pojmovi koje smo definisali u prve dve glave su neophodni za njihovo proučavanje. Odredićemo krivinu hiperpovrši, definisati Gauss-ovo i Weingarten-ovo preslikavanje, geodezijske linije i kovarijantni izvod.

Ovom prilikom se zahvaljujem svojim roditeljima, Oliveri i Slobodanu, koji su mi bili najveća podrška u životu. Zahvaljujem se predsedniku komisije prof. dr Neveni Pušić i članu komisije prof. dr Dušanki Perišić, ali najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, docentu dr Sanji Konjik, koja je uvek imala vremena i razumevanja za mene i puno mi pomogla ne samo u toku pisanja ovog rada, već i u toku studiranja i zbog koje sam zavolela diferencijalnu geometriju. Čast mi je što je ovaj master rad nastao pod njenim mentorstvom.

Glava 1

KRIVE U $\mathbb{R}^n$

U zavisnosti od ciljeva i metoda izučavanja različitih matematičkih disciplina, pojam krive se definiše na različite načine. Jedna od definicija je sledeća: Kriva je topološki prostor koji je lokalno homeomorfan sa pravom. U svakodnevnom jeziku, ovo znači da je kriva skup tačaka takav da, u okolini svake svoje tačke, podseća na pravu. Svaka definicija krive, sadrži pretpostavke o njenoj regularnosti. Kada se krive proučavaju analitički kao funkcije c iz nekog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^n$, neprekidnost je suviše slaba pretpostavka jer postoji primer krive koja je neprekidna i koja u potpunosti prekriva jedinični kvadrat u $\mathbb{R}^2$ – Peano-ova kriva. Ni diferencijabilnost nije dovoljan uslov jer se može desiti da je izvod funkcije c jednak 0. Sa geometrijske tačke gledišta, prirodno je zahtevati da u svakoj tački krive postoji tangentni vektor.
Prvo ćemo definisati regularne parametrizovane krive, parametrizaciju dužinom luka, Frenet-ove krive, formulisati fundamentalnu teoremu lokalne teorije krivih, a potom ćemo proučavati krive u ravni i prostoru. Teoreme ćemo dati bez dokaza, a za više detalja pogledati [1], [5] i [9].
Podsetimo se sada nekih važnih definicija koje će nam trebati za dalji rad. Neprekidna funkcija $f\colon X\to Y$ između topoloških prostora (X,T_X) i (Y,T_Y) je homeomorfizam ako je bijekcija i ako je inverzna funkcija f^{-1} neprekidna. Ako su M i N dve mnogostrukosti, bijektivno preslikavanje $f\colon M\to N$ se naziva difeomorfizam ako su f i f^{-1} glatke funkcije.

1.1 FRENET-OVE KRIVE U $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Definicija.

Regularna parametrizovana kriva je C^1-preslikavanje $c\colon I\to\mathbb{R}^n$, definisano na nekom intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$ takvo da je

$$\dot{c}(t) \equiv \frac{dc}{dt}(t) \neq 0,\ \forall t\in I$$

Ako c opisuje fizičko kretanje čestice, a t interpretiramo kao vreme, onda definicija kaže da je brzina $\dot{c}$ od c svuda različita od nule, odnosno čestica se stalno kreće. Vektor $\dot{c}(t_0)$ naziva se tangentni vektor funkcije c u t_0, a prava $t\mapsto c(t_0) + t\dot{c}(t_0)$ je tangenta na grafik funkcije c u $c(t_0)$. Prema Taylor-ovoj teoremi, tangenta je aproksimacija funkcije c u t_0 prvog reda:

$$c(t_0+t)=c(t_0)+t\,\dot{c}(t_0)+o(t)$$

Geometrijski posmatrano, sama parametrizacija krive nije toliko značajna koliko je oblik krive c.

1.1.2 Definicija.

Regularna kriva je klasa ekvivalencije regularnih parametrizovanih krivih u odnosu na sledeću relaciju ekvivalencije: neka su c_1: $I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ i c_2: $I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularne parametrizovane krive. Kriva c_1 je ekvivalentna krivoj c_2 ako postoji difeomorfizam φ: $I_1 \rightarrow I_2$ takav da važi $c_2 \circ \varphi = c_1$ i $\varphi' > 0$. Tada se φ naziva difeomorfizam koji očuvava orijentaciju.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n & \\ I_1 \arrow[ur, "c_1"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & I_2 \arrow[ul, "c_2"'] \end{tikzcd}$$

Neka je $c : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva. Dužina krive c se definiše kao

$$L_a^b(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

$\|.\|$ predstavlja Euklidsku normu na $\mathbb{R}^n$, $\|x\| := \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$. Dužina luka krive c je dobro definisana, tj. ne zavisi od parametrizacije. Ako pretpostavimo da je φ: $[\alpha,\beta] \rightarrow [a,b]$ C^1 difeomorfizam kao u definiciji 1.1.2. imamo:

$$\int_\alpha^\beta \|(c\circ\varphi)^{\cdot}(r)\| dr = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(\varphi(r))\| \varphi'(r) dr = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

1.1.3 Definicija.

Parametrizacija krive c se naziva parametrizacija dužinom luka ako je $\|\dot{c}(t)\| = 1$ za sve t.

Ova definicija nam govori da kriva parametrizovana dužinom luka ima jediničnu brzinu. Tada je

$$L_a^b(c) = b - a\,.$$

Može se pokazati da se svaka regularna kriva c može parametrizovati dužinom luka. Proizvoljan parametar krive c se obično označava sa t, a odgovarajući tangentni vektor sa $\dot{c}(t)$, dok se za parametrizaciju dužinom luka koriste oznake s za parameter krive i $c'(s)$ za tangentni vektor.

1.1.4 Primeri.

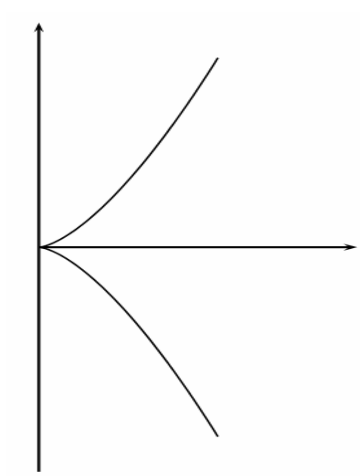
(i) Za pravu $c(t) = (at,bt)$ imamo da je $\dot{c}(t) = (a,b)$. Otuda je c parametrizovano dužinom luka ako i samo ako $a^2 + b^2 = 1$.
Primetimo još da npr. parametrizacija $t \mapsto (at^3,bt^3)$ iako opisuje istu geometrijsku krivu, nije regularna u $t = 0$.

(ii) $c(s) := \frac{1}{2}(\cos(2s),\sin(2s))$ opisuje kružnicu poluprečnika $\frac{1}{2}$. Kako je $c'(s) = (-\sin(2s),\cos(2s))$ sledi da je $\|c'\| = 1$ pa je c parametrizovana dužinom luka.

(iii) $c(t) := (a\cos(\alpha t),a\sin(\alpha t),bt)$, $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, opisuje kružni heliks.
Tada je $\dot{c}(t) = (-\alpha a\sin(\alpha t),\alpha a\cos(\alpha t),b)$ i $\|\dot{c}\| = \sqrt{\alpha^2 a^2 + b^2}$. Odatle sledi da c ima konstantnu brzinu i da je $s = t\sqrt{\alpha^2 a^2 + b^2}$ parametrizacija dužinom luka. Geometrijski, kružni heliks je slika tačke $(a,0,0)$ pod dejstvom rotacije i translacije:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotacija u xy-ravni}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bt \end{pmatrix}}_{\text{translacija}}$$

(iv) Neil-ova parabola je kriva $c(t) = (t^2,t^3)$. Tada je $\dot{c}(t) = (2t,3t^2)$, $\dot{c}(0) = (0,0)$.
Odatle sledi da c nije regularna parametrizacija u $t = 0$, iako je c glatka na celom $\mathbb{R}$.



Vidimo da u špicu (0,0) c nema tangentni vektor.

Koristeći Taylor-ovu ekspanziju možemo aproksimirati krivu c parametrizovanu dužinom luka na sledeći način:

$$c(s) = c(0) + sc'(0) + \frac{s^2}{2}c''(0) + \frac{s^3}{6}c'''(0) + o(s^3)$$

Koristeći ekspanziju do prvog reda dobijamo tangentu $c(0)+sc'(0)$, do drugog reda dobijamo oskulatorni konus $c(0)+sc'(0)+\frac{s^2}{2}c''(0)$, koji ima kontakt drugog reda sa c. Kažemo da dve krive imaju kontakt k-tog reda u s ako i samo ako se njihovi izvodi do reda k u s poklapaju.
Na osnovu ovoga zaključujemo da vektori $c', c'', c''', \ldots$ imaju različite uloge u opisivanju krive c. Ako su ovi vektori i linearno nezavisni u svakoj tački krive, onda oni formiraju prirodan koordinantni sistem koji opisuje krivu c. U nastavku ćemo ortonormiranu bazu Euklidskog prostora zvati n-okvir (eng. n-frame).

1.1.5 Definicija.

Neka je c: $I \to \mathbb{R}^n$ *regularna kriva klase* C^n *parametrizovana dužinom luka. c se naziva Frenet-ova kriva ako su vektori* $c'(s), c''(s), \ldots, c^{n-1}(s)$ *linearno nezavisni za svako s. Odgovarajući Frenet-ov okvir je tada jedinstveno definisan sledećim uslovima:*

(i) $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ *su ortonormirani i pozitivno orijentisani,* $\forall s \in I$

(ii) $span(e_1(s), \ldots, e_k(s)) = span(c'(s), \ldots, c^{(k)}(s))$, $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\forall s \in I$

(iii) $\langle c^{(k)}(s), e_k(s) \rangle > 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\forall s \in I$

Iz prethodne definicije sledi da je u ravni ($\mathbb{R}^2$), svaka regularna kriva Frenet-ova $(c'(s) \neq 0)$, dok u prostoru ($\mathbb{R}^3$), svaka regularna kriva za koju važi da je $c'' \neq 0$ je Frenet-ova (što sledi iz činjenice da je $c'(s) \perp c''(s)$).

1.2 FUNDAMENTALNA TEOREMA LOKALNE TEORIJE KRIVIH

U ovom poglavlju, videćemo kako izgledaju Frenet-ove jednačine za krive u $\mathbb{R}^n$ i formulisati fundamentalnu teoremu lokalne teorije krivih. Neka je c Frenet-ova kriva u $\mathbb{R}^n$ sa pridruženim n-okvirom $e_1, \ldots, e_n$.

1.2.1 Teorema.

Postoje jedinstveno određene funkcije $k_1,...,k_{n-1}$, *Frenet-ove krivine krive c, sa osobinama* $k_1,...,k_{n-2} > 0$ *i* $k_i \in C^{n-1-i}(I)$, $1 \le i \le n-1$, *takve da važe Frenet-ove jednačine:*

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -k_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}$$

1.2.2 Teorema. (Fundamentalna teorema lokalne teorije krivih)

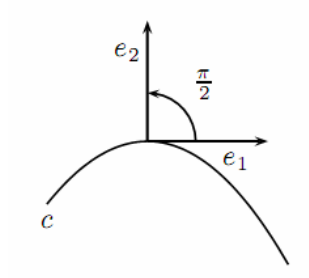
Neka su $k_1,...,k_{n-1} : (a,b) \to \mathbb{R}$ *date funkcije takve da je* $k_i \in C^{n-i-1}(a,b), 1 \le i \le n-1$ *i* $k_1,...,k_{n-2} > 0$. *Neka* $s_0 \in (a,b)$, $q_0 \in \mathbb{R}^n$, *i neka je dat skup pozitivno orijentisanih ortonormiranih vektora* $e_1^{(0)},...,e_n^{(0)}$. *Tada postoji jedinstvena Frenet-ova kriva* $c : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ *takva da je* $c(s_0) = q_0$, $\{e_1^{(0)},...,e_n^{(0)}\}$ *je Frenet-ov okvir krive c u* q_0 *i* $k_1,...,k_{n-1}$ *su Frenet-ove krivine krive c.*

Specijalni slučajevi krivih u $\mathbb{R}^n$ jesu krive u ravni i prostoru koje ćemo izučavati u sledećem poglavlju. Videćemo da Frenet-ove jednačine za krive u ravni zavise isključivo od krivine, a za krive u prostoru zavise od krivine i torzije.

1.3 KRIVE U RAVNI I PROSTORU, KRIVINA

1.3.1 Krive u ravni

Pretpostavimo da je c regularna (prema tome i Frenet-ova) kriva u $\mathbb{R}^2$. Tada je $e_1(s) = c'(s)$ tangentni vektor na *c*, a e_2, koji se konstruiše rotiranjem e_1 za ugao $\frac{\pi}{2}$ na levo, je vektor normale na *c*. Pisaćemo i $e_2(s) = e_1^{\perp}(s)$.



Kako je

$$0 = \langle c', c' \rangle' = 2\langle c', c'' \rangle = 2\langle e_1, c'' \rangle$$

sledi da su c'' i e_2 kolinearni, pa postoji funkcija k sa osobinom $c''(s) = k(s)e_2(s)$, $\forall s$.
k se naziva (orijentisana) *krivina* krive c. Znak funkcije k pokazuje pravac u kojem c (respektivno c') skreće: ako je $k > 0$ tangenta se rotira u levo, a ako je $k < 0$ u desno. Ako je $k = 0$ tangenta se ne rotira. Takve tačke nazivaju se prevojne tačke.
Frenet-ove jednačine za krive u ravni su sledeće:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

One omogućavaju da se izvede eksplicitna formula za krivinu krive $c(s) = (x(s), y(s))$ u zavisnosti od $c'(s)$ i $c''(s)$. Važi:

$$k(s) = \langle k(s)e_2(s), e_2(s) \rangle = \langle c''(s), e_2(s) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} \right\rangle = \det \begin{pmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{pmatrix}$$
$$= \det(c'(s), c''(s))$$

Ako posmatramo krive konstantne krivine sasvim je prirodno očekivati da su to ili prave (za k=0) ili kružnice (za k≠0). Tačnije, važi da regularna kriva u $\mathbb{R}^2$ ima konstantnu krivinu ako i samo ako je deo prave (za k=0) ili deo kružnice poluprečnika $\frac{1}{|k|}$ (za k≠0).

1.3.2 Krive u prostoru

Videli smo da je regularna kriva u $\mathbb{R}^3$ Frenet-ova ako je $c''(s) \neq 0$ za sve s. Pridruženi 3-okvir je tada dat sa:

$e_1 = c'$ (tangentni vektor)

$e_2 = \frac{c''}{\|c''\|}$ (vektor glavne normale)

$e_3 = e_1 \times e_2$ (vektor binormale)

Krivina krive c je definisana kao $k(s) := \|c''(s)\|$.

Funkcija $\tau(s) := \langle e_2'(s), e_3(s)\rangle$ se naziva *torzija* krive c. Frenet-ove jednačine za prostornu krivu su:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Primetimo da kada krivu u ravni $c(s) = (x(s), y(s))$ posmatramo kao prostornu krivu $c(s) = (x(s), y(s), 0)$, ona ima torziju 0 jer je e_3 konstantno. Obrnuto, ako je $\tau = 0$ za prostornu krivu c, sledi da je $e_3 = \text{const}$, pa c leži u (e_1,e_2)-ravni. Dakle, torzija meri brzinu napuštanja krive c od ravni (e_1,e_2).
Korisno je analizirati ponašanje krive posmatrajući njene projekcije na određene ravni generisane podskupovima pridruženog 3-okvira. To su oskulatorna ravan, generisana sa e_1 i e_2, normalna ravan generisana sa e_2 i e_3 i rektifikaciona ravan generisana sa e_1 i e_3. Korišćenjem Taylor-ovog razvoja funkcije c u 0 i Frenet-ovih jednačina, dobijamo sledeće rezultate:

Projekcija u oskulatornoj $(e_1, e_2)-$ ravni je (do reda 2) parabola

$$c(0) + se_1(0) + \frac{s^2 k(0)}{2} e_2(0) + o(s^2).$$

U normalnoj (e_2, e_3) - ravni dobijamo Neil-ovu parabolu (do reda 3)

$$c(0) + \left(\frac{s^2 k(0)}{2} + \frac{s^3 k'(0)}{6}\right) e_2(0) + \frac{s^3 k(0)\tau(0)}{6} e_3(0) + o(s^3).$$

Projekcija na rektifikacionu (e_1, e_3) - ravan ima oblik ″kubne parabole″ (do reda 3)

$$c(0) + \left(s - \frac{s^3 k(0)^2}{6}\right) e_1(0) + \frac{s^3 k(0)\tau(0)}{6} e_3(0) + o(s^3).$$

Glava 2

DIFERENCIJABILNE MNOGOSTRUKOSTI

Jedan od najvažnijih pojmova moderne matematike je pojam diferencijabilne mnogostrukosti. Neke od primena mnogostrukosti su u analizi, diferencijalnoj geometriji, topologiji, teoriji Lie-ovih grupa, ODJ i PDJ, kao i u brojnim granama fizike, npr. u mehanici ili opštoj relativnosti. U ovoj glavi, upoznaćemo se sa osnovnim definicijama i teoremama iz oblasti apstraktnih mnogostrukosti, podmnogostrukosti u $\mathbb{R}^n$, tangentnih raslojenja, tenzora, diferencijalnih formi i integraljenja na mnogostrukostima. Kao i u prethodnoj glavi, teoreme dajemo bez dokaza. Za više detalja pogledati [2], [3], [6] i [7].

2.1 APSTRAKTNE MNOGOSTRUKOSTI

2.1.1 Definicija.

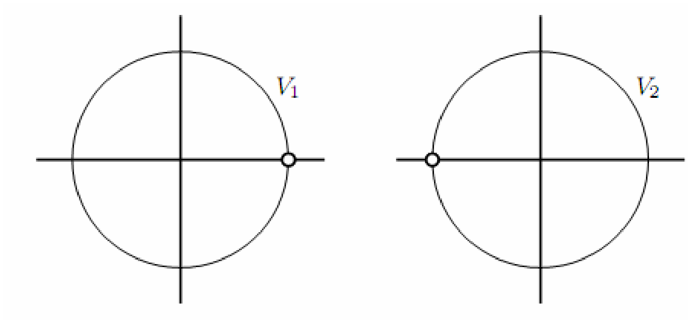
Neka je M skup. Karta (ψ, V) *od M je bijekcija* ψ *iz* $V \subseteq M$ *na otvoren podskup* $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\psi : V \to U$. *Dve karte* $(\psi_1, V_1), (\psi_2, V_2)$ *su* (C^∞-) *kompatibilne ako su* $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ *i* $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ *otvoreni u* $\mathbb{R}^n$ *i promena karti* $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$: $\psi_1(V_1 \cap V_2) \to \psi_2(V_1 \cap V_2)$ *je* C^∞-*difeomorfizam.*
C^∞-*atlas od M je familija* $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ *po parovima kompatibilnih karti takva da je* $M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. *Dva atlasa* $\mathcal{A}_1$ *i* $\mathcal{A}_2$ *su ekvivalentna ako je njihova unija ponovo atlas od M, tj. sve karte iz* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ *su kompatibilne. Apstraktna mnogostrukost je skup M zajedno sa klasom ekvivalencije atlasa. Takva struktura naziva se diferencijabilna struktura na M.*

2.1.2 Primeri.

(i) Neka je $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Definišemo:

$$V_1 := \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid 0 < \varphi < 2\pi\}$$
$$\psi_1 : V_1 \to (0, 2\pi),\ (\cos\varphi, \sin\varphi) \mapsto \varphi$$

$$V_2:=\{(\cos\varphi,\sin\varphi)\,|\,-\pi<\varphi<\pi\}$$
$$\psi_2: V_2\rightarrow(-\pi,\pi)\ ,\ (\cos\varphi,\sin\varphi)\mapsto\varphi$$



Tada su (ψ_1,V_1) i (ψ_2,V_2) karte od S^1 i $S^1=V_1\cup V_2$. Pokazaćemo da su ψ_1 i ψ_2 kompatibilne. Prvo, $\psi_1(V_1\cap V_2)=(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, $\psi_2(V_1\cap V_2)=(-\pi,0)\cup(0,\pi)$. Dalje imamo

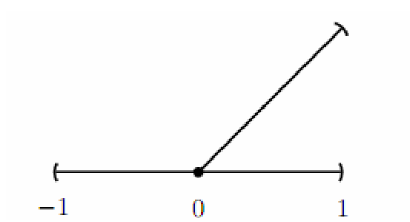
$$\psi_2\circ\psi_1^{-1}\Big|_{(0,\pi)}=\varphi\mapsto\varphi$$
$$\psi_2\circ\psi_1^{-1}\Big|_{(\pi,2\pi)}=\varphi\mapsto\varphi\text{-}2\pi$$

Sledi da je promena karti $\psi_2\circ\psi_1^{-1}:\psi_1(V_1\cap V_2)\rightarrow\psi_2(V_1\cap V_2)$ difeomorfizam. Dakle, $\mathcal{A}:=\{(\psi_1,V_1),(\psi_2,V_2)\}$ je atlas od S^1.

(ii) Neka je $M\subseteq\mathbb{R}^n$ definisan kao unija V_1 i V_2, gde su

$$V_1:=\{(s,0)\,|\,-1<s<1\}$$

$$V_2:=\{(s,0)\,|\,-1<s\leq 0\}\cup\{(s,s)\,|\,0<s<1\}$$



Definišimo

$$\psi_1: V_1\rightarrow(-1,1),\ \psi_1(s,0)=s$$
$$\psi_2: V_2\rightarrow(-1,1),\ \psi_2(s,0)=s,\ \psi_2(s,s)=s$$

ψ_1, ψ_2 su bijekcije, otuda i karte i $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = s \mapsto s$.
Ipak, kako je $\psi_1(V_1 \cap V_2) = (-1,0]$, a $(-1,0]$ nije otvoren skup u $\mathbb{R}$, sledi da ψ_1 i ψ_2 nisu kompatibilne.

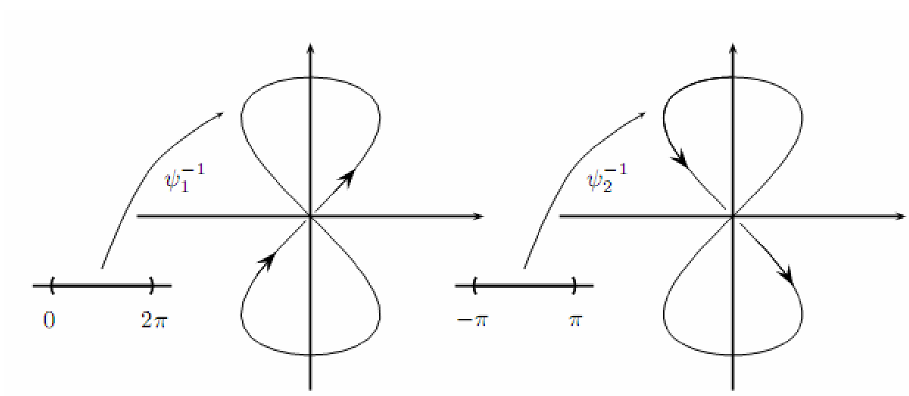
(iii) Neka je $M = \{\sin 2s, \sin s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ (mnogostrukost) figura osam. Neka je

$$V_1 = M,\ \psi_1 : V_1 \to (0,2\pi),\ \psi_1(\sin 2s, \sin s) = s.$$

Tada je ψ_1 karta, a $\mathcal{A}_1 := \{(\psi_1, V_1)\}$ atlas koji definiše C^∞-strukturu na M.

Sa druge strane, neka je:

$$V_2 = M,\ \psi_2 : V_2 \to (-\pi,\pi),\ \psi_2(\sin 2s, \sin s) = s.$$



Tada je i $\mathcal{A}_2 := \{(\psi_2, V_2)\}$ atlas.
Pa ipak, $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ nisu ekvivalentni:

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : (0,2\pi) \to (-\pi,\pi)$$

$$s \mapsto \begin{cases} s, & 0 < s < \pi \quad \textit{gornja petlja} \\ s-\pi\ , & s = \pi \quad \textit{koordinatni početak} \\ s - 2\pi, & \pi < s < 2\pi \quad \textit{donja petlja} \end{cases}$$

Dakle $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ nije čak ni neprekidno preslikavanje. Možemo zaključiti da M može biti snabdeveno sa različitim C^∞-strukturama. Sa svakom od tih struktura, M je primer C^∞-mnogostrukosti.

(iv) Može se pokazati da za $n \neq 4$ postoji tačno jedna C^∞-struktura na $\mathbb{R}^n$ (do na difeomorfizam). Na $\mathbb{R}^4$ postoji neprebrojivo mnogo C^∞-struktura koje nisu međusobno ekvivalentne.

Atlas mnogostrukosti se naziva maksimalan ako nije sadržan u nekom većem atlasu. Za C^∞-mnogostrukost M sa atlasom A, postoji jedinstven maksimalan atlas koji sadrži A. Neka je $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ maksimalan atlas glatke mnogostrukosti M. Tada je $B := \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ baza topologije koja se naziva prirodna ili topologija mnogostrukosti M.
S obzirom na topologiju mnogostrukosti od M, svaka karta (ψ, V) je homeomorfizam otvorenog podskupa V od M na otvoren podskup $\psi(V)$ od $\mathbb{R}^n$. U daljem radu, podrazumevaćemo da je topologija mnogostrukosti Hausdorff-ova i da zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

2.1.3 Definicija.

Neka su M i N C^∞-mnogostrukosti i $f\colon M \to N$ preslikavanje. f se naziva glatko ako je neprekidno i za svako $p \in M$ postoje karta φ od M oko p i karta ψ od N oko $f(p)$ takve da je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatko.
f se naziva difeomorfizam ako je bijekcija i f i f^{-1} su glatka preslikavanja.

Definicija ne zavisi od izbora karti. Takodje, lako se može pokazati da je kompozicija glatkih preslikavanja glatka.

Specijalan slučaj apstraktnih mnogostrukosti su podmnogostrukosti u $\mathbb{R}^n$.

2.2 PODMNOGOSTRUKOSTI U $\mathbb{R}^n$

2.2.1 Definicija.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren i $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ C^∞. Preslikavanje φ se naziva regularno preslikavanje ako je za sve $x \in U$ rang Jacobian-a $D\varphi(x)$ maksimalan, tj. jednak $\min\{k,n\}$. Tada za rang $rk(D\varphi)$ od $D\varphi$ (takođe se naziva i rang preslikavanja φ) imamo:

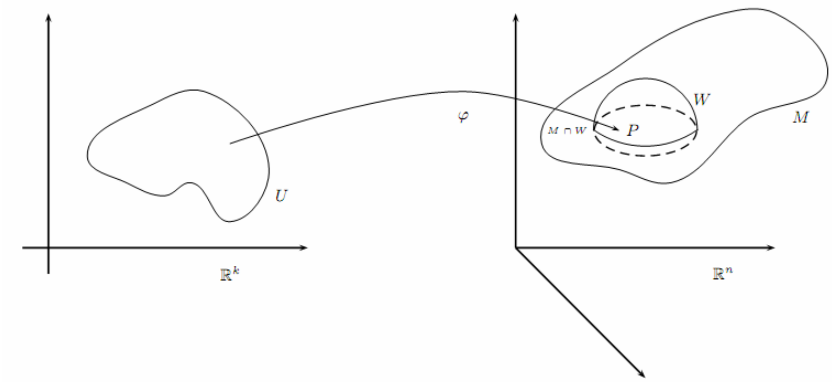
$$rk(D\varphi(x)) = \dim Im(D\varphi(x)) = \dim(\mathbb{R}^k) - \dim(\ker D\varphi(x)).$$

Otuda, ako je $k \leq n$ onda je $\ker D\varphi(x) = \{0\}$ i $D\varphi(x)$ je injektivno za sve x. U tom slučaju φ se naziva imerzija. Za $k \geq n$, $D\varphi(x)$ je sirjektivno za sve x i φ se naziva submerzija.

2.2.2 Definicija.

Podskup M od $\mathbb{R}^n$ se naziva k-dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ ($k \leq n$) ako:

(P) $\left\{\begin{array}{l}\textit{Za svako } p \in M \textit{ postoje otvorena okolina } W \textit{ od} \\ p \textit{ u } \mathbb{R}^n\textit{, otvoren podskup } U \textit{ od } \mathbb{R}^k \textit{ i imerzija} \\ \varphi : U \to \mathbb{R}^n \textit{ takvi da je } \varphi : U \to \varphi(U) \\ \textit{homeomorfizam i } \varphi(U) = M \cap W. \end{array}\right.$



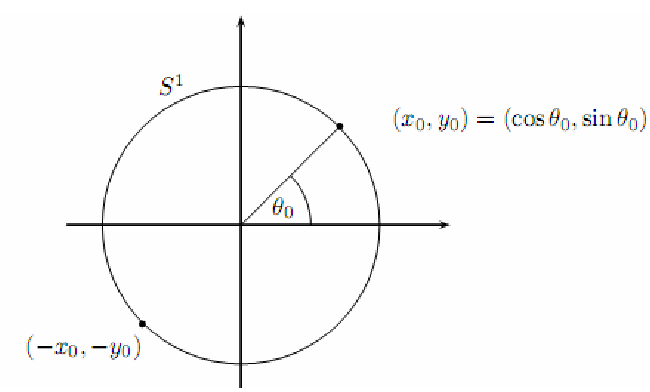
Preslikavanje φ se naziva lokalna parametrizacija od M.

Dakle, φ je regularno preslikavanje koje identifikuje U i $\varphi(U) = M \cap W$ topološki ($\varphi(U) = M \cap W$ ima indukovanu topologiju od $\mathbb{R}^n$).

2.2.3 Primeri.

(i) Jedinična kružnica S^1

Neka je $\varphi : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$. Tada za svako $(x_0, y_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, $\varphi : (\theta_0-\pi, \theta_0+\pi) \to \mathbb{R}^2$ je parametrizacija od S^1 oko (x_0,y_0). Za W se može uzeti, recimo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-x_0,-y_0)\}$. Dakle, S^1 je 1-dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^2$. Primetimo i da ne postoji jedna parametrizacija za celu kružnicu S^1 (ne postoji homeomorfizam otvorenog podskupa od $\mathbb{R}$ na S^1 pošto je S^1 kompaktan skup).

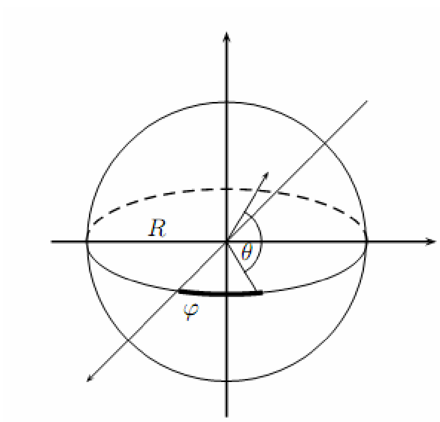


(ii) Jedinična sfera S^2 u $\mathbb{R}^3$.

Neka je $\varphi(\tau,\theta) = (\cos\tau\cos\theta, \sin\tau\cos\theta, \sin\theta)$. Tada je

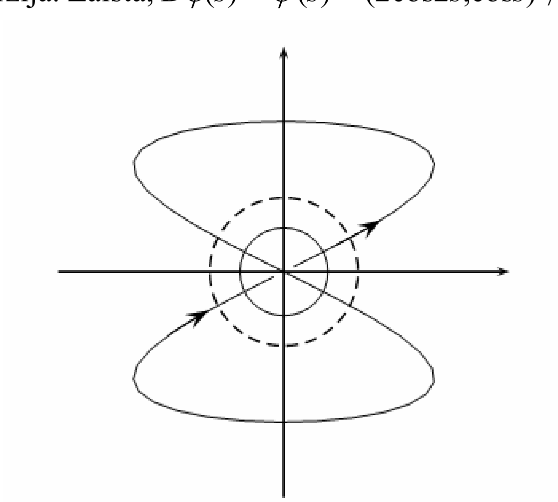
$$D\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\tau\cos\theta & -\cos\tau\sin\theta \\ \cos\tau\cos\theta & -\sin\tau\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

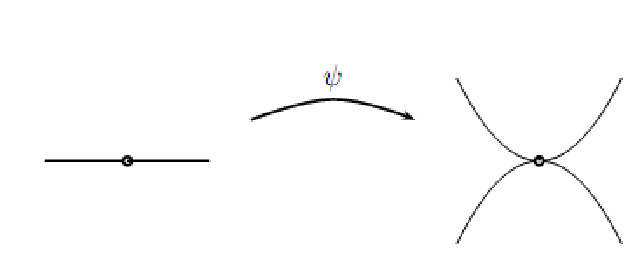
φ je parametrizacija od S^2 npr. na $(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Na svom domenu φ je injektivna i $\mathrm{rk}(D\varphi(x)) = 2$, pošto je $\cos\theta \neq 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Ponovo, potrebno je više od jedne parametrizacije da bi se prekrila sfera S^2.



(iii) Mnogostrukost figura osam

Neka je $M := \{(\sin 2s, \sin s) \mid s \in (0,2\pi)\}$. Preslikavanje $\varphi : s \mapsto (\sin 2s, \sin s)$ je injektivna imerzija. Zaista, $D\varphi(s) = \varphi'(s) = (2\cos 2s, \cos s) \neq (0,0)$ na $(0,2\pi)$.





Ipak M nije podmnogostrukost od $\mathbb{R}^2$! Pretpostavimo da postoji parametrizacija Ψ : $(-\varepsilon,\varepsilon) \to B_{½}(0,0)$ od M oko $p = (0,0)$ takva da je $\Psi : (-\varepsilon,\varepsilon) \to B_{½}(0,0) \cap M$ homeomorfizam. Tada, kako $(-\varepsilon,\varepsilon)\backslash\{0\}$ ima 2 povezane komponente, a $(M \cap B_{½}(0,0))\backslash(0,0)$ 4, dolazimo do kontradikcije.

Podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ mogu se opisati na još tri načina, što pokazuje sledeće tvrđenje.

2.2.4 Teorema.

Neka je $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(P) *(lokalna parametrizacija) M je k-dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$.*

(Z) *(lokalno nula skup) Za svako $p \in M$ postoje otvorena okolina W od p u $\mathbb{R}^n$ i regularno preslikavanje $f: W \to \mathbb{R}^{n-k}$ (tj. $rkDf(q)=n-k$, $\forall q \in W$) tako da važi*

$$M \cap W = f^{-1}(0) = \{x \in W \mid f(x)=0\}$$

(G) *(lokalno grafik) Za svako $p \in M$ postoje (nakon prenumerisanja koordinata ako je potrebno) otvorena okolina $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ od $p' := (p_1, ..., p_k)$ i otvorena okolina $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ od $p'' := (p_{k+1}, ..., p_n)$ i postoji C^∞-preslikavanje $g : U' \to U''$ takvo da je:*

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x',x'') \in U' \times U'',\ x'' = g(x')\} = graph(g)$$

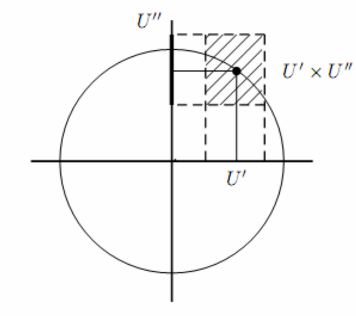
(T) *(lokalna trivijalizacija) Za svako $p \in M$ postoje otvorena okolina W od p u $\mathbb{R}^n$, otvoren skup W' u $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ i difeomorfizam $\Psi : W \to W'$ tako da važi*

$$\Psi(M \cap W) = W' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \cong \mathbb{R}^k$$

2.2.5 Primeri.

(i) Kružnica u $\mathbb{R}^2$

- Nula skup lokalno: $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : W \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$, $S^1 \cap W = f^{-1}(0)$
- Grafik lokalno: $S^1 \cap (U' \times U'') = \mathrm{graph}(g)$, $g : x \mapsto \sqrt{R^2 - x^2}$



(slično važi i za $\tilde{g} : y \mapsto \sqrt{R^2 - y^2}$)

- Lokalna trivijalizacija: Ψ: $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mapsto (\varphi, r\text{-}R)$. Tada imamo (lokalno) $\psi := \Psi\big|_{W \cap S^1} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi) \mapsto (\varphi, 0)$, W je odgovarajuća okolina.

(ii) Sfera u $\mathbb{R}^3$
- Nula skup lokalno: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- Grafik lokalno: $(x, y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
- Lokalna trivijalizacija: inverzne sferne koordinate sa fiksiranim poluprečnikom

(iii) Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Tada je U podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ sa lokalnom parametrizacijom id: $U \to U$.

Sada uvodimo definiciju glatkog preslikavanja na mnogostrukostima.

2.2.6 Definicija.

Neka su $M \subseteq \mathbb{R}^m$ i $N \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogostrukosti. Preslikavanje $f : M \to N$ se naziva glatko (ili C^∞) ako za svako $p \in M$ postoje otvorena okolina U_p od p u $\mathbb{R}^m$ i glatko preslikavanje $\tilde{f} : U_p \to \mathbb{R}^n$ za koje važi

$$\tilde{f}\big|_{M \cap U_p} = f\big|_{M \cap U_p}.$$

Ako je f bijekcija, a f i f^{-1} glatka preslikavanja, tada se f naziva difeomorfizam.

Nije teško proveriti da je kompozicija glatkih preslikavanja glatko preslikavanje.

Karte k-dimenzionalnih podmnogostrukosti M od $\mathbb{R}^n$ se definišu na sledeći način: Karta (ψ, V) od M je difeomorfizam $\psi : V \to U$, gde je $V \subseteq M$ otvoren skup i U otvoren podskup od $\mathbb{R}^k$. Karte su inverzna preslikavanja lokalnih parametrizacija.

Ako je Ψ trivijalizacija iz 2.2.4 (T), tada je $\psi := \Psi_{M \cap W}$ karta od M.
Ako je M k-dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i (ψ, V) karta, tada za $p \in V$ možemo pisati:

$$\psi(p) = (\psi_1(p), \dots, \psi_k(p)) = (x_1, \dots, x_k).$$

Glatke funkcije $\psi_i = pr_i \circ \psi$ se nazivaju lokalne koordinatne funkcije, a x_i lokalne koordinate od p.
Neka su M^m i N^n podmnogostrukosti, f: $M \rightarrow N$, $p \in M$, φ karta od M oko p i ψ karta od N oko $f(p)$. Tada se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ naziva lokalna reprezentacija funkcije f. Imamo

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : (x_1, ..., x_m) \mapsto (\psi_1(f(\varphi^{-1}(x))), ..., \psi_n(f(\varphi^{-1}(x)))) =: (f_1(x), ..., f_n(x))$$

f_i su koordinatne funkcije od f u odnosu na karte φ i ψ.
Korišćenjem karti, glatkost preslikavanja između podmnogostrukosti može biti karakterisana bez korišćenja Euclid-skog prostora u kojem se podmnogostrukost nalazi na sledeći način:

Neka su $M^m \subseteq \mathbb{R}^s$ i $N^n \subseteq \mathbb{R}^t$ podmnogostrukosti i f: $M \rightarrow N$. Tada važi:

f je glatka funkcija ako i samo ako

$(\forall p \in M)$ ($\forall$ karta (φ, U) od M oko p) ($\forall$ karta (ψ, V) od N oko $f(p)$) tako da je domen $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ lokalne reprezentacije $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ otvoren i $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ je glatko ako i samo ako

f je neprekidno i $\forall p \in M$, $\forall$ kartu (φ, U) od M oko p, $\forall (\psi, V)$ kartu od N oko $f(p)$ lokalna reprezentacija $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ je glatka.

Sledeća teorema će nam razjasniti odnos između podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ i apstraktnih mnogostrukosti.

2.2.7 Teorema.

Neka je M m-dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$. Tada je M i m-dimenzionalna C^∞-mnogostrukost u smislu definicije 2.1.1. Topologija mnogostrukosti od M se poklapa sa indukovanom topologijom od $\mathbb{R}^n$ na M.

2.3 DIFERENCIRANJE. TANGENTNI PROSTOR

U prethodnom poglavlju, definisali smo glatka preslikavanja između mnogostrukosti. Međutim, nismo dali definiciju izvoda glatkog preslikavanja. U $\mathbb{R}^n$, izvod preslikavanja je njegova najbolja linearna aproksimacija, što ima smisla samo u vektorskim prostorima. Ali mnogostrukosti nemaju strukturu vektorskog prostora u opštem slučaju. Zbog toga ćemo diferenciranje na mnogostrukostima posmatrati kao proces aproksimacije u dva koraka: prvo, u bilo kojoj tački mnogostrukost se aproksimira vektorskim prostorom (tangentnim prostorom, koji odgovara tangentnoj ravni na površ). Zatim se izvod definiše kao linearno preslikavanje na tim tangentnim prostorima. Pre opšte procedure, posmatraćemo specijalan slučaj podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$.

2.3.1 Teorema.

Neka je M podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i $p \in M$. Tada se sledeći podskupovi od $\mathbb{R}^n$ poklapaju:

(i) $\operatorname{im} D\varphi(0)$, *gde je* φ *lokalna parametrizacija od M i* $\varphi(0) = p$.

(ii) $\{c'(0) \mid c: I \to M\ C^\infty,\ I \subseteq \mathbb{R}$ *interval*, $c(0) = p\}$

(iii) $\ker Df(p)$, *gde je, lokalno oko p, M nula skup regularnog preslikavanja* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ $(k = \dim M)$.

(iv) $\operatorname{graph}(Dg(p'))$, *gde je lokalno oko p M grafik glatke funkcije g i* $p=(p', g(p'))$.

2.3.2 Definicija.

Neka je M podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i $p \in M$. Linearan potprostor od $\mathbb{R}^n$ karakterisan u 2.3.1 naziva se tangentni prostor od M u p i označava sa T_pM ($\dim T_pM=k=\dim M$). Elementi prostora T_pM se nazivaju tangentni vektori od M u p. Ako je N podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i $f: M \to N$ glatko preslikavanje, tada neka je

$$T_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$$
$$c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0)$$

$T_p f$ se naziva tangentno preslikavanje preslikavanja f u tački p.

Kako je f glatko preslikavanje, lokalno oko p postoji glatka funkcija $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, tako da važi: $\tilde{f}\big|_{U \cap M} = f\big|_{U \cap M}$. Tada je $T_p f(c'(0)) = D\tilde{f}(p)c'(0)$, pa je $T_p f$ linearno preslikavanje.

Posmatrajmo sada podmnogostrukosti M, N, P, preslikavanja $f: M \to N$, $g: N \to P$ C^∞, i neka je $p \in M$. Tada važi:

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f$$

Sada ćemo proširiti pojam tangentnog prostora i na apstraktne mnogostrukosti. Primetimo da za apstraktnu mnogostrukost M i c: $I \to M$ glatku krivu na M, izvod $c'(0)$ trenutno nema smisla zbog nedostatka Euclid-skog prostora koji okružuje M. Zato posmatramo karte:

2.3.3 Definicija.

Neka je M mnogostrukost, $p \in M$ i (ψ, V) karta oko p. Dve glatke krive c_1, c_2: $I \to M$ koje prolaze kroz p (tj. $c_1(0) = p = c_2(0)$) nazivaju se tangentne u p s obzirom na kartu ψ ako je

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0)$$

Ova definicija je dobra, tj. tangentnost krivih u tački ne zavisi od izbora karte ψ.

Na prostoru krivih koje prolaze kroz p definišemo relaciju ekvivalencije: $c_1 \sim c_2 :\Leftrightarrow c_1$ je tangentno na c_2 u p s obzirom na jednu (pa onda i svaku) kartu oko p. Za krivu $c: I \to M$, $c(0) = p$ označimo sa $[c]_p$ klasu ekvivalencije kojoj pripada c s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$. Tada se $[c]_p$ naziva tangentni vektor u p.

2.3.4 Definicija.

Tangentni prostor mnogostrukosti M u $p \in M$ je $T_pM = \{[c]_p \mid c: I \to M\ C^\infty,\ I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $c(0) = p\}$.

Primetimo prvo da se za podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^n$ ova definicija svodi na 2.3.2, jer u tom slučaju preslikavanje $c'(0) \leftrightarrow [c]_p$ je bijekcija između „starog“ i „novog“ tangentnog prostora. Zapravo,

$$[c_1]_p = [c_2]_p \Rightarrow \underbrace{(\psi \circ c_1)'(0)}_{D\psi(p)c_1'(0)} = \underbrace{(\psi \circ c_2)'(0)}_{D\psi(p)c_2'(0)}$$

$$\Rightarrow c_1'(0) = c_2'(0)\,.$$

pa je preslikavanje $c'(0) \to [c]_p$ „1-1“. Očigledno je i „na“.

2.3.5 Definicija.

Neka su M i N mnogostrukosti i $f: M \to N$ glatka funkcija. Preslikavanje

$$T_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$$
$$[c]_p \mapsto [f \circ c]_{f(p)}$$

se naziva tangentno preslikavanje funkcije f u tački p.

U slučaju kada su M i N podmnogostrukosti od $\mathbb{R}^m$ *i* $\mathbb{R}^n$, $T_p f$ je upravo preslikavanje iz 2.3.2 u smislu gornje identifikacije ($c'(0) \to [c]_p$).

$$
\begin{array}{ccc}
c'(0) & \longrightarrow & (f \circ c)' \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
[c]_p & \longrightarrow & [f \circ c]_{f(p)}
\end{array}
$$

2.3.6 Propozicija.

Neka su M, N i P mnogostrukosti, f: M→N i g: N→P glatke funkcije i p∈M. Tada je

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f$$

Šta više, kako je $T_p(id_M) = id_{T_pM}$*, za difeomorfizam f: M→N je* $T_p f$ *bijekcija i* $(T_p f)^{-1} = T_{f(p)} f^{-1}$.

Sada želimo da prostor T_pM snabdemo strukturom vektorskog prostora. Prvo ćemo analizirati lokalnu situaciju. Posmatramo preslikavanje i: $T_pU \to \mathbb{R}^n$, $[c]_p \mapsto c'(0)$, gde je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Neka je $p \in U$. Preslikavanje i je dobro definisano: za kartu $\psi = id_U$, imamo:

$$[c_1]_p = [c_2]_p \Leftrightarrow (id \circ c_1)'(0) = (id \circ c_2)'(0) \Rightarrow c_1'(0) = c_2'(0)$$

i je injektivno jer: $c_1'(0) = c_2'(0) \Rightarrow (\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0) \Rightarrow [c_1]_p = [c_2]_p$. Takođe, i je sirjektivno: neka $v \in \mathbb{R}^n$ i definišimo $c : t \mapsto p + tv$. Tada je $c'(0) = v$.

Neka je sada f: $U \to V$ glatko i posmatramo dijagram:

$$
\begin{array}{ccc}
T_pU & \xrightarrow{T_pf} & T_{f(p)}V \\
\downarrow^{i} & & \downarrow^{i} \\
R^n & \xrightarrow{Df(p)} & R^m
\end{array}
$$

Dijagram komutira jer je:

$$i \circ T_p f([c]_p) = i([f \circ c]_{f(p)}) = (f \circ c)'(0) = Df(p) \cdot c'(0) = Df(p) \circ i([c]_p)$$

Ovim smo dokazali sledeću lemu:

2.3.7 Lema.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *otvoren skup i* $p \in U$. *Tada je preslikavanje dato sa*

$$i: T_pU \to \mathbb{R}^n$$
$$[c]_p \mapsto c'(0)$$

bijekcija, pa se T_pU može identifikovati sa $\mathbb{R}^n$. U terminima ove identifikacije, za glatko preslikavanje f: $U \to V$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, imamo $T_p f = Df(p)$.

Neka je M mnogostrukost, $p \in M$ i (ψ, V) karta oko p. Struktura vektorskog prostora je indukovana na T_pM bijekcijom $T_p\psi$: $T_pM \to T_{\psi(p)}\psi(V) \cong \mathbb{R}^n$.
Na ovaj način, T_pM je snabdeven unutrašnjom strukturom vektorskog prostora. Šta više, ako je preslikavanje f: $M \to N$ glatko, tada je $T_p f$: $T_pM \to T_{f(p)}N$ linearno s obzirom na odgovarajuće strukture vektorskog prostora na T_pM i $T_{f(p)}N$.

Proizvoljna karta od M generiše bazu prostora T_pM: neka je (ψ, V) karta od M oko p i neka je $\psi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$ (x_i se nazivaju koordinatne funkcije od ψ). Označimo sa e_i, $1 \le i \le n$, i-ti jedinični vektor u $\mathbb{R}^n$. Neka je $\psi(p) = 0$. Tada definišemo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p := (T_p\psi)^{-1}(e_i) \in T_pM$$

Preciznije, u smislu 2.3.7 imamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = (T_p\psi)^{-1}([t \mapsto te_i]_0) = [t \mapsto \psi^{-1}(te_i)]_p$$

Dakle, $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ se dobija kao rezultat prenošenja tangentnog vektora koordinatne linije $t \to te_i$ na mnogostrukost pomoću karte ψ. Kako je $T_p\psi$ linearni izomorfizam sledi da $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, ..., \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right\}$ formira bazu prostora T_pM.

Ako je, recimo, M podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i φ lokalna parametrizacija oko p (sa $\varphi(0) = p$), tada je $\psi = \varphi^{-1}$ karta oko p, pa imamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = T_0\varphi(e_i) = (\varphi \circ (t \cdot e_i))'(0) = D\varphi(0)e_i$$

Otuda je $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ i-ta kolona Jacobian-a od φ i $\varphi(0) = p$. Oznaka $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ sugeriše i drugu interpretaciju tangentnih vektora, kao izvoda u pravcu. Zapravo, svaki tangentni vektor može da se posmatra kao izvod u pravcu u sledećem smislu: neka je $v = [c]_p \in T_pM$. Neka $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (ili $C^\infty(M)$ kraće, prostor glatkih funkcija iz M u $\mathbb{R}$). Definišemo

$$\partial_v: C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\partial_v f := T_p f(v) \in \mathbb{R}$$

Koristeći identifikaciju iz 2.3.7 imamo

$$\partial_v(f) = T_p f(v) = T_p f([c]_p) = [f \circ c]_{f(p)} = (f \circ c)'(0) \tag{2.3.1}$$

što odgovara diferenciranju u pravcu v.

Konkretno, za $v = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ imamo (pisaćemo v umesto ∂_v)

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) = (f \circ \psi^{-1}(t \mapsto te_i))'(0) = D_i(f \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \tag{2.3.2}$$

pa $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ odgovara parcijalnom diferenciranju u karti ψ.

Izvod u tački $p \in M$ je linearno preslikavanje $\partial : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava Leibnitz-ovo pravilo:

(i) $\partial(f + \alpha g) = \partial f + \alpha \partial g$ (linearnost)

(ii) $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g$

za sve f, $g \in C^\infty(M)$ i sve $\alpha \in \mathbb{R}$. Vektorski prostor svih izvoda u p se označava sa $\mathrm{Der}_p(C^\infty(M), \mathbb{R})$.

Može se pokazati da je preslikavanje

$$\begin{gathered} A : T_p M \mapsto Der_p(C^\infty(M), \mathbb{R}) \\ v \mapsto \partial_v \end{gathered}$$

linearni izomorfizam.

Zahvaljujući ovom rezultatu možemo da identifikujemo T_pM i $\mathrm{Der}_p(C^\infty(M), \mathbb{R})$. Zapravo, u literaturi je uobičajeno da se T_pM definiše kao $\mathrm{Der}_p(C^\infty(M), \mathbb{R})$. Jedan od razloga za taj prilaz je taj što rad postaje jednostavniji: neka $\partial \in \mathrm{Der}_p(C^\infty(M), \mathbb{R})$, $f \in C^\infty(M)$. Tada je $\partial = \partial_v$, za neko $v \in T_pM$. Otuda

$$T_p f(\partial) = T_p f(\partial_v) \overset{(2.3.1)}{=} \partial_v(f) = \partial(f)$$

pa dobijamo

$$T_p f(\partial) = \partial(f). \tag{2.3.3}$$

Posmatrajmo sada funkciju $f \in C^\infty(M,N)$. Tada je tangentno preslikavanje funkcije f posmatrano kao izvod

$$\begin{gathered} T_p f : Der_p(C^\infty(M), \mathbb{R}) \mapsto Der_{f(p)}(C^\infty(N), \mathbb{R}) \\ \partial \mapsto (g \mapsto \partial(g \circ f)) \end{gathered}$$

Zapravo, iz (2.3.3) sledi da je

$$(T_p f(\partial))(g) \overset{(2.3.3)}{=} T_{f(p)} g(T_p f(\partial)) = T_p(g \circ f)(\partial) \overset{(2.3.3)}{=} \partial(g \circ f)$$

2.3.8 Propozicija.

Neka su M^m, N^n C^∞-mnogostrukosti, $f \in C^\infty(M,N)$, $p \in M$, $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ karta od M oko p, $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ karta od N oko $f(p)$. Tada je matrična reprezentacija linearnog preslikavanja $T_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$ s obzirom na baze $B_{T_pM} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p \right\}$ i $B_{T_{f(p)}N} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_{f(p)} \right\}$ baš Jacobian lokalne reprezentacije $f_{\psi,\varphi} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ funkcije f. Otuda

$$T_p f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) = \sum_{k=1}^{n} D_i(\psi^k \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{f(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^k_{\psi,\varphi}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

2.3.9 Posledica.

Neka je M^m mnogostrukost, $p \in M$, $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ i $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ karte oko p. Tada je

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{k=1}^{n} D_i(\psi^k \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{2.3.4}$$

2.4 TANGENTNO RASLOJENJE. VEKTORSKA POLJA

Vektorsko polje na mnogostrukosti M je preslikavanje koje svakoj tački p mnogostrukosti M pridružuje tangentni vektor iz T_pM. Ali kako pojedinačni tangentni prostori još uvek nisu povezani u mnogostrukost, nedostaje nam pojam glatkosti takvih preslikavanja. Zbog toga uvodimo pojam tangentnog raslojenja koje predstavlja specijalan slučaj vektorskog raslojenja.

2.4.1 Definicija.

Neka je M glatka mnogostrukost. Tangentno raslojenje (ili tangentni prostor) od M definisan je kao disjunktna unija vektorskih prostora T_pM ($p \in M$):

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

Preslikavanje π_M: $TM \to M$, $(p,v) \to p$ naziva se kanonička projekcija. Ako je f: $M \to N$ glatka funkcija, tada je tangentno preslikavanje Tf funkcije f definisano sa

$$Tf\,(p,v) = (f\,(p),\, T_p f\,(v)).$$

Za glatke funkcije f: $M \to N$ i g: $N \to P$ važi $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. Šta više, $T(\mathrm{id}_M)=\mathrm{id}_{TM}$, pa za difeomorfizam f: $M \to N$ imamo $(Tf\,)^{-1} = T\,(f^{-1})$.

Ako je M^n glatka mnogostrukost sa atlasom $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha), \alpha \in A\}$, tada je $\widetilde{A} := \{(T\psi_\alpha, TM|_{V_\alpha}) | \alpha \in A\}$ C^∞-atlas za TM.

2.4.2 Napomene.

(i) Ako je f: $M^m \to N^n$ glatko, tada je i Tf: $TM \to TN$ glatko.

(ii) π_M: $TM \to M$ je glatko. To sledi iz činjenice da je π_M lokalna projekcija: Neka je (ψ, V) karta od M^n, tada

$$\begin{tikzcd} TM|_V \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "T\psi"'] & V \subseteq M \arrow[d, "\psi"] \\ T(\psi(V)) = \psi(V) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

$$\psi \circ \pi_M \circ T\psi^{-1}(x,w) = \psi \circ \pi_M(\psi^{-1}(x), T_x\psi^{-1}(w)) = \psi(\psi^{-1}(x)) = x = pr_1(x,w)$$

Detaljnijim ispitivanjem može se pokazati da TM ima bogatiju strukturu od „čiste“ mnogostrukosti: slike karti $T\psi_\alpha(TV_\alpha) = \psi_\alpha(V_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ su proizvodi otvorenih podskupova od $\mathbb{R}^n$ sa vektorskim prostorima. Promena karti očuvava ovu strukturu pa su one oblika $(x,w) \to (\varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdot w)$, gde je $\varphi_2(x)$ linearna funkcija za svako x. Otuda je TM prvi primer vektorskog raslojenja u smislu sledeće definicije.

2.4.3 Definicija.

(i) Lokalna vektorska raslojenja: Neka su E i F (konačno dimenzionalni, realni) vektorski prostori i $U \subseteq E$ otvoren. Tada se

$$U \times F$$

naziva lokalno vektorsko raslojenje sa bazom U. U se identifikuje sa $U\times\{0\}$. Za $u\in U$, $\{u\}\times F$ se naziva vlakno nad u. Vlakno je snabdeveno strukturom vektorskog prostora od F. Preslikavanje

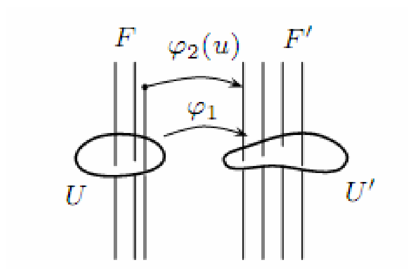
$$\pi : U\times F\to U, (u, f) \mapsto u$$

se naziva projekcija od $U\times F$. Tada je vlakno nad u baš $\pi^{-1}(u)$.

Preslikavanje φ: $U\times F\to U'\times F'$ lokalnih vektorskih raslojenja se naziva homomorfizam lokalnih vektorskih raslojenja (resp. izomorfizam LVR) ako je φ glatko (resp. difeomorfizam) i ima oblik

$$\varphi (u, f)=(\varphi_1 (u), \varphi_2(u)\cdot f)$$

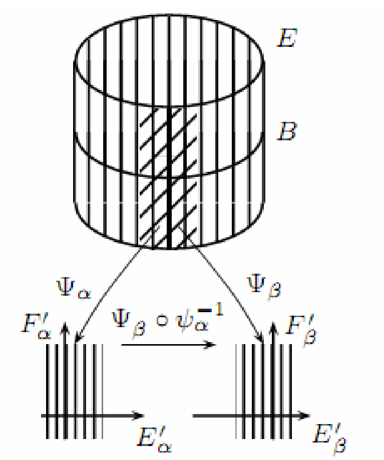
gde je $\varphi_2(u)$ linearno (resp. linearni izomorfizam) iz F u (resp. na) F' za svako $u\in U$.



(*ii*) *Vektorska raslojenja: Neka je E skup. Lokalna karta vektorskog raslojenja (skraćeno VR-karta) od E je par (Ψ,W), gde je $W\subseteq E$ i Ψ: $W\to W'\times F'$ je bijekcija na lokalno VR $W'\times F'$ (W' i F' zavise od Ψ). Atlas VR je familija $\mathcal{A}=\{(\Psi_\alpha,W_\alpha), \alpha\in A\}$ lokalnih VR-karti takvih da W_α prekrivaju E i da su svake dve VR-karte (Ψ_α,W_α) i (Ψ_β,W_β) iz A sa $W_\alpha\cap W_\beta\neq 0$ kompatibilne u smislu da je*

$$\Psi_\beta\circ\Psi_\alpha^{-1}:\Psi_\alpha(W_\alpha\cap W_\beta)\to\Psi_\beta(W_\alpha\cap W_\beta)$$

lokalni VR-izomorfizam i da su $\Psi_\alpha(W_\alpha\cap W_\beta)$ i $\Psi_\beta(W_\alpha\cap W_\beta)$ lokalna VR.



Dva VR-atlasa $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ su ekvivalentna ako je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ponovo VR-atlas. VR-struktura v je klasa ekvivalencije VR-atlasa. Vektorsko raslojenje (VR) je skup E zajedno sa VR-strukturom. Kako je svaki VR-atlas istovremeno i C^∞-atlas, E je automatski i C^∞-mnogostrukost. Ponovo, zahtevaćemo da je topologija mnogostrukosti od E Hausdorff-ova i da zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

U svakom vektorskom raslojenju E postoji podskup B, koji se naziva baza od E:

$$B := \left\{ e \in E \middle| \exists VR - karta(\Psi, W) takva\, da\, je\, e = \Psi^{-1}(w', 0)\, za\, neko\, w' \in W' \right\}$$

Postoji dobro definisana projekcija π: $E \to B$: neka $e \in E$, Ψ_α VR-karta oko e i $\Psi_\alpha(e)=(w',f')$,(Ψ_α:$W \to W' \times F'$). Tada neka je

$$\pi(e) := \Psi_\alpha^{-1}(w',0).$$

Može se pokazati da je π glatko preslikavanje. Za $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ se naziva vlakno nad b. Ono ima strukturu vektorskog prostora indukovanu VR-kartama.

Za otvoren skup U $\subseteq$ B, neka je

$$E\big|_U := \bigcup_{b \in U} \{b\} \times E_b$$

gde je $E_b := \pi^{-1}(b)$ vlakno nad b.
Vektorska raslojenja mogu da se opišu i na drugi način, koji se često koristi kao definicija:
Vektorsko raslojenje je trojka (E,B,π) koja se sastoji iz dve C^∞- mnogostrukosti E i B, a $\pi : E \to B$ je glatka sirjekcija takva da za svako $b \in B$ važi:

- vlakno $\pi^{-1}(b) =: E_b$ je vektorski prostor
- postoji otvorena okolina V od b u B i difeomorfizam $\Psi : W := \pi^{-1}(v) \to V \times F'$, koji je linearan u vlaknima (tj. $\Psi\big|_{\pi^{-1}(b)}$ je linearno, $\forall b \in V$) i takav da sledeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\Psi} & V \times F' \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ V & \xrightarrow{\mathrm{id}} & V \end{array}$$

(u našem slučaju je $\widetilde{\Psi} := ((\Psi|_B)^{-1} \times \mathrm{id}_{F'}) \circ \Psi$).

Iz prethodnog proizilazi da je tangentno raslojenje (TM, M, π_M) vektorsko raslojenje sa bazom M.

Nakon ovog razjašnjenja strukture od TM vraćamo se našem polaznom zadatku definisanja vektorskih polja na mnogostrukostima. Dakle, tražimo preslikavanja koja glatko pridružuju svakom $p \in M$ elemenat $X_p = X(p)$ iz T_pM.

2.4.4 Definicija.

Neka je (E,B,π) vektorsko raslojenje. Preslikavanje $X : B \to E$ se naziva sečenje od E (preciznije od $\pi : E \to B$), ako je $\pi \circ X = id_B$.
Skup svih glatkih sečenja od E se označava sa $\Gamma(B,E)$ (ili $\Gamma(E)$).

Dakle, vektorsko polje je sečenje od TM ($\pi(X_p) = p$, $\forall p \in M$). Ako je (Ψ, V), $\Psi = (x^1, ..., x^n)$ karta od M, tada se za svako $p \in V$ vektori $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ formiraju bazu od T_pM. Kako $X_p \in T_pM$, sledi da za svako p postoji jedinstveno definisani $X^i(p) \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

što se naziva lokalnom reprezentacijom X na V.

2.4.5 Propozicija.

Neka je X vektorsko polje mnogostrukosti M. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $X : M \to TM$ *je glatko, tj.* $X \in \Gamma(TM)$

(ii) *za svako* $f \in C^\infty(M)$, $p \mapsto X_p(f) : M \to \mathbb{R}$ *je glatko*

(iii) *za svaku kartu (Ψ, V) od M, $\Psi = (x^1, ..., x^n)$, u lokalnoj reprezentaciji ćemo imati*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

$$X^i \in C^\infty(V,\mathbb{R}), \text{ za sve } i = 1,2,\dots,n.$$

Prostor glatkih vektorskih polja na M se označava se sa $\mathcal{X}(M)$.

2.4.6 Primeri.

(i) Vektorska polja na $\mathbb{R}^n$

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Znamo: vektorsko polje je C^∞ funkcija $X : U \to \mathbb{R}^n$, $X(p) = (X^1(p),\dots,X^n(p)) = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)e_i$.

Kako se to uklapa u definicije koje smo upravo dali za mnogostrukost?

U je mnogostrukost sa jednom kartom $\Psi = id_U$ i odgovarajućim atlasom $\mathcal{A} = \{(id_U, U)\}$. Iz 2.3.7 sledi da je $T_p\Psi = D\Psi(p) = id$, pa je $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = (T_p\Psi)^{-1}(e_i) = (e_i)$.

Kao izvod, $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ deluje na sledeći način:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f) = D_i(f\circ id^{-1})(id(p)) = D_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Otuda $X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p)e_i$, resp. $X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ odgovara vektorskom polju posmatranom kao vektor, resp. kao diferencijalni operator (izvod u pravcu $(X^1(p), \dots, X^n(p))$.

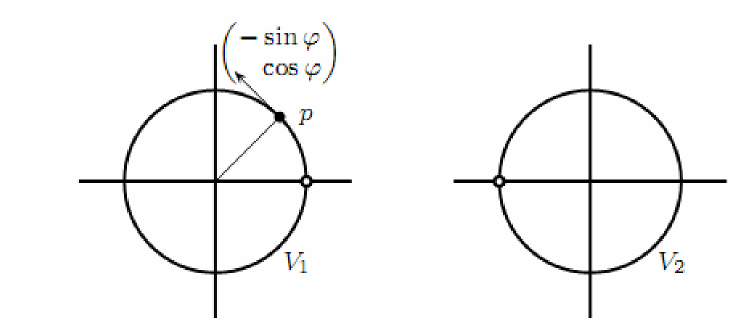
(ii) Neka je $M = S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

$V_1 = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid \varphi \in (0,2\pi)\}$ $\qquad \psi_1 : V_1 \to (0, 2\pi)$

$\qquad (\cos\varphi, \sin\varphi) \to \varphi$

$V_2 = \{(\cos\tilde{\varphi}, \sin\tilde{\varphi}) \mid \tilde{\varphi} \in(-\pi, \pi)\}$ $\qquad \psi_2 : V_2 \to (-\pi,\pi)$

$\qquad (\cos\tilde{\varphi}, \sin\tilde{\varphi}) \to \tilde{\varphi}$



Vektorsko polje $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ je, s obzirom na kartu ψ_1, u $p = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ dato sa

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right|_p = (T_p\psi_1)^{-1}(e_1) = T_\varphi\psi_1^{-1}(1) = D\psi_1^{-1}(\varphi)\cdot 1 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Analogno, s obzirom na kartu ψ_2 dobijamo (u $p = (\cos\widetilde{\varphi}, \sin\widetilde{\varphi})$)

$$\left.\frac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}}\right|_p = \begin{pmatrix} -\sin\widetilde{\varphi} \\ \cos\widetilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

Sledi da na $V_1 \cap V_2$ imamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right|_p = \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\varphi}\left.\frac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}}\right|_p$$

i

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\varphi} = D(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(\psi_1(p)) = 1$$

jer je

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \varphi \mapsto \left\{ \begin{array}{c|c} \varphi & \varphi \in (0,\pi) \\ \varphi - 2\pi & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{array} \right\}$$

Dakle, $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}}$ na $V_1 \cap V_2$, pa zaključujemo da je

$$X := \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & nad\ V_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial\widetilde{\varphi}} & nad\ V_2 \end{array} \right\}$$

dobro definisano vektorsko polje na S^1. Često ćemo pisati samo $X = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

Neka je $f : S^1 \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Iz (2.3.1) sledi

$$(Xf)(p) = \left.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right|_p (f) = D(f \circ \psi_1^{-1})(\psi_1(p)) = \frac{\partial}{\partial\varphi} f(\cos\varphi, \sin\varphi) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\varphi, \sin\varphi)\cdot(-\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos\varphi, \sin\varphi)\cdot\cos\varphi =$$

$$= (-\sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial y}) f.$$

Sledi da je $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ = -sinφ $\frac{\partial}{\partial x}$ + cos$\varphi$$\frac{\partial}{\partial y}$ reprezentacija u bazi $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\} \cong \{e_1, e_2\}$ od $\mathbb{R}^2$.

Kao posledicu, imamo da je X izvod u sledećem smislu:

$\mathbb{R}$ - linearno preslikavanje $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ se naziva izvod algebre $C^\infty(M)$ ako zadovoljava

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f).$$

Prostor svih izvoda na $C^\infty(M)$ se označava sa $Der(C^\infty(M))$.

Izvodi na $C^\infty(M)$ su upravo glatka vektorska polja na M, tj. $Der(C^\infty(M)) = \mathcal{X}(M)$. Preciznije, svako glatko vektorsko polje je izvod na $C^\infty(M)$ i obrnuto, svaki izvod na $C^\infty(M)$ je dat kao dejstvo glatkog vektorskog polja.

- Napomena: Neka je M k-dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$. Tada je $\mathcal{X}(M) = \{X : M \to \mathbb{R}^n \mid X \text{ je klase } C^\infty \text{ i } X_p \in T_pM \ \forall p \in M\}$

2.4.7 Definicija.

Neka je $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Lie-eva zagrada vektorskih polja X i Y je definisana kao

$$[X,Y](f) := X(Yf) - Y(Xf) \qquad (f \in C^\infty(M))$$

Sledi da je $[X,Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ linearno i zadovoljava Leibnitz-ovo pravilo, pa je $[X,Y] \in \mathcal{X}(M)$.

Osobine Lie-eve yagrade su sledeće:
Neka $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada

(i) $(X,Y) \to [X,Y]$ je $\mathbb{R}$ -bilinearno
(ii) $[X,Y] = -[Y,X]$ (tj. [,] je anti-simetrično)
(iii) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z[X,Y]] = 0$ (Jacobi-jev identitet)
(iv) $[fX, gY] = f \cdot g\,[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.
(v) [,] je lokalna : Ako je V otvoren skup u M, tada je $[X,Y]|_V = [X|_V, Y|_V]$
(vi) lokalna reprezentacija : Ako je (Ψ,V) karta, $\Psi = (x_1, ..., x_n)$,

$$X|_V = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ Y|_V = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ \text{tada je}$$

$$[X,Y]_V = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k})\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

2.5 TENZORI

Pojam tenzora je veoma značajan u matematici i fizici. Uveden je kako bi proširio pojam skalara, vektora i matrica. Postoji nekoliko različitih pristupa za definisanje tenzora. Mi ćemo to učiniti putem multilinearnih preslikavanja. U nastavku će E_1, ..., E_k, E, F označavati konačno-dimenzionalne vektorske prostore. Označimo sa L^k (E_1, ..., E_k , F) prostor multilinearnih preslikavanja iz $E_1 \times ... \times E_k$ u F. Važan specijalan slučaj je ($k = 1$) : $L(E; \mathbb{R}) = E^*$, dual prostora E, tj. vektorski prostor linearnih funkcionela na E. Ako je $B_E = \{e_1, ..., e_n\}$ baza od E, tada funkcionele definisane sa

$$\alpha^j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{Bmatrix}$$

formiraju bazu od E^*, dualnu bazu od B_E.

Za svako $e \in E$ imamo reprezentaciju $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(e)e_i$ i za svako $\alpha \in E^*$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i)\alpha^i$

Bidualni prostor $E^{**} = (E^*)^*$ je kanonički izomorfan sa E.
Preslikavanje

$$i : E \to E^{**}$$

$$i(e) = \underbrace{\alpha}_{\in E^*} \mapsto \alpha(e)$$

je linearan izomorfizam.

2.5.1 Definicija.

Neka je E vektorski prostor. Tada se

$$T_s^r(E) := L^{r+s}(\underbrace{E^*,...,E^*}_{r},\underbrace{E,...,E}_{s}; \mathbb{R})$$

naziva prostor r puta kontra i s puta kovarijantnih tenzora, ili kraće $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$*-tenzora.*

Elementi iz T_s^r *(E) se nazivaju tenzori tipa* $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$.

Za $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}$ *(E) i* $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}$ *(E) tenzorski proizvod* $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}$ *(E) je definisan sa*

$$t_1 \otimes t_2(\beta^1,...,\beta^{r_1},\gamma^1,...,\gamma^{r_2},f_1,...,f_{s_1},g_1,...,g_{s_2})$$
$$:= t_1(\beta^1,...,\beta^{r_1},f_1,...,f_{s_1})\cdot t_2(\gamma^1,...,\gamma^{r_2},g_1,...,g_{s_2})$$

gde je $\beta^j,\gamma^j \in E^*, f_j, g_j \in E$.

Jasno je da je $\otimes$ asocijativno i bilinearno.

2.5.2 Primeri.

(i) Po definiciji je $T_1^o(E) = L(E, \mathbb{R}) = E^*$
$T_1^o(E) = L(E^*, \mathbb{R}) = E^{**} = \mathrm{E}$

pa su elementi (vektori) iz E $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ - tenzori, a elementi (ili kovektori) iz E* $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ - tenzori.

(ii) Neka je E vektorski prostor sa skalarnim proizvodom g $(e, f) = < e, f >$. Tada je bilinearno preslikavanje $g : E \times E \to \mathbb{R}$, tj. g je $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ - tenzor.

Pretpostavimo sada da je dim(E) = n. Tada je dim($T_s^r(E)$)=n^{r+s}. Ako je $\{e_1, ..., e_n\}$ baza od E, a $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ baza dualnog prostora E^*, tada je

$$\beta_s^r := \left\{ e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes ... \otimes \alpha^{j_s} \middle| 1 \le i_k, j_k \le n \right\}$$

baza od $T_s^r(E)$.

Za svako linearno preslikavanje φ: $E \to F$ postoji adjungovano preslikavanje $\varphi^* \in L(F^*, E^*)$: za $\beta \in F^*$, $e \in E$ stavimo

$$\varphi^*(\beta)(e) := \beta(\varphi(e)).$$

Ako je A matrica preslikavanja φ s obzirom na baze od E, resp. F, tada je A^t matrica od φ^* s obzirom na odgovarajuće dualne baze od F^*, resp. E^*.
Opštije, želimo da svakom linearnom preslikavanju $\varphi \in L(E,F)$ pridružimo linearno preslikavanje $\varphi_s^r \in L(T_s^r(E), T_s^r(F))$. Ako je φ linearni izomorfizam, takvo preslikavanje se dobija kombinacijom φ i φ^*.

2.5.3 Definicija.

Neka je $\varphi \in L(E,F)$ *bijekcija. Tada je* $T_s^r(\varphi) \equiv \varphi_s^r \in L(T_s^r(E), T_s^r(F))$ *definisano sa*

$$(\varphi_s^r(t))(\beta^1,...,\beta^r,f_1,...,f_s) := t(\varphi^*(\beta^1),...,\varphi^*(\beta^r),\varphi^{-1}(f_1),...,\varphi^{-1}(f_s))$$

gde je $t \in T_s^r(E)$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in F^*$, $f_1, \ldots, f_s \in F$.

2.5.4 Primer.

$\varphi_0^1 : E = T_0^1(E) \to T_0^1(F) = F$, $\varphi_0^1(e)(\beta) = e(\varphi^*(\beta)) = \varphi(e)(\beta)$, pa se φ_0^1 može identifikovati sa φ.
$\varphi_0^1 : E^* = T_1^0(E) \to T_1^0(F) = F^*, \varphi_1^0(\alpha)(f) = \alpha(\varphi^{-1}(f)) = (\varphi^{-1})^*(\alpha)(f)$, pa se φ_1^0 može identifikovati sa $(\varphi^{-1})^*$.
Dakle, $T_s^r\varphi = \varphi_s^r$ je istovremeno produženje funkcija φ i $(\varphi^{-1})^*$ na uopštene tenzorske prostore.

Sledeći zadatak je da se ove konstrukcije prošire na tangentne vektore, tj. na elemente vektorskih raslojenja. Prvo posmatramo slučaj lokalnih vektorskih raslojenja.

2.5.5 Definicija.

Neka je φ*:* $U \times F \to U' \times F'$, $\varphi(u,f) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) \cdot f)$ *lokalni VR-izomorfizam. Definišemo* $\varphi_s^r : U \times T_s^r F \to U' \times T_s^r F'$ *na sledeći način*

$$\varphi_s^r(u,t) = (\varphi_1(u), (\varphi_2(u))_s^r(t)),\ t \in T_s^r(F)$$

Primetimo da je φ_2(u) izomorfizam za svako *u*, pa je $(\varphi_2(u))_s^r$ dobro definisano.

Preslikavanje $\varphi_s^r : U \times T_s^r F \to U' \times T_s^r F'$ definisano u 2.5.5 je lokalni VR-izomorfizam.

Nakon ovih priprema, možemo svakom vektorskom raslojenju *E* pridružiti odgovarajuće $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ tenzorsko raslojenje, čija su vlakna baš $(E_b)_s^r$.

2.5.6 Definicija.

Neka je (E,B,π) *vektorsko raslojenje sa vlaknima* $E_b = \pi^{-1}(b)$*. Definišemo*

$$T_s^r(E) := \coprod_{b \in B} T_s^r(E_b) = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times (E_b)_s^r$$

$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ *tenzorsko raslojenje (TR) na E. Neka* $\pi_s^r : T_s^r(E) \to B$, $\pi_s^r(e) = b$, *za* $e \in T_s^r(E_b)$, *označava kanoničku projekciju. Ako je* $A \subseteq B$*, definišemo* $T_s^r(E)\big|_A := \coprod_{b \in A} T_s^r(E_b)$.

Sledeći zadatak je da pokažemo da $T_s^r(E)$ ima strukturu vektorskog raslojenja sa bazom B. Koristeći sledeću definiciju, definisaćemo VR-karte za $T_s^r(E)$ od VR-karti od E.

2.5.7 Definicija.

Neka su E, E' vektorska raslojenja i f: E→ E'. f se naziva VR homomorfizam ako $\forall e\in E$ $\exists$ *VR-karta* (Ψ, W) *oko e i* $\exists$ *VR-karta* (Ψ', W') *oko f(e) tako da je* $f(W)\subseteq W'$ *i* $f_{\Psi',\Psi}:=\Psi'\circ f\circ \Psi^{-1}$ *je LVR homomorfizam. Ako je f difeomorfizam i* $f\big|_{E_b}: E_b \to E'_{f(b)}$ *linearni izomorfizam* $\forall b\in B$*, tada se f naziva VR izomorfizam. U tom slučaju definišemo*

$$f_s^r : T_s^r E \to T_s^r E'$$
$$f_s^r\Big|_{T_s^r(E_b)} := (f\big|_{E_b})_s^r, \forall b\in B$$

Može se pokazati da je glatka funkcija f: $E\to E'$ VR homomorfizam ako i samo ako je f linearno u vlaknima, tj. ako i samo ako je $f\big|_{E_b}: E_b \to E'_{f(b)}$ linearno za $\forall b\in B$.

2.5.8 Primeri.

(i) Neka su M i N mnogostrukosti i f: $M\to N$ glatko. Tada je Tf: $TM\to TN$ VR-homomorfizam, imamo

$$T\psi\circ Tf\circ T\varphi^{-1}(x,w)=T(\psi\circ f\circ \varphi^{-1})(x,w)=(\psi\circ f\circ \varphi^{-1}(x),D(\psi\circ f\circ \varphi^{-1})(x)w).$$

Ako je f difeomorfizam, tada je Tf VR izomorfizam.

(ii) Neka je E VR i (Ψ,W) VR-karta. Tada je Ψ: $W\to U\times\mathbb{R}^n$ VR izomorfizam. Dakle, ako je $E=TM$ imamo da je $\Psi= T\psi$ VR izomorfizam, gde je ψ proizvoljna karta od M.

Neka je (E,B,π) vektorsko raslojenje sa VR-atlasom $\mathcal{A}=\{(\Psi_\alpha,W_\alpha)|\alpha\in A\}$. Tada je $(T_s^r E, B, \pi_s^r)$ vektorsko raslojenje sa VR-atlasom $A_s^r=\left\{\left((\Psi_\alpha)_s^r, \left(T_s^r E\right)\big|_{W_\alpha\cap B}\right)\Big|\alpha\in A\right\}$. $(T_s^r E, B, \pi_s^r)$ se naziva tenzorsko raslojenje tipa $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ nad E.

2.5.9 Definicija.

Neka je M mnogostrukost. $T_s^r(M):=T_s^r(TM)$ *se naziva raslojenje r-puta kontra i s-puta kovarijantnih tenzora na M (resp. tenzori tipa* $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$*).* $T^*M:=T_1^0(M)$ *se naziva kotangentno raslojenje od M.*

2.5.10 Definicija.

Glatka sečenja prostora $T_s^r M$ *(tj.glatke funkcije t:* $M \to T_s^r M$, $\pi_s^r \circ t = id_M$ *) nazivaju se* $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$*-tenzori (resp.* $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$*-tenzorska polja) na M. Prostor Γ(M,* $T_s^r M$ *)* $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$*-tenzorskih polja se označava sa* $\tau_s^r(M)$. *Naime,* $\tau_0^1(M) = \mathcal{X}(M)$. *Slično ćemo umesto* $\tau_0^1(M)$ *pisati* $\Omega^1(M)$. *Elementi* $\Omega^1(M)$ *se nazivaju diferencijalne forme reda 1 (ili 1-forme, kovektorska polja).*

Ako $t \in \tau_s^r(M)$ i $f \in C^\infty(M)$, tada je $f\,t$: $p \mapsto f(p)t(p) \in (T_p M)_s^r$ tenzorsko polje na M. To znači da je $\tau_s^r(M)$ sa operacijama +, $f\cdot$ $C^\infty(M)$-modul.

Kao i u slučaju $\tau_0^1(M) = \mathcal{X}(M)$, hoćemo da nađemo lokalnu reprezentaciju tenzorskih polja u kartama. Posmatrajmo prvo još jedan specijalan slučaj $\Omega^1(M) = \tau_1^0(M) = \Gamma(M, T_1^0 M)$, gde je

$$T_1^0 M = \coprod_{p \in M} (T_p M)^* = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times (T_p M)^*$$

VR-karte od $T_1^0 M = T^* M$ su oblika $(T\psi)_1^0 : T_1^0 M\big|_V \to \psi(V) \times (\mathbb{R}^n)_1^0 = \psi(V) \times (\mathbb{R}^n)^*$, gde je (ψ,V) proizvoljna karta od M. Kao i u slučaju $TM = T_0^1 M$, hoćemo da koristimo VR-karte da bismo definisali bazu od $(T_pM)^*$. Podsetimo se da je na taj način dobijena i baza $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, i = 1,2,\dots,n \right\}$ od T_pM, gde su $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = (T_p\,\psi)^{-1}(e_i)$, tj. $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = p \mapsto (T\psi)^{-1}(\psi(p), e_i)$.

U slučaju $T_1^0 M$, označimo sa $\{\alpha^j,\ 1 \le j \le n\}$ dualnu bazu od $\{e_i,\ 1 \le i \le n\}$ u $(\mathbb{R}^n)^*$. Za $p \in V$ familija

$$dx^i\big|_p := \left[(T\psi)_1^0\right]^{-1}(\psi(p), \alpha^i),\ (1 \le i \le n)$$

definiše bazu prostora $(T_pM)^*$. Imamo

$$\begin{aligned} dx^i\big|_p &= \left[(T\psi)_1^0\right]^{-1}\left(\psi(p), \alpha^i\right) = \left(p, \left[(T_p\psi)_1^0\right]^{-1}\left(\alpha^i\right)\right) = \\ &= \left(p, \left(\left((T_p\psi)^{-1}\right)^*\right)^{-1}\left(\alpha^i\right)\right) = \left(p, (T_p\psi)^*\left(\alpha^i\right)\right) \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Kako je $dx^j|_p \in (T_pM)^*$, a $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ možemo primeniti $dx^j|_p$ na $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$:

$$dx^j\Big|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = (T_p\psi)^*(\alpha^j)((T_p\psi)^{-1}(e_i)) = \alpha^j(T_p\psi((T_p\psi)^{-1}(e_i))) = \alpha^j(e_i) = \delta_{ij}$$

pa je $\{dx^j|_p,\ 1 \le j \le n\}$ baš dualna baza za $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, 1 \le i \le n\right\}$ u $(T_pM)^*$.

Drugi način posmatranja dx^i proizilazi iz sledeće definicije.

2.5.11 Definicija.

Neka $f \in C^\infty(M)$. Tada se

$$\begin{aligned} df &: M \to T^*M \\ p &\mapsto T_p f \end{aligned}$$

naziva spoljašnji izvod funkcije f.

2.5.12 Napomene.

(i) $df \in \tau_1^0(M)$.

(ii) Ako $f \in C^\infty(M)$ i $X \in \mathcal{X}(M)$, tada za $\forall p \in M$, $X_p \in T_pM$ i $df|_p \in (T_pM)^*$, preslikavanje $df(X) := p \mapsto df|_p(X_p): M \to \mathbb{R}$ je dobro definisano i važi

$$df\big|_p(X_p) = T_p f(X_p) = X(f)\big|_p$$

Dakle, $df(X) = X(f)$. Takođe, $df(X) \in C^\infty(M)$.

Neka je (ψ, V) karta, $\psi = (x_1, ..., x_n)$. Tada je $d(x^i)$ baš gore definisano dx^i.

Ako je (ψ, V) karta od M, $\psi = (x_1, ..., x_n)$, tada je za svako $p \in M$ $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \middle| 1 \le i \le n\right\}$ baza od T_pM, a $\{dx^j|_p \mid 1 \le j \le n\}$ odgovarajuća baza od T_pM^*. Otuda za proizvoljno $p \in M$

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p \otimes dx^{j_1}\big|_p \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}\big|_p \middle| 1 \le i_k, j_k \le n\right\}$$

je baza prostora $(T_p M)^r_s$. Prema tome, ako je t sečenje od $T^r_s M$ tada postoje jedinstveno određene funkcije $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ na V takve da je

$$t\big|_V = t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \dots dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

(pogledati specijalan slučaj vektorskih polja: $X\big|_V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$). Kao i kod vektorskih polja, postoji karakterizacija glatkosti tenzorskih polja u lokalnim koordinatama.

2.5.13 Propozicija.

Neka je t sečenje od $T^r_s(M)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) *t je glatko, tj. $t \in \tau^r_s(M)$*

(ii) *U svakoj lokalnoj reprezentaciji, svi koeficijenti $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ su glatke funkcije.*

(iii) *$\forall \alpha^1, \dots, \alpha^r \in \Omega^1(M)$, $\forall X_1, \dots, X_s \in \mathcal{X}(M)$ preslikavanje $t(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)$.*

2.6 DIFERENCIJALNE FORME

U ovom poglavlju želimo da proučavamo alternirajuće multilinearne forme, prvo u vektorskim prostorima, a potom i na vektorskim raslojenjima.

2.6.1 Definicija.

(i) *$t \in L^k(E, \mathbb{R})$ se naziva alternirajuće ako važi*
$t(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_k) = -t(f_1, \dots, f_j, \dots, f_i, \dots, f_k)$, $1 \le i \le j \le k$.

(ii) *Neka je E konačno dimenzionalni vektorski prostor.*

$$\Lambda^k E^* := L^k_{alt}(E, \mathbb{R})$$

je prostor svih multilinearnih alternirajućih funkcija iz $E^k = E \times \dots \times E$ u $\mathbb{R}$.

2.6.2 Napomene.

(i) Neka je $S_k := \{\varphi : \{1,..., k\}\to\{1,..., k\} \mid \varphi$ je bijekcija$\}$ grupa permutacija reda k. Tada za $\sigma \in S_k$ i $t \in \Lambda^k E^*$ važi

$$t\,(f_{\sigma(1)}, ..., f_{\sigma(k)}) = sgn\,(\sigma)\; t\,(f_1, ..., f_k)$$

Za σ, $\tau \in S_k$ važi $sgn\,(\sigma \circ \tau) = sgn\,(\sigma) \cdot sgn\,(\tau)$. Kako je S_k grupa, sledi da je za svako $\tau_0 \in S_k$ preslikavanje

$$\tau \mapsto \tau \circ \tau_0 : S_k \to S_k$$

bijekcija.

(ii) Po definiciji uzimamo da je $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$. Šta više,

$$\Lambda^1 E^* = L^1{}_{alt}\,(E, \mathbb{R}) = E^*$$

(iii) $\Lambda^k E^*$ je potprostor od $T_k^0(E)$, prostora svih multilinearnih preslikavanja $E\times...\times E \to \mathbb{R}$.

Preslikavanje

$$\text{Alt} : T_k^0(E) \to T_k^0(E)$$
$$\text{Alt}\,(t)\,(f_1 ,..., f_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma\in Sk} \text{sgn}\,(\sigma)\; t\,(f_{\sigma(1)}, ..., f_{\sigma(k)})$$

se naziva alternator.

2.6.3 Definicija.

Neka $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$. *Spoljašnji (eng. exterior ili wedge) proizvod α i β se definiše kao*

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(k+l)}{k!\,l!} Alt(\alpha \otimes \beta)$$

Za $\alpha \in T_0^0 E = \Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$ *, stavimo* $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \alpha \cdot \beta$.

Osobine spoljašnjeg proizvoda su sledeće:

2.6.4 Propozicija.

Neka $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$ *i* $\gamma \in T_m^0(E)$. *Tada:*

(i) $\alpha \wedge \beta = Alt(\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge Alt(\beta)$

(ii) $\wedge$ *je bilinearno*

(iii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$

(iv) $\wedge$ *je asocijativno,* $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

$\Lambda E^* := \oplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k E^*$ sa operacijama +, λ· i $\wedge$, naziva se spoljašnja algebra (ili Grassmann-ova algebra) od *E*. Takođe, važi $\Lambda^k E^* = \{0\}$ za $k > n$, pa je

$$\Lambda E^* = \oplus_{k=0}^{n} \Lambda^k E^* .$$

Ako je sada $n = \dim(E)$, imamo da je $\dim(\Lambda^k E^*) = \binom{n}{k}$, za $0 \le k \le n$. Za $k > n$, $\Lambda^k E^* = \{0\}$. Prema tome,

$$\dim(\Lambda E^*) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

Ako je $\{e_1, ..., e_n\}$ baza od *E* i $\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ odgovarajuća dualna baza, tada je

$$B := \{\alpha^{i_1} \wedge ... \wedge \alpha^{i_k} | 1 \le i_1 < ... < i_k \le n\}$$

baza od $\Lambda^k E^*$.

Neka je $\dim(E) = n$ i $\varphi \in L(E,E)$. Tada postoji jedinstven broj $det\varphi \in \mathbb{R}$, determinanta od φ, tako da za *pullback* preslikavanje

$$\varphi^* : \Lambda^n E^* \to \Lambda^n E^*$$
$$(\varphi^* \omega)(f_1,..., f_n) := \omega(\varphi(f_1),...,\varphi(f_n))$$

važi $\varphi^* \omega = \det \varphi \cdot \omega$, za sve $\omega \in \Lambda^n E^*$.

2.6.5 Definicija.

Neka je $\varphi \in L(E,F)$, $\alpha \in T_k^0(F)$.

- *Pullback od α pod dejstvom* φ *(pullback od* φ*) je funkcija*
$$\varphi^* : T_k^0(F) \to T_k^0(E)$$
$$\varphi^*(\alpha)(e_1,...,e_k) := \alpha(\varphi(e_1),...,\varphi(e_k)),\ e_1,...,e_k \in E$$

- *Ako je φ bijekcija tada je push-forward*
$$\varphi_* : T_k^0(E) \to T_k^0(F)$$

$$\varphi_* := (\varphi^{-1})^*$$

pa je

$$\varphi_*\alpha(f_1,...,f_k) = \alpha(\varphi^{-1}(f_1),...,\varphi^{-1}(f_k)),\ f_1,...,f_k \in E.$$

Tada je $\varphi_* = \varphi_k^0$.

2.6.6 Definicija.

Neka je $\varphi : U \times F \to U' \times F'$ *lokalni VR-izomorfizam,* $\varphi(u,f)=(\varphi_1(u),\varphi_2(u)\cdot f)$. *Preslikavanje* φ_* *je definisano sa*

$$\varphi_* : U \times \Lambda^k F^* \to U' \times \Lambda^k F'^*$$
$$(u,\omega) \to (\varphi_1(u), \varphi_2(u)_*(\omega))$$

Kako je $\varphi_* = \varphi_k^0$, sledi da je φ_* LVR-izomorfizam.

2.6.7 Definicija.

Neka je (E,B,π) *vektorsko raslojenje,* $E_b=\pi^{-1}(b)$ *vlakno nad* $b \in B$. *Tada*

$$\Lambda^k E^* := \coprod_{b\in B} \Lambda^k E_b^* = \bigcup_{b\in B} \{b\} \times \Lambda^k E_b^*$$

i $\pi_k^0 : \Lambda^k E^* \to B$, $\pi_k^0(e) = b$, *za* $e \in \Lambda^k E_b^*$. *Za* $A \subseteq B$ *stavimo* $\Lambda^k E^*\Big|_A = \coprod_{b\in A} \Lambda^k E_b^*$.

Neka je (E,B,π) VR sa atlasom $\widehat{A} = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha) | \alpha \in A\}$. Tada je $(\Lambda^k E^*, B, \pi_k^0)$ VR sa atlasom $\widetilde{A} = \left\{\left((\Psi_\alpha)_*, \Lambda^k E^*\big|_{W_\alpha \cap B}\right) \middle| \alpha \in A\right\}$, gde je $(\Psi_\alpha)_* = (\Psi_\alpha)_k^0$, tj. $(\Psi_\alpha)_*\big|_{\Lambda^k E_b^*} = \left(\Psi_\alpha\big|_{E_b}\right)_*$.

Ponovo nas najviše zanima slučaj $E = TM$.

2.6.8 Definicija.

Neka je M mnogostrukost. $\Lambda^k T^* M := \Lambda^k (TM)^*$ *se naziva vektorsko raslojenje spoljašnjih k-formi na TM. Prostor glatkih sečenja od* $\Lambda^k T^* M$ *se označava sa* $\Omega^k(M)$ *i njegovi elementi se nazivaju diferencijalne forme reda k ili (spoljašnje) k-forme na M.*

Primetimo da je $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$ i $\Omega^1(M)$ prostor 1-formi.

2.6.9 Teorema.

Neka je M mnogostrukost. Za svaki otvoren skup $U \subseteq M$ *postoji jedinstveno definisana familija preslikavanja*

$$d^k(U) : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$$

koju ćemo označiti sa d, takva da je

(i) *d je* $\mathbb{R}$*-linearno i za* $\alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^l(U)$ *važi*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta .$$

(ii) *Za* $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(M)$, *df je spoljašnji izvod iz 2.5.11.*

(iii) $d \circ d = 0$.

(iv) *Ako su U i V otvoreni,* $U \subseteq V \subseteq M$ *i* $\alpha \in \Omega^k(V)$ *tada je* $d(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$, *tj. dijagram komutira.*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(V) & \xrightarrow{|_U} & \Omega^k(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{k+1(V)} & \xrightarrow{|_U} & \Omega^{k+1(V)} \end{array}$$

d se naziva spoljašnji izvod.

2.6.10 Primeri.

(i) Neka je $\omega = P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 1-forma na $\mathbb{R}^2$. Tada je

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

(ii) Ako je $\omega = P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy$, tada je

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

2.6.11 Definicija.

Neka su M i N mnogostrukosti i F: M→N glatko preslikavanje. Za $\omega \in \tau_k^0(N)$, *pullback od ω pod dejstvom F je definisano sa*

$$F^*\omega(p) := (T_pF)^*(\omega(F(p)))$$

Otuda za $X_1, \ldots, X_k \in T_pM$ imamo

$$F^*\omega(p)(X_1,\ldots,X_k) = \omega(F(p))(T_pF(X_1),\ldots,T_pF(X_k)).$$

Za $f \in C^\infty(N)=\Omega^0(N)$ imamo

$$F^*f = f \circ F\ .$$

Neka su funkcije F: $M \to N$ i G: $N \to P$ glatke. Tada:

(i) $F^* : \tau_k^0(N) \to \tau_k^0(M),\ F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$

(ii) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

(iii) $id_M^* = id_{\Omega^k(M)}$ (resp. $= id_{\tau_k^0(M)}$)

(iv) Ako je F difeomorfizam onda je F^* linearan izomorfizam i $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$.

2.6.12 Teorema.

Neka je funkcija F: M→ N glatka. Tada važi:

(i) *F^* : $\Omega(N) \to \Omega(M)$ je algebarski homomorfizam, tj. F^* je linearno i $F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta)$.*

(ii) *Za svako $\omega \in \Omega(N)$, $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.*

2.6.13 Propozicija.

Neka je M mnogostrukost, $p \in M$, (φ,U), (ψ,V) karte oko p, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$. Tada:

(i) $dx^i\big|_p = \sum_{k=1}^n D_k(\varphi^i \circ \psi^{-1})(\psi(p))dy^k\big|_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\big|_p dy^k\big|_p$

(ii) $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n\big|_p = \det D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(p))dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n\big|_p$

(iii) *Ako $\omega \in \Omega^n(M)$, $\varphi_*\omega = \omega_\varphi \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n$, $\psi_*\omega = \omega_\psi \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n$ ($\alpha^1,\ldots,\alpha^n$) standardna baza od $(\mathbb{R}^n)^*$), tada je*

$$\omega_\psi(y) = \omega_\varphi(\varphi \circ \psi^{-1}(y)) \cdot \det D(\varphi \circ \psi^{-1})(y),\ \ \forall y \in \psi(V)$$

2.7 INTEGRALI. STOKES-OVA TEOREMA

Cilj ovog poglavlja je da se razvije teorija integraljenja diferencijalnih formi na mnogostrukostima. To omogućuje Stokes-ova teorema, koja uopštava sve klasične teoreme integralnog računa (Gauss-ovu, Stokes-ovu, Green-ovu). Mi ćemo dati samo formulaciju teoreme. Kao osnovno sredstvo koristićemo pravilo o smeni promenljivih za integrale.

2.7.1 Teorema.

Neka su $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ *otvoreni,* $\Phi: U\to V$ *difeomorfizam i* $f\in C(V)$ *tako da je* $\operatorname{supp} f$ *kompaktan. Tada je*

$$\int_U f(\Phi(x))\left|\det D\Phi(x)\right|d^n x=\int_V f(y)d^n y$$

Strategija za definisanje $\int_M \omega$ za $\omega\in\Omega_c^n(V)$, gde je Ω_c^n prostor n-formi sa kompaktnim nosačem, a V karta od M, će biti da stavimo da je

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(V)} \omega_\varphi(x)d^n x .$$

Da bi ovo bio dobro definisan izraz potrebno je da ne zavisi od izbora karte. Međutim, ponašanje ω_φ usled transformacije karti u skladu sa 2.6.13(iii). se razlikuje od 2.7.1 jer nema apsolutne vrednosti od $\det D(\varphi\circ\psi^{-1})$. Zbog toga ćemo posmatrati samo mnogostrukosti sa posebnim atlasima.

2.7.2 Definicija.

Mnogostrukost M se naziva orijentabilna ako poseduje orijentisani atlas $\widehat{A}=\{(\psi_\alpha,V_\alpha)|\alpha\in A\}$ *takav da je*

$$\det D(\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1})(x)>0,\ \forall x\in\psi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta),\ \forall\alpha,\beta .$$

Kao i u slučaju glatkih mnogostrukosti, i za orijentisane mnogostrukosti se definiše C^∞*-struktura. Karte iz orijentisanog atlasa se nazivaju pozitivno orijentisane. Mnogostrukost M zajedno sa orijentisanim atlasom se naziva orijentisana mnogostrukost.*

Nije svaka mnogostrukost orijentabilna. Najpoznatiji primer neorijentabilne mnogostrukosti je Möbius-ova traka.

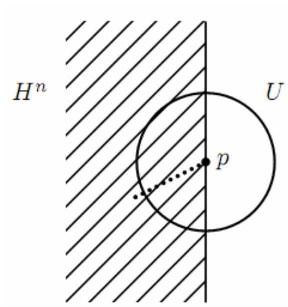
Neka je M orijentisana mnogostrukost, $\omega \in \Omega_c^n(M)$ i (φ,U), (ψ,V) pozitivno orijentisane karte takve da je $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U \cap V$. Tada je:

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{(\psi)} \omega$$

pa možemo pisati samo $\int \omega$.

2.7.3 Definicija.

Neka je poluprostor $H^n = \{(x^1,...,x^n) \in \mathbb{R}^n ,\ x^1 \le 0\}$ *snabdeven indukovanom topologijom od* $\mathbb{R}^n$ *(tj.* $V \subseteq H^n$ *je otvoren ako i samo ako* $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ *otvoren takav da je* $U \cap H^n = V$ *). Neka je* $V \subseteq H^n$ *otvoren. Preslikavanje f:* $V \to \mathbb{R}^m$ *se naziva glatko na V ako postoji otvoreni podskup* $V \subseteq U$ *od* $\mathbb{R}^n$ *i glatko produženje* $\widetilde{f}$ *od f na U. Za proizvoljno* $p \in V$ *uzimamo* $Df(p) := D\widetilde{f}(p)$.



2.7.4 Definicija.

Mnogostrukost sa rubom je skup M zajedno sa atlasom $A = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) | \alpha \in A\}$*, gde su* $\psi_\alpha : V_\alpha \to \psi_\alpha(V_\alpha) \subseteq H^n$ *bijekcije, a* $\psi_\alpha(V_\alpha)$ *(relativno) otvoreni skupovi u* H^n*, tako da* $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = M$ *i za sve α, β sa* $V_\alpha \cap V_\beta \ne 0$ *važi*

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

je glatka funkcija u smislu 2.7.3. Kao i za mnogostrukosti bez ruba tražimo da je prirodna topologija od M (indukovana kartama) Hausdorff-ova i zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

Tačka $p \in M$ se naziva rubna tačka od M ako postoji karta (ψ=(x^1, ..., x^n),V) takva da je $x^1(p)$=0, što označavamo sa $p \in \partial M$. Tada za svaku kartu (φ=(y^1, ..., y^n),U) oko p važi $y^1(p)$=0.

2.7.5 Propozicija.

Neka je M n-dimenzionalna mnogostrukost sa rubom. Tada je ∂M (n-1)-dimenzionalna mnogostrukost (bez ruba). Ako je M orijentisana tada orijentacija od M indukuje orijentaciju od ∂M.

2.7.6 Teorema. (Stokes-ova teorema)

Neka je M orijentisana mnogostrukost sa rubom, $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ i $i : \partial M \to M$. Tada je

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M \omega$$

2.7.7 Primeri.

(i) Primenjujući 2.7.6 na ω iz 2.6.10(i) dobijamo Green-ovu teoremu u ravni

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(ii) Iz 2.6.10(ii) i 2.7.6 izvodi se Gauss-ova teorema o divergenciji (u $\mathbb{R}^3$):

$$\int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \int_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

Glava 3

HIPERPOVRŠI

Hiperpovrši u $\mathbb{R}^n$ predstavljaju uopštenje pojma površi u $\mathbb{R}^3$. Preslikavanja koja ćemo definisati u ovoj glavi, proučavaju se i na površima, ali pojmovi koje smo do sada uveli nam omogućavaju da radimo sa hiperpovršima. Prvo ćemo definisati Gauss-ovo i Weingarten-ovo preslikavanje, a potom odrediti krivinu hiperpovrši. Poslednja dva poglavlja su posvećena kovarijantnom izvodu i geodezijskim linijama. Za više detalja o pomenutim pojmovima, pogledati [3] i [6].

3.1 KRIVINA HIPERPOVRŠI

3.1.1 Definicija.

Hiperpovrš od $\mathbb{R}^n$ *je (n-1) – dimenzionalna podmnogostrukost od* $\mathbb{R}^n$.

Lokalno, hiperpovrš je data jednom od ekvivalentnih definicija u 2.2.4, recimo kao nula skup regularnog preslikavanja *f*: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Kako u $\mathbb{R}^n$ imamo standardni unutrašnji proizvod $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$, svaki tangentni prostor T_pM sadrži 1-dimenzionalni ortogonalni komplement. Tako dobijamo dva jedinična vektora normale na *M*. Pretpostavićemo da je *M* orijentisana mnogostrukost kako bismo bili u mogućnosti da odaberemo jedan od njih.

3.1.2 Lema.

Neka je M^m *orijentisana mnogostrukost i* $p \in M$. *Baza* $\{v^1, ..., v^m\}$ *tangentnog prostora* T_pM *se naziva pozitivno orijentisana ako u proizvoljnoj pozitivno orijentisanoj karti* $\varphi = (x^1,...,x^m)$ *od M oko p imamo:*

$$(dx^1 \wedge ... \wedge dx^m)\big|_p (v^1,...,v^m) > 0$$

Ovaj pojam ne zavisi od izbora karte.

Dokaz. Neka je $\psi = (y^1,..., y^m)$ druga pozitivno orijentisana karta. Na osnovu 2.6.13,

$$\left(dy^1 \wedge ... \wedge dy^m\right)\Big|_p = \underbrace{\det D\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(p)\right)}_{>0} \cdot \left(dx^1 \wedge ... \wedge dx^m\right)\Big|_p ,$$

odakle sledi tvrđenje.

□

3.1.3 Definicija.

Neka je M orijentisana hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$*. Gauss-ovo preslikavanje* $p \mapsto \nu_p$ *dodeljuje svakoj tački* $p \in M$ *jedinični vektor normale* ν_p *za koji važi* $\det(\nu_p, e^i,..., e^{n-1}) > 0$ *za svaku pozitivno orjentisanu bazu* $\{e^i,..., e^{n-1}\}$ *prostora* T_pM*.*

3.1.4 Napomene.

(i) ν_p je dobro definisano:

Neka je $\{f^1,..., f^{n-1}\}$ proizvoljna pozitivno orijentisana baza od T_pM i neka je $\psi = (x^1,..., x^{n-1})$ pozitivno orijentisana karta mnogostrukosti M.

Neka je

$$e^j := \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \qquad \left(1 \le j \le n-1\right)$$

i

$$f^k = \sum_{i_k=1}^{n-1} a_{k i_k} e^{i_k} \quad \left(1 \le k \le n-1\right).$$

Tada

$$1 = \operatorname{sgn}\left(dx^1 \wedge ... \wedge dx^{n-1}\right)\Big|_p \left(f^1,..., f^{n-1}\right)$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\sum_{i_1,..,i_{n-1}} a_{1 i_1} ... a_{(n-1) i_{n-1}} \underbrace{\left(dx^1 \wedge ... \wedge dx^{n-1}\right)\Big|_p \left(e^{i_1},..., e^{i_{n-1}}\right)}_{=\operatorname{sgn}\left(i_1,...,i_{n-1}\right)}\right) \qquad (*)$$

Dakle,

$$\det\left(\nu_p, f^1,..., f^{n-1}\right) = \underbrace{\sum_{i_1,...,i_{n-1}} \operatorname{sgn}\left(i_1,..., i_{n-1}\right) a_{1 i_1} ... a_{(n-1) i_{n-1}}}_{>0 \ \ zbog \ (*)} \det\left(\nu_p, e^1,..., e^{n-1}\right)$$

(ii) Gauss-ovo preslikavanje $p \mapsto \nu_p$ je glatko. Neka je $(\psi = (x^1,...,x^{n-1}), V)$ pozitivno orijentisana karta. Tada je

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p ,..., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\bigg|_p \right\}$$

pozitivno orijentisana baza od T_pM jer je

$$\left(dx^1 \wedge ... \wedge dx^{n-1}\right)\Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p ,..., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\bigg|_p \right) = 1 \qquad \forall p \in V.$$

Lokalno oko proizvoljne tačke $p_0 \in V$, na osnovu 2.2.4 i 2.3.1, M je nula skup regularne funkcije f i za gradijent $grad(f)(p) = Df(p)$ dobijamo

$$\langle grad\ f(p), v \rangle = Df(p)(v) = 0 \qquad \forall v \in T_pM.$$

Dakle, $grad\, f(p) \perp T_pM$ za sve p dovoljno blizu p_0.
Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je

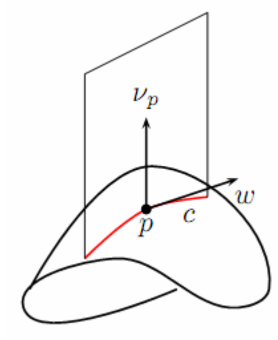
$$\det(grad\ f(p_0), \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{p_0} ,..., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\bigg|_{p_0}) > 0$$

(u suprotnom zamenimo f sa $-f$).
Zbog neprekidnosti, $\det(grad\ f(p), \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p ,..., \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\Big|_p) > 0$ za p iz okoline p_0, na osnovu čega zaključujemo da je lokalno oko p_0, Gausova funkcija data sa

$$\nu_p = \frac{grad\ f(p)}{\|grad\ f(p)\|},$$

što je očigledno glatko.

Da bismo definisali krivinu hiperpovrši M u tački $p \in M$, posmatraćemo krivinu krivih definisanih u glavi 1. Neka je $w \in T_pM$, $\|w\| = 1$.
Posmatramo krivu c koja se nalazi u preseku hiperpovrši M i ravni određenoj vektorima w i ν_p.



Ova ravan je data sa: $(t,s)\mapsto p+t\nu_p+sw$. Krivinu krive c ćemo zvati normalna krivina hiperpovrši M u pravcu w. Neka je M lokalno data kao nula skup regularne funkcije f i podsetimo se da smo pretpostavili da je M orijentisana. Tada je kriva c implicitno data sa:

$$f\left(p+t\nu_p+sw\right)=0 \qquad \forall t,s\,. \tag{$*$}$$

Na osnovu 3.1.4 (ii),

$$\nu_p=\frac{grad\ f(p)}{\left\| grad\ f(p)\right\|}.$$

Dakle,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,s)=(0,0)} f\left(p+t\nu_p+sw\right)=Df(p)\nu_p=\left\langle grad\ f(p),\nu_p\right\rangle\neq 0.$$

Prema tome, lokalno možemo rešiti ($*$) za t koje je funkcija od s. Dobijamo krivu $c:s\mapsto p+t(s)\nu_p+sw$. Tada je $c(0)=p$ i:

$$\underbrace{c'(0)}_{\in T_pM}=\underbrace{t'(0)\cdot\nu_p}_{\in T_pM^{\perp}\Rightarrow=0}+\underbrace{w}_{\in T_pM}=w.$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je s parametrizovana dužinom luka. Da bismo izračunali krivinu krive c, moramo odrediti njen okvir. Kako je $\{\nu_p,w\}$ pozitivno orijentisano, $e_1=c'(0)=w,\quad e_2=-\nu_p$. $\left\langle c'(s),\nu_{c(s)}\right\rangle=0\quad\forall s$, jer je $c'(s)\in T_{c(s)}M$. Zbog toga,

$$0=\left.\frac{d}{ds}\right|_0\left\langle c'(s),\nu\circ c(s)\right\rangle=\left\langle c''(0),\nu_p\right\rangle+\left\langle\underbrace{c'(0)}_{=w},T_p\nu\cdot\underbrace{c'(0)}_{=w}\right\rangle$$

i normalna krivina $k(w)$ hiperpovrši M u pravcu w je data sa:

$$k(w)=k_c(0)=\langle c''(0),e_2\rangle=-\langle c''(0),\nu_p\rangle=\langle w,T_p\nu\cdot w\rangle \tag{3.1.1}$$

3.1.5 Definicija.

Weingarten-ova funkcija L_p je definisana na sledeći način:

$$L_p:=T_p\nu:T_pM\to T_{\nu_p}S^{n-1}=\nu_p^{\perp}=T_pM$$

L_pw je infinitezimalna promena vektora normale ν u pravcu *w*.

Sledeće tvrđenje opisuje vektorska polja na mnogostrukostima i imaće važnu ulogu u nastavku.

3.1.6 Lema.

Neka je M k-dimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$. Tada:

(i) Za proizvoljno $X\in\mathcal{X}(M)$ i $p\in M$, postoji okolina U od p u $\mathbb{R}^n$ i funkcija $\widetilde{X}\in C^\infty(U,\ \mathbb{R}^n)$ tako da

$$\widetilde{X}\big|_{U\cap M}=X\big|_{U\cap M}$$

(ii) Ako X, $Y\in\mathcal{X}(M)$ i $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ su glatka proširenja kao u (i), tada:

$$[X,Y]_p=D\widetilde{Y}(p)\widetilde{X}(p)-D\widetilde{X}(p)(\widetilde{Y}(p)),\ \forall p\in M$$

Dokaz.

(i) Znamo da $X\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$. Zbog 2.2.6 svaka od *n* komponenti od *X* se može glatko proširiti na okolinu tačke *p* u $\mathbb{R}^n$. Tako dobijamo traženo proširenje $\widetilde{X}$ (primetimo da proširenje nije jedinstveno definisano).

(ii) Neka je $\widetilde{f}\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ i $f:=\widetilde{f}\big|_M$, dakle $f\in C^\infty(M,\ \mathbb{R})$. Tada $T_pf=D\widetilde{f}(p)\big|_{T_pM}$.
Prema tome,

$$X(f)(p)=T_pf(X_p)=D\widetilde{f}(p)(\widetilde{X}_p)$$

pa je

$$\begin{aligned}Y\big(X(f)\big)\big|_p&=D(q\mapsto D\tilde{f}(q)(\tilde{X}_q))\big|_p\big(\tilde{Y}_p\big)=\\&=D^2\tilde{f}(p)\big(\tilde{X}_p,\tilde{Y}_p\big)+D\tilde{f}(p)D\tilde{X}(p)\tilde{Y}_p\end{aligned}$$

i analogno za $X(Y(f))$. Kako je $D^2\tilde{f}(p)$ simetrično, zaključujemo:

$$D\tilde{f}(p)\left([X,Y]_p\right)=[X,Y]_p(f)=\left(X\left(Y(f)\right)-Y\left(X(f)\right)\right)_p=$$
$$=D\tilde{f}(p)\left(D\tilde{Y}(p)\tilde{X}(p)-D\tilde{X}(p)\tilde{Y}(p)\right).$$

Za $\tilde{f}=pr_i:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ sledi da je $D\tilde{f}(p)=pr_i$, i otuda

$$[X,Y]_p=D\tilde{Y}(p)\tilde{X}(p)-D\tilde{X}(p)\tilde{Y}(p).$$

□

3.1.7 Propozicija.

Weingarten-ovo preslikavanje $L_p:T_pM\to T_pM$ *je simetrično, tj.*

$$\left\langle L_p u,w\right\rangle=\left\langle u,L_p w\right\rangle \qquad \forall u,w\in T_pM$$

Dokaz. Izaberimo $X,Y\in \mathcal{X}(M)$, tako da $X_p=u$, $Y_p=w$ i glatka proširenja kao u 3.1.6 (i). Da bismo proširili ν na okolinu tačke p u $\mathbb{R}^n$, primetimo da je ν lokalno dato sa:

$$\nu_p=\frac{grad\ f(p)}{\left\|grad\ f(p)\right\|},$$

gde je $f=0$ lokalna reprezentacija M regularnim preslikavanjem. Dakle, ν je C^∞-preslikavanje sa M na $\mathbb{R}^n$ koje se lokalno može proširiti na okolinu tačke p u $\mathbb{R}^n$ na osnovu 2.2.6. Označimo pomenuto proširenje sa $\tilde{\nu}$. Tada je $T_p\nu=D\tilde{\nu}(p)\big|_{T_pM}$.

Kako je $q\mapsto\left\langle X_q,\nu_q\right\rangle\equiv 0$ sledi $T_p\left(q\mapsto\left\langle X_q,\nu_q\right\rangle\right)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0=T_p\left(q\mapsto\left\langle X_q,\nu_q\right\rangle\right)Y_p=D\left(q\mapsto\left\langle \tilde{X}_q,\tilde{\nu}_q\right\rangle\right)\tilde{Y}_p$$
$$=\left\langle D\tilde{X}(p)\tilde{Y}_p,\tilde{\nu}_p\right\rangle+\left\langle \underbrace{\tilde{X}_p}_{=X_p},\underbrace{D\tilde{\nu}(p)}_{=L_p}\underbrace{\tilde{Y}_p}_{Y_p}\right\rangle$$

i analogno za $q\mapsto\left\langle Y_q,\nu_q\right\rangle$. Dakle, dobijamo:

$$\left\langle X_p, L_p Y_p \right\rangle - \left\langle L_p X_p, Y_p \right\rangle = \left\langle \underbrace{D\tilde{Y}(p)\tilde{X}(p) - D\tilde{X}(p)\tilde{Y}(p)}_{\overset{3.1.6(ii)}{=} [X,Y]_p \in T_pM}, \underbrace{\nu_p}_{\in T_pM^{\perp}} \right\rangle = 0$$

□

3.1.8 Definicija.

Neka je M orijentisana hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$.

(i) *Riemann-ova metrika g, ili prva fundamentalna forma I, je* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *- tenzorsko polje*

$$T_pM \times T_pM \ni (v,w) \mapsto g_p(v,w) := \langle v,w \rangle = (I_p(v,w))$$

(ii) *Druga fundamentalna forma II je* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *- tenzorsko polje*

$$T_pM \times T_pM \ni (v,w) \mapsto II_p(v,w) := \langle v, L_p w \rangle$$

3.1.9 Napomene.

(i) g je sečenje raslojenja $T_2^0(M)$ jer je svako g_p bilinearno preslikavanje iz $T_pM \times T_pM$ na $\mathbb{R}$ tj. $g_p \in T_2^0(T_pM)$ za sve $p \in M$. Šta više, na osnovu 2.5.13, g je glatko.

Zaista, neka su X,Y$\in \mathcal{X}(M)$ tj. X,Y: M$\to\mathbb{R}^n$ C^∞, $X_p, Y_p \in T_pM$ $\forall p$. Tada je $p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle = g_p(X_p, Y_p)$ glatko.

g_p je upravo restrikcija standardnog unutrašnjeg proizvoda $\langle , \rangle$ u $\mathbb{R}^n$ na $T_pM \times T_pM$. Omogućava nam da izračunamo rastojanja i uglove u T_pM.

Ako je φ lokalna parametrizacija od M oko p i $\varphi^{-1} = (x^1, ..., x^{n-1})$ tada je lokalno, g oblika:

$$g(p) = g_{ij}(p) dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p \tag{3.1.2}$$

gde je

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right)$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right\rangle$$

$$= \left\langle \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\left(\varphi^{-1}(p)\right)}_{D_i\varphi\left(\varphi^{-1}(p)\right)}, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\left(\varphi^{-1}(p)\right)}_{D_j\varphi\left(\varphi^{-1}(p)\right)} \right\rangle \tag{3.1.3.}$$

Kako je g simetrično, $g_{ij} = g_{ij}$, $\forall i, j$.

(ii) Za svako $p \in M$, druga fundamentalna forma II_p je simetrično bilinearno preslikavanje $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, dakle II je sečenje od $T_2^0 M$. Na osnovu 2.5.13, ovo preslikavanje je glatko.

(iii) U klasičnoj diferencijalnoj geometriji površi u $\mathbb{R}^3$, važan specijalan slučaj od (i) je sledeći:

$$\varphi : (t, s) \mapsto (\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s), \varphi_3(t, s))$$

Neka je: $E := \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle$, $F := \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle$, $G := \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle$, gde su φ_s, φ_t parcijalni izvodi od φ.
Tada je g dato matricom:

$$[I] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

u odnosu na bazu $\{\varphi_t, \varphi_s\}$ od $T_{\varphi(t,s)}M$. Ako su $v = v_1 \cdot \varphi_t + v_2 \cdot \varphi_s$, $w = w_1\varphi_t + w_2\varphi_s$ vektori u $T_{\phi(t,s)}M$, onda:

$$\begin{aligned} g_{\varphi(t,s)}(v, w) &= (Edt \otimes dt + Fdt \otimes ds + Fds \otimes dt + Gds \otimes ds) \\ &\quad \left(v_1 \frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{\partial}{\partial s}, w \frac{\partial}{\partial t} + w_2 \frac{\partial}{\partial s} \right) \\ &= Ev_1w_1 + Fv_1w_2 + Fv_2w_1 + Gv_2w_2 \\ &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.1.10 Primer.

Neka je $M = S^1 \times \mathbb{R}$ cilindar nad jediničnim krugom. Parametrizacija od M je data sa

$$\varphi\colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$\varphi(t, s) = (\cos t, \sin t, s)$$

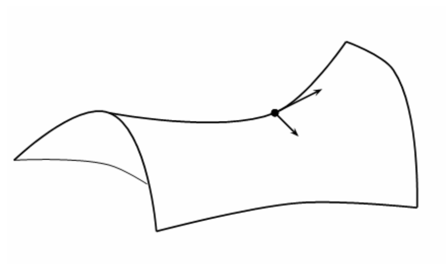
Tada je

$$\varphi_t = (-\sin t, \cos t, 0),\ \varphi_s = (0,0,1)$$
$$\Rightarrow E = 1,\ F = 0,\ G = 1.$$

Dakle,

$$[I]_{\varphi(t,s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sada se vraćamo problemu određivanja krivine hiperpovrši. Želimo da nađemo pravce u kojima normalna krivina ima ekstremne vrednosti.



Iz (3.1.1) sledi da tražimo kritične tačke preslikavanja $w \mapsto \langle w, L_p w \rangle = k(w)$ za $w \in S^{n-1}$.

3.1.11 Teorema. (Rodriguez)

Kritične tačke normalne krivine u $p \in M$ su upravo sopstveni vektori simetričnog linearnog preslikavanja L_p. Ako je w sopstveni vektor, tada je odgovarajuća sopstvena vrednost λ data sa k(w).

Dokaz. Neka je $w \in T_p M$ i $\|w\| = 1$. w je kritična tačka preslikavanja k ako i samo ako preslikavanje $v \mapsto k(v) : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ima kritičnu tačku u w. Ovo ćemo dokazati koristeći Lagranžov metod multiplikatora.
Neka je $g : v \mapsto \langle v, v \rangle - 1$. Naš problem se svodi na traženje ekstrema od k na $\{g = 0\}$.
Dakle, $Dk(w) = \lambda Dg(w)$ mora biti zadovoljeno za neki Lagranžov multiplikator λ (na $\{g = 0\}$). Na osnovu (3.1.1) i (3.1.7)

$$Dk(w)(v) = \langle v, L_p w \rangle + \langle w, L_p v \rangle = 2\langle v, L_p w \rangle$$

i

$$Dg(w)(v) = 2\langle v, w \rangle$$

Sledi da jednačina $2\langle v, L_p w \rangle = 2\lambda \langle v, w \rangle$ mora važiti za sve v tj.

$$L_p w = \lambda w \quad i \quad g(w) = 0 \ \ (\Leftrightarrow \|w\| = 1)$$

Prema tome, $w \in S^{n-1}$ je kritična tačka preslikavanja ako i samo ako je w sopstveni vektor od L_p. Šta više,

$$\lambda = \lambda(w,w) = \langle w, L_p w \rangle = k(w)$$

□

3.1.12 Definicija.

Neka je M hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$ *i* $p \in M$. *Sopstvene vrednosti od* L_p *se nazivaju glavne krivine, a odgovarajući sopstveni vektori se nazivaju pravci glavnih krivina. Kako je* L_p *simetrično, sve glavne krivine su realne i postoji ortonormirana baza od* T_pM $\{w_i \mid 1 \le i \le n-1\}$ *koja se sastoji od pravaca glavnih krivina. Krivu c zovemo linijom krivine ako je* $c'(t)$ *pravac glavne krivine za svako t. Gauss-ova krivina K od M je definisana kao proizvod glavnih krivina tj.*

$$K = \prod_{i=1}^{n-1} K_i$$

Srednja krivina hiperpovrši M u p je aritmetička sredina glavnih krivina tj. $\frac{1}{n-1} tr(L_p)$ *gde je* $tr(L_p)$ *trag preslikavanja* L_p. *Tačka p se naziva umbilička ako se sve glavne krivine poklapaju u p tj. ako je*

$$L_p = \lambda \circ id_{T_pM}$$

Umbilička tačka se naziva planarna tačka, ako je $\lambda = 0$, *tj.* $L_p = 0$.

3.1.13 Primeri.

(i) Neka je $M = \nu^{\perp}$ hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$. Tada je $\nu_p = \nu$ za sve p i $L_p = T_p\nu = 0$ za sve p. Dakle, sve glavne krivine se anuliraju i svaka tačka p hiperpovrši M je planarna tačka.

(ii) Neka je $M = S^{n-1}$. Za proizvoljno $p \in M$, p je vektor normale na M, pa je $\nu = id$ i $L_p = id_{T_pM}$. Dakle, sve tačke $p \in M$ su umbiličke i svi tangentni vektori su pravci glavne krivine.

Centralni predmet proučavanja još od početka diferencijalne geometrije, jeste razlika između unutrašnjih svojstava koja su u potpunosti određena samom mnogostrukošću M i spoljašnjih svojstava za koja su nam potrebne dodatne informacije. Po pravilu, svojstva koja se mogu definisati za apstraktne mnogostrukosti su unutrašnja, dok se spoljašnja svojstva odnose na prostor koji ih okružuje, recimo Gauss-ovo preslikavanje $p \mapsto \nu_p$. Iako smo Riemann-ovu metriku na hiperpovrši od $\mathbb{R}^n$ definisali koristeći skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$ koji okružuje hiperpovrš, možemo definisati Riemann-ovu metriku i za apstraktne mnogostrukosti.

3.1.14 Definicija.

Neka je M apstraktna mnogostrukost. Glatko $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$*- tenzorsko polje* $g \in T_2^0(M)$*se naziva Riemann-ova metrika sa M ako je* $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ *(pozitivno definitan) skalarni proizvod za sve* $p \in M$. (M, g) *se naziva Riemann-ova mnogostrukost. Ako je* $f : (M, g) \to (N, h)$ *(lokalni) difeomorfizam Riemann-ovih mnogostrukosti tako da je* $f^* h = g$*, tada f zovemo (lokalna) izometrija. Za dve Riemann-ove mnogostrukosti kažemo da su (lokalno) izometrične ako postoji (lokalna) izometrija* $f : M \to N$.

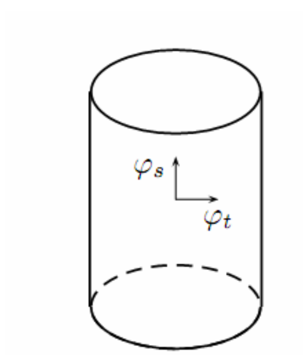
Na osnovu 2.6.11, (lokalni) difeomorfizam *f* je (lokalna) izometrija ako i samo ako za sve $p \in M$:

$$h_{f(p)}\left(T_p f \cdot v, T_p f \cdot w\right) = g_p\left(v, w\right) \quad \forall v, w \in T_p M \tag{3.1.4}$$

Dakle, ako prenesemo tangentne vektore *v, w* pomoću *f* (tačnije, $T_p f$) sa *M* na *N*, tada njihovi intenziteti i ugao koji zaklapaju ostaju nepromenjeni. Za proizvoljnu Riemann-ovu metriku, svojstva kao što su intenzitet vektora i uglovi su unutrašnja svojstva. Sada se pitamo: koja od krivina predstavljenih do sada je unutrašnja? Primetimo da unutrašnji pojmovi moraju ostati nepromenjeni pod dejstvom lokalnih izometrija.

3.1.15 Primer.

Neka je *M* cilindar kao u 3.1.10 i φ: $(0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t, s) = (\cos t, \sin t, s)$.
Posmatramo $U := (0,2\pi) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ kao Riemann-ovu mnogostrukost sa standardnim skalarnim proizvodom $g \equiv \langle \cdot,\cdot \rangle$ na $\mathbb{R}^2$ i M kao Riemann-ovu mnogostrukost sa $h = I$ kao u 3.1.10.



Tada, na osnovu 3.1.9 (iii) i 3.1.10, $\varphi : (U, g) \to (M, I)$ je lokalna izometrija:

$$I_{\varphi(t,s)}\left(\underbrace{T_{(t,s)}\varphi}_{=(\varphi_t,\varphi_s)}\cdot v, T_{(t,s)}\varphi\cdot w\right) = I_{\varphi(t,s)}\left(v_1\varphi_t + v_2\varphi_s, w_1\varphi_t + w_2\varphi_s\right) =$$

$$= (v_1, v_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$= g_{(t,s)}(v,w)$$

Dakle, *M* i *U* su lokalno izometrične mnogostrukosti.

Ako je $(x,s)\in M = S^1\times\mathbb{R}$, tada $\nu_p = (x,0)$ i $T_pM = \{(v,s)|v\perp x\}$. Stoga je Gauss-ovo preslikavanje u p dato sa $\nu_p = id\times 0\big|_{S^1\times R}$ i otuda je $L_p = id\times 0$. Dakle, jedna glavna krivina je 1 a druga 0. Kako su na *U* sve krivine jednake 0 (jer je $\nu \equiv const$, prema tome $L\equiv const$), sledi da ni normalna ni srednja krivina nisu unutrašnje. Preostaje nam samo da je možda Gauss-ova krivina *K*, koja se anulira na obe mnogostrukosti, unutrašnja.

Gauss-ova „Izvanredna teorema“ se odnosi na Gauss-ovu krivinu i govori nam da ona zapravo jeste unutrašnja. Da bismo dokazali teoremu, izvešćemo formulu za *K* (u slučaju $M\subseteq\mathbb{R}^3$) koja zavisi od *E, F, G* i njihovih izvoda.

3.1.16 Lema.

Neka je V vektorski prostor sa bazom $B=\{g_1,\dots,g_n\}$, $\langle,\rangle$ *unutrašnji proizvod na V i neka je T: V→ V linearno preslikavanje. Označićemo sa G matricu čiji su elementi* $\langle g_i, g_j\rangle$, *sa* $[T]$ *matricu od T u odnosu na B i sa A matricu sa elementima* $\langle Tg_i, g_j\rangle$. *Tada je* $[T]=(AG^{-1})^t$.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je matrica *G* invertibilna. Neka je $B^* = \{g^1,\dots,g^m\}$dualna baza od *B* i *Φ: V→ V** linearni izomorfizam $v\mapsto\langle v,\cdot\rangle$. Tada je $\Phi(g_i)(g_j) = \langle g_i, g_j\rangle =: g_{ij}$, odnosno, $\Phi(g_i) = \sum_j g_{ij}g^j$, i zbog toga je *G* (koje je simetrično) matrica od *Φ* u odnosu na *B* i *B**. Iz $Tg_j = \sum_i T_{ij}g_i$ sledi

$$A_{jk} = \langle Tg_j, g_k\rangle = \sum_i T_{ij}\langle g_i, g_k\rangle = \sum_i \left(T^t\right)_{ji}\cdot g_{ik} = \left(T^tG\right)_{jk}$$

Prema tome, $A = T^t G$, što dalje implicira da je $\left[T\right] = \left(AG^{-1}\right)^t$.

□

3.1.17 Propozicija.

Neka je φ *lokalna parametrizacija hiperpovrši M u* $\mathbb{R}^3$*. Neka je* $\varphi_t = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\varphi_s = \dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$, $\varphi_{tt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t^2}$ *itd. Stavimo da je* $E = \langle\varphi_t, \varphi_t\rangle$, $F = \langle\varphi_t, \varphi_s\rangle$, $G = \langle\varphi_s, \varphi_s\rangle$, $e := -\langle\nu, \phi_{tt}\rangle$, $f := -\langle\nu, \varphi_{ts}\rangle$, $g := -\langle\nu, \varphi_{ss}\rangle$*. Tada važe sledeće matrične reprezentacije u odnosu na bazu* $\{\varphi_t, \varphi_s\}$ *od* $T_{\varphi(t,s)}M$ *:*

$$\left[I\right] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\left[L\right] = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} eG - fF & fE - eF \\ fG - gF & gE - fF \end{pmatrix}$$

Gauss-ova krivina od M je data sa

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Dokaz. Matricu za *I* smo već izveli u 3.1.9(iii). Što se tiče *L*, za proizvoljnu hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$ imamo:

$$0 = \left\langle \nu \circ \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \right\rangle \overset{\frac{\partial}{\partial x^j}}{\Rightarrow} 0 = \left\langle L \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \right\rangle + \left\langle \nu \circ \varphi, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle L \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \right\rangle = -\left\langle \nu \circ \varphi, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \tag{3.1.5}$$

Kako je $L = L^t$, iz 3.1.16 sledi:

$$[L] = -\left(\left\langle \nu \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle\right) \cdot \left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle\right)^{-1} \tag{3.1.6}$$

U našem slučaju (n=3), iz (3.1.5) sledi da je $e = \langle L\varphi_t, \varphi_t \rangle$, $f = \langle L\varphi_s, \varphi_t \rangle$ i $g = \langle L\varphi_s, \varphi_s \rangle$. Prema tome, ako su $v = v_1\varphi_t + v_2\varphi_s$, $w = w_1\varphi_t + w_2\varphi_s \in T_pM$, onda:

$$\begin{aligned} II(v,w) &= \langle Lv, w \rangle = \\ &= v_1 w_1 \langle L\varphi_t, \varphi_t \rangle + v_1 w_2 \langle L\varphi_t, \varphi_s \rangle + v_2 w_1 \langle L\varphi_s, \varphi_t \rangle + v_2 w_2 \langle L\varphi_s, \varphi_s \rangle = \\ &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [II] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Na osnovu (3.1.6) zaključujemo:

$$[L] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fE - eF \\ fG - gF & gE - fF \end{pmatrix}$$

pa je

$$K = \det L = \frac{(eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

□

U slučaju $n=3$, koristeći vektorski proizvod, ν možemo izračunati direktno:

$$\nu = \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{\|\varphi_t \times \varphi_s\|}.$$

Tada je $\|\varphi_t \times \varphi_s\| = \sqrt{EG - F^2}$, iz čega dobijamo:

$$e = -\langle \nu, \varphi_{tt} \rangle = -\left\langle \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{\|\varphi_t \times \varphi_s\|}, \varphi_{tt} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle \varphi_t \times \varphi_s, \varphi_{tt} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{tt})$$

.

Analogno,

$$f = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{ts})$$
$$g = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{ss})$$

Stavimo $D := \sqrt{EG - F^2}$. Tada

$$\begin{aligned}
K \cdot D^4 &\overset{3.1.17}{=} D^2 (eg - f^2) \\
&= (-eD)(-gD) - (-fD)^2 \\
&= \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{tt}) \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{ss}) - \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{ts})^2 \\
&= \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{tt})^t) \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{ss}) - \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{ts})^t) \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{ts}) \\
&= \det\begin{pmatrix} \overbrace{\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle}^{E} & \overbrace{\langle \varphi_t, \varphi_s \rangle}^{F} & \langle \varphi_t, \varphi_{ss} \rangle \\ \overbrace{\langle \varphi_s, \varphi_t \rangle}^{F} & \overbrace{\langle \varphi_s, \varphi_s \rangle}^{G} & \langle \varphi_s, \varphi_{ss} \rangle \\ \langle \varphi_{tt}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{tt}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{tt}, \varphi_{ss} \rangle \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \overbrace{\langle \varphi_t, \varphi_t \rangle}^{E} & \overbrace{\langle \varphi_t, \varphi_s \rangle}^{F} & \langle \varphi_t, \varphi_{ts} \rangle \\ \overbrace{\langle \varphi_s, \varphi_t \rangle}^{F} & \overbrace{\langle \varphi_s, \varphi_s \rangle}^{G} & \langle \varphi_s, \varphi_{ts} \rangle \\ \langle \varphi_{ts}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{ts}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{ts}, \varphi_{ts} \rangle \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{ss} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{ss} \rangle \\ \langle \varphi_{tt}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{tt}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{tt}, \varphi_{ss} \rangle - \langle \varphi_{ts}, \varphi_{ts} \rangle \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{ts} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{ts} \rangle \\ \langle \varphi_{ts}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{ts}, \varphi_s \rangle & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sada:

$$\begin{aligned}
E_t &= 2\langle \varphi_{tt}, \varphi_t \rangle \\
E_s &= 2\langle \varphi_{ts}, \varphi_t \rangle \\
F_t &= \langle \varphi_{tt}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{st} \rangle \\
F_s &= \langle \varphi_{ts}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{ss} \rangle \\
G_t &= 2\langle \varphi_{st}, \varphi_s \rangle \\
G_s &= 2\langle \varphi_{ss}, \varphi_s \rangle \\
E_{ss} &= 2(\langle \varphi_{tss}, \varphi_t \rangle + \langle \varphi_{tt}, \varphi_t \rangle) \\
F_{ts} &= \langle \varphi_{tst}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{tt}, \varphi_{ss} \rangle + \frac{1}{2} E_{ss} \\
F_{ts} - \frac{1}{2}(E_{ss} + G_{tt}) &= \langle \varphi_{tt}, \varphi_{ss} \rangle - \langle \varphi_{st}, \varphi_{st} \rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow KD^4 = \det\begin{pmatrix} E & F & F_s - \frac{1}{2}G_t \\ F & G & \frac{1}{2}G_s \\ \frac{1}{2}E_t & F_t - \frac{1}{2}E_s & F_{ts} - \frac{1}{2}(E_{ss} + G_{tt}) \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_s \\ F & G & \frac{1}{2}G_t \\ \frac{1}{2}E_s & \frac{1}{2}G_t & 0 \end{pmatrix}$$

Otuda, K je funkcija od E, F, G i njihovih izvoda (do reda 2).
Na osnovu ovoga možemo dokazati sledeću teoremu:

3.1.18 Teorema. (Teorema Egregium, Gauss, 1827)

Gausova krivina K je unutrašnje svojstvo hiperpovrši. Lokalno, izometrične hiperpovrši u $\mathbb{R}^3$ *imaju istu Gauss-ovu krivinu u odgovarajućim tačkama.*

Dokaz. Na osnovu prethodnog razmatranja, K je unutrašnje svojstvo. Neka je $A: M \to N$ lokalna izometrija hiperpovrši M i N u $\mathbb{R}^3$, $p_0 \in M$ i φ lokalna parametrizacija od M oko p_0. Tada je $\psi := A \circ \varphi$ lokalna parametrizacija od N oko $A(p_0)$. Kako je A lokalna izometrija,

$$\langle T_p A \cdot v, T_p A \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in T_p M$$

Specijalno, neka je $v = T_{(t,s)}\varphi(e_1) = \varphi_t$, $w = T_{(t,s)}\varphi(e_2) = \varphi_s$, $p = \varphi(t,s)$. Tada:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle &= \langle v, v \rangle = \langle T_p A v, T_p A v \rangle = \\ &= \left\langle \underbrace{T_{\varphi(t,s)} A \circ T_{(t,s)}\varphi}_{=T_{(t,s)}(A\circ\varphi)=T_{(t,s)}\psi}(e_1), T_{\varphi(t,s)} A \circ T_{(t,s)}\varphi(e_1) \right\rangle = \\ &= \langle \psi_t, \psi_t \rangle \end{aligned}$$

pa je $E^{\varphi}\big|_{\varphi(t,s)} = E^{\psi}\big|_{\psi(t,s)}$ i analogno za F i G. Otuda zbog 3.1.7, $K(p) = K(A(p))$.

□

3.2 KOVARIJANTNI IZVOD

Kroz ovo poglavlje podrazumevaćemo da je M orijentisana hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$.
Izvod u pravcu vektora $v \in \mathbb{R}^n$ glatkog preslikavanja $f: U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren) (brzina promene funkcije f u pravcu v) je:

$$D_v f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x+tv)-f(x)\big)=\frac{d}{dt}\bigg|_p f(x+tv)=Df(x)\cdot v$$

Neka je M mnogostrukost, $f\in C^\infty(M)$, $v\in T_pM$. Tada analogno:

$$\partial_v f=v(f)=T_pf(v)$$

Posebno, ako je M podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i $f\in C^\infty(M)$, možemo izračunati glatko proširenje $\widetilde{f}$ od f na okolinu tačke p u $\mathbb{R}^n$. Tada:

$$\partial_v f=T_pf(v)=D\widetilde{f}(p)\cdot v=:D_vf(p) \tag{3.2.1}$$

Ponovo, zvaćemo $D_v f$ izvod funkcije f u pravcu v. Analogno, želimo da proučimo brzinu promene vektorskog polja u pravcu tangentnog vektora. Neka je M podmnogostrukost u $\mathbb{R}^n$, $Y\in \mathcal{X}(M)$, $v\in T_pM$. Tada je $Y:M\to\mathbb{R}^n$ glatko i zbog 3.1.6 postoji glatko proširenje $\widetilde{Y}$ od Y na okolinu u $\mathbb{R}^n$ proizvoljne tačke od M. Definišemo:

$$D_vY(p):=T_pY(v)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\widetilde{Y}(p+tv)-\widetilde{Y}(p)\big)=\frac{d}{dt}\bigg|_0\widetilde{Y}(p+tv) \tag{3.2.2}$$

D_vY zovemo izvod u pravcu v od Y. Ako je $\widetilde{Y}=\left(\widetilde{Y}^1,\ldots,\widetilde{Y}^n\right)$ tada $D\widetilde{Y}(p)=\left(D\widetilde{Y}^1(p),\ldots,D\widetilde{Y}^n(p)\right)^t$, pa zbog 2.3.2

$$D_vY(p)=D\widetilde{Y}(p)\cdot v=(\underbrace{D\widetilde{Y}^1(p)\cdot v}_{T_pY^1(v)},\ldots,\underbrace{D\widetilde{Y}^n(p)\cdot v}_{T_pY^n(v)})=\left(v\left(Y^1\right),\ldots,v\left(Y^n\right)\right) \tag{3.2.3}$$

D_vY je brzina promene vektorskog polja Y u pravcu v. Ipak, primetimo da u opštem slučaju $D_vY(p)\notin T_pM$.

Ako $X\in \mathcal{X}(M)$ tada neka je

$$D_XY:=p\mapsto D_{X_p}Y(p) \tag{3.2.4}$$

izvod od Y u pravcu X. Zbog (3.2.3) imamo

$$D_XY(p)=D\widetilde{Y}(p)X(p)$$

pa $D_XY\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$. U opštem slučaju $D_XY\notin T_pM$ (jer $D_XY(p)\notin T_pM$ u opštem slučaju).

3.2.1 Primer.

Neka je φ lokalna parametrizacija od M i $\psi = \left(x^1,...,x^{n-1}\right) = \varphi^{-1}$ odgovarajuća karta. Tada stavljajući $x := \varphi^{-1}(p)$, $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = D_j\varphi(x)$. Ako je Φ inverzno preslikavanje od Ψ iz teoreme 2.2.4 (T), preslikavanje $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^{\sim} := q \mapsto D_j\Phi\left(\Phi^{-1}(q)\right)$ je glatko proširenje od $\frac{\partial}{\partial x^j}$ na okolinu tačke p u $\mathbb{R}^n$. Pozivajući se na $D_i\varphi(x) = D_i\Phi(x)\cdot e_i$, dobijamo:

$$\begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 D_j\Phi\left(\Phi^{-1}(p + tD_i\varphi(x))\right) = \\ &= D\left(D_j\Phi\right)(x)\cdot D\Phi^{-1}(p)\cdot D\Phi(x)\cdot e_i = \\ &= D\left(D_j\Phi\right)(x)\cdot e_i = D_{ij}\Phi(x) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\varphi(x) \end{aligned}$$

Da bismo pokazali da je D_XY unutrašnje svojstvo, projektujemo ga ortogonalno na T_pM.

3.2.2 Definicija.

Neka je M orijentisana hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$ i neka $X,Y \in \mathcal{X}(M)$. Kovarijantni izvod od Y u pravcu X je definisan kao tangentni deo od D_XY:

$$\nabla_X Y := \left(D_X Y\right)^{\tan g} = D_X Y - \langle D_X Y, \nu\rangle \nu .$$

Za $f \in C^\infty(M)$, definišemo $\nabla_X f := D_X f$.

U sledeća dva tvrđenja date su osobine kovarijantnog izvoda.

3.2.3 Propozicija.

Neka je M orijentisana hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$ i neka $X,Y \in \mathcal{X}(M)$. Tada:

(i) $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$

(ii) *Normalni deo od D_XY je* $\left(D_X Y\right)^{nor} = \langle D_X Y, \nu\rangle \cdot \nu = -II(X,Y)\cdot \nu$

(iii) $D_X Y = \nabla_X Y - II(X,Y)\cdot\nu$ *(Gauss-ova jednačina*

Dokaz.

(i) Kako su $D_X Y$ i ν glatka preslikavanja sledi da je i $\nabla_X Y : M \to \mathbb{R}^n$ glatko. Očigledno, $\nabla_X Y(p) \in T_p M$ za sve p, pa sledi da $\nabla_X Y(p) \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) Neka je φ lokalna parametrizacija od M i:

$$f(x) := \left\langle \underbrace{Y \circ \varphi(x)}_{\in T_p M}, \underbrace{\nu \circ \varphi(x)}_{\in T_p M^{\perp}} \right\rangle \equiv 0$$

Neka je $v \in T_p M$. Tada, zbog 2.3.1(i), postoji neko $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ takvo da je $v = D\varphi(x) \cdot w$, ($\varphi(x)=p$). Otuda

$$0 = Df(x) \cdot w = \left\langle D\left(Y \circ \varphi\right)\left(x\right) \cdot w, \nu \circ \varphi\left(x\right) \right\rangle + \left\langle Y \circ \varphi\left(x\right), D\left(\nu \circ \varphi\right)\left(x\right) \cdot w \right\rangle =$$

$$= \left\langle D\tilde{Y}(p) \underbrace{D\varphi(x) \cdot w}_{=v}, \nu(p) \right\rangle + \left\langle Y(p), \underbrace{D\tilde{\nu}(p)}_{=L_p} \cdot \underbrace{D\varphi(x) \cdot w}_{=v} \right\rangle =$$

$$= \left\langle D_v Y(p), \nu_p \right\rangle + \left\langle Y_p, L_p v \right\rangle$$

Posebno, za $v = X_p$ dobijamo:

$$\left\langle D_{x_p} Y(p), \nu_p \right\rangle = -\left\langle Y_p, L_p X_p \right\rangle = -II\left(X_p, Y_p\right)$$

(iii) Direktna posledica 3.2.2 i (ii).

□

3.2.4 Lema.

Neka $X, Y, X_i, Y_i \in \mathcal{X}(M)$. Neka je M orijentisana hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{\infty}(M)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada:

(i) $D_{fX_1 + X_2} Y = f D_{X_1} Y + D_{X_2} Y$

$\nabla_{fX_1 + X_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$

(ii) $D_X \left(\alpha Y_1 + Y_2\right) = \alpha D_X Y_1 + D_X Y_2$

$\nabla_X \left(\alpha Y_1 + Y_2\right) = \alpha \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

(iii) $D_X (fY) = f D_X Y + D_X f \cdot Y$

$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + \nabla_X f \cdot Y$

(iv) $\quad D_X\langle Y_1,Y_2\rangle=\langle D_X Y_1,Y_2\rangle+\langle Y_1,D_X Y_2\rangle$

$\quad\quad \nabla_X\langle Y_1,Y_2\rangle=\langle \nabla_X Y_1,Y_2\rangle+\langle Y_1,\nabla_X Y_2\rangle$

Dokaz. Pošto je $D_X Y(p)=D\widetilde{Y}(p)\cdot X_p$ i $D_X f(p)=D\widetilde{f}(p)\cdot X_p$, osobine (i)-(iv) za D slede na osnovu uobičajenih pravila diferenciranja. Zbog 3.2.2 osobine (i)-(iii) za ∇ slede na osnovu odgovarajućih osobina od *D*. Konačno,

$$\nabla_X\langle Y_1,Y_2\rangle=D_X\langle Y_1,Y_2\rangle=\langle D_X Y_1,Y_2\rangle+\langle Y_1,D_X Y_2\rangle\overset{3.2.2,\nu\perp Y_1,Y_2}{=}\langle \nabla_X Y_1,Y_2\rangle+\langle Y_1,\nabla_X Y_2\rangle$$

□

Lie-va zagrada može se izraziti preko kovarijantnog izvoda, što pokazuje sledeće tvrđenje.

3.2.5 Propozicija.

Neka je M hiperpovrš, $X,Y\in\mathcal{X}(M)$. *Tada*

$$[X,Y]=D_X Y-D_Y X=\nabla_X Y-\nabla_Y X$$

Dokaz. $[X,Y]=D_X Y-D_Y X$ slede iz 3.1.6(ii) i (3.2.4). Šta više,

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=D_X Y-D_Y X-\underbrace{\langle D_X Y,\nu\rangle\cdot\nu+\langle D_Y X,\nu\rangle\cdot\nu}_{=0\ \text{(prema 3.2.3(ii))}}$$

□

Da bismo pokazali da je kovarijantni izvod ∇ unutrašnje svojstvo hiperpovrši dovoljno je dokazati da se može na jedinstven način prikazati preko prve fundamentalne forme, tj. Riemann-ove metrike. Prvo ćemo izvesti neke lokalne formule.

Neka je φ lokalna parametrizacija od M i $(\psi=\varphi^{-1}=(x^1,\dots,x^{n-1}),V)$ odgovarajuća karta. Tada, za $x=\varphi^{-1}(p)$, $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p=D_i\varphi(x)$ i zbog (3.1.3) imamo:

$$g_{ij}(p)=\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right\rangle=\langle D_i\varphi(x),D_j\varphi(x)\rangle$$

Neka su $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ sa lokalnim reprezentacijama

$$X=\sum_{i=1}^{n-1}X^i D_i\varphi,\ Y=\sum_{j=1}^{n-1}Y^j D_j\varphi$$

Prema 3.2.4,

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n-1} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y = \sum_{i=1}^{n-1} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^{n-1} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$\nabla_X Y$ je jedinstveno određeno skalarnim proizvodima $\left\langle \nabla_X Y, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle$ (pogledati 3.1.16). Dakle, dovoljno je pokazati da su svi

$$\left\langle \nabla_X Y, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n-1} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} g_{jk} + Y^j \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \right)$$

unutrašnji tj. da zavise isključivo od *g*. U ovom izrazu,

$$\Gamma_{ij,k} := \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \tag{3.2.5}$$

se nazivaju Christoffel-ovi simboli prve vrste.

Kako je $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$, koristeći 3.2.5 dobijamo

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{$*$}$$

pa je $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$ $\forall i,j,k$. Pošto je $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{X}(V)$, postoje glatke funkcije Γ_{ij}^k tako da:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.2.6}$$

Γ_{ij}^k se nazivaju Christoffel-ovi simboli druge vrste. Oni su takođe simetrični po *i,j* zbog ($*$): $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, $\forall i, j, k$. Na osnovu (3.2.5) i (3.2.6) sledi:

$$\Gamma_{ij,k} = \sum_{m=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^m g_{mk} \tag{3.2.7}$$

Ostaje da se pokaže da su $\Gamma_{ij,k}$ unutrašnja svojstva, tj. da zavise samo od *g*. Imamo:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} g_{ij} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} g_{ij} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \overset{3.2.4(iv)}{=} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \overset{3.2.5}{=} \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$$

Cikličnim permutacijama dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j}$$
$$\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} = \Gamma_{kj,i} + \Gamma_{ij,k}$$

od kojih dodavajući (respektivno oduzimajući) dobijamo:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} \right)$$

Ovaj izraz zavisi isključivo od *g*. Ovim je pokazano sledeće tvrđenje.

3.2.6 Teorema.

Kovarijantni izvod ∇ *je unutrašnje svojstvo.*

3.2.7 Napomena.

Zadržavajući dosadašnju notaciju neka je $II\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) =: h_{ij}$. Tada, ako je $p = \varphi(x)$, dobijamo:

$$D_{ij}\varphi(x) \overset{3.2.1}{=} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \overset{3.2.3(iii)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p - h_{ij}\big|_p \nu_p \overset{3.2.6}{=} \sum_k \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p - h_{ij}\big|_p \nu_p \qquad (3.2.8)$$

3.3 GEODEZIJSKE LINIJE

Vektorsko polje Y na $\mathbb{R}^n$ je konstantno ako i samo ako je $DY=0$, ako i samo ako $D_XY=0$ za sva vektorska polja X na $\mathbb{R}^n$. Kako je $Y_p \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, ovo je dalje ekvivalentno sa činjenicom da su svi Y_p paralelni (i jednakih dužina). Za hiperpovrši analogno definišemo pojam paralelnog vektorskog polja.

3.3.1 Definicija.

Neka je M hiperpovrš u $\mathbb{R}^n$, $Y \in \mathcal{X}(M)$. Vektorsko polje Y se naziva paralelno ako je $\nabla_X Y = 0$ za sve $X \in \mathcal{X}(M)$.

Geodezijske linije u $\mathbb{R}^n$ tj. prave linije, imaju osobinu da su njihovi tangentni vektori uvek paralelni duž prave linije. Da bismo ovo generalizovali, potrebna nam je sledeća definicija.

3.3.2 Definicija.

Neka je $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hiperpovrš i $c: I \to M$. Glatko preslikavanje $X: I \to \mathbb{R}^n$ se naziva vektorsko polje duž krive c ako $X(t) \in T_{c(t)}M$ za sve $t \in I$. Prostor svih vektorskih polja duž krive c označavamo sa $\mathcal{X}(c)$.

3.3.3 Primer.

Neka je $c: I \to M$ C^∞. Tada $\dot{c}: I \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{X}(c)$ $(\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M\ \forall t)$.

Neka $Y \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ i $\widetilde{Y}$ glatko proširenje od Y na neku okolinu oko p u $\mathbb{R}^n$. Neka $v \in T_pM$. Tada na osnovu 3.2.2, $D_vY(p) = D\widetilde{Y}(p)\cdot v$. Ako je $c: I \to M$ kriva takva da je $c(0) = p$ i $c'(0) = v$, tada:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 Y(c(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \widetilde{Y}(c(t)) = D\widetilde{Y}(\underbrace{c(t)}_{=p})\underbrace{\dot{c}(0)}_{=v} = D_vY(p)$$

Da bismo našli $D_vY(p)$, dovoljno je znati Y duž svake takve krive c. To je tačno i za $\nabla_vY(p)$. Ako $Y \in \mathcal{X}(M)$ i $c: I \to M$ glatko, tada

$$D_{\dot{c}(t)}Y = \frac{d}{dt}(Y \circ c)$$

Ako $Y \in \mathcal{X}(c)$, analogno definišemo:

$$D_{\dot{c}(t)}Y(t) = \frac{d}{dt}Y(t) \tag{3.3.1}$$

$$\nabla_{\dot{c}(t)}Y(t) := \left(D_{\dot{c}(t)}Y(t)\right)^{\tan g} = D_{\dot{c}(t)}Y(t) - \left\langle D_{\dot{c}(t)}Y(t), \nu(c(t))\right\rangle \nu(c(t)) \qquad (3.3.2)$$

3.3.4 Lema.

Neka je φ *lokalna parametrizacija,* $\varphi^{-1}=(x^1, ..., x^{n-1})$ *i* $c=\varphi\circ u$ *glatka kriva na M sa lokalnom reprezentacijom* $t\mapsto u(t)$*. Neka* $Y\in \mathcal{X}(c)$ *i* $Y(t)=\sum_{i=1}^{n-1} Y^i(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}$*. Tada:*

$$\nabla_{\dot{c}(t)}Y(t) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n-1} Y^i(t)\frac{du^j}{dt}\Gamma_{ij}^k(c(t))\right)\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{c(t)}$$

Dokaz. Kako je $Y(t)=\sum_{i=1}^{n-1}Y^i(t)D_i\varphi\underbrace{\left(\varphi^{-1}(c(t))\right)}_{=u(t)}$, na osnovu (3.3.1) imamo:

$$D_{\dot{c}(t)}Y(t) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{dY^i(t)}{dt}D_i\varphi(u(t)) + \sum_{i=1}^{n-1}Y^i(t)D_{ij}\varphi(u(t))\frac{du^j}{dt} =$$
$$\overset{3.2.8}{=}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{dY^k(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n-1}Y^i(t)\frac{du^j}{dt}\Gamma_{ij}^k\underbrace{\left(\varphi\circ u(t)\right)}_{=c(t)}\right)\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{c(t)} + (...)\cdot\nu$$

Dakle, tvrđenje sledi iz (3.3.2).

□

3.3.5 Definicija.

Kriva c: I→ M, koja nije konstantna, naziva se geodezijska linija ako je $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t)=0$ *za svako t.*

Ovo znači da se $\dot{c}$ paralelno pomera duž c, tj. kriva ide onoliko pravo koliko joj to mnogostrukost dozvoljava. Sa tačke gledišta fizike, $D_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) \overset{(3.3.1)}{=} \frac{d}{dt}\dot{c}(t)=\ddot{c}(t)$ je ubrzanje čestice koja se kreće duž c. $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}$ je tangentna komponenta ubrzanja. Ovako posmatrano, geodizijska linija je kriva na M koja ne oseća ubrzanje na hiperpovrši.

Normalna komponenta od $\ddot{c}$ odgovara sili ($F=m\ddot{c}$) koja je potrebna da se čestica održi unutar M. Dakle, c je geodezijska linija ako i samo ako je $\ddot{c}(t)\perp T_{c(t)}M$ za sve t.

3.3.6 Propozicija.

Neka je φ lokalna parametrizacija, $\varphi^{-1} = (x^1, \ldots, x^{n-1})$ i $c = \varphi \circ u$ glatka kriva. c je geodezijska linija ako i samo ako zadovoljava:

$$\ddot{u}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{n-1} \dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)\Gamma_{ij}^k\big(\varphi(u(t))\big) = 0,\ \forall k \tag{3.3.3}$$

Dokaz. Kada primenimo 3.3.4 i 3.3.5 na $Y = \dot{c} : c = \varphi \circ u$, dobijamo:

$$\dot{c}(t) = \sum_i D_i \varphi(u(t)) \cdot \dot{u}^i(t) = \sum_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)} \dot{u}^i(t)$$

tj. $Y^i(t) = \dot{u}(t)$, $\forall i$.

□

(3.3.3) se naziva sistem geodezijskih jednačina. U pitanju je sistem nelinearnih ODJ drugog reda. Iako u opštem slučaju nema globalnih rešenja, lokalnih uvek ima.

3.3.7 Teorema.

Neka $p, q \in M$. Kriva c koja povezuje p i q je geodezijska linija ako i samo ako njena dužina luka ima ekstremnu vrednost u odnosu na dužine luka ostalih krivih koje povezuju p i q.

Dokaz. Neka je c: $[a,b] \to M$, $c(a) = p$, $c(b) = q$. Dužina krive c je ekstrem ako je $\left.\frac{d}{ds}\right|_0 L(c^s) = 0$ za svaku familiju krivih $(t,s) \mapsto c^s(t) \equiv c(t,s)$ sa osobinom $c^s(a) = p$, $c^s(b) = q$ $\forall s$ i $c^0 = c$. Neka je c parametrizovana dužinom luka. Tada:

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_0 L(c^s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial t} c(t,s) \right\| = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 \langle \dot{c}(t,s), \dot{c}(t,s) \rangle}{\underbrace{\| \partial_t c(t,0) \|}_{=1}} dt = \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 c(t,s), \frac{\partial}{\partial t} c(t,0) \right\rangle dt =$$

$$= \left[\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 c(t,s), \frac{\partial}{\partial t} c(t,0) \right\rangle \right]_a^b - \int_a^b \left\langle \underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 c(t,s)}_{=:\eta(t) \in T_{c(t,0)}M}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} c(t,0) \right\rangle dt = -\int_a^b \langle \eta(t), \ddot{c}(t) \rangle dt = (*)$$

Ako je $L(c)$ ekstremna vrednost, slobodno možemo izabrati $c(t,s)$. Možemo pretpostaviti da je $\eta(t) = h(t)\left(\ddot{c}(t) - \left\langle \ddot{c}(t), \nu_{c(t)} \right\rangle \nu_{c(t)}\right)$, gde je $h : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ glatko, $h(a) = h(b) = 0$. Tada:

$$(*) = \int_a^b \left(\underbrace{h(t)}_{\geq 0} \underbrace{\left((\langle \ddot{c}, \nu \circ c \rangle \right)^2 - \langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle}_{\leq 0 \text{ (na osnovu C-S neprekidnosti)}} \right) dt$$

Kako je $\left.\frac{d}{ds}\right|_0 L(c^s) = 0$, moramo imati jednakosti za sve t u Cauchy-Schwarz-ovoj nejednakosti. Otuda $\ddot{c}(t)$ mora biti proporcionalno sa $\nu(c(t))$ za sve t, pa je $\ddot{c}(t) \in T_{c(t)}M^{\perp}$ i c je geodezijska linija.

Obrnuto, ako je c geodezijska linija tada $\frac{d}{dt}(\|\dot{c}\|^2) = 2\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle \overset{\ddot{c} \in Tc(t)M^{\perp}}{=} 0$ pa je $\|\dot{c}\|$ konstantno, što znači da je c parametrizovana proporcionalno dužini luka. Prema tome, možemo primeniti gornji račun. Tada ćemo u (*) imati $\eta(t) \in T_{c(t)}M$ pa je $\langle \eta(t), \ddot{c}(t) \rangle = 0$, $\forall t$. Dakle, $\left.\frac{d}{ds}\right|_0 L(c^s) = 0$ tj. $L(c)$ je ekstremna vrednost.

□

ZAKLJUČAK

U ovom radu upoznali smo se sa osnovnim pojmovima teorije krivih i diferencijalne geometrije. Ako posmatramo krivu kao putanju čestice u određenom vremenskom intervalu, možemo odrediti dužinu te putanje, opisati pravac kretanja i položaj tela u prostoru. Ubrzanje tela je povezano sa krivinom puta: ako je veća zakrivljenost, veće je i ubrzanje. Razumevanje geometrijskog značenja pojmova krivine i torzije, pre svega u slučaju krivih u ravni i prostoru, omogućilo je dalji rad sa krivama u $\mathbb{R}^n$, a potom i određivanje krivine hiperpovrši. Ali za detaljnije proučavanje hiperpovrši u $\mathbb{R}^n$, bilo je potrebno definisati pojam apstraktne mnogostrukosti, a zatim i specijalan slučaj, podmnogostrukosti u $\mathbb{R}^n$. Kako mnogostrukosti u opštem slučaju nemaju strukturu vektorskog prostora, da bismo bili u mogućnosti da definišemo izvod glatkih preslikavanja, uveli smo pojam tangentnih prostora a zatim i tangentnih raslojenja. Upoznali smo se sa osnovnim osobinama tenzora, diferencijalnih formi i integralima na mnogostrukostima.

Poslednja glava posvećena je temi ovog master rada, hiperpovršima. Pojmovi koje smo uveli u prve dve glave, omogućili su nam njihovo proučavanje. Definisali smo Gauss-ovo i Weingarten-ovo preslikavanje, bavili smo se centralnim predmetom proučavanja diferencijalne geometrije: razlikom između unutrašnjih i spoljašnjih svojstava mnogostrukosti i pokazali koja svojstva su unutrašnja. Dokazali smo Gauss-ovu "Izvanrednu teoremu", definisali kovarijantni izvod i geodezijske linije.

LITERATURA

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings, 1978.

[2] R. Abraham, J.E. Marsden, T, Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, 2002.

[3] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1986.

[4] F. Brickell, R.S. Clark, *Differentiable Manifolds*, University of Southampton, 1970.

[5] V. Dragović, D. Milinković, *Analiza na mnogostrukostima*, Matematički fakultet u Beogradu, 2003.

[6] A. Kriegl, *Differentialgeometrie*, Lecture notes, University of Vienna, 2005.

[7] M. Kunzinger, *Differential Geometry 1*, Lecture notes, University of Vienna, 2008.

[8] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, University of Washington, 2000.

[9] T. Shifrin, *A First Course in Curves and Surfaces*, University of Georgia, 2010.

[10] J. Stillwell, *Mathematics and Its History*, Monash University, Clayton, Australia

[11] V. A. Toponogov, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Sobolev Institute of Mathematics, 2006.

BIOGRAFIJA

Milena Stojković rođena je 23.10.1987. godine u Leskovcu gde je završila osnovnu školu „Svetozar Marković“ sa prosekom ocena 5,00 u svim razredima. Potom je upisala matematičko odeljenje gimnazije „Stanimir Veljković Zele“ u Leskovcu koju je završila sa prosekom ocena 5,00 u svim razredima i nosilac je Vukove diplome.

Prirodno-matematički fakultet, odsek za matematiku, smer teorijski matematičar, upisala je 2006. godine i diplomirala 20.09.2010. godine sa prosečnom ocenom 9,71. Nakon završetka osnovnih studija, upisala je master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, smer matematika. Kao stipendista fondacije OeAD, boravila je na Institutu za matematiku u Beču u periodu od oktobra 2010. do februara 2011. godine, pohađala DIANA seminar i tamo položila ispite predviđene za master studije i tako stekla pravo za odbranu master rada.

Milena Stojković

Novi Sad, 2011

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumenatcija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Milena Stojković

AU

Mentor: Docent dr Sanja Konjik

MN

Naslov rada: Hiperpovrši

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2011

GO

Izdavač:

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Diferencijalna geometrija

ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: Krive u $\mathbb{R}^n$, fundamentalna teorema lokalne teorije krivih, krive u ravni i prostoru, diferencijabilne mnogostrukosti, krivina hiperpovrši, kovarijantni izvod, geodezijske linije

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VU

Izvod:

IZ

U tezi se proučavaju osnovni pojmovi diferencijalne geometrije. Izučavamo lokalnu teoriju krivih, teoriju diferencijabilnih mnogostrukosti, krivinu hiperpovrši, kovarijantni izvod i geodezijske linije.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 3. mart 2011

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Nevena Pušić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,

Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Dušanka Perišić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,

Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Sanja Konjik, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u

Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Milena Stojković

AU

Mentor: Sanja Konjik, Ph.D.

MN

Title: Hypersurfaces

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2011

PY

Publisher:

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description:

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Differential Geometry

SD

Subject / Key words: curves in $\mathbb{R}^n$, the Fundamental Theorem of the Local Theory of Curves, plane and space curves, differentiable manifolds, curvature of hypersurfaces, covariant derivatives, geodesics

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

The thesis is based on a introduction to modern differential geometry. We study local curve theory, theory of differentiable manifolds, hypersurfaces, curvature of hypersurfaces, covariant derivatives and geodesics.

Accepted by Scientific Board on: 3*th* March 2011

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Nevena Pušić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr. Dušanka Perišić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr. Sanja Konjik, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad