Sadržaj

Predgovor

U master radu posmatramo neke numeričke postupke četvrtog reda konvergencije za numeričko rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom $f(x)=0$ koji se zasnivaju na modifikacijama Njutnovog postupka. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a,b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha)\neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, u mnogim radovima date su modifikacije čiji je red konvergencije 4. Osnovni princip za konstrukciju ovakvih postupaka prisutan je i u radu [6], gde je razvijena modifikacija Njutnovog postupka četvrtog reda konvergencije. Ova modifikacija je zasnovana na aproksimacijama prvog izvoda sredinama. Postupajući na sličan način dajemo familiju postupaka četvrtog reda konvergencije, koristeći rezultate radova [3], [5] i [6].

Master rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu rada dajemo oznake definicije i teoreme koje ćemo koristiti u daljem radu. Drugi deo rada sadrži teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake četvrtog reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina datih u radovima [2], [6], [10], [12]. U trećem delu posmatramo modifikacije iterativnih postupaka opisanih u drugom delu, neke njihove specijalne slučajeve i naše modifikacije Njutnovog postupka četvrtog reda konvergencije. Kao originalni rezultat dajemo modifikacije Njutnovog postupka četvrtog reda konvergencije, koje kao specijalan slučaj sadrže postupak iz [6]. Ove modifikacije su zasnovane na rezultatima radova [3], [5] i [6]. Za izabrane postupke, pod određenim pretpostavkama, dokazujemo konvergenciju, određujemo red konvergencije i indeks efikasnosti. U poslednjem delu rada prikazaćemo numeričke eksperimente urađene u programskom paketu *Mathematica*. Primeri su uzeti iz navedenih radova, a najviše iz [3], [5] i [6].

Zahvaljujem se svom mentoru dr Dragoslavu Hercegu na korisnim sugestijama i savetima.

Novi Sad, oktobar 2014. Lidia Molnar

1 Neke oznake, definicije i teoreme

1.1 Oznake

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\{x_k\}$	niz brojeva $x_0, x_1, \dots$
$D = [a, b]$	interval kojem pripada niz $\{x_k\}$
$C^k[a, b]$	skup k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$
$Lip_\gamma[a, b]$	skup funkcija koje na intervalu $[a, b]$ zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom γ
α	rešenje jednačine $f(x) = 0$
$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$	konstanta
$e_n = x_n - \alpha$	greška u n-toj iteraciji
$e_{n+1} = C{e_n}^p + O({e_n}^{p+1})$	jednačina greške
$C = \frac{e_{n+1}}{{e_n}^p}$	asimptotska konstanta greške
p	red konvergencije iterativnog postupka
m	broj funkcionalnih evaluacija datog postupka
$p^{\frac{1}{m}}$	indeks efikasnosti postupka

1.2 Definicije

Definicija 1. *Za dve jednačine kažemo da su ekvivalentne na intervalu* $[a,b]$ *ako su rešenja koja pripadaju intervalu* $[a,b]$ *jedne jednačine rešenja druge jednačine i obrnuto.*

Definicija 2. *Svaki realan broj α, za koji važi da je* $f(\alpha)=0$, *nazivamo rešenje jednačine* $f(x)=0$.

Definicija 3. *Broj α je rešenje višestrukosti k jednačine* $f(x)=0$ *ako je*

$$f(x)=(x-\alpha)^k g(x)$$

pri čemu je funkcija g *ograničena u α i važi* $g(\alpha)\neq 0$. *Za k se uvek uzima pozitivan ceo broj. Ako je* $k=1$, *onda kažemo da je koren prost ili jednostruk, a ako je* $k>1$ *onda je višestruk.*

Definicija 4. *Neka je* $\varphi: D\to\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Broj* $\alpha\in D$ *za koji važi* $\alpha=\varphi(\alpha)$ *je rešenje jednačine* $x=\varphi(x)$ *i naziva se nepokretna tačka funkcije φ.*

Neka je x_0 proizvoljan broj iz intervala $[a,b]$. Formirajmo niz brojeva $x_0, x_1, \ldots$ prema

$$x_{k+1}=\varphi(x_k), \qquad k=0,1,\ldots$$

Ovaj niz je moguće formirati samo ako $\varphi(x_k)\in[a,b]$, $k=0,1,\ldots$ zbog definisanosti funkcije φ na intervalu $[a,b]$. Očigledno, ako funkcija φ preslikava interval $[a,b]$ u samog sebe, važi $\varphi(x_k)\in[a,b]$, $k=0,1,\ldots$. Ako je niz $x_0, x_1, \ldots$ dobro definisan i ima graničnu vrednost, tj. za neko $\alpha\in[a,b]$ važi $\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$, onda je α rešenje jednačine $x=\varphi(x)$ ako je funkcija φ neprekidna na intervalu $[a,b]$. Naime, iz $\varphi(x)\in[a,b]$, za svako $x\in[a,b]$ sledi $\alpha\in[a,b]$, a zbog neprekidnosti funkcije φ važi

$$\alpha=\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)=\varphi(\alpha).$$

Dakle, ako niz $x_0, x_1, \ldots$ konvergira, njegova granična vrednost α je rešenje jednačine $x=\varphi(x)$, a članovi tog niza aproksimiraju to rešenje.

Ovaj postupak, u kome računamo vrednosti $x_0, x_1, \ldots$ prema $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $k=0,1\ldots$ se naziva iterativni postupak (postupak sukcesivnih aproksimacija), gde je $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ iterativno pravilo, funkcija φ je funkcija koraka, a niz $x_0, x_1, \ldots$ je iterativni niz. Prvi član tog niza je početna aproksimacija. Kada iterativni niz konvergira kažemo da iterativni postupak konvergira.

Definicija 5. *Funkcija φ zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu* D *ako postoji konstanta* γ *takva da za svako* $x,y\in D$ *važi*

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq\gamma|x-y|.$$

Konstanta γ se naziva Lipšicova konstanta. Ako je $\gamma < 1$ onda se ova konstanta naziva konstanta kontrakcije, a funkcija φ se naziva kontrakcija ili kontraktivno preslikavanje.

Definicija 6. *Neka je $lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$. Ako postoji konstanta $C \in [0,1)$ i ceo broj $K \geq 0$ takav da za $k \geq K$ važi*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|$$

kaže se da je niz $x_0, x_1, \ldots$ linearno konvergentan.

Ako postoje konstante $p > 1, C \geq 0$ i ceo broj $K \geq 0$ takav da za $k \geq K$ važi

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p$$

kaže se da niz $x_0, x_1, \ldots$ konvergira ka α sa redom bar p. Za $p = 2$ konvergencija je kvadratna, a za $p = 3$ kubna.

Definicija 7. *Red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog posmatranim iterativnim postupkom.*

Da bi se odredio red konvergencije često se posmatra konstanta

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}.$$

Ukoliko ovakva konstanta postoji postupak je bar reda p. Ako je $\eta \neq 0$, postupak je reda p i η se naziva asimptotska konstanta postupka. Ako je $\eta = 0$, posmatra se granična vrednost sa $p + 1$ u eksponentu imenioca. Ako je opet $\eta = 0$, uzima se $p + 2$ itd, dok se ne dobije konstanta različita od nule.

Definicija 8. *Kažemo da je iterativni postupak sa redom konvergencije p_1 brži od iterativnog postupka sa redom konvergencije p_2 ako je $p_1 > p_2$.*

Definicija 9. *Jednačina greške postupka je*

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$ greška u n-toj iteraciji, C asimptotska konstanta greške i p red konvergencije.

Definicija 10. *Indeks efikasnosti iterativnog postupka je $p^{\frac{1}{m}}$, gde je p red konvergencije iterativnog postupka, a m broj izračunavanja funkcija po iteraciji.*

Određivanje reda konvergencije nije uvek jednostavno i time se ovde nećemo baviti. Navešćemo samo red konvergencije onih postupaka koje budemo posmatrali. Red konvergencije se koristi za upoređivanje brzine konvergencije.

1.3 Teoreme

Za rešavanje jednačina oblika $f(x) = 0$ posmatraćemo ekvivalentne jednačine oblika $x = \varphi(x)$ i odgovarajuće iterativne postupke oblika

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0,1,\dots.$$

Navodimo nekoliko teorema iz [4] koje se odnose na jednačinu $x = \varphi(x)$ i teoremu o redu konvergencije jednokoračnog postupka.

Teorema 1. *Neka je $g(x) \neq 0$ za $x \in [a,b]$. Tada su jednačine $f(x) = 0$ i $x = \varphi(x)$ sa $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ ekvivalentne na intervalu $[a,b]$.*

Teorema 2. *Neka je φ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$ i $\varphi(a), \varphi(b) \in [a,b]$. Tada postoji $\alpha \in [a,b]$ takvo da je $\varphi(\alpha) = \alpha$.*

Teorema 3. *Funkcija koja zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D je neprekidna na tom intervalu.*

Obrnuto ne mora da važi, tj. neprekidna funkcija na intervalu D ne mora da zadovoljava Lipšicov uslov na istom intervalu.

Teorema 4. *Ako funkcija φ ima u intervalu $[a,b]$ prvi izvod za koji na tom intervalu važi $|\varphi'(x)| \leq \gamma$, onda $\varphi \in Lip_\gamma[a,b]$.*

Teorema 5. *Neka je φ kontrakcija na intervalu $[a,b]$ i neka preslikava taj interval u samog sebe. Tada iterativni niz $\{x_k\}$ određen sa*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1,\dots$$

sa proizvoljnim $x_0 \in [a,b]$, konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in [a,b]$ jednačine $x = \varphi(x)$ i važi

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|, \qquad k = 1,2,\dots$$

gde je γ Lipšicova konstanta kontrakcije funkcije φ.

Vrednosti $\frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}|$ i $\frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|$ definisane u prethodnoj teoremi nazivaju se aposteriorna i apriorna ocena greške.

Pored apriorne i aposteriorne, često se koristi i sledeća ocena greške koja ne zavisi od iterativne funkcije φ.

Teorema 6. *Neka $f \in C^1(D)$ i $|f'(x)| \geq m > 0$ za $x \in D$. Ako je $\alpha \in D$ rešenje jednačine $f(x) = 0$ i $x_k \in D, k = 0,1,\dots$, onda je*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}.$$

Ova ocena se naziva Lagranžova ocena greške

Teorema 7. *Red konvergencije jednokoračnog postupka*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,\ldots$$

je pozitivan ceo broj. Ovaj postupak ima red konvergencije p ako i samo ako je

$$\alpha = \varphi(\alpha),\ \varphi^{(j)}(\alpha) = 0,\ \ j = 1,2,\ldots,\ p-1,\ \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Red konvergencije i asimptotske konstante greške svih postupaka koje posmatramo u ovom radu određujemo koristeći prethodnu teoremu. U zavisnosti od p za asimptotske konstante greške uzimamo

$$\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

a dobijeni rezultat izražavamo preko konstanti $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)},\ \ j = 2,3,\ldots.$

Kako su funkcije koraka posmatranih iterativnih postupaka složene i izračunavanje njihovih izvoda nije jednostavno, taj posao smo prepustili programskom paketu *Mathematica*.

2 Iterativni postupci četvrtog reda konvergencije

Postupci četvrtog reda konvergencije su brojni u naučnoj literaturi. U ovom radu, mi posmatramo dve velike grupe postupaka, koje su zasnovane na ideji Trauba-Ostrowskog i Jarratta.

2.1 Postupak Trauba-Ostrowskog

Ovaj postupak je široko koišćen i modifikovan. Postupak je definisan sa

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(y_n) - f(x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Vidimo da u postupku imamo dve evaluacije funkcije i jednu evaluaciju prvog izvoda.

2.1.1 Prva modifikacija postupka

Postupak Kinga dobijemo tako, da u iterativnu šemu stavljamo $\beta \in \mathbb{R}$.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Za β=0 dobijamo metodu Trauba-Ostrowskog.

2.1.2 Druga modifikacija postupka

Posmatramo generalizaciju metode Trauba-Ostrowskog.

Teorema 8. *Neka je $f = D \to \mathbb{R}$ dovoljno glatka funkcija na intervalu D, i neka je $\propto \in D$. Neka je $y_n = g(x_n)$ proizvoljan iterativni postupak drugog reda konvergencije, za koji važi*

$$y_n - \propto = Ke_n^2 + O(e_n^3), \quad \text{za neko K} \neq 0 \ \ i \ \ e_n = x_n - \propto.$$

Tada metoda definisana sa

$$x_{n+1} = y_n - \frac{\beta f(y_n)}{2\big(f(y_n) - f(x_n)\big) - \beta f'(x_n)}$$

je četvrtog reda konvergencije, gde je $\beta = y_n - x_n$. Greška u n-toj iteraciji data sa

$$e_{n+1} = K(Kc_2 - c_3){e_n}^4 + O({e_n}^5).$$

Dokaz. Neka je

$$y_n - \propto = Ke_n^2 + Me_n^3 + O(e_n^4)$$

tada

$$\beta = y_n - x_n = -e_n + Ke_n^2 + Me_n^3 + O(e_n^4)$$

Koristeći Tejlorov razvoj u okolini rešenja α dobijamo

$$f(y_n) = f'(\propto)((y_n - \propto) + c_2(y_n - \propto)^2 + c_3(y_n - \propto)^3 + O(e_n^6)$$

$$f(x_n) = f'(\propto)(e_n + c_2{e_n}^2 + c_3{e_n}^3 + O(e_n^4))$$

$$f'(x_n) = f'(\propto)(1 + 2c_2e_n + 3c_3{e_n}^2 + O(e_n^3))$$

Sledi

$$2\big(f(y_n) - f(x_n)\big) = 2f'(\propto)(-e_n + (y_n - \propto) - c_2{e_n}^2 - c_3{e_n}^3 + O(e_n^5))$$

Dalje

$$\frac{\beta f(y_n)}{2\big(f(y_n)-f(x_n)\big)-\beta f'(x_n)}$$
$$= (y_n-\propto) - 2K(y_n-\propto)e_n + \frac{2}{e_n}(y_n-\propto)^2 - (6K-c_2)(y_n-\propto)^2$$
$$-(2M+2Kc_2-c_3-2K^2)(y_n-\propto){e_n}^2 + \frac{4}{{e_n}^2}(y_n-\propto)^3 + O(e_n^5)$$

Zbog toga

$$e_{n+1} = y_n-\propto - \Bigg((y_n-\propto) - 2K(y_n-\propto)e_n + \frac{2}{e_n}(y_n-\propto)^2 - (6K-c_2)(y_n-\propto)^2$$
$$-(2M+2Kc_2-c_3-2K^2)(y_n-\propto){e_n}^2 + \frac{4}{{e_n}^2}(y_n-\propto)^3 + O(e_n^5)\Bigg)$$
$$= 2K(y_n-\propto)e_n - \frac{2}{e_n}(y_n-\propto)^2 + (6K-c_2)(y_n-\propto)^2$$
$$+(2M+2Kc_2-c_3-2K^2)(y_n-\propto){e_n}^2 - \frac{4}{{e_n}^2}(y_n-\propto)^3 + O(e_n^5)$$

Uvrstimo $y_n-\propto= Ke_n^2 + Me_n^3 + O(e_n^4)$ u prethodnu jednakost i dobijamo jednačinu greške

$$e_{n+1} = K(Kc_2-c_3){e_n}^4 + O({e_n}^5)\blacksquare$$

Ako za $y_n = g(x_n)$ u prethodnoj šemi izaberemo Njutnov iterativni postupak onda familija se redukuje na metodu Trauba –Ostrowskog.

U radu [2] za $y_n = g(x_n)$ je izabran sledeći kavdratno konvergentan postupak

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)+f'(x_n)}$$

2.2 Jarrattov postupak

Možemo reći da optimalni postupci četvrtog reda konvergencije kod kojih imamo evaluaciju funkcije i dve evaluacije prvog izvoda su postupci Jarrattovog tipa. Jarratt je prvo koristio razmeru $\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$. Postupak je dat sledećim pravilom

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Jednačina greške je

$$e_{n+1} = \left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}\right)e_n^4 + O(e_n^5)$$

Vidimo da imamo jednu evaluaciju funkcije i dve evaluacije prvog izvoda.

2.2.1 Prva modifikacija

Katri i Abasbandi je prezentovao sledeću modifikaciju Jarrattovog postupka. Posmatra se sledeće pravilo

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[1 + \sum_{j=1}^{4}\beta_j\left(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right)^j\right]$$

gde je $\beta_j \in \mathbb{R}$. U sledećoj teoremi se dokazuje da je metoda četvrtog reda konvergencije.

Teorema 9. *Neka je $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovoljno glatka funkcija sa jedinstvenim rešenjem $\propto \in D$, gde je D otvoreni interval. Metode iz iterativne familije su četvrtog reda konvergencije, ako $\beta_1 = \frac{21}{8} - \beta_4$, $\beta_2 = -\frac{9}{2} - 3\beta_4$ i $\beta_3 = \frac{15}{8} - 3\beta_4$. β_4 je slobodan realan parametar. Metode iz iterativne familije zadovoljavaju sledeću jednačinu greške*

$$e_{n+1} = \left(\left(\frac{64}{27}\beta_4 + \frac{85}{9}\right)c_2^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}\right)e_n^4 + O(e_n^5)$$

Dokaz. Posmatramo Tejlorov razvoj za $f(x_n)$ i $f'(x_n)$ u okolini rešenja α.

$$f(x_n) = f'(\propto)(e_n + c_2 {e_n}^2 + c_3 {e_n}^3 + c_4 {e_n}^4 + O(e_n^5))$$

$$f'(x_n) = f'(\propto)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 {e_n}^2 + 4c_4 {e_n}^3 + O(e_n^4)).$$

Koristeći gornje jednačine u prvom koraku pokazanog metoda, dobijamo

$$y_n - \propto = \frac{1}{3} e_n + \frac{2}{3} c_2 {e_n}^2 + \left(\frac{4}{3} c_3 - \frac{4}{3} {c_2}^2\right) {e_n}^3 + O(e_n^4).$$

Tejlorov razvoj za $f'(y_n)$ u okolini rešenja α je

$$f'(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (y_n - \propto)^k$$

koristeći prethodno, dobijamo

$$f'(y_n) = f'(\alpha) + \frac{2}{3} f'(\alpha) c_2 e_n + \frac{1}{3} f'(\alpha)(4c_2^2 + c_3){e_n}^2 - \frac{4}{27} f'(\alpha)(-27c_3c_2 +$$
$$18c23 - c4en3 + O(en4)$$

Odavde

$$\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = 1 - \frac{4}{3} c_2 e_n + \left(4c_2^2 + \frac{8}{3} c_3\right) {e_n}^2 + \left(\frac{40}{3} c_3 c_2 - \frac{32}{3} c_2^3 - \frac{104}{27} c_4\right) {e_n}^3 + O(e_n^4)$$

Na kraju uvrstimo u driugi korak postupka i dobijamo

$$\begin{aligned}
e_{n+1} = \alpha &+ (-\beta_1 - \beta_2 - \beta_4 - \beta_3) e_n + \frac{1}{3} c_2 (19\beta_4 + 7\beta_1 + 15\beta_3 + 11\beta_2 + 3){e_n}^2 \\
&+ \left(\left(\frac{38}{3}\beta_4 + 10\beta_3 + \frac{14}{3}\beta_1 + \frac{22}{3}\beta_2 + 2\right) c_3 \right. \\
&+ \left. \left(-34\beta_4 - \frac{130}{9}\beta_2 - \frac{22}{3}\beta_1 - \frac{70}{3}\beta_3 - 2\right) c_2^2 \right) {e_n}^3 \\
&+ \left(\frac{497}{27}\beta_4 c_4 + \frac{289}{27}\beta_2 c_4 + \frac{131}{9}\beta_3 c_4 + 3c_4 + 4c_2^3 - \frac{77}{3}\beta_1 c_2 c_3 + \frac{185}{27}\beta_1 \right. \\
&- c_4 - 7c_3 c_2 + \frac{2584}{27}\beta_3 c_2^3 + \frac{460}{9}\beta_2 c_2^3 + \frac{4252}{27}\beta_4 c_2^3 + \frac{64}{3}\beta_1 c_2^3 \\
&- \left. \frac{253}{3} a_3 c_3 c_2 - \frac{463}{9}\beta_2 c_3 c_2 - \frac{373}{3}\beta_4 c_3 c_2 \right) e_n^4 + O(e_n^5)
\end{aligned}$$

U prethodnoj jednačini greške izrazi drugog i trećeg reda su jednaki nuli ko i samo ako: $\beta_1 = -\frac{21}{8} - \beta_4$, $\beta_2 = -\frac{9}{2} + 3\beta_4$ i $\beta_3 = \frac{15}{8} - 3\beta_4$. Odavde sledi da je metoda bar četvrtog reda konvergencije sa svaki realan parametar β_4.■

Ova metoda može se nazvati ispravkom metode Jarratta, jer prvi korak jako liči na metodu Jarratta koju možemo posmatrati u sledećem obliku

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{3f'(y_n) - 2f'(x_n)}\right)$$

2.2.2 Druga modifikacija

Ova tehnika sastoji se iz toga da se koriste funkcije na već postojećim metodama i tako dođe do povišenja reda konvergencije.

Posmatramo dve iterativne metode trećeg reda konvergencije. Ove metode nisu optimalne.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - f'(y_n)}$$

i Homajerova metoda

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right)$$

Metoda četvrtog reda konvergencije ima sledeći oblik

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - f'(y_n)}[G(t) \times H(\tau)]$$

gde su $G(t)\ i\ H(\tau)$ dve realne funkcije a $t = \frac{f(x)}{f'(x)}$, i $\tau = \frac{f'(y)}{f'(x)}$.

Sledeća teorema pokazuje koje uslove moraju zadovoljavati funkcije $G(t)\ i\ H(\tau)$ da imamo red konvergencije četiri.

Teorema 10. *Neka je $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovoljno glatka funkcija sa jedinstvenim rešenjem $\propto \in D$, gde je D otvoreni interval. Tada klasa metoda je četvtog reda konvergencije, ako važi*

$$G(0) = 1, \quad G'(0) = G''(0) = 0, \ \left|G^{(3)}(0)\right| \leq +\infty$$

$$H(1) = 1, \quad H'(0) = \frac{1}{4}, \ H''(1) = \frac{3}{2}, \ \left|H^{(3)}(1)\right| \leq +\infty$$

i zadovoljena je sledeća jednačina greške

$$e_{n+1} = \left(-c_2c_3 + \frac{c_4}{9} - \frac{1}{6}G^{(3)}(0) + \frac{1}{81}{c_2}^3(297 + 32H^{(3)}(1))\right)e_n^4 + O(e_n^5)\,.$$

Dokaz. Neka je $e_n = x_n - \alpha$ greška u n-toj iteraciji. Posmatramo Tejlorov razvoj za $f(x_n)$ i $f'(x_n)$ u okolini rešenja α.

$$f(x_n) = f'(\propto)(e_n + c_2{e_n}^2 + c_3{e_n}^3 + c_4{e_n}^4 + O(e_n^5))$$

$$f'(x_n) = f'(\propto)(1 + 2c_2e_n + 3c_3{e_n}^2 + 4c_4{e_n}^3 + O(e_n^4)).$$

Koristeći prethodne dve jednačine i prvi korak iterativne familije dobijamo

$$x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$\propto + \frac{e_n}{3} + \frac{2c_2{e_n}^2}{3} - \frac{4}{3}(c_2^2 - c_3){e_n}^3 + \frac{2}{3}(4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)\,{e_n}^4 + O(e_n^5)$$

Koristeći opet Tejlorov razvoj, imamo

$$f'(y_n) = f'(\alpha) + \frac{2}{3}f'(\alpha)c_2e_n + \frac{1}{3}f'(\alpha)(4c_2^2 + c_3){e_n}^2 + \frac{4}{27}f'(\alpha)(27c_3c_2 -$$

18𝑐23+𝑐4𝑒𝑛3+ 𝑂(𝑒𝑛4)

Sada

$$f'(y_n) - f'(x_n) = 2f'(\alpha) + \frac{8}{3}f'(\alpha)c_2e_n + \frac{2}{3}f'(\alpha)(2c_2^2 + 5c_3){e_n}^2 + \frac{4}{27}f'(\alpha)(27c_3c_2 - 18c_2^3 + 28c_4){e_n}^3 + O(e_n^4)$$

U drugi korak iterativne šeme uvrstimo prethodno i dobijamo

$$\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)-f'(y_n)} = e_n - \frac{c_2{e_n}^2}{3} - \frac{2}{9}(c_2^2 - 3c_3){e_n}^3 + \frac{1}{27}(50c_2^3 - 15c_2c_3 - 29c_4)\,{e_n}^4 + O(e_n^5)$$

Sada imamo

$$x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - f'(y_n)} = \frac{c_2{e_n}^2}{3} + \frac{2}{9}(c_2^2 - 3c_3){e_n}^3 + \frac{1}{27}(-50c_2^3 + 15c_2c_3 + 29c_4)\,{e_n}^4 + O(e_n^5)$$

Koristeći prethodne jednačine, dobijamo

$$\frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - f'(y_n)}[G(t) \times H(\tau)] = e_n + \left(c_2c_3 - \frac{c_4}{9} + \frac{1}{6}G^{(3)}(0) - \frac{1}{81}{c_2}^3(297 + 32H^{(3)}(1))\right)e_n^4 + O(e_n^5)$$

I jednačina greške

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - f'(y_n)}[G(t) \times H(\tau)] =$$

$$\left(-c_2c_3 + \frac{c_4}{9} - \frac{1}{6}G^{(3)}(0) + \frac{1}{81}{c_2}^3(297 + 32H^{(3)}(1))\right)e_n^4 + O(e_n^5)\ .\blacksquare$$

Neki tipični primeri za prethodnu familiju

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - f'(y_n)}\left[\left(1 + \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3\right)\left(2 - \frac{7f'(y)}{4f'(x)} + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}\right)^2\right)\right]$$

gde je jednačina greške

$$e_{n+1} = \frac{1}{9}(-9 + 33{c_2}^3 - 9c_2c_3 + c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\ .$$

i

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - f'(y_n)}\left[\left(1 + \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^4\right)\left(2 - \frac{7f'(y)}{4f'(x)} + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}\right)^2\right)\right]$$

sa jednačinom greške

$$e_{n+1} = \frac{1}{9}(33{c_2}^3 - 9c_2c_3 + c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\ .$$

Lako možemo konstruisati još jednu familiju metoda koristeći sad Homajerovu metodu.

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right)[G(t) \times H(\tau)]$$

Teorema 11. *Neka je $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovoljno glatka funkcija sa jedinstvenim rešenjem $\propto \in D$, gde je D otvoreni interval. Tada klasa metoda je četvrtog reda konvergencije, ako važi*

$$G(0) = 1, \quad G'(0) = G''(0) = 0, \quad \left|G^{(3)}(0)\right| \leq +\infty$$

$$H(1) = H''(1) = 1, \quad H'(0) = -\frac{1}{4}, \quad \left|H^{(3)}(1)\right| \leq +\infty$$

i zadovoljena je sledeća jednačina greške

$$e_{n+1} = \left(-c_2c_3 + \frac{c_4}{9} - \frac{1}{6}G^{(3)}(0) + \frac{1}{81}{c_2}^3(237 + 32H^{(3)}(1))\right)e_n^4 + O(e_n^5)\ .$$

Dokaz. Dokaz ove teoreme je u potpunosti sličan dokazu Teroreme 10.■

2.2.3 Primeri

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right)\left[\left(1+\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^4\right)\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right)^2\right)\right]$$

sa jednačinom greške

$$e_{n+1} = \frac{1}{9}\left(\frac{79{c_2}^3}{27} - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}\right)e_n^4 + O(e_n^5)$$

i

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right)\left[\left(1+\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^4\right)\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right)^2 - \left(\frac{f'(y)}{f'(x)}-1\right)^3\right)\right]$$

sa jednačinom greške

$$e_{n+1} = \frac{1}{9}(5{c_2}^3 - 9c_2c_3 + c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\ .$$

3 Nova familija postupaka

3.1 Gini sredina

Gini sredina je data sa

$$G_{r,p}(a,b) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^p + b^p}{a^r + b^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}}, & r \neq p \\ exp\left(\dfrac{a^r lna + b^r lnb}{a^r + b^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \sqrt{ab}, & r = p = 0 \end{cases}$$

Ako se $f'(x)$ aproksimira sa Gini sredinom u klasičnoj Njutnovoj metodi, dobija se nova metoda, Njutnova metoda sa Gini sredinom (GN).

Lako možemo videti da GN metoda sadrži *p*-power Njutnovu metodu kao specijalan slučaj za $r = 0, p \neq 0$. Štaviše, Njutnove metode sa aritmetičkom, harmonijskom i geometrijskom sredinom su specijalni slučajevi *p*-power Njutnove metode za $p = 1, p = -1 \; i \; p = 0$ respektivno, i tako i specijalni slučajevi metode GN.

Definišemo

$$\phi 1(a,b,r,p) = \left(\frac{a^p+b^p}{a^r+b^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}}$$

$$\phi 2(a,b,r,p) = exp\left(\frac{a^r lna+b^r lnb}{a^r+b^r}\right)$$

$$\phi 3(a,b,r,p) = \sqrt{ab}.$$

Uvodimo pojednostavljivanje sa $\phi = \frac{b}{a}$.

Teorema 12. $\phi 1(a,b,r,p) = a\phi 1(1,\phi,r,p), \qquad r \neq p.$

Dokaz. Znamo da je

$$\phi 1(a,b,r,p) = \left(\frac{a^p+b^p}{a^r+b^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}} \qquad \text{i} \qquad b = a\phi.$$

Iz toga sledi

$$\left(\frac{a^p+b^p}{a^r+b^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}} = \left(\frac{a^p+a^p\phi^p}{a^r+a^r\phi^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}} = \left(\frac{a^{p-r}(1+\phi^p)}{1+\phi^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}} = a\left(\frac{1+\phi^p}{1+\phi^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}}. \blacksquare$$

Teorema 13. $\phi 2(a,b,r,r) = a\phi 2(1,\phi,r,r), \quad r = p \neq 0.$

Dokaz. Znamo da je

$$\phi 2(a,b,r,p) = exp\left(\frac{a^r lna+b^r lnb}{a^r+b^r}\right) \qquad \text{i} \qquad b = a\phi.$$

Iz toga sledi

$$exp\left(\frac{a^r lna+b^r lnb}{a^r+b^r}\right) = exp\left(\frac{lna+\phi^r lna+\phi^r ln\phi}{1+\phi^r}\right) = exp\left(\frac{lna+\phi^r lna}{1+\phi^r} + \frac{\phi^r ln\phi}{1+\phi^r}\right) = a\phi^{\frac{\phi^r}{1+\phi^r}}. \blacksquare$$

Teorema 14. $\phi 3(a,b,r,r) = a\phi 3(1,\phi,r,r), \quad r = p = 0.$

Dokaz. Znamo da je

$$\phi 3(a,b,r,p) = \sqrt{ab} \quad \text{i} \quad b = a\phi.$$

Iz toga sledi

$$\sqrt{ab} = a\sqrt{\phi}. \blacksquare$$

Neka je

$$\phi_G(a,b,r,p) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^p+b^p}{a^r+b^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}}, & r \neq p \\ exp\left(\dfrac{a^r lna + b^r lnb}{a^r+b^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \sqrt{ab}, & r = p = 0 \end{cases}$$

tada je

$$\phi_G(a,b,0,0) = \sqrt{ab}$$

$$\phi_G(a,b,0,1) = \frac{a+b}{2}$$

$$\phi_G(a,b,0,-1) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

3.1.1 Postupak sa aritmetičkom sredinom iz rada [6]

Posmatrajmo slučaj $r = 0, p = 1$. Itarativni postupak je dat sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_G(f'(x_n), f'(y_n), r, p)} G\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) H\left(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right)$$

Red konvergencije ovog postupka je 4. Jednačina greške

$$e_{n+1} = \left(-c_2 c_3 + \frac{c_4}{9} - \frac{1}{6} G^{(3)}(0) + \frac{1}{81} {c_2}^3 (297 + 32 H^{(3)}(1))\right) e_n^4 + O(e_n^5).$$

3.1.2 Postupak sa harmonijskom sredinom iz rada [6]

Posmatrajmo slučaj $r = 0, p = -1$. Itarativni postupak je dat sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_G(f'(x_n), f'(y_n), r, p)} G\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) H\left(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right)$$

Red konvergencije ovog postupka je 4. Jednačina greške je

$$e_{n+1} = \left(-c_2 c_3 + \frac{c_4}{9} - \frac{1}{6} G^{(3)}(0) + \frac{1}{81} {c_2}^3 (237 + 32 H^{(3)}(1))\right) e_n^4 + O(e_n^5).$$

3.1.3 Nova modifikacija Jarrattovog postupka

Dobijamo jednostvnu modifikaciju Jarrattovog postupka bez funkcija H i G. Koristimo samo jednu pomoćnu funkciju. Kao specijalne slučajeve dobijamo varijante postupka iz [6].

3.1.3.1 Harmonijska sredina, $r = 0, p = -1$.

Neka je

$$\phi_G(a, b, 0, -1) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Itarativni postupak je dat sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_G(f'(x_n), f'(y_n), r, p)}\left(1 + \frac{1 - z_n}{4} + \frac{(z_n - 1)^2}{8}(5 + r + p)\right)$$

gde je $z_n = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$

Red konvergencije ovog postupka je 4. Jednačina greške je

$$e_{n+1} = \left(\frac{79}{27}{c_2}^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

3.1.3.2 Aritmetička sredina, $r = 0, p = 1$.

Neka je

$$\phi_G(a, b, 0,1) = \frac{a + b}{2}$$

Itarativni postupak je dato sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_G(f'(x_n), f'(y_n), r, p)}\left(1 + \frac{1 - z_n}{4} + \frac{(z_n - 1)^2}{8}(5 + r + p)\right)$$

gde je $z_n = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$. Red konvergencije ovog postupka je 4. Jednačina greške je

$$e_{n+1} = \frac{1}{9}(33{c_2}^3 - 9c_2c_3 + c_4)e_n^4 + O(e_n^5).$$

3.1.3.3 Geometrijska sredina, $r = 0, p = 0$.

Neka je

$\phi_G(a, b, 0,0) = \sqrt{ab}$

Itarativni postupak je dato sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_G(f'(x_n), f'(y_n), r, p)}\left(1 + \frac{1 - z_n}{4} + \frac{(z_n - 1)^2}{8}(5 + r + p)\right)$$

gde je $z_n = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$. Red konvergencije ovog postupka je 4. Jednačina greške je

$$e_{n+1} = \left(\frac{89}{27}{c_2}^3 - c_2c_3 + \frac{c_4}{9}\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

3.1.3.4 Opšti slučaj r, p

Neka je

$$\phi_G(a,b,r,p) = \begin{cases} \left(\frac{a^p+b^p}{a^r+b^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}}, & r \neq p \\ exp\left(\frac{a^r lna + b^r lnb}{a^r+b^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \sqrt{ab}, & r = p = 0 \end{cases}$$

Itarativni postupak je dato sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_G(f'(x_n), f'(y_n), r, p)}\left(1 + \frac{1-z_n}{4} + \frac{(z_n-1)^2}{8}(5+r+p)\right)$$

gde je $z_n = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$. Pomoću programa *Mathematica* tražimo izvode iterativnog postupka $x_{n+1} = F(x_n)$, do reda tri, i rešavamo dobijene izraze.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{\phi_G\left(f'(x), f'\left(x - \frac{2\,f(x)}{3\,f'(x)}\right), r, p\right)}\left(1 + \frac{1 - \frac{f'\left(x - \frac{2\,f(x)}{3\,f'(x)}\right)}{f'(x)}}{4} + \frac{\left(\frac{f'\left(x - \frac{2\,f(x)}{3\,f'(x)}\right)}{f'(x)} - 1\right)^2}{8}(5+r+p)\right)$$

Uslovi za red konvergencije četiri su da svaki izraz bude jednak nuli, zbog Teoreme 8.

Uslov za drugi red je

$$1 - f'(\alpha)^{1+\frac{p-r}{-p+r}} = 0$$

Uslovi za 3. red su

$\frac{2}{3}\left(-2c_2 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right) = 0$ i $\frac{-4c_2 f'(\alpha) + 2f''(\alpha)}{3f'(\alpha)} = 0$ i $\frac{1}{3}f'(\alpha)^{1+\frac{p-r}{-p+r}}\left(-4c_2 f'(\alpha) + 2f''\alpha = 0\right.$

Uslovi za 4. red su

$\frac{1}{18}f'(\alpha)^{1+\frac{p-r}{-p+r}}\Big(-4(2+p+r){c_2}^2f'(\alpha)^2+16c_2f'(\alpha)f''(\alpha)+(-6+r+$
$pf''\alpha 2+5f'\alpha-6c3f'\alpha+f(3)\alpha=0$

$$\frac{-8{c_2}^2f'(\alpha)^2+16f'(\alpha)f''(\alpha)-6f''(\alpha)^2+5f'(\alpha)\left(-6c_3f'(\alpha)+f^{(3)}(\alpha)\right)}{18f'(\alpha)^2}=0$$

$$\frac{4(-17+10r){c_2}^2f'(\alpha)^2+76c_2f'(\alpha)f''(\alpha)-(21+10r)f''(\alpha)^2+20f'(\alpha)(-6c_3f'(\alpha)+f^{(3)}(\alpha))}{73f'(\alpha)^2}=0$$

Svi uslovi su ispunjeni, sledi da je za svako r i svako p red konvergencije je četiri. Asiptotska konstanta greške se dobija po Teoremi 8., i to je $\frac{F^{(4)}(\alpha)}{4!}$.

Pomoću programa *Mathematica* dobija se da je

$$\begin{aligned}\frac{89}{27}{c_2}^3-c_2c_3+\frac{c_4}{9}+\frac{1}{27}&\left((89+10p+10r){c_2}^3-27c_2c_3+3c_4\right)\\&+\frac{1}{27}\left((89+20r){c_2}^3-27c_2c_3+3c_4\right)\\&=\frac{1}{27}\left((267+10+30r){c_2}^3-81c_2c_3+9c_4\right)\end{aligned}$$

Zbog toga je jednačina greške

$$e_{n+1}=\frac{1}{27}\left((267+10+30r){c_2}^3-81c_2c_3+9c_4\right)e_n^4+O(e_n^5).$$

3.2 Stolarsky sredina

Stolarsky sredina je data sa

$$E_{r,p}(a,b)=\begin{cases}\left(\frac{r}{s}\,\frac{b^p-a^p}{b^r-a^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}}, & r\,p(r-p)\neq 0\\ exp\left(-\frac{1}{r}+\frac{a^r lna-b^r lnb}{a^r-b^r}\right), & r=p\neq 0\\ \left(\frac{1}{r}\,\frac{b^r-a^r}{lnb-lna}\right)^{1/r}, & r\neq 0, p=0\\ \sqrt{ab}, & r=p=0\end{cases}$$

Ako se $f'(x)$ aproksimira sa Stolarsky sredinom u klasičnoj Njutnovoj metodi, dobija se nova metoda, Njutnova metoda sa Stolarsky sredinom (SN).

SN metoda sadrži *p*-power Njutnovu metodu kao specijalan slučaj za $r=2p$. Štaviše, Njutnove metode sa aritmetičkom, logaritamska i geometrijskom sredinom su specijalni slučajevi za $r=2,p=1;$ $r=1,p=0\ i\ r=p=0$ respektivno, i tako i specijalni slučajevi metode SN.

Neka je

$$\phi_S(a,b,r,p) = \begin{cases} \left(\frac{r}{s}\ \frac{b^p - a^p}{b^r - a^r}\right)^{\frac{1}{(p-r)}}, & r\,p(r-p) \neq 0 \\ exp\left(-\frac{1}{r} + \frac{a^r lna - b^r lnb}{a^r - b^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \left(\frac{1}{r}\ \frac{b^r - a^r}{lnb - lna}\right)^{1/r}, & r \neq 0, p = 0 \\ \sqrt{ab}, & r = p = 0 \end{cases}$$

Itarativni postupak je dat sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_S(f'(x_n), f'(y_n), r, p)}\left(1 + \frac{1 - z_n}{4} + \frac{(z_n - 1)^2}{8}(5 + r + p)\right)$$

gde je $z_n = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$.

4 Numerički eksperiment

U ovom delu prikazaćemo numeričke rezultate sa postupcima opisanim u trećem poglavlju. Sva računanja su urađena u programskom paketu *Mathematica* 8. Preciznost je povećana na 20000 cifara sa *SetPrecision* funkcijom. Koristili smo sledeći izlazni kriterijum: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ i $|f(x_k)| < \varepsilon$ gde je α tačno rešenje posmatrane jednačine i $\varepsilon = 10^{-20000}$. U slučajevima kada tačno rešenje nije dostupno, koristili smo njegovu aproksimaciju α^* koja je računata sa 30000 cifara, ali smo prikazali samo 20 cifara. Numerički red konveregencije ord je računat prema

$$ord_k = \frac{\ln\left(|x_{k+1} - \alpha| / |x_k - \alpha|\right)}{\ln\left(|x_k - \alpha| / |x_{k-1} - \alpha|\right)}, k = 1,2, \dots$$

i predstavlja aproksimaciju reda konvergencije p, a aproksimacije C_k asimptotske konstante greške C računate su prema

$$C_k = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}, k = 1,2, \dots$$

Kod svih postupaka $C_k \approx 4$.

Posmatrali smo sledeće jednačine.

$f_1(x) = x^3 - 10$, [5], [10], $\alpha_1^* \approx 2.1544346900318837218$, $x_0 = 2$

$f_2(x) = 3x^2 - e^x$, [5], [10], $\alpha_2^* \approx 0.91000757248870906066$, $x_0 = 2$

$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, [5], [6], [7], [9], $\alpha_3^* \approx 1.3652300134140968458$, $x_0 = 2$

$f_4(x) = e^{x^2 + 7x - 30} - 1$, [5], [6], [7], [10], $\alpha_4 = 3$, $x_0 = 2.8$

$f_5(x) = 8x - \cos x - 2x^2$, [10], $\alpha_5 = 0.12807710275379877853$, $x_0 = 1$

$f_6(x) = e^{-x} + \cos(x)$, [2], [15], $\alpha_6 = 1.7461395304080124177$, $x_0 = 1.5$

$f_7(x) = x^3 + 1$, [2], [15], $\alpha_7 = -1$, $x_0 = -0.8$

$$f_8(x) = e^x - 4x^2,\ [2],\ [15],\ \alpha_8 = 0.7148059123627778061 4,\ x_0 = 0.75$$

$$f_9(x) = x - 3\ln(x),\ [2],\ [15],\ \alpha_9 = 1.8571838602078353365,\ x_0 = 2$$

$$f_{10}(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{4},[2],[15],\alpha_{10} = 0.4099920179891371316 2,\ x_0 = 0.5\,.$$

Uz svaku jednačinu su navedene reference u kojima je posmatrana ista jednačina, njeno tačno ili dobro približno rešenje i početna vrednost iterativnog postupka.

U Tabeli 1 posmatramo indeks efikasnosti nekih postupaka.

	m	p	$p^{\frac{1}{m}}$
Njutnov postupak	2	2	1.4142
Postupak Ostrowskog	3	4	1.5874
Jarrattov postupak	3	4	1.5874
GN postupak	3	4	1.5874

Tabela 1. Indeks efikasnosti postupaka

U Tabeli 2. posmatramo prvih četiri članova iterativnog niza za neke postupke i date primere.

	Njutnov postupak	Postupak Ostrowskog	Jarrattov postupak
f_1	2.0000000000000000000 2.1666666666666666666 2.1545036160420775805 2.1544346922369133091 2.1544346900318837240	2.0000000000000000000 2.1544795783926218708 2.1544346900318837220 2.1544346900318837217 2.1544346900318837217	2.0000000000000000000 2.1544795783926218708 2.1544346900318837220 2.1544346900318837217 2.1544346900318837217
f_2	2.00000000000000000000 1.00000000000000000000 0.91415528183254324452 0.91001766578340593101 0.91000757254888815222	2.00000000000000000000 0.93039712279597701005 0.91000761935907196264 0.91000757248870906066 0.91000757248870906066	2.00000000000000000000 0.92421157327829488037 0.91000758357758792015 0.91000757248870906066 0.91000757248870906066
f_3	2.0000000000000000000 1.5000000000000000000 1.3733333333333333333 1.3652620148746266212 1.3652300139161466493	2.0000000000000000000 1.3716216216216216216 1.3652300135599047517 1.3652300134140968457 1.3652300134140968457	2.0000000000000000000 1.3716216216216216216 1.3652300135599047517 1.3652300134140968457 1.3652300134140968457
f_4	2.7999999999999998223 3.7472870885351669302 3.6782981385940668321 3.6086502555239381751 3.5383311961249048249	2.7999999999999998223 3.2736510935712137822 3.1067348139344482563 3.0071690399262599598 3.000000237578997318	2.7999999999999998223 3.2737109851358265582 3.1094793376818140467 3.0083683778210599812 3.0000004895987548801
f_5	1.00000000000000000000 −0.12769398211078904895 0.11636147954578344175 0.12805012731547179050 0.12807710261007996206	1.00000000000000000000 0.11386263511123219412 0.12807710242196597287 0.12807710275379877853 0.12807710275379877853	1.00000000000000000000 0.11341997406905995897 0.12807710235114813269 0.12807710275379877853 0.12807710275379877853
f_6	1.500000000000000000 1.740751521954120883 1.7461352047237549716 1.746139530405196359 1.7461395304080124176	1.5000000000000000000 1.7460996395007537476 1.7461395304080124176 1.7461395304080124176 1.7461395304080124176	1.5000000000000000000 1.7460974425716794863 1.7461395304080124175 1.7461395304080124176 1.7461395304080124176
f_7	−0.80000000000000004441 −1.05416666666666663840 −1.00273559620956080550 −1.00000745628392377500 −1.00000000005559561724	−0.80000000000000004441 −1.00171929819903065400 −1.00000000000580191916 −1.00000000000000000000 −1.00000000000000000000	−0.80000000000000004441 −1.00171929819903065400 −1.00000000000580191916 −1.00000000000000000000 −1.00000000000000000000
f_8	0.75000000000000000000 0.71574813701871223591 0.71480663061301834833 0.71480591236319590034 0.71480591236277780614	0.75000000000000000000 0.71480673470296929773 0.71480591236277780614 0.71480591236277780614 0.71480591236277780614	0.75000000000000000000 0.71480673089773606567 0.71480591236277780614 0.71480591236277780614 0.71480591236277780614
f_9	2.0000000000000000000 1.8411169166403281435 1.8570034258266720016 1.8571838372016781093 1.8571838602078349624	2.0000000000000000000 1.8570940629423715493 1.8571838602078353251 1.8571838602078353364 1.8571838602078353364	2.0000000000000000000 1.8570891260765583238 1.8571838602078353215 1.8571838602078353364 1.8571838602078353364
f_{10}	0.50000000000000000000 0.41673615739498134812 0.41003598493221302042 0.40999201988233462434 0.40999201798913713513	0.50000000000000000000 0.41003604464897651268 0.40999201798913713515 0.40999201798913713162 0.40999201798913713162	0.50000000000000000000 0.41003604468583507836 0.40999201798913713515 0.40999201798913713162 0.40999201798913713162

Tabela 2.

U Tabeli 3 posmatramo prvih četiri članova iterativnog niza GN postupka za različite parametre p i r, i neke primere.

	GN postupak $r=0, p=-1.$	GN postupak $r=0, p=1$	GN postupak $r=0, p=0$	GN postupak $r=-2, p=-6$
f_1	2.00000000000000000	2.00000000000000000	2.00000000000000000	2.00000000000000000
	2.15464225332144687	2.15470510047760656	2.15467388786609871	2.15437556255944208
	2.15443469003188420	2.15443469003188550	2.15443469003188469	2.15443469003188372
	2.15443469003188372	2.15443469003188372	2.15443469003188372	2.15443469003188372
	2.15443469003188372	2.15443469003188372	2.15443469003188372	2.15443469003188372
f_2	2.00000000000000000	2.00000000000000000	2.00000000000000000	2.00000000000000000
	0.92487653032499470	0.92512711249485070	0.92500135636194369	0.92415080714443014
	0.91000760361239746	0.91000761303715441	0.91000760818845292	0.91000757876122225
	0.91000757248870906	0.91000757248870906	0.91000757248870906	0.91000757248870906
	0.91000757248870906	0.91000757248870906	0.91000757248870906	0.91000757248870906
f_3	2.00000000000000000	2.00000000000000000	2.00000000000000000	2.00000000000000000
	1.37985702293738008	1.38273010546500479	1.38128455352159013	1.37420084262141902
	1.36523002733658058	1.36523004952552105	1.36523003631691079	1.36523001350515557
	1.36523001341409684	1.36523001341409684	1.36523001341409684	1.36523001341409684
	1.36523001341409684	1.36523001341409684	1.36523001341409684	1.36523001341409684
f_4	2.79999999999999822	2.79999999999999822	2.79999999999999822	2.79999999999999822
	3.00002346202340046	3.0000295209976220	3.0000264948811304	3.0000013784851496
	3.00000000000000000	3.00000000000000000	3.00000000000000000	3.00000000000000000
	3.00000000000000000	3.00000000000000000	3.00000000000000000	3.00000000000000000
	3.00000000000000000	3.00000000000000000	3.00000000000000000	3.00000000000000000
f_7	−0.8000000000000000	−0.8000000000000000	−0.8000000000000000	−0.8000000000000000
	−1.012046912300035	−1.015708251215300	−1.013947134332261	−0.989443571342932
	−1.000000051732695	−1.000000188541858	−1.000000105137128	−0.999999998718684
	−1.000000000000000	−1.000000000000000	−1.000000000000000	−1.000000000000000
	−1.000000000000000	−1.000000000000000	−1.000000000000000	−1.000000000000000
f_{10}	0.50000000000000000	0.50000000000000000	0.50000000000000000	0.50000000000000000
	0.41010143878584872	0.41012604243815359	0.41011369302022446	0.41003097825759314
	0.40999201798913752	0.40999201798913824	0.40999201798913781	0.40999201798913713
	0.40999201798913713	0.40999201798913713	0.40999201798913713	0.40999201798913713
	0.40999201798913713	0.40999201798913713	0.40999201798913713	0.40999201798913713

Tabela 3.

U Tabeli 4. posmatramo $-\log(|x_4 - \alpha|)$ za različite vrednosti parametara p i r kod GN postupka za primer f_7.

r ↓p→	-6	-4	-2	0	2	4	6
-6	89.85	109.02	216.54	162.48	159.81	126.16	109.29
-5	98.54	123.6	151.82	198.53	135.63	116.21	103.32
-4	109.02	221.75	176.87	148.16	123.2	109.29	98.71
-3	122.84	153.38	176.0	131.33	115.1	104.15	95.04
-2	216.54	176.87	144.61	121.38	109.29	100.13	91.99
-1	149.12	181.96	130.43	114.51	104.82	96.81	89.33
0	162.48	148.16	121.38	109.29	101.12	93.88	86.86
1	261.48	133.1	114.72	104.98	97.82	91.11	84.46
2	159.81	123.2	109.29	101.12	94.67	88.36	82.01
3	138.83	115.62	104.53	97.46	91.53	85.55	79.51
4	126.16	109.29	100.13	93.88	88.36	82.69	76.95
5	116.82	103.73	95.96	90.34	85.17	79.8	74.38
6	109.29	98.71	91.99	86.86	82.01	76.95	71.85

Tabela 4.

U Tabeli 5. posmatramo $-\log(|x_k - \alpha|)$, red konvergencije i grešku za primer f_7 i iterativni postupak GN sa parametrima $r = 0, p = 1$.

k	x_k	$-\log(\lvert\alpha - x_k\rvert)$	red konverg.	greška
0	$-0.8000000000000000000000000000$	0.7	-	0.2
1	$-1.0157082512153009600575758 68$	1.8	-	0.015
2	$-1.0000001885418586514412999 64$	6.72	4.45353	1.8×10^{-7}
3	$-1.0000000000000000000000000004$	26.37	3.9935	4.2×10^{-27}
4	$-1.0000000000000000000000000000$	104.98	4.0000	$1. \times 10^{-105}$
5	$-1.0000000000000000000000000000$	419.39	4.0000	$4. \times 10^{-420}$
6	$-1.0000000000000000000000000000$	1677.05	4.0000	8.9×10^{-1678}

Tabela 5.

U Tabeli 6. posmatramo $-\log(|x_k - \alpha|)$, red konvergencije i grešku za primer f_4 i iterativni postupak GN sa parametrima $r = -2, p = -6$.

k	x_k	$-\log(\lvert\alpha - x_k\rvert)$	red konvergencije	greška
0	2.7999999999999998223	0.7	-	0.2
1	3.0000001378485149666	6.86	-	1.3×10^{-7}
2	3.0000000000000000000	31.26	3.96011	5.5×10^{-32}
3	3.0000000000000000000	128.86	4.00000	1.3×10^{-129}
4	3.0000000000000000000	519.27	4.00000	5.3×10^{-520}
5	3.0000000000000000000	2080.92	4.00000	1.1×10^{-2081}
6	3.0000000000000000000	8327.51	4.00000	$3. \times 10^{-8328}$

Tabela 6.

5 Zaključak

U radu posmatramo optimalne postupke četvrtog reda konvergencije zasnovane na postupcima Trauba-Ostrowskog i Jarratta. Kod ovih postupaka povišenje reda konvergencije postiže se odgovarajućim kombinacijama vrednosti funkcija i ubrzavanjem Njutnovog postupka u jednom dodatnom koraku. Pri tome se izvod funkcije računa samo jednom, u osnovnom koraku, tj. u Njutnovom postupku, a zatim se ta vrednost prenosi u sledeći korak

Koristeći Gini sredinu za aproksimaciju prvog izvoda dobijamu novu klasu optimalnih postupaka četvrtog reda konvergencije. U metodi imamo dva slobodna parametra. Za konkretno izabrane parametre dobijamo kao specijalan slučaj modifikacije Jarrattovog postupka. Koristeći Stolarsky sredinu dobili smo još jednu familiju optimalnih postupaka četvrtog reda konvergencije. Pokazali smo konvergenciju posmatrane familije i odredili asimptotsku konstantu greške.

Formiranje navedene familije, dokaz njene konvergencije i određivanje asimptotske konstante greške predstavlja originalni doprinos ovog rada.

U četvrtom delu prikazano je više rezultata izvedenih eksperimenata koji su urađeni u programskom paketu *Mathematica*. Primeri su uzeti iz relevantnih radova. Numerički rezultati su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

6 Literatura

[1] A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press Inc., 1966.

[2] C. Chun, B. Neta, Certain improvements of Newton’s method with fourth-order convergence, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 821–828.

[3] D. Herceg, Dj. Herceg, Means based modifications of Newton’s method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126-6133.

[4] D. Herceg, N. Krejić, Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[5] Dj. Herceg, D. Herceg, Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.

[6] F. Soleymani, S.K. Khattri, S. Karimi Vanani, Two new classes of optimal Jarratt-type fourth-order methods, Applied Mathematics Letters 25 (2012) 847–853.

[7] H.T. Kung, J.F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, J. Assoc. Comput. Mach. 21 (1974) 634–651.

[8] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.

[9] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[10] Jisheng Kou, Yitian Li, An improvement of Jarratt method, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 1816–1821.

[11] P. Jarratt, Some efficient fourth order multipoint methods for solving equations, BIT 9 (1969) 119–124.

[12] S.K. Khattri, S. Abbasbandy, Optimal fourth order family of iterative methods, Mat. Vesnik 63 (2011) 67–72.

7 Biografija

Rođena sam 1. februara 1989. godine. U Bogojevu sam završila osnovnu školu „Jožef Atila“, a u Subotici Gimnaziju „Svetozar Marković“. Godine 2008. upisala sam se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematičar. Osnovne studije sam završila 9. jula 2011. godine sa prosekom 9.04. Te iste godine upisala sam se na master studije, smer master matematika - nastava matematike.

Zaposlena sam od 2012. godine u Osnovnoj Školi „Jožef Atila“ u Bogojevu.

Novi Sad, oktobar 2014. Lidia Molnar

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Lidia Molnar
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Nova klasa optimalnih postupaka četvrtog reda
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2014.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/ 38 strana/ 6 tabela / 12 literatura
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: red konvergencije, postupak, jednačina greške
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U radu posmatramo neke iterativne postupke četvrtog reda konvergencije za rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom $f(x)=0$ koji se zasnivaju na modifikacijama postupka Njutna. Dajemo familije postupaka koje su zasnovane na ideji Trauba-Ostrowskog i Jarratta. Kao originalni deo rada dajemo familiju postupaka koja je zasnovana na aproksimaciji

prvog izvoda sredinama, dokaz njene konvergencije četvrtog reda i određivanje asimptotoske konstante greške. Numerički rezultati potvrđuju teorijska razmatranja.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.9.2013.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Helena Zarin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Lidia Molnar
AU
Mentor: dr. Dragoslav Herceg
MN
Title: New class of optimal fourth-order methods
XI
Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description 4 chapters/ 38 pages/ 6 tables/ 12 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: order of convergence, method, equation error
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N

Abstract: The aim of this paper is to study some iterative methods with fourth-order convergence in order to solve nonlinear equations with one unknown $f\left(x\right)=0$. They are based on modifications of the Newton method. We give some family of methods based on modifications of the Trub-Ostrowsy and Jarratts method. As part of the original paper, we

consider a family of methods based on aproximation of the first derivate with means, we prove the evidence of the convergence of fourth order and determination of the asymptotic constant error. Numerical results prove theoretical considerations.

AB
Accepted by the Scientific Board on: 25. 9. 2013.
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB
President: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad