UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Master rad

Mur – Smitova konvergencija

Autor:
Jovana Obradović

Mentor:
prof. dr Miloš Kurilić

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Predgovor

Početkom dvadesetog veka, potraga za fundamentalnim okvirom za izučavanje matematičke analize privlačila je mnogo pažnje i truda. Predloženo je nekoliko struktura koje su trebale da zadovolje osnovne potrebe za razvoj analize: precizno definisane pojmove konvergencije, neprekidnosti i kompaktnosti. Rešenje koje je predložio Feliks Hauzdorf (1914. godine), a koje nam je danas poznato kao *topologija*, vrlo brzo je postalo najbitniji alat za bavljenje konvergencijom, kao i problemima „gumene" geometrije.

Model za konvergenciju bila je Vajerštrasova definicija konvergentnog niza realnih brojeva, koju je 1906. godine Moris Freše uspešno generalizovao na apstraktne prostore, uvodeći pojam *metričkog prostora*. Metrički prostori omogućili su da se konvergencija nizova posmatra ne samo u realnim, nego i u apstraktnim prostorima, i to na način koji je intuitivno jasan (geometrijski). U metričkim prostorima, osobine kao što su neprekidnost, zatvorenje i kompaktnost, mogu se u potpunosti izraziti preko nizova. Ova pogodnost „pada u vodu" u proizvoljnim topološkim prostorima, u kojima se pomoću nizova nekad ne može reći ni da li je skup zatvoren.

U ovom radu bavićemo se konvergencijom mreža (tzv. Mur–Smitovom konvergencijom) i konvergencijom filtera. Mreža je struktura koju su 1922. godine otkrili američki topolog Mur i njegov učenik Smit, i ona predstavlja generalizaciju nizova, adekvatnu za opis svih važnih osobina topoloških prostora. 1937. usledelo je Kartanovo otkriće filtera, koji se, iako nemaju nikakvih sličnosti sa nizovima, takođe mogu upotrebiti za opisivanje pomenutih koncepata.

Za razumevanje centralne teme ovog rada potrebno je poznavanje osnovnih pojmova i rezultata iz topologije, teorije skupova i početnih kurseva analize i algebre, pa će zbog toga, kao i zbog samostalnosti samog rada, ti rezultati, sa raznim primerima, biti izloženi u Uvodu. Teorija izložena u ovom delu trebala bi biti poznata svakom studentu matematike. Od mnogih radova posvećenih ovim temama, preporučujemo [5], [6] i [13] .

U drugoj glavi pažnju ćemo prvo posvetiti konvergenciji nizova u topološkim prostorima. Prikazaćemo mnoštvo primera, a akcenat će biti na onim topološkim prostorima koji pokazuju da na rezultate tipa „. . . ako i samo ako. . . " (a koji važe u metričkim prostorima) ovde ne možemo da računamo. Međutim, pokazaćemo da je za jedinstvenost granice niza dovoljno da prostor bude Hauzdorfov, a da je za ostale osobine ključna egzistencija prebrojive baze okolina u svakoj tački prostora. Definisaćemo i sekvencijalne prostore, koji predstavljaju najopštiju klasu prostora za koje su nizovi dovoljni za određivanje topologije. Na kraju će biti izložene poznate teoreme o konvergentnim nizovima u metričkim prostorima, kao i Bolcano–Vajerštrasova i Hajne–Borelova teorema iz realne analize. Videćemo da se u metričkim prostorima svi važni topološki pojmovi mogu okarakterisati pomoću konvergentnih nizova (i podnizova), što predstavlja značajnu pomoć pri topološkom proučavanju tih prostora, a samim tim i potrebu za analognom teorijom konvergencije u proizvoljnim topološkim prostorima.

U trećoj glavi upoznaćemo se sa pojmom usmerenog skupa i mreže. Pored raznih primera, konstatovaćemo i da je skup svih okolina proizvoljne tačke u topološkom prostoru - usmeren skup. Definisaćemo konvergenciju mreže i pokazati da važe analogoni teorema iz metričkih prostora. U tu svrhu, definisaćemo i pojam podmreže, koji je komplikovaniji nego što bi se to moglo očekivati (posebno zato što podmreža može imati veću kardinalnost od mreže). Prikazaćemo dve vrste mreža poznatih u analizi, i definisati univerzalne mreže, koje ćemo kasnije iskoristiti u izvođenju kriterijuma kompaktnosti topoloških prostora, da bismo na kraju prikazali Kelijev dokaz fundamentalne teoreme Tihonova.

Četvrta glava rezervisana je za teoriju konvergencije filtera, i slično kao ranije, prikaz tvrđenja pomoću kojih karakterišemo topološke prostore primenom ovakve konvergencije. Uvešćemo i analogon podmreže – predfilter, i dokazati teoremu Tihonova upotrebom filtera.

U poslednjoj glavi pokazujemo da su teorija mreža i teorija filtera ekvivalentne u smislu da možemo preći sa mreža na filtere i obrnuto i očuvati konvergenciju u odgovarajućem smislu.

Istorija razvoja teorije konvergencije preko mreža je komplikovana. Ovaj koncept prvi je razvio Mur u svojim lekcijama [14] iz 1910. godine, a kasnije i 1915. u zapisu *Definicija limita u opštoj integralnoj analizi* [15]. 1922. godine dao je potpuniji rad, kada je koautor bio njegov učenik Smit [16]. Birkof je 1937. izdao rad *Mur–Smitova konvergencija u opštoj topologiji* [3], čija je polazna tačka upravo korišćenje preslikavanja iz usmerenog skupa na topološki prostor, kako bi se generalizovale činjenice o okolinama, zatvaranju i neprekidnim funkcijama koje važe samo pod pretpostavkom postojanja prebrojive baze okolina svake tačke prostora. On u svom delu govori i o strukturama koje prevazilaze okvire ovog rada (topološki vektorski prostori i algebarska topologija), o kojima se više može pročitati u [3]. Naš pristup teoriji mreža u trećoj glavi prati Kelijevo delo iz 1950. *Konvergencija u topologiji* [11] i njegovu *Opštu topologiju* [12]. Osim što je prvi uveo termin „mreža”, u njegovom delu prvi put je konstatovano da je podmreža ključni pojam za dokaz nekih tvrđenja, za uvođenje univerzalne mreže i konačno, za dokaz teoreme Tihonova. Međutim, ideja univerzalne mreže motivisana je ranijim radom Kartana, što je Keli istakao. 1937. Henri Kartan dao je definiciju filtera, verovatno inspirisan seminarima Burbaki grupe matematičara. Vrlo brzo je ubedio vođu ove grupe, Andrea Veila, u važnost svoje ideje, tako da je 1940. izdat tekst *Opšta topologija* [4], u kom su filteri detaljno obrađeni. U tom delu je dat prvi dokaz teoreme Tihonova preko ultrafiltera.

* * *

Koristim ovu priliku da se zahvalim mentoru prof. dr Milošu Kuriliću na predlogu ove izazovne teme, koja predstavlja nastavak priče o konvergenciji iz kursa topologije, na kom sam i zavolela ovu granu matematike. Takođe se zahvaljujem i akademiku prof. dr Stevanu Pilipoviću i prof. dr Aleksandru Pavloviću, članovima komisije za odbranu ovog master rada, na svim korisnim sugestijama.

Jovana Obradović

Glava 1

Uvod

1.1 Osnovne oznake i rezultati

Tokom ovog rada smatraćemo da važi Cermelo[1]–Frenkelov[2] sistem aksioma, zajedno sa aksiomom izbora, kao i da je čitalac upoznat sa osnovnim svojstvima operacija sa skupovima. Radi bolje preglednosti, nove pojmove i njihove oznake eksplicitno ćemo definisati. Od uobičajenih oznaka, koristićemo $\subseteq$ za podskup i $\leq$ za binarne relacije. Direktnu sliku skupa $A \subseteq X$ pri preslikavanju $f : X \to Y$ označavaćemo sa $f[A]$, a inverznu sliku skupa $B \subseteq Y$ sa $f^{-1}[B]$. Za skup prirodnih brojeva $\{0, 1, 2, \dots\}$ koristićemo oznaku ω, za skup $\omega \backslash \{0\}$ oznaku $\mathbf{N}$, dok ćemo skupove celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva označavati standardno sa $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$, redom. Sa $\mathcal{P}(X)$ obeležavaćemo partitivni skup skupa X. U daljem radu biće nam važni pojmovi čije definicije slede.

Definicija 1.1. Ako je X neprazan skup, onda svako preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup X, $x : \mathbf{N} \to X$, zovemo **niz u skupu** X. Tada umesto $x(n)$ obično pišemo x_n, a niz x označavamo sa $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$, ili kraće sa $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$.

Definicija 1.2. Ako je $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ niz u skupu X i ako je $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuće preslikavanje, onda je kompozicija $x \circ \varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ponovo niz u skupu X za koji kažemo da je **podniz niza** x. Ako je pritom $\varphi(k) = n_k$, $k \in \mathbf{N}$, onda taj podniz označavamo sa $\langle x_{n_k} : k \in \mathbf{N} \rangle$.

[1]Ernst Zermelo (1871-1953), nemački matematičar
[2]Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965), nemački matematičar

Definicija 1.3. Neka je I neprazan skup, $\mathcal{X}$ neprazna kolekcija skupova i $X : I \to \mathcal{X}$. Ako umesto $X(i)$ pišemo X_i, onda za skup $\{X_i : i \in I\}$ kažemo da je **familija skupova indeksirana skupom** I. Tada uvodimo oznake

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x : \exists i \in I(x \in X_i)\}, \quad \bigcap_{i \in I} X_i = \{x : \forall i \in I(x \in X_i)\}.$$

Koristićemo i *princip supremuma* na skupu $\mathbf{R}$, kojim je zagarantovana egzistencija supremuma svakog nepraznog, sa gornje strane ograničenog skupa, kao i njegovo dualno tvrđenje - princip infimuma[3].

Podsetimo se i aksiome izbora i nekih njenih ekvivalenata.

Aksioma izbora: Za svaku familiju $\{X_i : i \in I\}$ nepraznih skupova postoji bar jedna funkcija izbora, to jest funkcija $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, takva da za svako $i \in I$ važi $x(i) \in X_i$.

Lema Zorna[4]: Ako je $\langle P, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup u kome svaki lanac ima gornje ograničenje, onda u P postoji maksimalni element.

Hauzdorfov[5] princip maksimalnosti: U svakom nepraznom parcijalno uređenom skupu postoji maksimalni lanac.

Definicija 1.4. **Direktan proizvod** familije skupova $\{X_i : i \in I\}$, u oznaci $\prod_{i \in I} X_i$, je skup svih funkcija $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, takvih da za svako $i \in I$ važi $x_i \in X_i$.

Obično, umesto $x(i)$ pišemo x_i, a umesto x pišemo $\langle x_i : i \in I \rangle$. U skladu sa tim imamo

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\langle x_i : i \in I \rangle : \forall i \in I(x_i \in X_i)\}.$$

Ponekad ćemo, ukoliko nema opasnosti od zabune, pisati samo $\prod X_i$. Koristeći aksiomu izbora, pokazuje se da je skup $\prod_{i \in I} X_i$ neprazan ako i samo ako su svi skupovi $X_i, i \in I$ neprazni (videti [13], strane 19 i 20).

Definicija 1.5. Za proizvoljno $i_0 \in I$ preslikavanje $\pi_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \to X_{i_0}$ dato sa

$$\pi_{i_0}(\langle x_i : i \in I \rangle) = x_{i_0},$$

za sve $\langle x_i : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} X_i$, zovemo **projekcija** na i_0-tu koordinatu.

[3] Svaki neprazan, sa donje strane ograničen skup ima infimum.
[4] Max Zorn (1906-1993), američki matematičar nemačkog porekla
[5] Felix Hausdorff (1868-1942), nemački matematičar

U nastavku navodimo i dobro poznati *princip matematičke indukcije*: pretpostavimo da treba dokazati da je tvrđenje $T(k)$ tačno za svaki prirodan broj $k \in \omega$. Umesto da problem „napadamo" direktno, dovoljno je pokazati sledeća dva tvrđenja:

1. $T(k)$ je tačno za $k = 0$.
2. Ako je ispunjeno $T(n)$, važi i $T(n + 1)$.

Sledi niz pojmova i osobina vezanih za kardinalni broj skupa.

Definicija 1.6. Skup A je **ekvipotentan** skupu B, u oznaci $A \sim B$, ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Kardinalni broj skupa X, u oznaci $|X|$, predstavlja klasu svih skupova ekvipotentnih skupu X. Za dva ekvipotentna skupa kažemo da imaju **isti kardinalni broj**.

Lako se pokazuje da $\sim$ ima osobine relacije ekvivalencije (iako $\sim$ nije relacija u uobičajenom smislu, jer deluje na univerzum svih skupova, za koji se u teoriji skupova pokazuje da nije skup).

Sledećom definicijom uvodimo upoređivanje kardinalnih brojeva:

Definicija 1.7. Za proizvoljne kardinalne brojeve $|A|$ i $|B|$ definišemo: $|A| \leq |B|$ ako i samo ako postoji injekcija $f : A \to B$.
Ako je $|A| \leq |B|$ i $|A| \neq |B|$, pišemo $|A| < |B|$.

Pokazuje se da je egzistencija sirjekcije $h : B \to A$ potreban i dovoljan uslov da za neprazne skupove A i B važi $|A| \leq |B|$.

Teorema 1.8. (Šreder[6] - Bernštajn[7]) *Ako su A i B proizvoljni skupovi i ako postoje injekcije $f : A \to B$ i $g : B \to A$, onda postoji i bijekcija $F : A \to B$.*

Dokaz ovog važnog rezultata pogledati u [13], strana 35.

Definicija 1.9. Skup A je **beskonačan** ako i samo ako je ekvipotentan nekom svom pravom podskupu, to jest ako i samo ako postoji podskup $A_1 \subseteq A$, takav da je $A_1 \neq A$ i $A_1 \sim A$. Skup A je **konačan** ako i samo ako nije beskonačan.
Kardinalnost skupa $\mathbf{N}$ označavamo sa $\aleph_0$ i čitamo: *alef-nula*. Skup A je **prebrojiv** ako i samo ako je $A \sim \mathbf{N}$, **najviše prebrojiv** ako i samo ako je $|A| \leq \aleph_0$, a **neprebrojiv** ako i samo ako nije prebrojiv.

[6]Ernst Schröder (1841-1902), nemački matematičar
[7]Felix Bernstein (1878-1956), nemački matematičar

Lema 1.10. *Skup A je beskonačan ako i samo ako postoji injekcija $f : A \to A$ koja nije sirjekcija.*

Na pitanje da li su svi beskonačni skupovi prebrojivi, to jest da li je $\aleph_0$ najveći kardinalni broj odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 1.11. (Kantor[8]) *Za proizvoljan skup A važi $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Na osnovu Kantorove teoreme zaključujemo da važi $|\mathcal{P}(\mathbf{N})| > |\mathbf{N}| = \aleph_0$.

Definicija 1.12. Kardinalni broj $|\mathcal{P}(\mathbf{N})|$ nazivamo **kontinuum** i označavamo sa c.

Pokazuje se da je skup $\mathbf{Q}$ prebrojiv, a da intervali u skupu $\mathbf{R}$ i sam skup $\mathbf{R}$ imaju kardinalnost c. Takođe važi da je svaka familija nepraznih disjunktnih otvorenih intervala u $\mathbf{R}$ najviše prebrojiva, kao i da prebrojiv skup ima prebrojivo mnogo konačnih podskupova. Koristićemo i osobinu da je unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova prebrojiv skup.

1.1.1 Topološki prostori

U ovom delu biće izloženi osnovni pojmovi i rezultati iz teorije topoloških prostora, koji će se prožimati kroz čitav rad. Materijal je najvećim delom preuzet iz [13], pa se tamo mogu naći i dokazi teorema koji će ovde mahom biti izostavljeni. Prikazaćemo i primere topoloških prostora koji će nam biti važni u narednim glavama.

Definicija 1.13. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je **kolekcija otvorenih skupova** ako i samo ako važe sledeća tri uslova:

(O1) Prazan skup i skup X su otvoreni, tj $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;
(O2) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, to jest za svako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;
(O3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, to jest za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je **topologija** na skupu X, a za uređenu dvojku $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je **topološki prostor**, dok elemente skupa X zovemo **tačke**. Jednočlane podskupove skupa X zvaćemo **singltoni**.

Skup $F \subseteq X$ je **zatvoren** ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup. Familiju zatvorenih skupova označavaćemo sa $\mathcal{F}$.

[8]Georg Cantor (1845-1918), nemački matematičar

Ako su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ topologije na skupu X i ako je $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$, onda kažemo da je topologija $\mathcal{O}_2$ **finija** od topologije $\mathcal{O}_1$, ili da je topologija $\mathcal{O}_1$ **grublja** od topologije $\mathcal{O}_2$.

Indukcijom se lako pokazuje da je presek konačno mnogo otvorenih skupova otvoren skup.

Primer 1. Za proizvoljan neprazan skup X, partitivni skup $\mathcal{P}(X)$ je očigledno topologija na X; zovemo je diskretna topologija i označavamo sa $\mathcal{O}_{disc}$. Za prostor $(X, \mathcal{O}_{disc})$ kažemo da je diskretan. U ovom prostoru skup $A \subseteq X$ je istovremeno i otvoren i zatvoren.

Kolekcija $\{\emptyset, X\}$ je takođe topologija na skupu X; zovemo je antidiskretna topologija i označavamo sa $\mathcal{O}_{adisc}$. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O}_{adisc})$ kažemo da je antidiskretan i u njemu se takođe poklapaju familije otvorenih i zatvorenih skupova.

Postoji i drugi način za definisanje topologije na skupu. Naime, koristeći De Morganove[9] zakone[10], aksiome koje definišu otvorene skupove postaju aksiome koje definišu zatvorene skupove:

(F1) Prazan skup i skup X su zatvoreni;
(F2) Unija dva (pa i konačno mnogo) zatvorenih skupova je zatvoren skup;
(F3) Presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Dakle, prvo možemo zadati kolekciju $\mathcal{F} \subseteq X$ koja zadovoljava uslove (F1), (F2) i (F3) i onda definisati otvorene skupove kao komplemente zatvorenih.

Primer 2. Posmatrajmo familiju $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$ datu sa

$$\mathcal{F} = \{K \subseteq \mathbf{R} : K \text{ je konačan skup}\} \cup \mathbf{R}.$$

Familija $\mathcal{F}$ očigledno zadovoljava uslov (F1). Ukoliko $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, onda su ili oba skupa F_1, F_2 konačna, pa im je konačna i unija, ili je bar jedan od njih $\mathbf{R}$, u kom slučaju im je unija skup $\mathbf{R}$, pa važi i uslov (F2). Dalje, ako $F_i \in \mathcal{F}, i \in I$, i ako je barem jedan skup F_{i_0} konačan, presek $\bigcap_{i\in I} F_i$ je kao podskup skupa F_{i_0} konačan skup, pa pripada familiji $\mathcal{F}$. Inače je $\bigcap_{i\in I} F_i = \mathbf{R} \in \mathcal{F}$. Kako važi i uslov (F3), imamo da je familija

$$\mathcal{O}_{kk} = \{\mathbf{R}\backslash K : K \subseteq \mathbf{R} \text{ je konačan skup}\} \cup \{\emptyset\}$$

topologija na $\mathbf{R}$. Ovu topologiju zovemo kokonačna topologija na $\mathbf{R}$.

[9] Augustus De Morgan (1806-1871), britanski matematičar
[10] $X\backslash(Y \cup Z) = (X\backslash Y) \cap (X\backslash Z),\ X\backslash(Y \cap Z) = (X\backslash Y) \cup (X\backslash Z)$

Definicija 1.14. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. **Baza topologije** $\mathcal{O}$ je kolekcija podskupova $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ koja zadovoljava sledeće uslove:

(B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi, to jest $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$;

(B2) Svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ može da se prikaže kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$, to jesto postoji kolekcija $\{B_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{B}$, takva da je $O = \bigcup_{j \in J} B_j$.

Odmah vidimo da je, trivijalno, topologija $\mathcal{O}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Takođe, ako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$ i $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{O}$, onda je i $\mathcal{B}_1$ baza iste topologije.

Primer 3. Familija $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbf{R}\}$ je baza diskretne topologije $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ na skupu $\mathbf{R}$. Singltoni su očigledno otvoreni, dok se svaki otvoren skup $O \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ može dobiti kao unija singltona elemenata koji mu pripadaju.

Za poređenje dve baze, ili dve topologije na istom skupu, koristimo sledeću teoremu.

Teorema 1.15. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Tada:*

a) *Ako je familija $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{O}$ takva da se svaki skup $B \in \mathcal{B}$ može predstaviti kao unija nekih elemenata familije $\mathcal{B}'$, onda je i $\mathcal{B}'$ baza topologije $\mathcal{O}$;*

b) *Ako je $\mathcal{O}_1$ neka druga topologija na skupu X i $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_1$, onda je $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_1$.*

Mnogi topološki prostori mogu se definisati i pomoću neke baze koja ih generiše. Osim toga, pojedine osobine topoloških prostora zavise samo od osobina baze topologije, pa pri ispitivanju takvih osobina nije ni potrebno „znati" sve otvorene skupove.

Definicija 1.16. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **baza neke topologije** na X ako i samo ako je kolekcija

$$\{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$$

topologija na skupu X (to jest ako zatvorenje familije $\mathcal{B}$ u odnosu na proizvoljne unije predstavlja topologiju na skupu X).

Teorema 1.17. *Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je baza neke topologije na skupu X ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(BN1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(BN2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \exists \{B_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{B} \ (B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i)$.

Dokaz ove teoreme je jednostavan i tehničke prirode; pogledati [13], str. 58.

Posledica 1.18. *Ako familija podskupova $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zadovoljava uslove:*

(BN1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;
(BN2') $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \ (B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \cap \{\emptyset\})$,

onda je ta familija baza neke topologije na skupu X.

PRIMER 4. Iskoristićemo posledicu 1.18 kako bismo pokazali da je familija

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{R} \wedge a < b\}$$

svih otvorenih intervala, baza neke topologije na skupu $\mathbf{R}$.
Kako je $\mathbf{R} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}(-n,n) \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \mathbf{R}$, zadovoljen je uslov (BN1). Neka je sada $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathcal{B}$, $a = \max\{a_1,a_2\}$ i $b = \max\{b_1,b_2\}$. Tada je

$$(a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) = \begin{cases} \emptyset, & \text{za } a \geq b \\ (a,b), & \text{za } a < b \end{cases},$$

pa važi i uslov (BN2').

Topologiju određenu bazom $\mathcal{B}$ zovemo UOBIČAJENA TOPOLOGIJA na $\mathbf{R}$ i označavamo je sa $\mathcal{O}_{uob}$. Prema definiciji baze topologije, u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$ svaki otvoren skup O može se prikazati kao unija neke familije otvorenih intervala. Međutim, pokazuje se da se svaki neprazan skup $O \in \mathcal{O}_{uob}$ može predstaviti kao unija najviše prebrojivo mnogo disjunktnih otvorenih intervala (u koje ubrajamo i skupove oblika $(-\infty, a)$ i $(a,\infty), a \in \mathbf{R}$, kao i $(-\infty,\infty) = \mathbf{R}$).[11]

Definicija 1.19. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kolekcija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **podbaza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(PB1) Elementi kolekcije $\mathcal{P}$ su otvoreni skupovi, to jest $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$;

(PB2) Familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ predstavlja neku bazu topologije $\mathcal{O}$.

Teorema 1.20. *Neka je X neprazan skup i kolekcija $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ takva da je $\bigcup \mathcal{S} = X$. Tada važi:*

a) *Falilija B svih konačnih preseka elemenata kolekcije S je baza neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu X, a S njena podbaza;*
b) *$\mathcal{O}$ je najmanja topologija na skupu X koja sadrži kolekciju $\mathcal{S}$.*

[11] Videti [13], str. 59-61

Sledi važna osobina koju mogu da imaju topološki prostori i koja implicira druga bitna svojstva koja će nam biti od značaja kasnije.

Definicija 1.21. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava **drugu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ takva da je $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$.

PRIMER 5. Familija otvorenih intervala sa racionalnim krajevima

$$\mathcal{B} = \{(p, q) : p, q \in \mathbf{Q} \land p < q\}$$

predstavlja prebrojivu bazu uobičajene topologije na $\mathbf{R}$.

Teorema 1.22. (Lindelef[12]) *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$. Tada važi:*

a) *Ako $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, onda postoji prebrojiv podskup $J \subseteq I$ takav da je*

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

b) *Ako je $\mathcal{B}_1$ neka druga baza topologije $\mathcal{O}$, onda postoji prebrojiv podskup $\mathcal{B}_1{}' \subseteq \mathcal{B}_1$ koji je takođe baza topologije $\mathcal{O}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ prebrojiva baza topologije $\mathcal{O}$.

a) Neka je $M = \{n \in \mathbf{N} : \exists i \in I\, (B_n \subseteq O_i)\}$. Koristeći aksiomu izbora, za svako $n \in M$ biramo $i_n \in I$ da $B_n \subseteq O_{i_n}$. Neka je $J = \{i_n : n \in \mathbf{N}\}$. Dokažimo da je

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in J} O_i (= \bigcup_{n \in M} O_{i_n}).$$

Kako je $J \subseteq I$, važi inkluzija „$\supseteq$". Neka je sada $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$. Tada postoji $i^* \in I$ takvo da $x \in O_{i^*}$, pa postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $x \in B_{n_0} \subseteq O_{i^*}$. Tada $n_o \in M$, pa $B_{n_0} \subseteq O_{i_{n_0}} \subseteq \bigcup_{i \in J} O_i$, odakle $x \in \bigcup_{i \in J} O_i$. Dakle, važi i inkluzija „$\subseteq$".

b) Neka je $\mathcal{B}_1 = \{V_i : i \in I\}$. Za $n \in \mathbf{N}$ definišemo $I_n = \{i \in I : V_i \subseteq B_n\}$. Kako je $\mathcal{B}_1$ baza, $B_n = \bigcup_{i \in I_n} V_i$, pa zbog (a) postoji $J_n \subseteq I_n$ da je $|J_n| \leq \aleph_0$ i

$$B_n = \bigcup_{i \in J_n} V_i.$$

[12] Ernst Leonhard Lindelöf (1870-1946), švedski matematičar

Definišimo podfamiliju $\mathcal{B}'_1$ familije $\mathcal{B}_1$ sa

$$\mathcal{B}'_1 = \{V_i : i \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} J_n\}.$$

Tada je $|\mathcal{B}'_1| \leq |\bigcup_{n\in\mathbf{N}J_n}| \leq \aleph_0$ (jer je prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiv skup). Dalje, svaki element B_n baze $\mathcal{B}$ je unija nekih elemenata kolekcije $\mathcal{B}'_1$, pa je, prema teoremi 1.15, kolekcija $\mathcal{B}'_1$ baza topologije $\mathcal{O}$. ∎

Primer 6. Dokažimo da prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kk})$ iz primera 2 ne zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Pretpostavimo suprotno, neka topologija

$$\mathcal{O}_{kk} = \{\mathbf{R}\backslash K : K \subseteq \mathbf{R} \text{ je konačan skup}\} \cup \{\emptyset\}$$

ima prebrojivu bazu. Tada na osnovu teoreme 1.22 postoji familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_{kk}$ koja je baza $\mathcal{O}_{kk}$ i za koju važi $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. Neka je

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{R}\backslash K_n : n \in \mathbf{N}\}$$

jedna numeracija te baze. Tada, kako je $|\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n| \leq \aleph_0$, a $|\mathbf{R}| = c > \aleph_0$, postoji

$$(*) \qquad x \in \mathbf{R}\backslash \bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n.$$

Pošto je $\mathbf{R}\backslash\{x\} \in \mathcal{O}_{kk}$, skup $\mathbf{R}\backslash\{x\}$ je unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}$, to jest postoji $M \subseteq N$ tako da je

$$\mathbf{R}\backslash\{x\} = \bigcup_{n\in M} \mathbf{R}\backslash K_n.$$

Sada, na osnovu De Morganovog zakona, sledi

$$x \in \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n,$$

što je u kontradikciji sa $(*)$.

Nije teško zaključiti da je $\mathcal{O}_{kk} \subseteq \mathcal{O}_{uob}$. Ovaj primer pokazuje i da egzistencija prebrojive baze finije topologije *ne implicira* egzistenciju prebrojive baze grublje topologije!

Sada ćemo definisati pojam okoline, koji predstavlja jedan od osnovnih koncepata topoloških prostora. Intuitivno govoreći, okolina neke tačke je skup koji sadrži tu tačku i u kom se ona može „pomerati” do određene granice, tako da i dalje ostane u tom skupu.

Definicija 1.23. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je **okolina tačke** $x \in X$ ako i samo ako postoji otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ takav da je $x \in O \subseteq A$. Familiju svih okolina tačke x označavaćemo sa $\mathcal{U}(x)$.

PRIMER 7. Skupovi $(-2, 2)$, $(0, \infty)$ i $\mathbf{R}$ su u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$ okoline tačke $x = 1$. Okoline koje su otvoreni skupovi zovemo OTVORENE OKOLINE tačke $x = 1$. Okoline ne moraju biti otvoreni skupovi! Skup $[-4, 3]$ je ZATVORENA OKOLINA iste tačke, dok je $[-4, 3)$ njena okolina koja nije ni otvoren ni zatvoren skup.

Otvoren skup je, trivijalno, okolina svake svoje tačke, a važi i obrnuto - ukoliko je skup A okolina svake svoje tačke, onda je on otvoren, jer se može prikazati kao unija $A = \bigcup_{x \in A} O_x$ otvorenih skupova koji sadrže sve tačke iz A.

U sledećoj teoremi date su osobine okolina.

Teorema 1.24. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za svako $x \in X$ važi:*

(U1) $\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ (x \in U)$;

(U2) $\forall U, V \in \mathcal{U}(x) \ \ (U \cap V \in \mathcal{U}(x))$;

(U3) $\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ \forall A \subseteq X \ \ (U \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{U}(x))$;

(U4) $\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ \exists W \in \mathcal{U}(x) \ \ (W \subseteq U \wedge \forall y \in W \ \ (W \in \mathcal{U}(y)))$.

Topologiju na skupu X možemo definisati i tako što prvo svakoj tački $x \in X$ pridružimo familiju $\mathcal{U}(x)$, koja zadovoljava uslove iz prethodne teoreme, i onda otvorene skupove definišemo kao okoline svake svoje tačke.

Definicija 1.25. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je **baza okolina** tačke x ako i samo ako ispunjava sledeće uslove:

(BO1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x, to jest $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$;

(BO2) $\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ \exists B \in \mathcal{B}(x) \ \ (B \subseteq U)$.

Ponekad ćemo bazu okolina zvati i **lokalna baza**.

Definicija 1.26. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava **prvu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina.

Teorema 1.27. *Ako prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti.*

PRIMER 8. Obrat prethodne teoreme ne važi! Posmatrajmo prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{P}(\mathbf{R}))$. On zadoviljava prvu aksiomu prebrojivosti - familija $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ je konačna baza okolina tačke x, ali ne postoji prebrojiva baza ove topologije, jer svaka baza mora da sadrži sve singltone $\{x\}, x \in \mathbf{R}$, a takvih ima neprebrojivo mnogo.

Sledeća osobina prostora sa prvom aksiomom prebrojivosti (pa i metričkih prostora, što ćemo videti kasnije) biće nam veoma važna u ključnom primeru usmerenog skupa u drugoj glavi.

Teorema 1.28. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada svaka tačka $x \in X$ ima prebrojivu bazu okolina koja je pritom i opadajuća u odnosu na relaciju inkluzije.*

Dokaz. Neka je $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ neka prebrojiva baza okolina tačke x. Ako skupove B'_n, $n \in \mathbf{N}$ definišemo sa $B'_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$, onda kolekcija $\{B'_n : n \in \mathbf{N}\}$ ima tražena svojstva. ∎

Definicija 1.29. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je:

- **unutrašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \subseteq A$;
- **spoljašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \subseteq X \backslash A$;
- **rubna tačka** skupa A ako i samo ako svaki otvoren skup O koji je sadrži seče i skup A i njegov komplement.

Skup svih unutrašnjih (respektivno: spoljašnjih, rubnih) tačaka skupa A zovemo **unutrašnjost** (respektivno: **spoljašnjost**, **rub**) skupa A, u oznaci $\mathrm{Int}(A)$ (respektivno $\mathrm{Ext}(A)$, $\partial(A)$).

Slede osobine unutrašnjosti, spoljašnjosti i ruba skupa.

Teorema 1.30. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve skupove $A, B \subseteq X$ važi:*

a) *Unutrašnjost skupa A je najveći otvoren podskup skupa A;*
b) *Skup A je otvoren ako i samo ako je $A = \mathrm{Int}(A)$;*
c) *Iz $A \subset B$ sledi $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$;*
d) $\mathrm{Ext}(A) = \mathrm{Int}(X \backslash A)$;
e) $X = \mathrm{Int}(A) \cup \partial(A) \cup \mathrm{Ext}(A)$ *i to je particija skupa X;*
f) $\partial(A)$ *je zatvoren skup;*
g) $A \subseteq \mathrm{Int}(A) \cup \partial(A)$.

Sada ćemo proizvoljnom podskupu A topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ dodeliti još dva skupa: adherenciju i izvod.

Definicija 1.31. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je:

- **adherentna tačka** skupa A ako i samo ako svaka okolina $\mathcal{U}$ tačke x seče skup A;
- **tačka nagomilavanja** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup $A \backslash \{x\}$.

Skup svih adherentnih tačaka skupa A zovemo **adherencija** (ili **zatvorenje**) skupa A, u oznaci $\overline{A}$, dok skup svih tačaka nagomilavanja skupa A zovemo **izvod** skupa A, u oznaci A'.

Jednostavno se pokazuju i sledeće osobine adherencije i izvoda.

Teorema 1.32. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve $A, B \subseteq X$ važi:*

a) $\overline{A}$ *je najmanji zatvoren nadskup skupa A;*
b) *Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$;*
c) $A \subseteq B$ *implicira* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
d) $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A$;
e) $\overline{A} = A \cup A'$;
f) *Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A' \subseteq A$.*

Teorema 1.33. (Kuratovski)[13] *Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, onda važi:*

$$\text{(A1) } \overline{\emptyset} = \emptyset; \quad \text{(A2) } A \subseteq \overline{A}; \quad \text{(A3) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \text{(A4) } \overline{\overline{A}} = \overline{A},$$

gde su $A, B \subseteq X$ proizvoljni.

Osobine (A1)-(A4) zovemo **aksiome adherencije Kuratovskog**.

Definicija 1.34. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $D \subseteq X$ je **gust** (u X) ako i samo ako je $\overline{D} = X$. Ukoliko u prostoru $(X, \mathcal{O})$ postoji skup $D \subseteq X$ koji je gust i prebrojiv, onda je taj prostor **separabilan**.

Potreban i dovoljan uslov da skup $D \subseteq X$ bude gust je taj da seče svaki neprazan bazni skup (a specijalno i svaki neprazan otvoren skup), što svakako olakšava ispitivanje separabilnosti.

PRIMER 9. U skupu $\mathbf{R}$ sa uobičajenom topologijom je $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ i $\overline{\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}} = \mathbf{R}$, a kako je skup $\mathbf{Q}$ prebrojiv, on je gust u $\mathbf{R}$, pa je $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$ separabilan topološki prostor.

[13] Kazimierz Kuratovski (1896-1980), poljski matematičar

U narednoj teoremi dat je odnos između separabilnosti i druge aksiome prebrojivosti.

Teorema 1.35. *Ako topološki prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda je on separabilan.*

Primer 10. Da bismo pokazali da obrat prethodne teoreme ne važi, opet ćemo posmatrati prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kk})$. Skup $D = \mathbf{N}$ je prebrojiv, a kako je $D \cap (\mathbf{R} \backslash K) = D \backslash K \neq \emptyset$, skup D seče svaki otvoren skup, pa je gust. Dakle, ovaj prostor je separabilan, a u primeru 6 smo videli da ne zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

U nastavku ćemo navesti aksiome separacije[14], koje na neki način pokazuju nivo sličnosti topoloških prostora metričkim.

Definicija 1.36. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je:

- T_0-**prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup O koji sadrži tačno jednu od njih;
- T_1-**prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \wedge y \notin O$;
- T_2-**prostor** (**Hauzdorfov prostor**) ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $x \in O_1$ i $y \in O_2$;
- **Regularan** ako i samo ako za svaki zatvoren skup F i svako $x \notin F$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2, takvi da je $x \in O_1$ i $F \subseteq O_2$;
- **Normalan** ako i samo ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $F_1 \subseteq O_1$ i $F_2 \subseteq O_2$;
- T_3-**prostor** ako i samo ako je regularan i T_1-prostor;
- T_4-**prostor** ako i samo ako je normalan i T_1-prostor.

Među ovim osobinama vlada linearna hijerarhija. Preciznije, važi sledeća teorema:

Teorema 1.37. *Svaki T_i prostor je T_{i-1} prostor, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Napomenimo i da su sve ove topološke klase različite, to jest da za svako $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ postoji topološki prostor koji je T_{i-1}, ali nije T_i.

[14] Aksiome separacije su aksiome u smislu da se mogu dodati definiciji topološkog prostora, kako bi se dobio uži pojam topološkog prostora.

Pojam neprekidnosti biće vrlo važan u ovom radu. Znamo da je, intuitivno govoreći, funkcija neprekidna ako male promene argumenta dovode do malih promena slike. Sledi precizna definicija neprekidnosti koja se odnosi na preslikavanja proizvoljnih topoloških prostora, kao i najvažnije osobine neprekidnih preslikavanja.

Definicija 1.38. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$. Funkcija $f : X \to Y$ je:

- **neprekidna u tački** x_0 ako i samo ako za svaku okolinu tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 tako da je $f[U] \subseteq V$;
- **neprekidna** ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački $x \in X$.

Teorema 1.39. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) *Preslikavanje f je neprekidno;*
b) *Za svaki otvoren skup $O \subset Y$, skup $f^{-1}[O] \subseteq X$ je otvoren;*
c) *Za svaki zatvoren skup $F \subset Y$, skup $f^{-1}[F] \subseteq X$ je zatvoren;*
d) *Za svaki skup $A \subseteq X$ važi $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$;*
e) *Ako je $\mathcal{B}_Y$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $B \in \mathcal{B}_Y$ skup $f^{-1}[B]$ otvoren;*
f) *Ako je $\mathcal{P}_Y$ proizvoljna podbaza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $P \in \mathcal{P}_Y$ skup $f^{-1}[P]$ otvoren.*

Teorema 1.40. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ proizvoljni topološki prostori, a $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidno preslikavanje.*

Uz pomoć neprekidnih preslikavanja uvodimo još jednu aksiomu separacije.

Definicija 1.41. Topološki prostor $(X, \mathcal{O}_X)$ je:

- **kompletno regularan** ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i neprazan zatvoren skup F koji je ne sadrži postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ takva da je $f(x) = 0$ i $f[F] = \{1\}$;
- $T_{3\frac{1}{2}}$**-prostor** ako i samo ako je kompletno regularan T_1-prostor.

Sledi odnos aksiome $T_{3\frac{1}{2}}$ sa prethodnim aksiomama separacije.

Teorema 1.42. *Svaki T_4 prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor i svaki $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor je T_3 prostor.*

Definisaćemo još neke klase preslikavanja koje će nam biti potrebne.

Definicija 1.43. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je:

- **otvoreno** ako i samo ako je za svaki otvoren skup $O \subseteq X$ skup $f[O] \subseteq Y$ otvoren;
- **zatvoreno** ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$ skup $f[F] \subseteq Y$ zatvoren.

Definicija 1.44. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **homeomorfizam** ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. f je bijekcija;
2. f je neprekidno;
3. f^{-1} je neprekidno.

Ako za prostore $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ postoji homeomorfizam $f : X \to Y$, onda za njih kažemo da su **homeomorfni** i pišemo $X \cong Y$.

Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije, pa razbija klasu svih topoloških prostora na potklase homeomorfnih prostora. U narednoj teoremi dati su ekvivalentni uslovi da preslikavanje bude homeomorfizam.

Teorema 1.45. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) *f je homeomorfizam;*
b) *f je otvoreno;*
c) *f je zatvoreno.*

U topologiji je često potrebno ispitati da li su dva prostora homeomorfna ili nisu, što nije lak zadatak. Da bismo dokazali da dva prostora *nisu* homeomorfna, dovoljno je pokazati da postoji *topološka invarijanta* koju ima samo jedan od njih.

Definicija 1.46. Osobina $\mathcal{P}$ topoloških prostora je **topološka invarijanta** ako i samo ako se očuvava pri homeomorfnim preslikavanjima, to jest ako i samo ako za svaka dva topološka prostora $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i homeomorfizam $f : X \to Y$ važi:

Ako prostor X ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i prostor Y ima osobinu $\mathcal{P}$.

Analogno se definišu invarijante neprekidnih preslikavanja, otvorenih neprekidnih preslikavanja i zatvorenih neprekidnih preslikavanja.

Pokazuje se da su kardinalnost prostora, separabilnost, kao i aksiome separacije koje smo uveli, topološke invarijante.

Sledeća teorema pokazuje kako od postojećeg topološkog prostora možemo dobiti nove.

Teorema 1.47. *Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ neprazan skup, onda je kolekcija $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A.*

Na ovaj način od polaznog prostora X dobijamo $2^{|X|}$ novih topoloških prostora, koje zovemo **potprostori** prostora $(X, \mathcal{O})$. Specijalo, ako je $A \in \mathcal{O}$ (respektivno: $A \in \mathcal{F}$), potprostor je **otvoren** (respektivno: **zatvoren**). Za topologiju $\mathcal{O}_A$ kažemo da je **indukovana** topologijom $\mathcal{O}$.

U vezi sa proučavanjem podstruktura neke strukture prirodno se nameće pitanje koje se osobine prenose sa strukture na podstrukturu. Ovo nas vodi do naredne definicije.

Definicija 1.48. Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **nasledna** ako i samo ako za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: ako prostor $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i svaki njegov potprostor ima tu osobinu.

Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **nasledna u odnosu na otvorene skupove** ako i samo ako za svaki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: ako prostor $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i svaki njegov otvoren potprostor ima tu osobinu. Analogno se definiše i osobina nasledna u odnosu na zatvorene skupove.

Primer 11. Ako je na skupu $\mathbf{R}$ data diskretna topologija $\mathcal{O}_{disc} = \mathcal{P}(\mathbf{R})$, onda je potprostor $\mathbf{Q}$ i otvoren i zatvoren, ali kako je $|\mathbf{Q}| < |\mathbf{R}|$, dobijamo da kardinalni broj skupa tačaka prostora nije nasledna osobina.

U nastavku navodimo neke nasledne osobine.

Teorema 1.49. *Aksiome separacije $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ su nasledne osobine, dok je T_4 nasledna u odnosu na zatvorene potprostore.*

Osobine „zadovoljavati prvu aksiomu prebrojivosti" i „zadovoljavati drugu aksiomu prebrojivosti" su nasledne.

Separabilnost je nasledna u odnosu na otvorene potprostore.

Definicija 1.50. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **povezan** ako i samo ako se ne može prikazati kao unija dva disjunktna neprazna otvorena skupa. Inače je **nepovezan**.

Osobina povezanosti je invarijanta neprekidnih preslikavanja, a samim tim i topološka invarijanta. Sledeća teorema daje ekvivalentne uslove povezanosti prostora.

Teorema 1.51. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) $(X, \mathcal{O})$ *je povezan prostor;*
b) *Skup X ne može da se prikaže kao unija dva disjunktna neprazna zatvorena skupa;*
c) $\mathcal{O} \cap \mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.

Primer 12. Trivijalno, svaki jednoelementni prostor je povezan. Svaki antidiskretan prostor je takođe povezan.

Uz pomoć prethodne teoreme se lako vidi da je i prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kk})$ povezan. Podsetimo se familija otvorenih i zatvorenih skupova ovog prostora:

$$\mathcal{O}_{kk} = \{\mathbf{R} \backslash K : K \subseteq \mathbf{R} \text{ je konačan skup}\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{F}_{kk} = \{K : K \subseteq \mathbf{R} \text{ je konačan skup}\} \cup \{\mathbf{R}\}.$$

Jasno je da je $\mathcal{O}_{kk} \cap \mathcal{F}_{kk} = \emptyset$, što daje traženi zaključak.

Ovu osobinu imaju i svi prostori koji se proučavaju u matematičkoj analizi: $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}, \mathbf{C}^n$.

Ako je topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov i ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ takva da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$, onda on očigledno nije povezan. Takav prostor se naziva **nuladimenzionalan** prostor.

Svaki diskretan topološki prostor sa bar dva elementa je nepovezan.

Sada ćemo uvesti pojam kompaktnosti, vrlo važne topološke osobine na osnovu koje se mogu izvesti mnogi bitni zaključci o topološkom prostoru. Kompaktan topološki prostor se, na neki način, može smatrati „malim" (kompaktnost je topološki pandan konačnosti skupa), iako, posmatran kao skup, može biti veoma „velik". Karakterizacija kompaktnosti nije laka i da bi ona donekle bila intuitivno jasnija, potrebno je da prostor zadovoljava još neke uslove. Time ćemo se baviti i u centralnom delu rada, kada ćemo razmotriti kriterijume kompaktnosti u odnosu na nizove, mreže i filtere.

Prvo uvodimo pojam pokrivača.

Definicija 1.52. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Familija $\{O_i : i \in I\}$ podskupova skupa X je **pokrivač skupa** A ako i samo ako je $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$.
Ako su pritom skupovi O_i, $i \in I$ otvoreni, onda za pokrivač kažemo da je **otvoren**. **Potpokrivač** datog pokrivača je njegova potkolekcija koja je i sama pokrivač.

Definicija 1.53. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **kompaktan** ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.

Lako se pokazuje da je kompaktnost invarijanta neprekidnih preslikavanja, a samim tim i topološka invarijanta.

Primer 13. Svaki prostor sa konačno mnogo tačaka je kompaktan.

Ako je X beskonačan skup, onda diskretan prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ nije kompaktan, jer otvoren pokrivač $\{\{x\} : x \in X\}$ ne sadrži konačan potpokrivač.

Prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$ takođe nije kompaktan: $\mathbf{R} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}(-n, n)$ i ovaj otvoreni pokrivač ne sadrži konačan potpokrivač.

Definicija 1.54. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je **kompaktan skup** ako i samo ako je potprostor $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan topološki prostor. Sa $\mathcal{C}(X)$ ćemo označavati kolekciju kompaktnih podskupova prostora X.

Teorema 1.55. *Skup A je kompaktan u prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa A ima konačan potpokrivač.*

Primer 14. Pokazaćemo da su zatvoreni intervali kompaktni skupovi u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$.

Pretpostavimo da interval $[a, b]$, gde je $a < b$, nije kompaktan skup. Tada postoje otvoreni skupovi $O_i \in \mathcal{O}_{uob}$, $i \in I$ takvi da je $[a, b] \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ i takvi da interval $[a, b]$ ne može da se pokrije sa konačno mnogo njih. Tada ovo važi i za bar jedan od intervala $[a, c]$, $[c, b]$, gde je $c = \frac{a+b}{2}$ sredina intervala $[a, b]$. Označimo ovaj interval sa $[a_1, b_1]$, ponovo ga podelimo i po istom kriterijumu odaberimo interval $[a_2, b_2]$. Nastavljajući postupak, dobijamo niz intervala $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \ldots$, pri čemu je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Tada postoji tačka $\gamma \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}}[a_n, b_n]$[15]. Pošto $\gamma \in [a, b]$, postoji $i_0 \in I$ tako da je $\gamma \in O_{i_0}$. Kako je $O_{i_0} \in \mathcal{O}_{uob}$, postoji $r > 0$ tako da je $(\gamma - r, \gamma + r) \subseteq O_{i_0}$. Neka je $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $b_n - a_n < r$. Tada je $b_n < a_n + r < \gamma + r$ i $a_n > b_n - r > \gamma - r$, pa je $[a_n, b_n] \subseteq (\gamma - r, \gamma + r) \subseteq O_{i_0}$. Ovo je netačno zbog načina izbora intervala $[a_n, b_n]$.

Lako se pokazuje da je kompaktnost nasledna prema zatvorenim podskupovima, a da nije nasledna, to jest da nije nasledna prema otvorenim podskupovima prikazano je u narednom primeru.

Primer 15. Znamo da je prostor $[0, 1]$ sa uobičajenom topologijom kompaktan. Međutim, njegov otvoreni podskup $(0, 1)$ nije kompaktan, jer je $(0, 1) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\frac{1}{n}, 1)$, a ovaj otvoreni pokrivač ne sadrži konačan potpokrivač.

Što se tiče kompaktnih skupova u Hauzdorfovim prostorima, važe sledeće teoreme.

Teorema 1.56. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov topološki prostor. Tada je skup $A \subseteq X$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren. Drugim rečima, $\mathcal{C}(X) = \mathcal{F}$.*

Teorema 1.57. *Svaki kompaktan Hauzdorfov prostor je T_4-prostor.*

U nastavku ćemo, za familiju $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ topoloških prostora, definisati topologiju na proizvodu $\prod X_i$, takozvanu *topologiju Tihonova.*

Teorema 1.58. *Neka je I neprazan skup, a $\{(X_i, O_i) : i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada važi:*

a) *Kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\prod X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $i \in I$ proizvoljan indeks, a $O_i \in \mathcal{O}_i$ otvoren skup u prostoru X_i, je podbaza neke topologije na skupu $\prod X_i$. Označimo tu topologiju sa $\mathcal{O}$.*
b) *Familija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$*

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] : \ K \subseteq I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge \forall i \in K\,(O_i \in \mathcal{O}_i)\}$$

je baza topologije $\mathcal{O}$.

[15]Kantorov princip iz realne analize: ako je $I_n = [a_n, b_n]$ niz umetnutih intervala, onda je $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n \neq \emptyset$. Ako, pri tome, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$, broj koji pripada svim intervalima I_n je jedinstven.

Dokaz. Neka je $j \in I$. Iz $X_j \in \mathcal{O}_j$, sledi $\pi_i^{-1}[X_j] = \prod X_i \in \mathcal{P}$, pa je $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = \prod X_i$. Tvrđenje sada sledi primenom teoreme 1.20. ∎

Definicija 1.59. Topolohija $\mathcal{O}$ na skupu $\prod X_i$, uvedena u prethodnoj teoremi, zove se **topologija Tihonova**[16], a prostor $(\prod X_i, \mathcal{O})$ (Tihonovski, topološki) **proizvod** familije prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$.

Teorema 1.60. *Uz pretpostavke i oznake uvedene u teoremi 1.58 važi:*

a) *Projekcije* $\pi_j : \prod X_i \to X_j$ *su neprekidne otvorene sirjekcije;*
b) *Ako je* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *topološki prostor, onda je preslikavanje* $f : Y \to \prod X_i$ *neprekidno ako i samo ako je za sve* $i \in I$ *kompozicija* $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ *neprekidna.*

Olakšavajuća okolnost pri ispitivanju topološkog proizvoda $\prod X_i$ je činjenica da se neke osobine prenose direktno sa koordinatnih prostora X_i.

Definicija 1.61. Topološka osobina P je **multiplikativna** (respektivno: **prebrojivo multiplikativna**, **konačno multiplikativna**) ako i samo ako je proizvod svake familije (respektivno: svake prebrojive familije, svake konačne familije) topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$, od kojih svaki ima osobinu $\mathcal{P}$, sa osobinom $\mathcal{P}$.

Neke multiplikativne osobine date su u sledećoj teoremi.

Teorema 1.62. *Važe sledeća tvrđenja:*

a) *Aksiome separacije* $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ *su multiplikativne osobine.*
b) *Prva i druga aksioma prebrojivosti i separabilnost su prebrojivo multiplikativne osobine.*
c) *Povezanost je multiplikativna osobina.*

Teorema 1.63. (Tihonov) *Proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih prostora je kompaktan prostor.*

1.1.2 Metrički prostori

U ovom delu ćemo se upoznati sa pojmom metričkog prostora, skupa na kom je definisana *udaljenost* između tačaka. Ideja ovog koncepta je verovatno poznata čitaocu, jer odgovara našem intuitivnom shvatanju trodimenzionalnog Euklidskog[17] prostora.

[16] Andrei Nikolaevič Tihonov (1906-1993), ruski matematičar
[17] Euklid ($E\upsilon\chi\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$) (IV - III vek p.n.e), starogrčki matematičar

Definicija 1.64. Neka je X neprazan skup. Funkcija $d : X^2 \to [0,\infty)$ koja za sve $x, y, z \in X$ zadovoljava uslove

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, y) \leq (x, z) + d(z, y)$,

naziva se **metrika na skupu** X. Uređeni par (X, d) je tada **metrički prostor**. Broj $d(x, y)$ zove se **rastojanje** tačaka x i y. Za $x \in X$ i $r > 0$, skup

$$L(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

zovemo **otvorena lopta** sa centrom u tački x i poluprečnikom r.

Teorema 1.65. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je familija svih otvorenih lopti, $\mathcal{B}_d = \{L(x, r) : x \in X \wedge r > 0\}$, baza neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X.*

Dakle, svaki metrički prostor je topološki prostor, pa sva tvrđenja vezana za topološke prostore možemo direktno primeniti na proizvoljan metrički prostor.

Definicija 1.66. Za topologiju $\mathcal{O}_d$ definisanu u prethodnoj teoremi kažemo da je **indukovana metrikom** d. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **metrizabilan** ako i samo ako postoji metrika d na skupu X takva da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Sledeća teorema daje karakterizaciju otvorenih skupova u topologiji indukovanoj metrikom.

Teorema 1.67. *U proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) važi: skup $O \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako za svaku tačku $x \in O$ postoji $r > 0$ tako da je $L(x, r) \subseteq O$.*

Primer 16. Ako na nepraznom skupu X definišemo funkciju $d : X^2 \to [0,\infty)$ sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{za } x = y \\ 1, & \text{za } x \neq y \end{cases},$$

onda je (X, d) metrički prostor. Metriku d zovemo trivijalna ili 01-metrika.

Kako za $x \in X$ važi $L(x, \frac{1}{2}) = \{y \in X : d(x, y) = 0\} = \{x\}$, sledi da je singlton $\{x\}$ otvoren skup, to jest $\{x\} \in \mathcal{O}_d$. Pošto za proizvoljan podskup $A \subseteq X$ važi $A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$, dobijamo da je $\mathcal{O}_d = \mathcal{P}(X)$. Dakle, trivijalna metrika indukuje diskretnu topologiju.

Primer 17. Ako za $x, y \in \mathbf{R}^n$, gde je $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ i $y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$, definišemo

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

onda je $d_2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$ metrika na skupu $\mathbf{R}^n$. Jasno je da su zadovoljeni uslovi (M1) i (M2). Pokažimo da važi i uslov (M3). Neka $x, y, z \in \mathbf{R}$. Na osnovu nejednakosti Koši[18] - Švarca[19]:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} b_i^2},$$

koja važi za proizvoljne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, imamo

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} (x_i - z_i)(z_i - y_i) \leq \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2}.$$

Množenjem ove nejednakosti sa 2 i dodavanjem

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2$$

obema stranama dobijamo

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} ((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2 \leq (\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2})^2,$$

odakle se lako vidi da je ispunjeno $d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$, odnosno da važi (M3). Ova metrika se zove euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$, a odgovarajuća topologija $\mathcal{O}_{d_2}$ uobičajena topologija na $\mathbf{R}^n$. Specijalno, za $n = 1$, imamo da je $d : \mathbf{R}^2 \to [0, \infty)$, $d(x,y) = |x - y|$, metrika na $\mathbf{R}$. U ovom slučaju je $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{uob}$, to jest topologija na skupu $\mathbf{R}$ određena ovom metrikom je baš uobičajena topologija iz primera 4.

U metričkom prostoru okoline se definišu preko otvorenih lopti. Važi sledeća teorema:

Teorema 1.68. *Neka je (X, d) metrički prostor i $x \in X$. Tada važi:*

a) *Skup $A \subseteq X$ je okolina tačke x ako i samo ako postoji $r > 0$ takvo da je $L(x, r) \subseteq A$;*

[18] Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), francuski matematičar

[19] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921), nemački matematičar

b) *Familija otvorenih lopti sa centrom u tački* x, $\mathcal{B}(x) = \{L(x,r) : r > 0\}$, *je baza okolina tačke* x.

Teorema 1.69. *Svaki metrički prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz. Neka je (X,d) metrički prostor i $x \in X$. Dokažimo da je kolekcija

$$\mathcal{B}(x) = \{L(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbf{N}\}$$

baza okolina tačke x. Uslov (BN1) je zadovoljen, jer je $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. Na osnovu prethodne teoreme, za proizvoljnu okolinu U tačke x postoji $r > 0$ tako da je $L(x,r) \subseteq U$. Neka je $n \in \mathbf{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < r$. Tada za $B = L(x, \frac{1}{n})$ važi $B \subseteq U$, pa je zadovoljen i uslov (BO2). ■

Teorema 1.70. *Metrički prostor je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.*

U metričkim prostorima možemo meriti skupove, kao i rastojanje između tačke i skupa.

Definicija 1.71. Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subseteq X$. **Dijametar skupa** A definišemo kao $\sup\{d(x,y) : x, y \in X\}$ i označavamo sa $\rho(A)$. Skup A je **ograničen** ako i samo ako ima konačan dijametar.

Ako je $x \in X$, onda je broj $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ **rastojanje tačke** x **od skupa** A .

Ovu definiciju koristimo pri jednoj karakterizaciji zatvorenih skupova u metričkim prostorima:

Lema 1.72. *Neka je* (X,d) *metrički prostor. Tada je skup* $A \subseteq X$ *zatvoren ako i samo ako za svaku tačku* $x \in X \backslash A$ *važi* $d(x,A) > 0$.

Teorema 1.73. *Svaki metrički (i svaki metrizabilan topološki) prostor je* T_4*-prostor.*

Glava 2

Konvergencija nizova

2.1 Nizovi u topološkim prostorima

Definicija 2.1. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ niz u skupu X. Tačka $a \in X$ je **granica niza** $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$.

Za niz koji ima bar jednu granicu kažemo da je **konvergentan**.

Primetimo da bi bilo ekvivalentno reći da niz $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ konvergira ka $a \in X$ ako i samo ako svi sem konačno mnogo njegovih clanova leže u proizvoljnoj okolini U tačke a, što pokazuje da konvergencija niza ka tački a *ne zavisi* od rasporeda njegovih članova.

Definicija 2.2. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ niz u skupu X. Tačka $a \in X$ je **tačka nagomilavanja** niza $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a i svako $n_0 \in \mathbf{N}$ postoji $n \geq n_0$ tako da je $x_n \in U$.

Drugim rečima, tačka $a \in X$ je tačka nagomilavanja niza $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ ako i samo ako svaka okolina tačke a sadrži beskonačno mnogo članova tog niza.

PRIMER 1. Granica niza ne mora biti jedinstvena! Ako je na skupu $\mathbf{R}$ data antidiskretna topologija $\mathcal{O}_{adisc}$, onda svaki niz u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{adisc})$ konvergira svakoj tački. Naime, za proizvoljnu okolinu U tačke $a \in \mathbf{R}$ važi $U = \mathbf{R}$, pa je $x_n \in U$ za svako $n \geq 1$.

Primer 2. Neka je na skupu $\mathbf{R}$ data familija

$$\mathcal{P} = \{[4a-2, 4a+2) : a \in \mathbf{Z}\}.$$

Kako je $\bigcup_{a\in\mathbf{Z}}[4a-2, 4a+2) = \mathbf{R}$, ova familija zadovoljava uslov teoreme 1.20, pa je ona podbaza neke topologije na skupu $\mathbf{R}$. Ovu topologiju zovemo topologija particije $\mathcal{P}$ i označavamo je sa $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Pokažimo da u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ niz $\langle(-1)^n : n \in \mathbf{N}\rangle$ konvergira ka 0. Neka je $U \in \mathcal{U}(0)$. Tada mora biti $[-2, 2) \subseteq U$, pa kako je $\{(-1)^n : n \in \mathbf{N}\} \subseteq [-2, 2)$, svaki član niza pripada U, odakle sledi željeni zaključak. Istim rezonom zaključujemo da ovaj niz zapravo konvergira svakoj tački iz intervala $[-2, 2)$.
Slično, niz $\langle \sin n : n \in \mathbf{N}\rangle$ konvergira svakoj tački iz $[-2, 2)$.

Primer 3. Za niz $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ u prostoru X kažemo da je **skoro stacionaran** ako i samo ako postoji $a \in X$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ takvi da je $x_n = a$ za sve $n \geq n_0$. Tačku a zovemo **rezidualna vrednost** niza $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ (takva vrednost je jedinstvena). U proizvoljnom topološkom prostoru svaki skoro stacionaran niz konvergira svojoj rezidualnoj vrednosti. Međutim, takav niz može imati i druge granice, kao što je prikazano u primeru 1.

U diskretnom topološkom prostoru $(X, \mathcal{P}(X))$ niz $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira ka $a \in X$ ako i samo ako je taj niz skoro stacionaran i ako mu je rezidualna vrednost upravo a.

Primer 4. Neka je na skupu $\mathbf{R}$ data kokonačna topologija

$$\mathcal{O}_{kk} = \{\mathbf{R}\backslash K : K \subseteq \mathbf{R} \text{ je konačan skup}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Pokažimo da u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kk})$ niz $\langle n\rangle_{n\in\mathbf{N}} = \langle 1, 2, 3, \dots\rangle$ konvergira ka 1. Neka je $U \in \mathcal{U}(1)$ proizvoljna okolina tačke 1. Tada postoji konačan skup $K \subseteq \mathbf{R}$ takav da je $1 \in \mathbf{R}\backslash K \subseteq U$. Neka je $n_0 \in \mathbf{N}$ najmanji prirodan broj za koji važi $n_0 > \max\{x : x \in K\}$. Tada za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in \mathbf{R}\backslash K \subseteq U$, što je i trebalo pokazati.

Teorema 2.3. *U Hauzdorfovom prostoru niz može da ima najviše jednu granicu.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov topološki prostor i $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ niz u X. Pretpostavimo da su a i b dve različite granice ovog niza. Neka su U i V

disjunktne okoline tačaka a i b respektivno. Tada postoje $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ takvi da je $x_n \in U$, za sve $n \geq n_1$, i $x_n \in V$, za sve $n \geq n_2$, pa za $n = \max\{n_1, n_2\}$ važi $x_n \in U \cap V$, što je nemoguće. ∎

U sledećem primeru pokazujemo da ne važi obrat prethodne teoreme.

Primer 5. Familija

$$\mathcal{O}_{kp} = \{\mathbf{R} \backslash P : P \subseteq \mathbf{R} \wedge |P| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$$

je topologija na skupu $\mathbf{R}$ (uslovi (O1), (O2) i (O3) se lako proveravaju primenom De Morganovih zakona). Ovu topologiju zovemo KOPREBROJIVA TOPOLOGIJA.

Pokažimo prvo da niz u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kp})$ može imati samo jednu granicu. Neka je $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ konvergentan niz i a njegova granica. Skup $U = \{a\} \cup (\mathbf{R} \backslash \{x_n : n \in \mathbf{N}\})$ je koprebrojiv, pa je otvorena okolina tačke a. Dakle, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da za sve $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Pošto važi $x_n \notin \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, mora biti $x_n = a$, to jest $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ mora biti skoro stacionaran niz. Ukoliko bi postojao niz $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ koji ima dve granice a i b, onda bi za dovoljno veliko n moralo biti $x_n = a$ i $x_n = b$, što je nemoguće. Dakle, granica niza u ovom prostoru je jedinstvena.

Međutim, ovaj topološki prostor nije Hauzdorfov. Naime, ukoliko su $O_x = \mathbf{R} \backslash P_x$ i $O_y = \mathbf{R} \backslash P_y$ otvoreni skupovi koji sadrže tačke x i y respektivno, onda je

$$O_x \cap O_y = (\mathbf{R} \backslash P_x) \cap (\mathbf{R} \backslash P_y) = \mathbf{R} \backslash (P_x \cup P_y) \neq \emptyset,$$

jer je skup $\mathbf{R}$ neprebrojiv, a unija $P_x \cup P_y$ je prebrojiva.

Ukoliko niz $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ ima jedinstvenu granicu, a, pišemo $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, ili kraće $\lim x_n = a$.

Teorema 2.4. *Ako je tačka x granica nekog niza tačaka skupa A, onda je $x \in \overline{A}$.*

Dokaz. Neka je $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ niz u skupu A i neka je x njegova granica. Tada za proizvoljnu okolinu U tačke x postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$, $a_n \in U$. Dakle, $A \cap U \neq \emptyset$, pa svaka okolina tačke x seče skup A, odakle sledi $x \in \overline{A}$. ∎

Ne važi ni obrat teoreme 2.2:

PRIMER 6. Posmatrajmo opet topološki prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kp})$. Skup $D = \mathbf{R}\backslash\mathbf{N}$ je gust o ovom prostoru, jer seče svaki neprazan otvoren skup. Dakle, $\overline{D} = \mathbf{R}$, pa je tačka $x = 1$ adherentna tačka skupa D. Međutim, kako u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kp})$ konvergiraju samo skoro stacionarni nizovi, ne postoji niz u skupu D čija je granica tačka x.

Definicija 2.5. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je:

- **nizovno** (**sekvencijalno**) **neprekidna u tački** x_0 ako i samo ako za svaki niz $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ u prostoru X iz $\lim x_n = x_0$ sledi $\lim f(x_n) = f(x_0)$;
- **nizovno** (**sekvencijalno**) **neprekidna** ako i samo ako je nizovno (sekvencijalno) neprekidna u svakoj tački $x \in X$.

Teorema 2.6. *Ako je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački $x_0 \in X$, onda je i sekvencijalno neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Neka je f neprekidna u tački x_0, to jest neka važi uslov

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0)) \ \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ \ f[U] \subseteq V. \tag{1}$$

Neka je $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ niz u prostoru X i neka je $\lim x_n = x_0$, to jest važi

$$\forall U \in \mathcal{U}(x_0) \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0 \ \ x_n \in U. \tag{2}$$

Neka je V proizvoljna okolina tačke $f(x_0)$. Tada, na osnovu (1), postoji okolina U tačke x_0 takva da je $f[U] \subseteq V$, a na osnovu (2), za tu okolinu U postoji broj $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Sada, kako je $f(x_n) \in f[U] \subseteq V$, dobijamo

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0)) \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0 \ \ f(x_n) \in V,$$

odakle je $\lim f(x_n) = f(x_0)$. ∎

PRIMER 7. Identičko preslikavanje $id_{\mathbf{R}} : (\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kp}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$ nije neprekidno, jer, na primer, inverzna slika skupa $(0, 1)$ - sam taj interval, nije otvoren skup u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kp})$. Međutim, ova funkcija je sekvencijalno neprekidna u svakoj tački, jer, ako je tačka x granica niza $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$, onda je on oblika

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, x, x, x, x \ldots \rangle,$$

a ovaj niz konvergira ka x i u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$. Dakle, ne važi obrat prethodne teoreme.

Teorema 2.7. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\langle x_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ niz u X. Ako dati niz konvergira ka $x_0 \in X$, onda svaki njegov podniz takođe konvergira ka $x_0 \in X$.*

Dokaz. Neka je $\langle x_{n_k} : k \in \mathbf{N}\rangle$ podniz niza $\langle x_n : n \in \mathbf{N}\rangle$, pri čemu je za svako $k \in \mathbf{N}$, $\varphi(k) = n_k$, gde je $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija. Neka je U proizvoljna okolina tačke x_0. Tada iz uslova teoreme postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Za to n_0 postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je za sve $k \geq k_0$, $n_k \geq n_0$. Sada za sve $k \geq k_0$ važi $x_{n_k} \in U$, to jest $\lim x_{n_k} = x_0$. ■

2.1.1 Prostori sa prvom aksiomom prebrojivosti

Egzistencija prebrojive baze okolina u svakoj tački ovih prostora predstavlja veliku pogodnost u smislu da se pojmovi zatvorenja skupa, zatvorenog skupa, gustog skupa, kao i neprekidnosti funkcije mogu u potpunosti okarakterisati pomoću konvergencije nizova, kao što je prikazano u sledećim teoremama.

Teorema 2.8. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti i $A \subseteq X$ proizvoljan skup. Tada važi:*

a) *$\overline{A}$ je skup svih granica nizova iz A;*

b) *Skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve granice svih konvergentih nizova koji mu pripadaju;*

c) *Skup $D \subseteq X$ je gust ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ postoji niz $\langle d_n\rangle$ u skupu D, čija je granica tačka x.*

Dokaz. a) Ukoliko je tačka x granica nekog niza iz skupa A, onda $x \in \overline{A}$, na osnovu teoreme 2.4.

Neka je sada $x \in \overline{A}$ i neka je $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ prebrojiva opadajuća baza okolina tačke x. Tada je $B_n \cap A \neq \emptyset$ za svako $n \in \mathbf{N}$, pa, zbog aksiome izbora, postoji niz $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ takav da je za svako $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in B_n \cap A$. Ukoliko je U proizvoljna okolina tačke x, onda je za dovoljno veliko $n_0 \in \mathbf{N}$, $B_{n_0} \subseteq U$, pa je $a_n \in U$ za sve $n \geq n_0$. Dakle, tačka x je granica niza $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Neka je A zatvoren skup i $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ niz u skupu A. Ako je x granica tog niza, onda zbog tvrđenja (a) važi $x \in \overline{A} = A$.

Neka su, sa druge strane, sve granice svih konvergentnih nizova iz skupa A, sadržane u skupu A. Neka je $x \in \overline{A}$. Na osnovu tvrđenja (a), postoji niz $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ u skupu A čija je granica tačka x, a zbog datog uslova imamo $x \in A$. Dakle, $\overline{A} \subseteq A$, pa je $\overline{A} = A$, to jest skup A je zatvoren.

c) Na osnovu definicije gustog skupa imamo da je $D \subseteq X$ gust ako i samo ako je $X = \overline{D}$, to jest ako i samo ako za svako $x \in X$ važi $x \in \overline{D}$. Primenom tvrđenja (a) dobijamo traženi zaključak. ■

Teorema 2.9. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka prostor $(X, \mathcal{O}_X)$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako je sekvencijalno neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Ako je funkcija f neprekidna u tački x_0, onda je i sekvencijano neprekidna u toj tački (teorema 2.6).

Neka je, sa druge strane, funkcija f sekvencijalno neprekidna u tački x_0, ali pretpostavimo da u toj tački ima prekid. Tada postoji okolina V tačke $f(x_0)$ tako da je $f[U] \setminus V \neq \emptyset$, za sve $U \in \mathcal{U}(x_0)$. Tako i za prebrojivu opadajuću bazu okolina $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ tačke x_0 važi

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\; f[B_n] \setminus V \neq \emptyset.$$

Izaberimo tačke $y_n \in f[B_n] \setminus V$. Tada postoje tačke $x_n \in B_n$ takve da je $y_n = f(x_n)$. Ukoliko je U proizvoljna okolina tačke x_0, onda je za dovoljno veliko n_0, $B_{n_0} \subseteq U$, pa $x_n \in U$, za svako $n \geq n_0$. Dakle, tačka x_0 je granica niza $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$. Tada je, zbog sekvencijalne neprekidnosti funkcije f, tačka $f(x_0)$ granica niza $\langle f(x_n) \rangle_{n \in \mathbf{N}} = \langle y_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$. Međutim, okolina V tačke $f(x_0)$ ne sadrži nijedan član niza $\langle y_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$. Kontradikcija. ■

Teorema 2.10. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada je $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov prostor ako i samo ako svaki niz u prostoru X ima najviše jednu granicu.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.3 imamo da u Hauzdorfovom topološkom prostoru niz može imati najviše jednu granicu.

Da važi i obrnut smer pokazaćemo svođenjem na kontradikciju. Neka su tačke $a, b \in X$ takve da svaki otvoren skup koji sadrži tačku x seče svaki otvoren skup koji sadrži tačku y. Tada to važi i za prebrojive opadajuće baze okolina $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ i $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ tačaka x i y, redom, to jest postoji niz $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ takav da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $x_n \in B_n \cap V_n$. Međutim, ovo znači da niz $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ ima dve granice, tačke a i b. Kontradikcija. ■

Teorema 2.11. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ niz u X. Tada je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja niza $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ ako i samo ako postoji podniz tog niza koji konvergira ka x_0.*

Dokaz. Neka je x_0 tačka nagomilavanja niza $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ i $\{B_k : k \in \mathbf{N}\}$ prebrojiva opadajuća baza okolina tačke x_0. Tada za svako $k \in \mathbf{N}$ i svako $n_0 \in \mathbf{N}$ postoji $n_k \geq n_0$ tako da je $x_{n_k} \in B_k$. Traženi podniz konstruišemo tako što za svako $k \in \mathbf{N}$ biramo $n_k \geq n_{k-1}$ tako da $x_{n_k} \in B_k$.

Obrnut smer je trivijalan i važi za proizvoljan topološki prostor, to jest ne zahteva da prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. ∎

2.1.2 Sekvencijalni prostori

Pretpostavka da prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti javljala se u prethodnom delu kao dovoljan uslov u svim tvrđenjima. Prirodno je zapitati se do koje mere je to i potreban uslov. Da bismo ovo ispitali, definišemo dve nove klase topoloških prostora.

Definicija 2.12. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **Frešeov**[1] ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ i svako $x \in \overline{A}$ postoji niz $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ u A koji konvergira ka x.

Definicija 2.13. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **sekvencijalan** ako i samo ako važi uslov: podskup $A \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako sadrži granice svih konvergentnih nizova koji mu pripadaju.

Teorema 2.14. *Svaki topološki prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti je Frešeov i svaki Frešeov prostor je sekvencijalan prostor.*

Dokaz. Neka topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i neka je $A \subseteq X$ proizvoljan skup. Neka $x \in \overline{A}$ i neka je $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ prebrojiva opadajuća baza okolina tačke x. Tada za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $A \cap B_n \neq \emptyset$, pa ukoliko za svako $n \in \mathbf{N}$ odaberemo $x_n \in A \cap B_n$, definisaćemo niz $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ u skupu A koji konvergira ka x.

Neka je sada $(X, \mathcal{O})$ Frešeov topološki prostor, neka je skup $A \subseteq X$ zatvoren i neka je $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ niz u skupu A. Ako je tačka x granica niza $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$, onda, zbog teoreme 2.4, $x \in \overline{A} = A$. Neka, sa druge strane, skup $A \subseteq X$ sadrži granice svih konvergentnih nizova koji mu pripadaju i neka je $x \in \overline{A}$. Tada, kako je $(X, \mathcal{O})$ Frešeov prostor, postoji niz $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ u A koji konvergira ka x, a zbog pretpostavljenog uslova važi $x \in A$. Dakle, $\overline{A} \subseteq A$, to jest $A = \overline{A}$, pa je skup A zatvoren. ∎

Teorema 2.15. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je prostor $(X, \mathcal{O}_X)$ sekvencijalan. Tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna ako i samo ako je sekvencijalno neprekidna.*

[1]Maurice Frechét (1878 - 1973), francuski matematičar

Dokaz. U teoremi 2.6 pokazali smo da iz neprekidnosti funkcije f sledi sekvencijalna neprekidnost, u svakom prostoru.

Obrnuto, neka je funkcija $f : X \to Y$ sekvencijalno neprekidna i neka je $F \subseteq Y$ zatvoren skup. Neka je $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ niz u skupu $f^{-1}[F]$ i neka je x_0 njegova granica. Tada je $\langle f(x_n) \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ niz u skupu F sa granicom $f(x_0)$ i važi $f(x_0) \in \overline{F} = F$. Odatle je $x_0 \in f^{-1}[F]$, pa je skup $f^{-1}[F]$ zatvoren. Na osnovu teoreme 1.39 sledi da je preslikavanje f neprekidno. ∎

Teorema 2.16. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ Frešeov topološki prostor i $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ niz u X. Tada je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja niza $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ ako i samo ako postoji podniz tog niza koji konvergira ka x_0.*

Dokaz. Neka je x_0 tačka nagomilavanja niza $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ i neka je $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Tada $x_0 \in \overline{A}$, pa postoji niz u skupu A koji konvergira ka x_0 i to je traženi podniz datog niza.

Obrnut smer važi u svakom topološkom prostoru. ∎

Naredna dva primera pokazuju da se klase Frešeovih, sekvencijalnih i prostora sa prvom aksiomom prebrojivosti ne poklapaju.

Primer 8. Neka $p \notin \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ i neka je $X = \{p\} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$. Za $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ neka je $U_f = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : m \in \mathbf{N} \wedge n \geq f(m)\}$. Pokažimo da je familija skupova

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup \left\{ \{p\} \cup U_f : f \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \right\}$$

baza neke topologije na skupu X. Uslov (BN1) važi, jer je

$$X = \{p\} \cup (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Neka $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Ako $B_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$, onda $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \subseteq \mathcal{B}$. Ako je $B_1 = \{p\} \cup U_{f_1}$ i $B_2 = \{p\} \cup U_{f_2}$, onda je

$$B_1 \cap B_2 = (\{p\} \cup U_{f_1}) \cap (\{p\} \cup U_{f_2}) = \{p\} \cup (U_{f_1} \cap U_{f_2}) = \{p\} \cup U_{f_3},$$

gde je $f_3 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definisano sa $f_3(m) = \max\{f_1(m), f_2(m)\}$, za $\forall m \in \mathbf{N}$, pa $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Dakle, zadovoljen je i uslov (BN2'), pa je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na X. Označimo je sa $\mathcal{O}$.

Neka su $x, y \in X$ različite tačke. Ukoliko $x, y \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, onda su $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ disjunktni otvoreni skupovi koji razdvajaju te dve tačke. Neka je $x = p$ i $y = (a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ i neka $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definisano sa $f(n) = n + b$. Tada su $O_1 = \{p\} \cup U_f$ i $O_2 = \{y\}$ disjunktni otvoreni skupovi koji razdvajaju tačke x i y, redom. Dakle, prostor $(X, \mathcal{O})$ je Hauzdorfov.

Pokažimo da prostor $(X, \mathcal{O})$ ne zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, to jest da ne postoji prebrojiva baza okolina tačke p. Pretpostavimo suprotno: neka je $\mathcal{B}(p) = \{\{p\} \cup U_{f_i} : i \in \mathbf{N}\}$ prebrojiva baza okolina tačke p. Odaberimo za svako $n \in \mathbf{N}$ $g(n) \in \mathbf{N}$ tako da je $g(n) > f_n(n)$. Tada okolina $U = \{p\} \cup U_g$ tačke p ne sadrži nijedan element kolekcije $\mathcal{B}(p)$. Kontradikcija.

Neka je $A \subseteq X$, $x \in X$ i $x \in \overline{A} \backslash A$. Tada skup A nije zatvoren, pa ne sadrži tačku p, a kako je zatvorenje skupa A najmanji zatvoren skup koji sadrži A, to je $\overline{A} = A \cup \{p\}$, pa mora biti $x = p$.

Neka je sada $A \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ i $p \in \overline{A}$. Pokažimo da postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da je $A \cap L_m$ beskonačan skup, gde je $L_m = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n \in \mathbf{N}\}$ (m-ta vertikala u $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$). Pretpostavimo suprotno: neka je za svako $m \in \mathbf{N}$ skup $A \cap L_m$ konačan, to jest neka je

$$A \cap L_m = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n \in K_m \subset \mathbf{N} \wedge |K_m| < \infty\}$$

Definišimo preslikavanje $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tako da je, za svako $m \in \mathbf{N}$, $f(m) > n$, za svako $n \in K_m$. Tada je U_f okolina tačke p koja ne seče skup A, kontradikcija.

Konačno, pokažimo da je prostor $(X, \mathcal{O})$ Frešeov. Neka je $A \subseteq X$ i neka $x \in \overline{A}$; pokažimo da postoji niz tačaka iz A koji konvergira ka x. Jasno, ako je $x \in A$, onda je, trivijalno, $\langle x, x, x, \dots \rangle$ niz koji konvergira ka x. U suprotnom, prema ranijem razmatranju, mora biti $x = p$. Tada postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da je skup $A \cap L_m = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n \in \mathbf{N}\}$ beskonačan. „Poređajmo" elemente ovog skupa po veličini i pokažimo da dobijeni niz $\langle (m, n_k) : k \in \mathbf{N} \rangle$ konvergira ka p. Neka je U proizvoljna okolina tačke p. Tada je $p \in \{p\} \cup U_f \subseteq U$. Neka je (m, n_{k_0}) član niza za koji je $n_{k_0} \geq f(m)$. Tada za svako $k \geq k_0$ važi $(m, n_k) \in U_f \subseteq U$, pa niz $\langle (m, n_k) : k \in \mathbf{N} \rangle$ konvergira ka p.

Primer 9. Sada ćemo definisati sekvencijalan prostor koji nije Frešeov. Neka $p \notin \mathbf{N}$ i neka je $X = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup \mathbf{N} \cup \{p\}$. Posmatrajmo familiju skupova

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup \big\{\{n\} \cup V_{n,k} : n, k \in \mathbf{N}\big\} \cup \big\{\{p\} \cup U_m : m \in \mathbf{N}\big\},$$

gde je $U_m = \{n \in \mathbf{N} : n \geq m\}$ i za $k \in \mathbf{N}$ je $V_{n,k} = \{(n, m) : m \geq k\}$.

Istim rezonom kao u prethodnom primeru pokazuje se da je kolekcija $\mathcal{B}$ baza neke topologije na skupu X (označimo je sa $\mathcal{O}$), kao i da je prostor $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov.

Pokažimo da prostor $(X, \mathcal{O})$ nije Frešeov. Posmatrajmo skup $V_{1,1} \cup \{p\}$. Kako svaka okolina tačke 1 seče ovaj skup, ona pripada njegovom zatvorenju. Međutim, ne postoji niz u skupu $V_{1,1} \cup \{p\}$ koji konvergira ka 1. Naime, koji god niz iz ovog skupa da odaberemo, nemoguće je da okolina $\{p\} \cup U_1$ tačke 1 sadrže sve sem konačno mnogo njegovih članova.

Da bismo pokazali da je prostor $(X, \mathcal{O})$ sekvencijalan, treba dokazati da svaki skup koji sadrži granice konvergentnih nizova koji mu pripadaju mora biti zatvoren. Neka je $A \subseteq X$ takav skup. Dokazaćemo da je komplement skupa A otvoren, to jest da za svaku tačku iz komplementa postoji njena okolina koja je čitava u komplementu. Neka $x \in X \backslash A$. Ako $x \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, onda je $\{x\}$ tražena okolina. Ako je $x = p$, onda postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da je $A \cap U_m = \emptyset$ (i u tom slučaju je $\{p\} \cup U_m$ tražena okolina). Zaista, ako bi za sve $m \in \mathbf{N}$ presek $A \cap U_m$ bio neprazan, onda bismo, odabirom po jedne tačke iz tog preseka za svako m, konstruisali niz iz skupa A koji konvergira ka p, pa bi prema pretpostavci o skupu A važilo $p \in A$, kontradikcija. Konačno, ako je $x \in \mathbf{N}$, onda postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da je $A \cap V_{x,k} = \emptyset$ (pokazuje se analogno kao prethodan slučaj) i tada je $A \cap V_{x,k}$ tražena okolina.

Primer 10. Primer prostora koji nije sekvencijalan je topološki prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{kp})$. Videti primer 6.

Prvu formalnu definiciju sekvencijalnog prostora dao je Frenklin[2] 1965. godine, dok je tražio odgovor na pitanje koje se klase topoloških prostora mogu u potpunosti opisati pomoću njihovih konvergentnih nizova. Detaljan prikaz dat je u njegovom delu [7].

2.2 Nizovi u metričkim prostorima

U teoremi koja sledi pokazaćemo da je definicija konvergentnog niza u metričkom prostoru koju je 1906. godine dao Freše, a koja nam je sigurno poznata iz kursa analize, ekvivalentna sa definicijom konvergencije preko okolina u odgovarajućem topološkom prostoru.

[2] Stan Franklin (rođ. 1931), američki matematičar i informatičar

Teorema 2.17. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Ako je* $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ *niz u* X *i* $x \in X$*, onda je* $\lim x_n = x$ *ako i samo ako važi:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0 \ d(x_n, x) < \varepsilon. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $\lim x_n = x$ i $\varepsilon > 0$. Kako je lopta $L(x, \varepsilon)$ okolina tačke x, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in L(x, \varepsilon)$, to jest $d(x_n, x) < \varepsilon$.
Neka sada važi uslov (1) i neka je $U \in \mathcal{U}(x)$. Tada, na osnovu teoreme 1.68, postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $L(x, \varepsilon) \subseteq U$, pa, prema uslovu (1), postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in L(x, \varepsilon)$, pa i $x_n \in U$, odakle je $\lim x_n = x$. ∎

Teorema 2.18. *U metričkom prostoru niz može imati najviše jednu granicu.*
Dokaz. Svaki metrički prostor je Hauzdorfov, pa tvrđenje sledi na osnovu teoreme 2.3. ∎

Teorema 2.19. *Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru je ograničen.*
Dokaz. Neka je $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ niz u prostoru (X, d) i neka je $\lim x_n = x$. Tada, na osnovu teoreme 2.17, za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $x_n \in L(x, 1)$ za sve $n \geq n_0$. Neka je

$$r = \max\{1, d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots, d(x_{n_0 - 1}, x)\}.$$

Sada za $n < n_0$ važi $d(x_n, x) \leq r$, a za $n \geq n_0$ važi $d(x_n, x) < 1 \leq r$, pa za svako $n \in \mathbf{N}$ imamo $x_n \in L(x, r + 1)$, odakle sledi

$$\rho(\{x_n : n \in \mathbf{N}\}) \leq \rho(L(x, r + 1)) \leq 2(r + 1) < \infty.$$

Dakle, skup $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ je ograničen. ∎

Kako svaki metrički prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, u njemu važe teoreme 2.8, 2.9 i 2.11. Dakle, u metričkom prostoru zatvorenje skupa može se posmatrati kao skup svih granica konvergentnih nizova koji mu pripadaju, a neprekidne funkcije između metričkih prostora mogu se okarakterisati kao one koje očuvavaju granice konvergentnih nizova.

Slede još neki pojmovi i rezultati iz teorije metričkih prostora, koji su čitaocu verovatno poznati iz kurseva realne analize.
Teorema 2.20. (Bolcano[3] - Vajerštras[4]) *Svaki ograničen niz u prostoru* $\mathbf{R}$ *ima konvergentan podniz.*

[3]Bernard Bolzano (1781 - 1848), češki matematičar
[4]Karl Weierstrass (1815 - 1897), nemački matematičar

Teorema 2.21. (Hajne[5] - Borel[6]) *Podskup prostora* $\mathbf{R}$ *je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*

Dokazi Bolcano - Vajerštrasove i Hajne - Borelove teoreme mogu se naći u [8] i uopštavaju se za sve prostore $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Definicija 2.22. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $\langle x_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ u prostoru X kažemo da je **Košijev niz** ako i samo ako važi uslov

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall m, n \geq n_0 \ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Teorema 2.23. *U proizvoljnom metričkom prostoru važi:*

a) *Svaki Košijev niz je ograničen;*
b) *Ako Košijev niz ima konvergentan podniz, onda je i sam konvergentan;*
c) *Svaki konvergentan niz je Košijev.*

Dokaz. Neka je $\langle x_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ niz u metričkom prostoru (X, d).

a) Ako je dati niz Košijev, onda za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $d(x_n, x_{n_0}) < 1$, to jest da $x_n \in L(x_{n_0}, 1)$. Ako je $\delta_{n_0} = \max\{d(x_n, x_{n_0}) : n < n_0\}$ i $r = \max\{1, \delta_{n_0}\}+1$, onda je $x_n \in L(x_{n_0}, r)$ za sve $n \in \mathbf{N}$, to jest skup $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ je ograničen.

b) Neka je $\langle x_{n_k} : k \in \mathbf{N}\rangle$ podniz Košijevog niza $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ i neka je $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$, za svako $k \geq k_0$ i postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$, za svako $m, n \geq n_0$. Neka je $n \geq n_0$. Tada, ako je $k_1 = \max\{k_0, n_0\}$, imamo $n_{k_1} \geq k_1 \geq n_0$ i $k_1 \geq k_0$, pa je

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_1}}) + d(x_{n_{k_1}}, x) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

odakle je $\lim x_n = x$.

c) Neka je $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ konvergentan niz i neka je tačka x njegova granica. Tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Odatle, za $m, n \geq n_0$ dobijamo

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

pa je niz $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev. ■

Definicija 2.24. Metrički prostor (X, d) je **kompletan** ako i samo ako je svaki Košijev niz u prostoru X konvergentan.

[5]Eduard Heine (1821 - 1881), nemački matematičar
[6]Émile Borel (1871 - 1956), francuski matematičar

Primer 11. Prostor $\mathbf{R}$ sa uobičajenom metrikom $d(x,y) = |x-y|$ je kompletan. Naime, ukoliko je $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev niz, onda je on, prema teoremi 2.23, ograničen, a tada, zbog Bolcano - Vajerštrasove teoreme, ima konvergentan podniz, pa je, opet prema teoremi 2.23, konvergentan.

Primer 12. Svojstvo „biti Košijev niz" nije topološka invarijanta: neka je $X = (0,1)$, $Y = (1,\infty)$ i neka je $f : X \to Y$ funkcija definisana sa $f(x) = 1/x$. Posmatrajmo niz $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}} = \langle 1/n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$. Lako se pokazuje da je ovaj niz Košijev, a niz $\langle f(x_n) \rangle_{n\in\mathbf{N}} = \langle n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ nije čak ni ograničen, pa ne može biti Košijev (činjenica da ograničenost nije topološka invarijanta je ovde svakako bitna).

2.3 Nizovna i prebrojiva kompaktnost

U ovom delu vratićemo se ukratko na ispitivanje kompaktnosti, to jest ispitivaćemo dve topološke osobine bliske kompaktnosti, prvo u proizvoljnim topološkim, a onda i u metričkim prostorima. Cilj nam je da prikažemo kako se pomoću konvergencije nizova u metričkim prostorima može okarakterisati i ova važna topološka osobina, dok u proizvoljnim topološkim prostorima oni nisu dovoljni.

Definicija 2.25. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je

- **nizovno** (ili **sekvencijalno**) **kompaktan** ako i samo ako svaki niz u skupu X ima konvergentan podniz;
- **prebrojivo kompaktan** ako i samo ako svaki beskonačan prebrojiv podskup skupa X ima tačku nagomilavanja.

Primer 13. Kako niz $\langle n : n \in \mathbf{N} \rangle$ nema konvergentan podniz, a ni skup $\mathbf{N}$ nema tačku nagomilavanja, zaključujemo da prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$ nije ni nizovno, ni prebrojivo kompaktan.

Teorema 2.26. *Svaki kompaktan prostor je prebrojivo kompaktan. Svaki nizovno kompaktan prostor je prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan prostor i $A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ beskonačan prebrojiv podskup skupa X. Pretpostavimo da skup A nema tačku nagomilavanja. Tada za proizvoljno $x \in X$, pošto x nije tačka nagomilavanja skupa A, postoji otvorena okolina O_x tačke x, takva da je $O_x \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$, odakle je $|O_x \cap A| \leq 1$. Kako je X kompaktan i važi $X = \bigcup_{x \in X} O_x$, to postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da je $X = O_{x_1} \cup \cdots \cup O_{x_k}$. Za svako $i \leq k$ važi $|X_{x_i} \cup A| \leq 1$, odakle sledi da je $|A| \leq k$. Kontradikcija; skup A mora imati tačku nagomilavanja, odakle sledi željeni zaključak.

Neka je sada prostor $(X, \mathcal{O})$ nizovno kompaktan i neka je $A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ prebrojiv beskonačan podskup skupa X takav da je, bez umanjenja opštosti, $a_m \neq a_n$ za $m \neq n$. Neka je $\langle a_{n_k} \rangle_{k \in \mathbf{N}}$ konvergentan podniz niza $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ i neka je a njegova granica. Tada za proizvoljnu okolinu $U \in \mathcal{U}(a)$ postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $k \geq k_0$ važi $a_{n_k} \in U$. Odatle sledi da je skup $U \cap A$ beskonačan, odnosno da je skup $U \cap A \setminus \{a\}$ neprazan. Kako je okolina U bila proizvoljna, sledi da je a tačka nagomilavanja skupa A. ■

Obrat ove teoreme ne važi u klasi svih topoloških prostora. Kontraprimeri se mogu naći u [6]. U metričkim prostorima, međutim, ti obrati važe, pa se u njima sva tri koncepta kompaktnosti poklapaju.

Teorema 2.27. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) *Prostor (X, d) je kompaktan;*
b) *Prostor (X, d) je prebrojivo kompaktan;*
c) *Prostor (X, d) je nizovno kompaktan.*

Dokaz ove teoreme je tehnički prilično složen. Za detaljan prikaz pogledati [13].

Rezultati iz ove glave prikazuju u kom smislu nizovi nisu uvek adekvatni za karakterizaciju važnih topoloških svojstava. Činjenica da nizovi nisu dovoljni ni za potrebe analize jasna je iz definicije Rimanovog integrala preko Rimanovih suma: posmatra se granična vrednost neprebrojivo mnogo profinjenja intervala, sa neprebrojivo mnogo mogućnosti izbora tačke u kojoj se računa vrednost funkcije za svaki interval profinjenja. Ta definicija se zasniva na graničnoj vrednosti, ali to nije granična vrednost niza! Dakle, jasna je potreba za teorijom konvergencije objekata opštijih od nizova.

Glava 3

Mreže

U ovoj glavi definisaćemo mreže da bismo prevazišli nedostatke nizova. Mreže su prirodna uopštenja nizova, ali za razliku od nizova koji svakom prirodnom broju pridružuju tačku nekog skupa, one pridružuju tačku svakom elementu *usmerenog skupa*.

Podsetimo se prvo pojma *parcijalno uređenog skupa*. Relacija $\rho \subseteq X^2$ je *relacija poretka* ako i samo ako za sve $x, y, z \in X$ važi:

$$x \rho x \qquad \text{(refleksivnost)}$$
$$x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y \qquad \text{(antisimetričnost)}$$
$$x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z \qquad \text{(tranzitivnost)}$$

Tada se par (X, ρ) naziva *parcijalno uređen skup*. Relaciju poretka obično označavamo sa $\leq$. Podskup $\mathcal{L} \subseteq X$ je *lanac* ako i samo ako za svako $x, y \in \mathcal{L}$ važi: $x \leq y \vee y \leq x$.
Relacija koja zadovoljava uslove refleksivnosti i tranzitivnosti naziva se relacija *kvazi-uređenja*.
Ako je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup i ako pritom za sve $x, y \in X$ važi $x \leq y \vee y \leq x$, onda se $(X, \leq)$ naziva *linearno uređen skup*.

Definicija 3.1. Neka je X neprazan skup i $\leq$ binarna relacija na X. Kažemo da relacija $\leq$ **usmerava** skup X, ili da je skup X **usmeren** relacijom $\leq$, ako i samo ako je $\leq$ relacija kvazi-uređenja takva da za svaka dva elementa postoji gornje ograničenje, to jest važi uslov

$$\forall x, y \in X \;\; \exists z \in X \;\; (x \leq z \wedge y \leq z).$$

Par $(X, \leq)$ se tada naziva **usmeren skup**.

PRIMER 1. Svaki linearno uređen skup (pa i skup $\mathbf{N}$ sa svojim uobičajenim uređenjem) je usmeren skup.

PRIMER 2. Ako je neprazan skup X snabdeven „punom" relacijom, to jest ako je $x \leq y$, za sve $x, y \in X$, onda je on usmeren relacijom $\leq$. Međutim, ako X sadrži više od jednog elementa, onda $(X, \leq)$ nije parcijalno uređen skup.

PRIMER 3. Ako su X i Y usmereni skupovi, onda je i njihov proizvod $X \times Y$ usmeren skup s obzirom na relaciju $\leq$ definisanu sa: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ ako i samo ako je $x_1 \leq x_2$ u X i $y_1 \leq y_2$ u Y.

Definicija 3.2. Neka je X usmeren skup i $A \subseteq X$. Skup A je **kofinalan podskup** skupa X (ili kraće: A je **kofinalno** u X) ako i samo ako za svako $x \in X$ postoji $a \in A$ tako da je $x \leq a$.

PRIMER 4. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Ako na skupu $\mathcal{U}(x)$ okolina tačke x definišemo relaciju $\leq$ sa:

$$U_1 \leq U_2 \text{ ako i samo ako važi } U_1 \supseteq U_2,$$

onda je $(\mathcal{U}(x), \leq)$ usmeren (i parcijalno uređen) skup. Naime, ako $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$, onda, prema uslovu (U2) teoreme 1.24, važi $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$ i pri tom je $U_1 \supseteq U_1 \cap U_2$ i $U_2 \supseteq U_1 \cap U_2$, odakle je $U_1 \leq U_1 \cap U_2$ i $U_2 \leq U_1 \cap U_2$.

Pokažimo da je familija $\mathcal{B}(x)$ baza okolina tačke x kofinalna u $\mathcal{U}(x)$. Ako je $U \in \mathcal{U}(x)$ proizvoljna okolina tačke x, onda, prema uslovu (BO2), postoji $B \in \mathcal{B}(x)$ tako da je $B \subseteq U$. Sada iz definicije relacije $\leq$ imamo $U \leq B$, što smo i hteli da pokažemo.

Ako topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, onda za svaku tačku $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$, koja je pritom i opadajuća u odnosu na relaciju inkluzije. Drugim rečima, usmeren skup $\mathcal{U}(x)$ okolina proizvoljne tačke x ima kofinalan podskup koji je izomorfan skupu $\mathbf{N}$, i upravo je ta struktura bila ključ efikasnisti konvergencije nizova u prostorima koji zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti.

Prethodni primer predstavlja motivaciju za promenu definicije konvergencije zamenom nizova funkcijama čiji su domeni proizvoljni usmereni skupovi.

Definicija 3.3. Ako je X neprazan skup, onda svako preslikavanje proizvoljnog usmerenog skupa u skup X, $x : \Sigma \to X$, zovemo **mreža**[1] **u skupu** X.

Za $\sigma \in \Sigma$, umesto $x(\sigma)$, pisaćemo x_σ, a mrežu x označavaćemo sa $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$, ili kraće sa $\langle x_\sigma \rangle_{\sigma\in\Sigma}$.

Definicija 3.4. Neka je X neprazan skup i $A \subseteq X$. Mreža $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u skupu X je:

- **rezidualno u skupu** A ako i samo ako postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in A$;
- **kofinalno u skupu** A ako i samo ako za svako $\sigma_0 \in \Sigma$ postoji $\sigma \geq \sigma_0$ tako da je $x_\sigma \in A$.

Lema 3.5. *Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u skupu X i $A \subseteq X$. Tada važi: mreža S je kofinalno u skupu A ako i samo ako nije rezidualno u skupu $X \backslash A$.*

Dokaz. Neka je mreža $\langle x_\sigma \rangle_{\sigma\in\Sigma}$ kofinalno u skupu $A \subseteq X$ i pretpostavimo da je ona i rezidualno u skupu $X\backslash A$. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in X\backslash A$, to jest $x_\sigma \notin A$, a to upravo znači da mreža $\langle x_\sigma \rangle_{\sigma\in\Sigma}$ nije kofinalno u skupu A. Kontradikcija.

Drugi smer se dokazuje slično. ■

3.1 Konvergencija mreža

Definicija 3.6. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u skupu X. Tačka $a \in X$ je **granica mreže** S ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji $\sigma_0 \in \Sigma$, tako da za svako $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in U$.

Za mrežu koja ima bar jednu granicu kažemo da je **konvergentna**.

Drugim rečima, mreža $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ konvergira ka $a \in X$ ako i samo ako je rezidualno u svakoj okolini U tačke a.

Definicija 3.7. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je **tačka nagomilavanja** mreže $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a i svako $\sigma_0 \in \Sigma$ postoji $\sigma \geq \sigma_0$ tako da je $x_\sigma \in U$.

Dakle, $a \in X$ je tačka nagomilavanja mreže $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ ako i samo ako je S kofinalno u svakoj okolini U tačke a.

[1] U literaturi se može naći i naziv Mur-Smitov niz.

PRIMER 5. Mreže čiji je domen skup $\mathbf{N}$ su zapravo nizovi i prethodne dve definicije se u tom slučaju svode na definicije granice i tačke nagomilavanja niza date u prethodnoj glavi.

PRIMER 6. Neka je na skupu $\mathbf{R}$ data uobičajena topologija $\mathcal{O}_{uob}$. Neka je Σ skup svih negativnih racionalnih brojeva sa standardnim uređenjem $\leq$ i neka je $x_r = r$ za svako $r \in \Sigma$. Tada je $\langle x_r : r \in \Sigma \rangle$ mreža u prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{uob})$ i ona konvergira ka tački $x = 0$. Zaista, ukoliko je $U \in \mathcal{U}(0)$, onda mora biti $0 \in (a,b) \subseteq U$, pa ako izaberemo $r_0 \in (a,0) \cap \mathbf{Q}$ (to je moguće, jer između svaka dva realna broja postoji racionalan broj), onda za svako $r \geq r_0$ važi $x_r \in U$. Lako se zaključuje i da je $x = 0$ jedinstvena granica ove mreže.

Ukoliko mreža $\langle x_\sigma \rangle_{\sigma \in \Sigma}$ ima jedinstvenu granicu, a, pišemo $\lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma = a$, ili kraće $\lim x_\sigma = a$.

Sada ćemo videti kako glase teoreme iz prethodne glave, kada umesto konvergencije nizova posmatramo konvergenciju mreža.

Teorema 3.8. *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je Hauzdorfov ako i samo ako svaka mreža ima najviše jednu granicu.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov topološki prostor i $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u X. Pretpostavimo da su a i b dve različite granice ove mreže. Neka su U i V disjunktne okoline tačaka a i b respektivno. Tada postoje $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ tako da je $x_\sigma \in U$, za sve $\sigma \geq \sigma_1$, i $x_\sigma \in V$, za sve $\sigma \geq \sigma_2$, pa za $\sigma_0 = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ važi $x_\sigma \in U \cap V$, što je nemoguće.

Neka sada svaka mreža ima jedinstvenu granicu, ali pretpostavimo da $(X, \mathcal{O})$ nije Hauzdorfov topološki prostor. Tada postoje tačke $a, b \in X$ takve da za proizvoljnu okolinu U tačke a i proizvoljnu okolinu V tačke b važi $U \cap V \neq \emptyset$. Ako na skupu

$$\Sigma = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}(a) \wedge V \in \mathcal{U}(b)\}$$

definišemo relaciju $\leq$ sa: $U_1 \cap V_1 \leq U_2 \cap V_2$ ako i samo ako je $U_1 \cap V_1 \supseteq U_2 \cap V_2$, gde su $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(a)$, $V_1, V_2 \in \mathcal{U}(b)$, onda je jasno da relacija $\leq$ usmerava skup Σ. Ako za svako $\sigma \in \Sigma$ važi $x_\sigma \in \sigma$, onda je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u prostoru X. Neka je U_0 proizvoljna okolina tačke a i neka je $\sigma_0 = U_0 \cap X$. Tada za sve $\sigma \geq \sigma_0$ (to jest za $U \cap V \geq U_0 \cap X$) važi

$$x_\sigma = x_{U \cap V} \in U \cap V \subseteq U_0 \cap X = U_0,$$

to jest tačka a je granica mreže $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$. Analogno se pokazuje da je i tačka b granica ove mreže, što je u kontradikciji sa početnim uslovom. Dakle, prostor X je Hauzdorfov. ∎

Teorema 3.9. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ proizvoljan skup. Tada važi:*

a) *$\overline{A}$ je skup svih granica mreža iz A;*

b) *Skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve granice svih konvergentnih mreža koje mu pripadaju;*

c) *Skup $D \subseteq X$ je gust ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ postoji mreža $\langle d_\sigma \rangle$ u skupu D, čija je granica tačka x.*

Dokaz. a) Neka je tačka x granica mreže $\langle a_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ iz skupa A. Tada za proizvoljnu okolinu U tačke x postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da je za svako $\sigma \geq \sigma_0$, $a_\sigma \in U$. Dakle, $A \cap U \neq \emptyset$, pa svaka okolina tačke x seče skup A, odakle sledi $x \in \overline{A}$.

Neka je, sa druge strane, $x \in \overline{A}$ i neka je $\mathcal{U}(x)$ skup okolina tačke x. Tada je $\mathcal{U}(x)$ usmeren relacijom $\leq$ definisanom kao u primeru 4 i za svako $U \in \mathcal{U}(x)$ presek $A \cap U$ je neprazan. Mrežu $x : \mathcal{U}(x) \to A$ na skupu A definišemo tako što za svako $U \in \mathcal{U}(x)$ odaberemo $x_U \in A \cap U$. Tada je granica mreže $\langle x_U : U \in \mathcal{U}(x) \rangle$ upravo tačka x. Zaista, ukoliko je U_0 proizvoljna okolina tačke x, onda za sve $U \geq U_0$ važi

$$x_U \in A \cap U \subseteq A \cap U_0 \subseteq U_0,$$

odakle sledi traženi zaključak.

b) Neka je A zatvoren skup i $\langle a_\sigma \rangle_{\sigma \in \Sigma}$ mreža u skupu A. Ako je x granica ove mreže, onda zbog tvrđenja (a) važi $x \in \overline{A} = A$.

Neka su sada sve granice svih konvergentnih mreža iz skupa A sadržane u skupu A i neka je $x \in \overline{A}$. Tada, na osnovu tvrđenja (a), postoji mreža $\langle a_\sigma \rangle_{\sigma \in \Sigma}$ u skupu A čija je granica tačka x, a zbog datog uslova mora biti $x \in A$. Dakle, $\overline{A} \subseteq A$, pa je $\overline{A} = A$, to jest skup A je zatvoren.

c) Kako je skup $D \subseteq X$ gust ako i samo ako je $X = \overline{D}$, to jest ako i samo ako za svako $x \in X$ važi $x \in \overline{D}$, to traženi zaključak sledi iz tvrđenja (a). ∎

Teorema 3.10. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaku mrežu $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u prostoru X iz $\lim x_\sigma = x_0$ sledi $\lim f(x_\sigma) = f(x_0)$.*

Dokaz. Neka je funkcija f neprekidna u tački $x_0 \in X$. Tada se dokaz traženog uslova izvodi analogno kao dokaz teoreme 2.6.

Obrnuto, neka je funkcija f takva da za svaku mrežu $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u prostoru X iz $\lim x_\sigma = x_0$ sledi $\lim f(x_\sigma) = f(x_0)$. Da bismo pokazali da je f neprekidna funkcija, dovoljno je pokazati da za proizvoljan skup $A \subseteq X$ važi $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ (teorema 1.39). Neka $y_0 \in f[\overline{A}]$. Tada je $y_0 = f(x_0)$, za neko $x_0 \in \overline{A}$. Na osnovu teoreme 3.9 (a), postoji mreža $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u skupu A takva da je $\lim x_\sigma = x_0$. Tada je $\lim f(x_\sigma) = f(x_0)$, pri čemu je mreža $\langle f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma \rangle$ iz skupa $f[A]$. Sada, ponovo na osnovu teoreme 3.9 (a), sledi da je $f(x_0) \in \overline{f[A]}$, to jest $y_0 \in \overline{f[A]}$, što je trebalo pokazati. ∎

Sada bi bilo adekvatno da damo i analogon teoreme 2.11 iz prethodne glave. Jasno je kako bi on trebao da glasi:

Teorema 3.11. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u X. Tada je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja mreže $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ ako i samo ako postoji podmreža te mreže koja konvergira ka x_0.*

Naravno, da bi ovo tvrđenje imalo smisla, moramo da definišemo pojam „podmreže". Izgleda primamljivo definisati podmrežu mreže $x : \Sigma \to X$ kao mrežu koja se dobija restrikcijom preslikavanja x na kofinalni podskup skupa Σ. Međutim, sa ovakvom definicijom, podmreža niza ne bi bila ništa drugo nego podniz, što bi značilo da teorema 2.11 važi bez pretpostavke o prvoj aksiomi prebrojivosti, a primer 9 iz prethodne glave ilustruje da to nije slučaj.

Definicija 3.12. Kažemo da je mreža $S' = \langle x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma' \rangle$ **podmreža mreže** $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ ako i samo ako postoji monotono preslikavanje $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$ koje zadovoljava sledeće uslove:

(PM1) Skup $\varphi[\Sigma']$ kofinalan u Σ;

(PM2) $x_{\sigma'} = x_{\varphi(\sigma')}$, za svako $\sigma' \in \Sigma'$.

Ova definicija se razlikuje od očekivane po tome što preslikavanje φ ne mora da bude injekcija. Dakle, Σ' može imati veću kardinalnost od Σ.

Lako se pokazuje da svaka monotona funkcija $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$, takva da je skup $\varphi[\Sigma']$ kofinalan u Σ, ima sledeće svojstvo: za svako $\sigma_0 \in \Sigma$ postoji $\sigma'_0 \in \Sigma'$ tako da je $\varphi(\sigma') \geq \sigma_0$ kad god je $\sigma' \geq \sigma'_0$.

Taj uslov intuitivno znači da ako σ' „postaje veliko", onda to važi i za $\varphi(\sigma')$. Iz ovog uslova je jasno da ako je mreža S rezidualno u nekom skupu, onda je i podmreža S' rezidualno u tom skupu. Ovo je vrlo važno svojstvo i podmreža je definisana na ovaj način upravo da bi se to postiglo.

Lema 3.13. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u prostoru X i $S' = \langle x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma' \rangle$ podmreža mreže S. Tada važi:*

a) *Ako je x tačka nagomilavanja mreže S', onda je i tačka nagomilavanja mreže S;*
b) *Ako je x granica mreže S, onda je i granica mreže S'.*

Dokaz. a) Neka je x tačka nagomilavanja mreže S i neka monotona funkcija $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$ zadovoljava uslove (PM1) i (PM2). Neka je U proizvoljna okolina tačke x i neka je $\sigma_0 \in \Sigma$. Tada postoji $\sigma_0' \in \Sigma$ tako da je $\varphi(\sigma') \geq \sigma_0$ kad god je $\sigma' \geq \sigma_0'$. Prema definiciji tačke nagomilavanja, postoji $\sigma'' \geq \sigma_0'$ tako da je $x_{\sigma''} \in U$. Odatle je $x_{\varphi(\sigma'')} = x_{\sigma''} \in U$ i $\varphi(\sigma'') \geq \sigma_0$, to jest x je tačka nagomilavanja mreže S.

b) Pretpostavimo da je x granica mreže S i neka je funkcija φ kao u (a). Neka je U proizvoljna okolina tačke x. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in U$ i postoji $\sigma_0' \in \Sigma'$ tako da je $\varphi(\sigma') \geq \sigma_0$ za sve $\sigma' \geq \sigma_0'$. Jasno, za $\sigma' \geq \sigma_0'$ važi $x_{\sigma'} \in U$, pa je x granica mreže S'. ∎

Da bismo dokazali teoremu 3.11 konstruisaćemo podmrežu od članova date mreže i usmerenog skupa okolina tačke nagomilavanja x. Za to nam je ključan sledeći rezultat.

Lema 3.14. (Kelijeva[2] lema) *Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u prostoru $(X, \mathcal{O})$ i $\mathcal{A}$ familija podskupova skupa X takva da je za svako $A \in \mathcal{A}$ mreža S kofinalno u A i da presek bilo koja dva skupa iz $\mathcal{A}$ sadrži element iz $\mathcal{A}$. Tada postoji podmreža mreže S koja je rezidualno u svakom skupu $A \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. Kako presek proizvoljna dva skupa iz familije $\mathcal{A}$ sadrži skup iz $\mathcal{A}$, to je skup $\mathcal{A}$ usmeren relacijom $\supseteq$. Neka je Σ' skup svih parova (σ, A), takvih da je $\sigma \in \Sigma$, $A \in \mathcal{A}$ i $x_\sigma \in A$. Tada je skup Σ' usmeren relacijom na proizvodu $\Sigma \times \mathcal{A}$. Zaista, za $(\sigma', A), (\sigma'', B) \in \Sigma'$ postoji $C \subseteq A \cap B$ i $\sigma''' \in \Sigma$ tako da je $\sigma''' \geq \sigma'$, $\sigma''' \geq \sigma''$ i $x_{\sigma'''} \in C$, pa je (σ''', C) element iz Σ koji je gornja granica za (σ', A) i (σ'', B).

Neka je za $(\sigma, A) \in \Sigma'$, $\varphi((\sigma, A)) = \sigma$. Tada je $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$ monotono preslikavanje i skup $\varphi[\Sigma']$ je kofinalan u Σ (jer je mreža S kofinalno u svakom članu familije $\mathcal{A}$). Dakle, $y = x \circ \varphi$ je podmreža mreže x. Neka je $A_0 \in \mathcal{A}$ proizvoljan skup i neka je $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da važi $x_{\sigma_0} \in A_0$. Ako je $(\sigma, A) \geq (\sigma_0, A_0)$, onda $x_\sigma \in A \subseteq A_0$, to jest važi $y_{(\sigma,A)} = x_\sigma \in A_0$, pa je mreža y je rezidualno u A_0. ∎

[2] John Leroy Kelley (1916-1999), američki matematičar

Dokažimo sada teoremu 3.11. Neka je x_0 tačka nagomilavanja mreže $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$. Tada primenom prethodne leme na familiju svih okolina tačke x_0 dobijamo podmrežu $S' = \langle x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma' \rangle$ koja konvergira ka x_0.

Obrnuto, pretpostavimo da x_0 nije tačka nagomilavanja mreže $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$. Tada postoji okolina U tačke x_0 takva da skup $\{\sigma : x_\sigma \in U\}$ nije kofinalan u Σ, što znači da je mreža $\langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ rezidualno u $X \backslash U$, odakle sledi da ne postoji podmreža koja konvergira ka x_0.

3.2 Dva primera mreža u analizi

3.2.1 Bezuslovna konvergencija

Podsetimo se prvo pojma reda i njegove konvergencije iz realne analize.

Definicija 3.15. Neka je $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ niz realnih brojeva. Izraz oblika

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$$

ili kraće

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

naziva se **red** sa opštim članom a_n, dok se izraz

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ \ n \in \mathbf{N},$$

naziva se n-ta **parcijalna suma** reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicija 3.16. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergira** ako i samo ako konvergira niz $\langle s_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ njegovih parcijalnih suma. Za red koji ne konvergira kažemo da **divergira**.
Ako je $\lim s_n = s$, broj s se naziva **suma reda** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i piše se $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Neka je sada $A = \{a_i : i \in I\}$ indeksirana familija realnih brojeva, to jest neka je dato preslikavanje $a : I \to \mathbf{R}$, gde je I proizvoljan neprazan skup. Postavlja se pitanje da li izraz $\sum_{i \in I} a_i$ ima smisla u kontekstu konvergencije reda. Primetimo da ovde nema uređenja među članovima reda, što bi mogao biti problem, jer je u slučaju $I = \mathbf{N}$ jasno da konvergencija reda (i njegova suma) *zavisi* od relacije uređenja na skupu I, pomoću koje formiramo niz parcijalnih suma. Ipak, evo lepog odgovora:

Definicija 3.17. Kažemo da neuređena suma $\sum_{i\in I} a_i$ **bezuslovno konvergira** ka $a \in \mathbf{R}$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup $J(\varepsilon) \subseteq I$ takav da za sve konačne podskupove J skupa I, za koje je $J(\varepsilon) \subseteq J \subseteq I$, važi $|a - \sum_{i\in J} a_i| < \varepsilon$.

Bezuslovna konvergencija se detaljno proučava u funkcionalnoj analizi i prevazilazi okvire ovog rada. Međutim, ono što je za nas interesantno jeste činjenica da se ovaj „nov" tip graničnog procesa može posmatrati kao primer konvergencije mreže. Naime, neka je $K(I)$ skup svih konačnih podskupova skupa I, usmerenih inkluzijom. Tada za dato preslikavanje $a : I \to \mathbf{R}$, možemo definisati mrežu $x : K(I) \to \mathbf{R}$ sa

$$J \mapsto \sum_{i\in J} a_i\,, \quad J \in K(I).$$

Pokažimo da je bezuslovna konvergencija neuređene sume ekvivalentna konvergenciji mreže x u $\mathbf{R}$.

Neka je $\sum_{i\in I} a_i = a$, $a \in \mathbf{R}$ i neka je U proizvoljna okolina tačke a. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U$ i postoji konačan podskup $J(\varepsilon) \subseteq I$ takav da za sve konačne podskupove J skupa I, za koje je $J(\varepsilon) \subseteq J \subseteq I$, važi $|a - \sum_{i\in J} a_i| < \varepsilon$. Dakle, postoji $J(\varepsilon) \in K(I)$ tako da za sve $J(\varepsilon) \subseteq J$ važi $\sum_{i\in J} a_i \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U$, odakle zaključujemo da mreža $x : K(I) \to \mathbf{R}$ konvergira ka a.

Obrnuto, neka mreža $x : K(I) \to \mathbf{R}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada je $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ okolina tačke a, pa iz konvergencije mreže $x : K(I) \to \mathbf{R}$ zaključujemo da postoji konačan skup $J_0 \in K(I)$ takav da za sve $J_0 \subseteq J$ važi $\sum_{i\in J} a_i \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, to jest $|a - \sum_{i\in J} a_i| < \varepsilon$. Dakle, neuređena suma $\sum_{i\in I} a_i$ konvergira bezuslovno ka tački a.

3.2.2 Rimanov integral

Naš sledeći primer je važan, jer je u literaturi često izložen na neadekvatan način.

Neka je funkcija f definisana i ograničena na intervalu $[a, b]$ realnih brojeva; želimo da definišemo Rimanov integral funkcije f. Prvo biramo brojeve

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

a zatim i brojeve $c_1, c_2, \ldots c_n$, tako da je $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada formiramo sumu $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ i posmatramo neku vrstu granične vrednosti te sume. Međutim, pitanje je kakvu graničnu vrednost. U literaturi se često može pročitati „granica pri čemu dužina najdužeg intervala $[x_{i-1}, x_i]$ teži nuli". Problem sa ovom definicijom se sastoji u tome što data suma *nije funkcija jedne promenljive*, to jest dužine intervala $[x_{i-1}, x_i]$, pa je neophodno proširenje koncepta granične vrednosti. Jedan od pogodnih načina da se to izvede predstavlja lep primer primene konvergencije mreža.

Definicija 3.18. Tagovana particija intervala $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ je svaki konačan skup tačaka $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, takav da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

zajedno sa tačkama $c_1, c_2, \ldots c_n$, pri čemu je $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Uvodimo oznaku $P = \{([x_{i-1}, x_i], c_i)\}_{i=1}^n$.
Tačke x_i nazivaju se **deobene tačke**, a svaki interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, **interval tagovane particije**. Dužinu intervala podele označavaćemo sa Δx_i. Dužinu najdužeg intervala tagovane particije P označavaćemo sa δ_P.

Ako je P tagovana particija kakvu smo upravo opisali, onda je suma $\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ funkcija jedne promenljive - tagovane particije P. Upravo iz tog razloga smo i zahtevali da se P sastoji i od deobenih i od intermedijalnih tačaka.

Definicija 3.19. Neka je P proizvoljna tagovana particija intervala $[a, b]$. Suma

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

naziva se **Rimanova integralna suma** funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Definicija 3.20. Broj L je **Rimanov integral** funkcije $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svaku tagovanu particiju $P = \{([x_{i-1}, x_i], c_i)\}_{i=1}^n$ intervala $[a, b]$ za koju je $\delta_P < \delta$, važi da je

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i - L| < \varepsilon.$$

Ako postoji broj L koji zadovoljava date uslove, kažemo da je funkcija f **Riman integrabilna** na intervalu $[a, b]$, i pišemo

$$L = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definišimo relaciju $\leq$ u skupu $\mathcal{P}$ svih tagovanih particija intervala $[a, b]$:

$$P_1 \leq P_2 \text{ ako i samo ako je } \delta_{P_2} \leq \delta_{P_1}.$$

Skup $\mathcal{P}$ svih tagovanih particija intervala $[a, b]$ je usmeren (i parcijalno uređen) relacijom $\leq$: ako su P_1 i P_2 dve tagovane particije i ako je $\delta_{P_2} \leq \delta_{P_1}$, onda je $P_1, P_2 \leq P_2$, a ako je $\delta_{P_2} > \delta_{P_1}$, onda je $P_1, P_2 \leq P_1$. Dakle, za dato preslikavanje $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, možemo definisati mrežu $S = \langle S_P^f : P \in \mathcal{P} \rangle$ sa

$$P \mapsto S_P^f = S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Pokažimo sada da je funkcija f Riman integrabilna sa integralom L ako i samo ako mreža S konvergira ka L.

Neka je $L = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i neka je U proizvoljna okolina tačke L. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq U$. Za to ε postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svaku tagovanu particiju $P = \{([x_{i-1}, x_i], c_i)\}_{i=1}^n$ intervala $[a, b]$ za koju je $\delta_P < \delta$, važi da je

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L| < \varepsilon.$$

Dakle, ako je P_ε tagovana particija takva da je $\delta_{P_\varepsilon} = \delta$, onda za svaku tagovanu particiju $P = \{([x_{i-1}, x_i], c_i)\}_{i=1}^n$ intervala $[a, b]$ takvu da je $P \geq P_\varepsilon$, važi $S_P^f \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subseteq U$, odakle zaključujemo da mreža $S = \langle S_P^f : P \in \mathcal{P} \rangle$ konvergira ka L.

Obrnuto, neka mreža $S = \langle S_P^f : P \in \mathcal{P} \rangle$ konvergira ka $L \in \mathbf{R}$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada je $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ okolina tačke L, pa iz konvergencije mreže S zaključujemo da postoji tagovana particija P_0 takva da za sve tagovane particije P za koje je $P_0 \leq P$ važi $S_P^f \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Dakle, za sve tagovane particije P za koje je $\delta_P < \delta_{P_0}$ važi

$$|S(f, P) - L| = |\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L| < \varepsilon,$$

to jest broj L je Rimanov integral funkcije f.

3.3 Univerzalne mreže

Definicija 3.21. Mreža $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u skupu X je **univerzalna mreža** (ili **ultramreža**) ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ važi da je S ili rezidualno u A, ili rezidualno u $X \backslash A$.

Lema 3.22. *Mreža $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u skupu X je univerzalna ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ važi uslov: ako je S kofinalno u A, onda je S i rezidualno u A.*

Dokaz. Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ univerzalna mreža, $A \subseteq X$ proizvoljan skup i neka je S kofinalno u A. Tada, prema lemi 3.5, S nije rezidualno u $X \backslash A$, odakle prema definiciji univerzalne mreže, S mora biti rezidualno u A.

Neka sada važi dati uslov i neka je $A \subseteq X$ proizvoljan skup. Pretpostavimo da mreža S nije rezidualno u A. Tada, zbog datog uslova, S nije kofinalno u A, pa je, na osnovu leme 3.5, S rezidualno u skupu $X \backslash A$, što je trebalo pokazati. ∎

Lema 3.23. *Neka je $x : \sum \to X$ univerzalna mreža i $f : X \to Y$ proizvoljna sirjekcija. Tada je indukovana mreža $f \circ x : \sum \to Y$ takođe univerzalna.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq Y$ proizvoljan skup. Tada je $f^{-1}[A] \subseteq X$ pa, kako je $x : \sum \to X$ univerzalna mreža, važi da je x ili rezidualno u $f^{-1}[A]$ ili je rezidualno u $X \backslash f^{-1}[A]$. U prvom slučaju će $f \circ x$ biti rezidualno u $f[f^{-1}[A]] = A$, a u drugom u $f[X \backslash f^{-1}[A]] = Y \backslash A$. Dakle, mreža $f \circ x$ je univerzalna. ∎

Primer 7. Obrat prethodne leme ne važi. Neka je mreža $x : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ definisana sa

$$x(n) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ parno} \\ 1, & \text{ako je } n \text{ neparno} \end{cases},$$

i neka je dato preslikavanje $f : \mathbf{Q} \to \{c\}$, $f(q) = c$, za svako $q \in \mathbf{Q}$. Tada je, očigledno, mreža $f \circ x : \mathbf{N} \to \{c\}$ univerzalna (tu osobinu, trivijalno, imaju sve skoro konstantne mreže), dok mreža x nije.

Lema 3.24. *Svaka podmreža univerzalne mreže je univerzalna mreža.*

Dokaz. Neka je $S' = \langle x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma' \rangle$ podmreža mreže $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ u skupu X i neka je $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$ monotono preslikavanje koje zadovoljava uslove (PM1) i (PM2) iz definicije podmreže. Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan skup i neka je mreža $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ rezidualno u A, to jest neka je $\sigma_0 \in \Sigma$ takvo da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in A$. Prema posledici uslova (PM1), postoji $\sigma'_0 \in \Sigma'$ takvo da je $\varphi(\sigma') \geq \sigma_0$, za sve $\sigma' \geq \sigma'_0$. Tada za $\sigma' \geq \sigma'_0$ imamo $x_{\varphi(\sigma')} = x_{\sigma'} \in A$. Dakle, podmreža $S' = \langle x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma' \rangle$ je rezidualno u skupu A, odakle sledi da je ona univerzalna. ∎

Primetimo da konvergentna mreža ne mora da bude univerzalna: posmatrajmo, na primer, konvergentan niz $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}} = \langle \frac{1}{n} \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ u skupu $[0, 1]$ i skup $A = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\}$. Tada je niz $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ kofinalan i u skupu A i u njegovom komplementu, pa nije rezidualno ni u jednom od ta dva skupa. Zaključujemo da univerzalan niz mora biti skoro konstantan.

Teorema 3.25 (Kejli). *Svaka mreža sadrži univerzalnu podmrežu.*

Dokaz. Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u skupu X. Posmatrajmo sve kolekcije $\mathcal{A}$ podskupova skupa X koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(*i*) $Y_1, Y_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{A}$;
(*ii*) $Y_1 \in \mathcal{A}, Y_2 \supseteq Y_1 \Rightarrow Y_2 \in \mathcal{A}$;
(*iii*) $Y \in \mathcal{A} \Rightarrow$ mreža S je kofinalno u Y.

Skup svih takvih familija je neprazan, jer sadrži bar jednočlanu familiju $\mathcal{A} = \{X\}$, i on predstavlja parcijalno uređen skup s obzirom na relaciju $\leq$ definisanu sa: $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$ ako i samo ako je $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Jasno je da je unija lanca takvih familija takođe familija koja zadovoljava date uslove, pa prema lemi Zorna postoji familija $\mathcal{A}$ koja nije sadržana ni u jednoj od familija sa datim osobinama. Tvrdimo da familija $\mathcal{A}$ zadovoljava i dodatno svojstvo: za proizvoljan podskup $A \subseteq X$ važi da ili $A \in \mathcal{A}$, ili $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

Zaista, pretpostavimo prvo da je za svako $Y \in \mathcal{A}$ mreža S kofinalno u skupu $A \cap Y$. Tada familija $\mathcal{A}'$ svih skupova koji sadrže presek $A \cap Y$, za neko $Y \in \mathcal{A}$, zadovoljava uslove (*i*), (*ii*) i (*iii*) i sadrži familiju $\mathcal{A}$, pa zbog maksimalnosti familije $\mathcal{A}$ važi $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, odakle sledi da skup $A = A \cap X$ pripada familiji $\mathcal{A}$ i da je mreža S kofinalno u A. Pretpostavimo sada da postoji skup $Y \in \mathcal{A}$ takav da mreža S nije kofinalno u $A \cap Y$, odnosno da je S rezidulano (a samim tim i kofinalno) u $X \backslash (A \cap Y)$. Prema prethodnom razmatranju zaključujemo da važi $X \backslash (A \cap Y) \in \mathcal{A}$, pa iz uslova (*i*) dobijamo

$$Y \cap (X \backslash (A \cap Y)) = Y \backslash (A \cap Y) \in \mathcal{A},$$

i konačno iz uslova (*ii*) sledi $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

Primenimo sada Kejlijevu lemu (lema 3.14) na mrežu $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ i familiju $\mathcal{A}$: dobijamo podmrežu S' koja je rezidualno u svakom skupu $A \in \mathcal{A}$. Kako familija $\mathcal{A}$ ima svojstvo da za svako $A \subseteq X$ važi ili $A \in \mathcal{A}$, ili $X \backslash A \in \mathcal{A}$, to je podmreža y univerzalna. ■

Sledeći rezultati predstavljaju nagoveštaj svrhe univerzalnih mreža.

Teorema 3.26. *Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ univerzalna mreža u topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$. Tada je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja mreže S ako i samo ako mreža S konvergira ka x_0.*

Dokaz. Ako je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja mreže $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$, onda je mreža S kofinalno u svakoj okolini U tačke x_0, pa je, na osnovu leme 3.5, ona i rezidualno u svakoj okolini U tačke x_0, odakle sledi da data mreža konvergira ka x_0.

Obrnut smer važi trivijalno za sve mreže. ■

Definicija 3.27. Neprazna kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova skupa X ima **svojstvo konačnog preseka**, skraćeno s.k.p., ako i samo ako svaka konačna potkolekcija kolekcije $\mathcal{A}$ ima neprazan presek.

Teorema 3.28. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) *Svaka mreža u prostoru X ima konvergentnu podmrežu;*
b) *Svaka mreža u prostoru X ima tačku nagomilavanja;*
c) *Svaka univerzalna mreža u prostoru X je konvergentna;*
d) *Za svaki otvoren pokrivač $\{O_i\}_{i \in I}$ skupa X, postoji konačan podskup $J \subseteq I$ takav da je $\bigcup_{i \in J} O_i = X$, to jest prostor X je kompaktan;*
e) *Za svaku kolekciju $\{F_i\}_{i \in I}$ zatvorenih skupova koja ima svojstvo konačnog preseka važi $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b) Sledi direktno iz teoreme 3.11.

(b)$\Rightarrow$(c) Sledi direktno iz teoreme 3.26.

(c)$\Rightarrow$(a) Sledi direktno iz teoreme 3.25.

Ekvivalencija tvrđenja (d) i (e) sledi primenom de Morganovih zakona: osobina (d) postaje osobina (e) kada zatvorene skupove izrazimo kao $F_i = X \backslash O_i$, i obrnuto. Zbog toga je dovoljno pokazati ekvivalenciju uslova (b) i (e).

Neka važi uslov (b), i neka je $\{F_i\}_{i\in I}$ familija zatvorenih podskupova skupa X koja zadovoljava svojstvo konačnog preseka. Tada je indeksni skup I usmeren relacijom $\leq$ na sledeći način: $i \leq j$ ako i samo ako je $F_j \subseteq F_i$. Ukoliko za svako $i \in I$ odaberemo element $x_i \in F_i$, dobićemo mrežu $x : I \to X$. Neka je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja ove mreže i pretpostavimo da postoji $i \in I$ tako da $x_0 \notin F_i$. Tada $x_0 \in O_i = X \backslash F_i$ i na osnovu definicije tačke nagomilavanja postoji indeks $j > i$ takav da je $x_j \in O_i$. Ali tada je $F_j \subseteq F_i$, pa dobijamo

$$x_j \in F_j \cap O_i \subseteq F_i \cap O_i = (X \backslash O_i) \cap O_i = \emptyset.$$

Kontradikcija.

Neka sada važi uslov (e) i neka je $x : I \to X$ mreža u prostoru X. Za svako $i \in I$ definišimo skup $F_i = \overline{\{x_j : j \geq i\}}$. Kako usmerenost skupa I implicira da za svaki konačan podskup $J \subseteq I$ postoji $i \in I$ tako da je $i \geq j$ za sve $j \in J$, to familija $\{F_i\}_{i\in I}$ zatvorenih podskupova ima svojstvo konačnog preseka, pa prema našoj pretpostavci, postoji $x_0 \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Neka je U proizvoljna okolina tačke x_0 i neka je $i \in I$ proizvoljan indeks. Tada $x_0 \in \overline{F_i}$, pa je skup $F_i \cap U$ neprazan. Drugim rečima, postoji $j \geq i$ tako da $x_j \in U$ i to znači da je mreža $x : I \to X$ kofinalno u skupu U. Kako je U bila proizvoljna okolina, zaključujemo da je x_0 tačka nagomilavanja mreže $x : I \to X$. ∎

3.3.1 Teorema Tihonova

Teorema Tihonova predstavlja jedan od najvažnijih rezultata opšte topologije. Ime je dobila po Andreju Nikolajeviču Tihonovu, koji ju je prvi dokazao 1930. godine. Moderniji dokazi teoreme Tihonova zasnivaju se na kriterijumima kompaktnosti pomoću konvergencije nizova, a već smo videli da je takav pristup adekvatan ako prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Međutim, prva aksioma prebrojivosti nije multiplikativna osobina, pa je i u ovom slučaju potrebna odgovarajuća zamena za nizove. Dokaz koji ćemo navesti delo je Kelija i predstavlja izvanrednu primenu univerzalnih mreža.

Podsetimo se prvo topologije Tihonova na proizvodu $\prod_{i\in I} X_i$ proizvoljne familije familije topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$. Podbazu ove topologije čine skupovi oblika $\pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ projekcija na i-ti faktor i O_i otvoren skup u prostoru X_i.

Teorema 3.29. *Neka je* $\langle x^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ *mreža na proizvodu* $X = \prod_{i\in I} X_i$, *gde je* $x^\sigma = \langle x_i^\sigma : i \in I\rangle$, $\sigma \in \Sigma$. *Tada mreža* $\langle x^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ *konvergira ka* $x = \langle x_i : i \in I\rangle \in X$ *ako i samo ako za svako* $i \in I$ *mreža* $\pi_i(\langle x^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle) = \langle x_i^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ *konvergira ka* $x_i \in X_i$.

Dokaz. Neka je $x = \langle x_i : i \in I\rangle \in X$ granica mreže $\langle x^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ i $i \in I$ proizvoljan indeks. Preslikavanje $\pi_i : \prod X_i \to X_i$ je neprekidno, pa je i sekvencijalno neprekidno (teorema 2.6), odakle sledi da je tačka $\pi_i(\langle x_i : i \in I\rangle) = x_i$ granica mreže $\pi_i(\langle x^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle)$.

Obrnuto, neka za svako $i \in I$ mreža $\langle x_i^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$ konvergira ka $x_i \in X_i$ i neka je U proizvoljna okolina tačke $x = \langle x_i : i \in I\rangle$. Tada postoji element baze topologije Tihonova $B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i]$, takav da je $x \in B \subseteq U$, pa za svako $i \in K$ važi $x_i \in O_i$. Sada, prema pretpostavci, za svako $i \in K$ postoji $\sigma_i \in \Sigma$, takvo da za svako $\sigma \geq \sigma_i$ važi $x_i^\sigma \in O_i$. Neka je $\sigma_0 \in \Sigma$ takvo da je $\sigma_0 \geq \sigma_i$, za svako $i \in K$. Tada za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_i^\sigma \in O_i$, to jest $x^\sigma \in B \subseteq U$. Dakle, za svaku okolinu U tačke x postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da je $x^\sigma \in U$, za sve $\sigma \geq \sigma_0$, pa je tačka x granica mreže $\langle x^\sigma : \sigma \in \Sigma\rangle$. ∎

Sada možemo dokazati teoremu Tihonova, koja tvrdi da je proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih topoloških prostora kompaktan topološki prostor, to jest da je kompaktnost multiplikativna osobina.

Neka su (X_i, O_i), $i \in I$, kompaktni prostori i $X = \prod X_i$. Da bismo pokazali da je X kompaktan topološki prostor, prema teoremi 3.28, dovoljno je pokazati da je svaka univerzalna mreža u prostoru X konvergentna. Neka je x proizvoljna univerzalna mreža u X. Tada je, prema lemi 3.23, za svako $i \in I$ mreža $\pi_i(x)$ univerzalna u prostoru X_i. Kako je, za svako $i \in I$, prostor X_i kompaktan, to je, prema teoremi 3.28, mreža $\pi_i(x)$ konvergentna, za svako $i \in I$. Ako sa x_i, $i \in I$, označimo granice mreža $\pi_i(x)$, onda, prema prethodnoj teoremi, mreža x konvergira ka $\langle x_i\rangle$. Kraj!

Postavlja se pitanje u kojoj meri se aksioma izbora koristi u dokazu teoreme Tihonova. Ona se svakako ne može izbeći, jer je neophodna za dokaz da svaka mreža ima univerzalnu podmrežu. 1950. godine, Keli je dokazao da teorema Tihonova implicira aksiomu izbora. Dakle, teorema Tihonova predstavlja još jedan ekvivalent aksiome izbora!

Glava 4

Filteri

Pojam mreže je usko povezan sa sličnom konstrukcijom, zvanom filter. Iako filteri „ne izgledaju" kao uopštenja nizova, oni su slični na veoma prirodan način. U ovoj glavi bavićemo se uopštenom teorijom filtera, definisaćemo ultrafiltere, i pokušati da prikažemo njihovu izuzetnu primenu, pre svega kada je reč o teoriji konvergencije.

4.1 Filteri i ultrafilteri na skupu

Definicija 4.1. Neka je X neprazan skup. Neprazna familija $\Phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ podskupova skupa X je **filter** na skupu X ako i samo ako zadovoljava sledeće uslove:

(FI1) Prazan skup nije element familije Φ, to jest $\emptyset \notin \Phi$;

(FI2) Presek dva elementa familije Φ pripada familiji Φ, to jest za sve $F_1, F_2 \in \Phi$ važi $F_1 \cap F_2 \in \Phi$;

(FI3) Svaki nadskup elementa familije Φ pripada familiji Φ, to jest ako je $F \in \Phi$ i $F \subseteq G \subseteq X$, onda $G \in \Phi$.

Ako je $\bigcap_{F \in \Phi} F \neq \emptyset$, filter Φ se naziva **glavni**; u suprotnom je **neglavni filter**.

Indukcijom se lako pokazuje da je presek konačno mnogo elemenata filtera takođe element filtera.

Primer 1. Za svaki neprazan podskup $A \subseteq X$, kolekcija $\Phi_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$ svih podskupova skupa X koji sadrže skup A predstavlja filter na skupu X. Kako je $\bigcap_{F \in \Phi} F = A$, filter Φ_A je glavni.

PRIMER 2. Ako je skup X konačan, onda i skup $\mathcal{P}(X)$ ima konačno mnogo elemenata, pa to važi i za svaki filter na skupu X. Zbog toga je za proizvoljan filter Φ na konačnom skupu X ispunjeno $\bigcap_{F\in\Phi} F \in \Phi$. Dakle, svaki filter na konačnom skupu je glavni.

PRIMER 3. Neka je X beskonačan skup. Kolekcija svih kokonačnih podskupova skupa X, to jest kolekcija

$$\Phi_{Fr} = \{X \backslash K : K \subseteq X \text{ je konačan skup}\}$$

je filter na skupu X. Ovaj filter zovemo FREŠEOV FILTER, i za njega važi

$$\bigcap_{F\in\Phi} F = X \backslash \bigcup \{K : K \subseteq X \text{ je konačan skup}\} = X \backslash X = \emptyset.$$

Dakle, Frešeov filter (a samim tim i svaki filter koji ga sadrži) je neglavni.

PRIMER 4. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Tada je kolekcija $\mathcal{U}(x)$ okolina tačke x filter na skupu X (teorema 1.24) i to glavni.

Kolekcija svih filtera na skupu X predstavlja parcijalno uređen skup s obzirom na inkluziju. Ako je $\{\Phi_i\}_{i\in I}$ indeksirana familija filtera na skupu X, onda je $\Phi = \bigcap_{i\in I} \Phi_i$ takođe filter na skupu X i to najveći filter koji je sadržan u svakom filteru Φ_i. Dakle, proizvoljna familija filtera na nekom skupu ima najveće donje ograničenje. Međutim, ako skup X ima bar dva elementa, onda postoje filteri Φ_1 i Φ_2 na X takvi da ne postoji filter Φ koji sadrži i Φ_1 i Φ_2 (posmatrajmo, na primer, skup $X = \{0, 1\}$ i filtere $\Phi_1 = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$ i $\Phi_2 = \{\{1\}, \{0, 1\}\}$). Dakle, ako je $|X| > 1$, parcijalno uređen skup filtera na X nije usmeren skup s obzirom na inkluziju.

Definicija 4.2. Ako su Φ_1 i Φ_2 filteri na skupu X i ako je $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$, onda kažemo da je filter Φ_2 **finiji** od filtera Φ_1 ili da je filter Φ_1 **grublji** od filtera Φ_2.

Podsetimo se da za nepraznu familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa X kažemo da ima svojstvo konačnog preseka ako i samo ako svaka konačna podfamilija familije $\mathcal{A}$ ima neprazan presek. Iz uslova (FI1) i (FI2) zaključujemo da svaki filter ima svojstvo konačnog preseka. Sa druge strane, svaka familija skupova sa s.k.p. može da se dopuni do filtera:

Teorema 4.3. *Svaka kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova skupa X, koja ima svojstvo konačnog preseka, sadržana je u nekom filteru.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}^*$ kolekcija podskupova skupa X koji sadrže presek neke konačne podkolekcije kolekcije $\mathcal{A}$. Dokazaćemo da je kolekcija $\mathcal{A}^*$ traženi filter.

Neka je $A \in \mathcal{A}$. Tada je $A = \bigcap\{A\} \in \mathcal{A}^*$, pa je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$.

Pokažimo sada da je kolekcija $\mathcal{A}^*$ filter. Neka je $F \in \mathcal{A}^*$ proizvoljan element. Tada F sadrži presek $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, za neko $n \in \mathbf{N}$ i $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$, koji je neprazan, jer kolekcija $\mathcal{A}$ ima s.k.p. Dakle, $F \neq \emptyset$, pa je ispunjen uslov (FI1). Pošto i proizvoljan nadskup skupa F sadrži presek $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, on takođe pripada kolekciji $\mathcal{A}^*$, pa važi i uslov (FI3). Konačno, ako $F' \in \mathcal{A}^*$ i $A'_1 \cap A'_2 \cap \cdots \cap A'_m \subseteq F'$, za neko $m \in \mathbf{N}$ i $A'_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, m$, onda je $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A'_1 \cap A'_2 \cap \cdots \cap A'_m \subseteq F \cap F'$, pa je $F \cap F' \in \mathcal{A}^*$, to jest ispunjen je i uslov (FI2). ∎

Definicija 4.4. Filter $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **ultrafilter** ako i samo ne postoji filter $\Phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ koji je pravi nadskup skupa $\mathcal{U}$, to jest ako i samo za svaki filter $\Phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ iz $\mathcal{U} \subseteq \Phi$ sledi $\mathcal{U} = \Phi$.

Ako je X neprazan skup, onda svaki glavni ultrafilter na skupu X ima oblik $\mathcal{U} = \Phi_{\{x\}} = \{A \subseteq X : x \in A\}$, za proizvoljno $x \in X$, odakle je jasno da za svaki podskup $A \subseteq X$ važi $A \in \mathcal{U}$ (ako $x \in A$), ili $X \backslash A \in \mathcal{U}$ (inače). Međutim, ovu osobinu imaju svi ultrafilteri. Preciznije, važi sledeća teorema:

Teorema 4.5. *Filter $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je ultrafilter ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ važi: $A \in \mathcal{U}$ ili $X \backslash A \in \mathcal{U}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ultrafilter i $A \subseteq X$ podskup skupa X takav da $\mathcal{U}$ ne sadrži ni A ni $X \backslash A$. Pokažimo da kolekcija $\mathcal{U} \cup \{A\}$ ima s.k.p. Presek konačno mnogo elemenata kolekcije $\mathcal{U}$ je neprazan, jer je $\mathcal{U}$ filter. Ako je $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, onda je $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \cap A \neq \emptyset$, jer bi u suprotnom bilo $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \subseteq X \backslash A \in \mathcal{U}$. Dakle, kolekcija $\mathcal{U} \cup \{A\}$ ima s.k.p. pa je, na osnovu prethodne teoreme, kolekcija $(\mathcal{U} \cup \{A\})^*$ filter. Međutim, ta kolekcija je pravi nadskup skupa $\mathcal{U}$, jer sadrži skup A. Kontradikcija!

Neka je sada $\mathcal{U}$ filter takav da za svaki podskup $A \subseteq X$ važi $A \in \mathcal{U}$ ili $X \backslash A \in \mathcal{U}$. Neka je $\Phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ filter takav da je $\mathcal{U} \subseteq \Phi$. Ako bi postojao element $F \in \Phi \backslash \mathcal{U}$, onda bi morao biti $X \backslash F \in \mathcal{U} \subseteq \Phi$, odakle bismo dobili $\emptyset = F \cap (X \backslash F) \in \Phi$, što je kontradikcija sa uslovom (FI1). Dakle, $\mathcal{U} = \Phi$, to jest $\mathcal{U}$ je ultrafilter. ∎

Teorema 4.6. *Svaka kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova nepraznog skupa X, koja ima svojstvo konačnog preseka, sadržana je u nekom ultrafilteru.*

Dokaz. Neka je X neprazan skup i neka kolekcija $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ima s.k.p. Na osnovu teoreme 4.3, skup

$$P = \{\Phi \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \subseteq \Phi \wedge \Phi \text{ je filter}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

je neprazan. Neka je $\mathcal{L} \subseteq P$ proizvoljan lanac u parcijalno uređenom skupu $(P, \subseteq)$. Pokažimo da je $\Psi = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{L}} \Phi$ element skupa P. Kako je $\mathcal{A} \subseteq \Psi \subseteq \mathcal{P}(X)$, treba još pokazati da je Ψ filter.

Ako je $F \in \Psi$, onda F pripada nekom filteru $\Phi \in \mathcal{L}$, pa je $F \neq \emptyset$, to jest zadovoljen je uslov (FI1). Ako je $F \subseteq A \subseteq X$, istim rezonom zaključujemo da je $A \in \Phi \subseteq \Psi$, pa važi i uslov (FI3). Neka je sada i $F' \in \Psi$ i neka je $\Phi' \in \mathcal{L}$ takvo da je $F' \in \Phi'$. Kako je $\mathcal{L}$ lanac, mora biti $\Phi \subseteq \Phi'$ ili $\Phi' \subseteq \Phi$. U prvom slučaju je $F, F' \in \Phi'$, pa kako je Φ' filter, zaključujemo da je $F \cap F' \in \Phi' \subseteq \Psi$. U drugom slučaju analogno dobijamo $F \cap F' \in \Psi$, pa je ispunjen i uslov (FI2).

Dakle, $\Psi \in P$, a kako za svako $\Phi \in \mathcal{L}$ važi $\Phi \subseteq \Psi$, filter Ψ je gornje ograničenje lanca $\mathcal{L}$. Na osnovu leme Zorna, postoji maksimalni element $\mathcal{U} \in P$. Pokažimo da je $\mathcal{U}$ ultrafilter. Neka je $\Phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ filter takav da je $\mathcal{U} \subseteq \Phi$. Tada je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \Phi$, pa $\Phi \in P$, a kako je $\mathcal{U}$ maksimalni element skupa P, mora biti $\Phi = \mathcal{U}$. Dakle, familija $\mathcal{U}$ je traženi ultrafilter. ∎

Posledica 4.7. *Svaki filter je sadržan u nekom ultrafilteru.*

Dokaz. Kako svaki filter ima svojstvo konačnog preseka, tvrđenje sledi direktnom primenom prethodne teoreme. ∎

Na svakom nepraznom skupu X postoje glavni ultrafilteri (njihov oblik je $\Phi_{\{x\}}$, za neko $x \in X$), ali su oni trivijalni i, samim tim, manje interesantni. Postojanje neglavnih ultrafiltera je još jedna posledica teoreme 4.6.

Posledica 4.8. *Na svakom beskonačnom skupu postoji neglavni ultrafilter.*

Dokaz. Neka je Φ_{Fr} Frešov filter na beskonačnom skupu X (pogledati primer 3). Prema prethodnoj teoremi, postoji ultrafilter $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$, takav da je $\Phi_{Fr} \subseteq \mathcal{U}$. Odatle zaključujemo da je $\bigcap_{F \in \mathcal{U}} F \subseteq \bigcap_{F \in \Phi_{Fr}} F = \emptyset$, pa je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter. ∎

Teorema 4.9. *Neka su X i Y neprazni skupovi i $f : X \to Y$ proizvoljna sirjekcija. Tada, ako je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ultrafilter na X, onda je $\mathcal{V} = \{f[U] : U \in \mathcal{U}\}$ ultrafilter na Y.*

Dokaz. Kako je proizvoljan element $U \in \mathcal{U}$ neprazan skup, to je i $f[U] \neq \emptyset$, pa kolekcija $\mathcal{V}$ zadovoljava uslov (FI1). Neka je $f[U] \subseteq A \subseteq Y$. Tada je $U \subseteq f^{-1}[f[U]] \subseteq f^{-1}[A]$, pa $f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$, pa kako je f sirjekcija, sledi $A = f[f^{-1}[A]] \in \mathcal{V}$. Dakle, zadovoljen je uslov (FI3). Ako je i $U' \in \mathcal{U}$, onda je $U \cap U' \in \mathcal{U}$, pa je $f[U \cap U'] \in \mathcal{V}$. Kako je $f[U \cap U'] \subseteq f[U] \cap f[U']$, primenom uslova (FI3) dobijamo da je $f[U] \cap f[U'] \in \mathcal{V}$, pa važi i uslov (FI2). Dakle, kolekvija $\mathcal{V}$ je filter.

Pokažimo sada da je $\mathcal{V}$ ultrafilter. Neka je $A \subseteq Y$. Tada je $f^{-1}[A] \subseteq X$, pa kako je $\mathcal{U}$ ultrafilter na skupu X, prema teoremi 4.5 važi $f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$ ili $X \backslash f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$. U prvom slučaju imamo $f[f^{-1}[A]] = A \in \mathcal{V}$, a u drugom $f[X \backslash f^{-1}[A]] = Y \backslash A \in \mathcal{V}$, pa je, opet prema teoremi 4.5, kolekcija $\mathcal{V}$ ultrafilter. ■

4.2 Predfilter

Definicija 4.10. Neka je X neprazan skup. Neprazna familija $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ podskupova skupa X je **predfilter** (ili **baza filtera**) na skupu X ako i samo ako zadovoljava sledeće uslove:

(BF1) Prazan skup nije element familije $\mathcal{C}$, to jest $\emptyset \notin \mathcal{C}$;

(BF2) Presek svaka dva elementa familije $\mathcal{C}$ sadrži neki element familije $\mathcal{C}$, to jest za sve $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ postoji $A_3 \in \mathcal{C}$ tako da je $A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$.

Lema 4.11. *Ako je familija $\mathcal{C}$ predfilter na skupu X, onda je familija*

$$\Phi_{\mathcal{C}} = \{F \subseteq X : F \supseteq A, \ \textit{za neko } A \in \mathcal{C}\}$$

filter na skupu X.

Dokaz. Pokažimo da familija $\Phi_{\mathcal{C}}$ zadovoljava uslove iz definicije filtera.

Neka je $F \in \Phi_{\mathcal{C}}$ proizvoljan element. Tada je $A \subseteq F$, za neko $A \in \mathcal{C}$ i $A \neq \emptyset$, pa je $F \neq \emptyset$, to jest važi uslov (FI1). Ako je $F \subseteq G \subseteq X$, onda imamo $A \subseteq F \subseteq G$, odakle sledi $G \in \Phi_{\mathcal{C}}$, pa je zadovoljen i uslov (FI3). Konačno, neka $F_1, F_2 \in \Phi_{\mathcal{C}}$. Tada je $A_1 \subseteq F_1$ i $A_2 \subseteq F_2$ za neke $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$. Kako je familija $\mathcal{C}$ baza filtera, postoji $A_3 \in \mathcal{C}$ tako da je $A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$, odakle sledi da je $A_3 \subseteq F_1$ i $A_3 \subseteq F_2$. Dakle, $A_3 \subseteq F_1 \cap F_2$, odakle je $F_1 \cap F_2 \in \Phi_{\mathcal{C}}$, pa je ispunjen i uslov (FI2). ■

Definicija 4.12. Filter $\Phi_\mathcal{C}$ iz prethodne leme naziva se **filter generisan predfilterom** $\mathcal{C}$, ili **filter pridružen predfilteru** $\mathcal{C}$.

PRIMER 5. Svaki filter je, trivijalno, predfilter.

PRIMER 6. Neka je X skup i $x \in X$. Tada je jednočlana familija $\mathcal{C} = \{\{x\}\}$ predfilter na skupu X. Ovaj predfilter generiše glavni ultrafilter $\Phi_x = \{F \subseteq X : x \in F\}$.

PRIMER 7. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Tada je kolekcija $\mathcal{C}_Y = \{O \in \mathcal{O} : Y \subseteq O\}$ predfilter na skupu X. Filter pridružen ovoj bazi je kolekcija skupova koji sadrže Y u svojoj unutrašnjosti.

Definicija 4.13. Neka su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ predfilteri na skupu X. Predfilter $\mathcal{C}_1$ je **finiji** od predfiltera $\mathcal{C}_2$, u oznaci $\mathcal{C}_2 \leq \mathcal{C}_1$, ako i samo ako je filter $\Phi_{\mathcal{C}_1}$, generisan predfilterom $\mathcal{C}_1$, finiji od filtera $\Phi_{\mathcal{C}_2}$, generisanog predfilterom $\mathcal{C}_2$, to jest ako i samo ako važi $\Phi_{\mathcal{C}_2} \subseteq \Phi_{\mathcal{C}_1}$.

Lema 4.14. *Neka su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ predfilteri na skupu X. Predfilter $\mathcal{C}_1$ je finiji od predfiltera $\mathcal{C}_2$ ako i samo ako za svako $A \in \mathcal{C}_2$ postoji $B \in \mathcal{C}_1$ tako da je $B \subseteq A$.*

Dokaz. Neka su $\Phi_{\mathcal{C}_1}$ i $\Phi_{\mathcal{C}_2}$ filteri pridruženi predfilterima $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$, respektivno.

Neka važi uslov $\mathcal{C}_2 \leq \mathcal{C}_1$ i neka je $A \in \mathcal{C}_2$. Tada je

$$A \in \mathcal{C}_2 \subseteq \Phi_{\mathcal{C}_2} \subseteq \Phi_{\mathcal{C}_1},$$

pa kako je filter $\Phi_{\mathcal{C}_1}$ generisam predfilterom $\mathcal{C}_1$, postoji $B \in \mathcal{C}_1$ tako da je $B \subseteq A$.

Neka sada za svako $A \in \mathcal{C}_2$ postoji $B \in \mathcal{C}_1$ tako da je $B \subseteq A$. Neka je $F \in \Phi_{\mathcal{C}_2}$. Tada postoji $A \in \mathcal{C}_2$ tako da je $A \subseteq F$. Prema pretpostavci, postoji $B \in \mathcal{C}_1$ tako da je $B \subseteq A \subseteq F$, odakle zaključujemo da važi $F \in \Phi_{\mathcal{C}_1}$. Prema tome, važi $\Phi_{\mathcal{C}_2} \subseteq \Phi_{\mathcal{C}_1}$, odakle sledi traženi zaključak. ∎

Definicija 4.15. Predfilteri $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ na skupu X su **ekvivalentni**, u oznaci $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2$, ako i samo ako važi $\mathcal{C}_2 \leq \mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$, to jest ako i samo ako generišu isti filter.

Primer 8. Neka je X skup sa bar dva elementa. Tada postoje baze filtera $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ na skupu X takve je $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2$, ali da važi $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$. Naime, za proizvoljnu tačku $x \in X$ važi da je jednočlana familija $\mathcal{C}_1 = \{\{x\}\}$ baza filtera na skupu X (primer 6), a filter koji ona generiše je takođe baza filtera na skupu X. Dakle, ako označimo $\mathcal{C}_2 = \{F \subseteq X : x \in F\}$, onda će baze filtera $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ biti ekvivalentne, ali neće biti jednake, jer će skup X biti sadržan samo u bazi $\mathcal{C}_2$.

Lako se pokazuje da je relacija $\leq$ refleksivna i tranzitivna relacija na skupu svih predfiltera nekog skupa, to jest da je ona relacija kvazi-uređenja na skupu svih predfiltera nekog skupa, pa prelazak sa predfiltera na odgovarajući filter predstavlja primer prelaska sa kvazi-uređenja na pridruženo parcijalno uređenje.

Definicija 4.16. Neka je familija $\mathcal{C}$ predfilter na skupu X. Predfilter $\mathcal{C}$ je **ultra predfilter** (ili **ultra baza filtera**) ako i samo ako je pridružen filter $\Phi_{\mathcal{C}}$ ultrafilter.

4.3 Konvergencija filtera

Definicija 4.17. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i Φ filter u skupu X. Tačka $a \in X$ je **granica filtera** Φ ako i samo ako svaka okolina U tačke a pripada filteru Φ, to jest ako i samo ako važi $\mathcal{U}(a) \subseteq \Phi$.

Za filter koji ima bar jednu granicu kažemo da je **konvergentan**.

Kako je kolekcija okolina tačke a, $\mathcal{U}(a)$, takođe filter u prostoru X, možemo reći i da filter Φ konvergira ka a ako i samo ako je filter Φ finiji od filtera $\mathcal{U}(a)$.
Ukoliko filter Φ ima jedinstvenu granicu, a, pišemo $\lim_{F\in\Phi} F = a$.

Definicija 4.18. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{C}$ predfilter u skupu X. Tačka $a \in X$ je **granica predfiltera** $\mathcal{C}$ ako i samo ako je a granica filtera $\Phi_{\mathcal{C}}$ generisanog predfilterom $\mathcal{C}$.

Za predfilter koji ima bar jednu granicu kažemo da je **konvergentan**.

Jasno, tačka a je granica predfiltera $\mathcal{C}$ ako i samo ako svaka okolina U tačke a sadrži element kolekcije $\mathcal{C}$.

Definicija 4.19. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je **tačka nagomilavanja filtera** Φ ako i samo ako svaka okolina tačke a ima neprazan presek sa svim elementima filtera Φ.

Analogno se definiše i tačka nagomilavanja predfiltera.

PRIMER 9. Neka je data familija $\mathcal{C} = \{(n, \infty) : n = 1, 2, 3 \ldots\}$ podskupova skupa $\mathbf{R}$ sa uobičajenom topologijom. Ova familija nije filter na skupu $\mathbf{R}$, jer očigledno ne zadovoljava uslov (FI3), ali jeste predfilter na $\mathbf{R}$. Ovaj predfilter (pa i njemu pridružen filter $\Phi_{\mathcal{C}}$) nije konvergentan. Naime, za svako $a \in \mathbf{R}$ okoline oblika $(a - r,\, a + r)$ tačke a, gde je $r \in \mathbf{R}$ proizvoljno, ne sadrže nijedan element kolekcije $\mathcal{C}$.

Do sledećeg rezultata dolazi se direktnom primenom definicija 4.17 i 4.19:

Lema 4.20. *Neka su Φ i Φ' filteri u prostoru $(X, \mathcal{O})$ takvi da je $\Phi \subseteq \Phi'$ i neka je $a \in X$.*

a) *Ako je a tačka nagomilavanja filtera Φ', onda je i tačka nagomilavanja filtera Φ;*
b) *Ako filter Φ konvergira ka a, onda i filter Φ' konvergira ka a.*

Lema 4.21. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor.*

a) *Ako filter Φ konvergira ka $a \in X$, onda je a tačka nagomilavanja filtera Φ;*
b) *Ako je $a \in X$ tačka nagomilavanja ultrafiltera $\mathcal{U}$, onda $\mathcal{U}$ konvergira ka a.*

Dokaz. a) Ako filter Φ konvergira ka $a \in X$, onda je $\mathcal{U}(a) \subseteq \Phi$, pa za proizvoljnu okolinu U tačke a i proivoljan element F filtera Φ, važi $U \cap F \neq \emptyset$, zbog uslova (FI2) za filter Φ.

b) Neka je $a \in X$ tačka nagomilavanja ultrafiltera $\mathcal{U}$ i U proizvoljna okolina tačke a. Tada okolina U seče svaki element ultrafiltera $\mathcal{U}$, odakle zaključujemo da važi $U \in \mathcal{U}$, jer bi u suprotnom bilo $X \setminus U \in \mathcal{U}$ i $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Prema tome, važi $\mathcal{U}(a) \subseteq \mathcal{U}$, to jest ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergira ka a. ∎

PRIMER 10. Neka su $p, q \in \mathbf{R}^2$ različite tačke i neka je

$$\Phi = \{F \subseteq \mathbf{R}^2 : p, q \in F\}.$$

Tada je kolekcija Φ filter sa tačkama nagomilavanja p i q, ali tačke p i q nisu granice tog filtera. Naime, kako je prostor $\mathbf{R}^2$, sa uobičajenom topologijom, Hauzdorfov, to se tačke p i q mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima O_p i O_q, respektivno, pa će upravo skupovi O_p i O_q biti okoline tačaka p i q koje nisu sadržane u filteru Φ.

U nastavku ćemo, jezikom filtera, prikazati analogone teorema o karakterizaciji topoloških prostora.

Teorema 4.22. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{O})$ *je Hauzdorfov ako i samo ako svaki filter ima najviše jednu granicu.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov topološki prostor i Φ filter u X. Pretpostavimo da su a i b dve različite granice ovog filtera. Neka su U i V disjunktne okoline tačaka a i b respektivno. Tada $U, V \in \Phi$, pa iz uslova (FI2) sledi $U \cap V \in \Phi$, a zbog (FI1) mora biti $U \cap V \neq \emptyset$. Kontradikcija.

Neka sada svaki filter ima jedinstvenu granicu, ali pretpostavimo da $(X, \mathcal{O})$ nije Hauzdorfov topološki prostor. Neka su tačke $a, b \in X$ takve da za proizvoljnu okolinu U tačke a i proizvoljnu okolinu V tačke b važi $U \cap V \neq \emptyset$. Ako definišemo filter Φ kao kolekciju svih podskupova skupa X koji sadrže tačke a i b, to jest $\Phi = \{F \subseteq X : a, b \in F\}$, onda je lako videti da Φ konvergira i ka tački a i ka tački b. Kontradikcija. ∎

Teorema 4.23. *Neka je* $(X, \mathcal{O})$ *topološki prostor i* $A \subseteq X$ *proizvoljan skup. Tada važi:*

a) $\overline{A}$ *je skup svih granica filtera koji sadrže skup* A*;*
b) *Skup* A *je zatvoren ako i samo ako sadrži sve granice svih konvergentnih filtera koji sadrže* A*;*
c) *Skup* $D \subseteq X$ *je gust ako i samo ako za svaku tačku* $x \in X$ *postoji filter koji sadrži skup* D *i čija je granica tačka* x.

Dokaz. a) Ako je tačka x granica filtera Φ koji sadrži skup A, onda je $\mathcal{U}(x) \subseteq \Phi$, pa za proizvoljnu okolinu U tačke x važi $U \cap A \neq \emptyset$. Dakle, $x \in \overline{A}$.

Neka je, sa druge strane, $x \in \overline{A}$, to jest neka svaka okolina U tačke x seče skup A. Tada je $\mathcal{C} = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}(x)\}$ predfilter koji konvergira ka x, odakle zaključujemo da je x granica pridruženog filtera $\Phi_{\mathcal{C}}$, koji pri tom sadrži skup A.

b) Neka je A zatvoren skup i neka je Φ filter koji sadrži skup A. Ako je x granica filtera Φ, onda zbog tvrđenja (a) važi $x \in \overline{A} = A$.

Neka su sada sve granice svih konvergentnih filtera koji sadrže skup A sadržane u skupu A i neka je $x \in \overline{A}$. Tada, na osnovu tvrđenja (a), postoji filter Φ koji sadrži skup A i čija je granica tačka x, a zbog datog uslova mora biti $x \in A$. Dakle, $\overline{A} \subseteq A$, pa je $\overline{A} = A$, to jest skup A je zatvoren.

c) Kako je skup $D \subseteq X$ gust ako i samo ako je $X = \overline{D}$, to jest ako i samo ako za svako $x \in X$ važi $x \in \overline{D}$, to traženi zaključak sledi iz tvrđenja (a). ∎

Teorema 4.24. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki filter Φ u prostoru X iz $\lim_{F\in\Phi} F = x_0$ sledi $\lim_{F\in\Phi} f(F) = f(x_0)$.*

Dokaz. Napomenimo prvo da je, za neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ i filter Φ, kolekcija $f[\Phi] = \{f[F] : F \in \Phi\}$ predfilter na skupu Y, jer je $f[F \cap G] \subseteq f[F] \cap f[G]$, za sve $F, G \in \Phi$.

Neka je f neprekidna u tački x_0, to jest neka važi uslov

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0)) \ \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ f[U] \subseteq V. \tag{1}$$

Neka je Φ filter u prostoru X i neka je $\lim_{F\in\Phi} F = x_0$, to jest neka je $\mathcal{U}(x_0) \subseteq \Phi$. Neka je V proizvoljna okolina tačke $f(x_0)$. Tada postoji otvoren skup O u prostoru Y takav da je $f(x_0) \in O \subseteq V$. Kako je funkcija f neprekidna, skup $f^{-1}[O]$ je otvoren i sadrži tačku x_0, pa, prema pretpostavci, važi $f^{-1}[O] \in \Phi$. To znači da je $f[f^{-1}[O]] \in f[\Phi]$. Kako je $f[f^{-1}[O]] \subseteq O \subseteq V$, to je $V \in f[\Phi]$, to jest predfilter $f[\Phi]$ konvergira ka $f(x_0)$.

Obrnuto, pretpostavimo da funkcija f očuvava konvergenciju filtera, to jest neka za svaki filter Φ u prostoru X iz $\lim_{F\in\Phi} F = x_0$ sledi $\lim_{F\in\Phi} f(F) = f(x_0)$. Da bismo pokazali da je f neprekidna funkcija, dovoljno je pokazati da za proizvoljan skup $A \subseteq X$ važi $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ (teorema 1.39). Neka $y_0 \in f[\overline{A}]$. Tada je $y_0 = f(x_0)$, za neko $x_0 \in \overline{A}$. Na osnovu teoreme 4.23 (a), postoji filter Φ koji sadrži skup A i koji konvergira ka x_0. Tada je $\lim f(\Phi) = f(x_0)$, pri čemu filter $f(\Phi)$ sadrži skup $f[A]$. Sada, ponovo na osnovu teoreme 4.23 (a), sledi da je $f(x_0) \in \overline{f[A]}$, to jest $y_0 \in \overline{f[A]}$, što je trebalo pokazati. ∎

Teorema 4.25. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i Φ filter u X. Tada je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja filtera Φ ako i samo ako postoji filter Φ', finiji of Φ, koji konvergira ka x_0.*

Dokaz. Neka je x_0 tačka nagomilavanja filtera Φ. Posmatrajmo skup

$$\mathcal{C} = \{U \cap F : U \in \mathcal{U}(x), F \in \Phi\}.$$

Kako je x_0 tačka nagomilavanja filtera Φ, svaki od skupova $U \cap F$ je neprazan. Neka su $U_1 \cap F_1$ i $U_2 \cap F_2$ dva proizvoljna elementa iz kolekcije $\mathcal{C}$. Tada važi

$(U_1 \cap F_1) \cap (U_2 \cap F_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{C}$, pa je $\mathcal{C}$ predfilter koji sadrži sve okoline tačke x_0 (odakle filter generisan familijom $\mathcal{C}$ konvergira ka x_0). Kako predfilter $\mathcal{C}$ sadrži sve elemente filtera Φ ($F = F \cap X$, za svako $F \in \Phi$), to je filter generisan predfilterom $\mathcal{C}$ finiji od Φ, što je trebalo pokazati.

Neka je, sa druge strane, filter Φ' finiji od filtera Φ i neka Φ' konvergira ka x_0, ali pretpostavimo da x_0 nije tačka nagomilavanja filtera Φ. Tada postoji element F filtera Φ takav da važi $x_0 \notin \overline{F}$. Posmatrajmo okolinu $X \backslash \overline{F}$ tačke x_0. Ako bi ta okolina bila sadržana u filteru Φ', onda bismo imali $\emptyset = F \cap X \backslash \overline{F} \in \Phi'$, što je nemoguće. Dakle, $X \backslash \overline{F} \notin \Phi'$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da filter Φ' konvergira ka x_0. ∎

Činjenica da se kompaktnost topološkog prostora može okarakterisati i pomoću konvergencije filtera sada sigurno ne predstavlja iznenađenje.

Teorema 4.26. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) *Prostor X je kompaktan, to jest zadovoljava ekvivalentne uslove teoreme 3.28;*
b) *Svaki filter na skupu X ima tačku nagomilavanja;*
c) *Svaki ultrafilter na skupu X je konvergentan.*

Dokaz. (a)⇒(b) Neka je $\Phi = \{F_i\}_{i \in I}$ filter na skupu X. Tada kolekcija Φ ima svojstvo konačnog preseka, pa to svojstvo imaju i zatvorenja elemenata kolekcije Φ, to jest postoji $x \in X$ tako da je $x \in \bigcap_{i \in I} \overline{F_i}$. Dakle, svaka okolina tačke x seče svaki element filtera Φ, pa je x tačka nagomilavanja filtera Φ.

(b)⇒(c) Sledi direktno iz leme 4.21.

(c)⇒(a) Neka važi uslov (c) i neka je $\{F_i\}_{i \in I}$ familija zatvorenih skupova prostora X koja ima svojstvo konačnog preseka. Tada je, na osnovu teoreme 4.6, familija $\{F_i\}_{i \in I}$ sadržana u nekom ultrafilteru $\mathcal{U}$. Neka je tačka $x \in X$ granica ultrafiltera $\mathcal{U}$. Tada je x tačka nagomilavanja ultrafiltera $\mathcal{U}$, pa svaki element familije $\mathcal{U}$, a samim tim i svaki skup F_i, seče svaku okolinu tačke x. Dakle, za svako $i \in I$ važi $x \in \overline{F_i} = F_i$, pa i presek $\bigcap_{i \in I} F_i$ sadrži tačku x. Dakle, važi uslov (e) teoreme 3.28, to jest prostor X je kompaktan. ∎

Teorema 4.27. *Neka je Φ filter na proizvodu $X = \prod_{i \in I} X_i$ familije topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$. Tada filter Φ konvergira ka $\langle x_i : i \in I \rangle \in X$ ako i samo ako za svako $i \in I$ filter $\pi_i(\Phi)$ konvergira ka $x_i \in X_i$.*

Dokaz. Kako konvergencija filtera ostaje očuvana pri neprekidnim preslikavanjima, to iz konvergencije filtera Φ sledi konvergencija filtera $\pi_i(\Phi)$.

Obrnuto, neka za proizvoljno $i \in I$ filter $\pi_i(\Phi)$ konvergira ka $x_i \in X_i$, to jest neka je svaka okolina tačke x_i element filtera $\pi_i(\Phi)$. Neka je U proizvoljna okolina tačke $\langle x_i : i \in I\rangle$. Tada postoji element baze topologije Tihonova $B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $K \subseteq I$ konačan skup, a $O_i \in \mathcal{O}_i$, takav da je $\langle x_i : i \in I\rangle \in B \subseteq U$. No, tada je $x_i \in O_i$ za sve $i \in K$, pa kako je svaka okolina tačke x_i element filtera $\pi_i(\Phi)$, postoje $F_i \in \Phi$, $i \in K$, tako da je $O_i = \pi_i[F_i]$. Sada je

$$U \supseteq B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[\pi_i[F_i]] \supseteq \bigcap_{i\in K} F_i \in \Phi,$$

pa $U \in \Phi$. Dakle, filter Φ konvergira ka $\langle x_i\rangle_{i\in I}$. ■

Sada ćemo prikazati dokaz teoreme Tihonova, koji je dao Kartan, koristeći filtere. Nije teško naslutiti kako on izgleda.

Neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ kompaktni topološki prostori i $X = \prod X_i$. Da bismo pokazali da je X kompaktan topološki prostor, prema teoremi 4.26, dovoljno je pokazati da je svaki ultrafilter u prostoru X konvergentan. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan ultrafilter u X. Tada je, prema teoremi 4.9, za svako $i \in I$, $\pi_i[\Phi]$ ultrafilter u prostoru X_i. Kako je, za svako $i \in I$, prostor X_i kompaktan, to je, prema teoremi 4.26, ultrafilter $\pi_i[\Phi]$ konvergentan, za svako $i \in I$. Ako sa x_i, $i \in I$, označimo granice filtera $\pi_i[\Phi]$, onda, prema prethodnoj teoremi, filter Φ konvergira ka $\langle x_i\rangle_{i\in I}$. Kraj!

Glava 5

Korespondencija između mreža i filtera

Vratimo se na trenutak na Kelijev dokaz teoreme Tihonova pomoću univerzalnih mreža i Kartanov dokaz iste teoreme pomoću ultrafiltera, i uporedimo ih. Ako svako pojavljivanje segmenta „univerzalna mreža” zamenimo sa „ultrafilter”, dokazi postaju identični! Ovo zapažanje, zajedno sa mnogim drugim primerima analognih rezultata iz prethodne dve glave, sugeriše da mreže i filteri ne predstavljaju samo različite načine za bavljenje konvergencijom, nego i da su ta dva koncepta, na neki način, direktno povezana. Preciznije, nameće se ideja da postoji postupak pomoću kog se datoj mreži pridružuje filter, i obrnuto, na takav način da se očuvaju pojmovi konvergencije, tačke nagomilavanja, podmreže, finijeg filtera, univerzalne mreže i ultrafiltera. U ovoj glavi uspostavićemo upravo takvu korespondenciju.

Ukoliko se, u potrazi za metodom prelaska sa mreže na filter, vratimo na prethodne dve glave, možemo primetiti da smo takav prelaz već imali u dokazu implikacije (b)$\Rightarrow$(e) teoreme 3.28. U nastavku ćemo ponoviti tu konstrukciju.

Definicija 5.1. Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u skupu X i neka je $\sigma_0 \in \Sigma$ proizvoljno. Skup

$$T_{\sigma_0} = \{x_\sigma : \sigma \geq \sigma_0\}$$

naziva se **trag elementa** σ_0.

Lema 5.2. *Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u skupu X. Tada je kolekcija tragova mreže S, $\mathcal{T}(S) = \{T_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, predfilter na skupu X.*

Dokaz. Familija $\mathcal{T}(S)$ je neprazna i ne sadrži prazan skup, pa je ispunjen uslov (BF1). Neka su $T_{\sigma_1}, T_{\sigma_2} \in \mathcal{T}(S)$ proizvoljni tragovi. Tada, kako je Σ usmeren skup, postoji $\sigma_3 \in \Sigma$ tako da je ispunjeno $\sigma_1 \leq \sigma_3$ i $\sigma_2 \leq \sigma_3$, pa za odgovarajuće tragove tada važi $T_{\sigma_3} \subseteq T_{\sigma_1} \cap T_{\sigma_2}$. Dakle, ispunjen je i uslov (BF2). ∎

Definicija 5.3. Filter generisan predfilterom iz prethodne leme naziva se **filter generisan mrežom** S i označava se sa $F(S)$.

Lema 5.4. *Neka je $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža i Φ filter na skupu X. Tada $F \in F(S)$ ako i samo ako je mreža S rezidualno u F.*

Dokaz. Neka je $F \in F(S)$. Tada je F nadskup nekog traga mreže S, to jest postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da je $T_{\sigma_0} \subseteq F$. Kako je $\sigma \in T_{\sigma_0}$, za svako $\sigma \geq \sigma_0$, to je mreža S rezidualno u T_{σ_0}, pa je rezidualno i u skupu F.

Neka je sada mreža S rezidualno u F. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in F$. Odatle je $T_{\sigma_0} \subseteq F$, odnosno $F \in F(S)$. ∎

Obrnuto, pretpostavimo da je dat filter Φ sa skupu X. Kako konstruisati mrežu od filtera Φ? Prvi, a verovatno i teži zadatak, je pronalaženje usmerenog skupa Σ, dok je drugi zadatak definisanje preslikavanja $x : \Sigma \to X$. Ključno zapažanje je da uslov

$$F_1, F_2 \in \Phi \Rightarrow \exists F_3 \in \Phi : F_3 \subseteq F_1 \cap F_2 \tag{1}$$

upravo pokazuje da su elementi kolekcije Φ usmereni obrnutom inkluzijom, što nam sugeriše da za skup Σ odaberemo upravo kolekciju Φ. Sada, kako bismo dobili mrežu, moramo svakom elementu $F \in \Phi$ pridružiti neki element $x_F \in X$. Uslov $x_F \in F$ se sam nameće, ali on svakako nije dovoljno precizan. Ta činjenica nagoveštava da skup Σ treba drugačije definisati.

Lema 5.5. *Neka je Φ filter na skupu X i neka je na skupu*

$$\Sigma(\Phi) = \{(x, F) : x \in F \in \Phi\}$$

definisana relacija $\leq$ na sledeći način: $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ ako i samo ako je $F_1 \supseteq F_2$. Tada je $(\Sigma(\Phi), \leq)$ usmeren skup i preslikavanjem $(x, F) \mapsto x$ definisana je mreža na skupu X.

Dokaz. Neka su $(x_1, F_1), (x_2, F_2) \in \Sigma(\Phi)$ proizvoljni elementi. Tada $F_1, F_2 \in F$, pa, zbog uslova (1) iz razmatranje pre leme, postoji $F_3 \in \Phi$ tako da važi $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$. Odatle je $F_3 \subseteq F_1$ i $F_3 \subseteq F_2$, pa je za proizvoljno $x \in F_3$, $(x, F_3) \in \Sigma(\Phi)$ element za koji je ispunjeno $(x_1, F_1) \leq (x, F_3)$ i $(x_2, F_2) \leq (x, F_3)$. ∎

Definicija 5.6. Mreža $x : \Sigma(\Phi) \to X$ definisana u prethodnoj lemi naziva se **mreža generisana filterom** Φ i označava se sa $M(\Phi)$.

Teorema 5.7. *Neka je Φ filter na skupu X. Tada važi:*

a) *Tragovi mreže $M(\Phi)$ su upravo elementi filtera Φ;*
b) $\Phi = F(M(\Phi))$.

Dokaz. Primetimo da tvrđenje (b) sledi direktno iz tvrđenja (a), pošto su elementi predfiltera koji generiše filter $F(M(\Phi))$ upravo tragovi mreže $M(\Phi)$.

Dokažimo tvrđenje (a). Radi lakšeg zapisa, označimo sa S mrežu $M(\Phi) : \Sigma(\Phi) \to X$. Neka je $(x, F) \in \Sigma(\Phi)$. Pokažimo da je tada $T_{(x,F)} = F$. Neka je $(y, G) \geq (x, F)$. Tada je $G \subseteq F$ i $S_{(y,G)} = y$. Jasno, za sve $(y, G) \geq (x, F)$ važi $S_{(y,G)} \in F$, pa je $T_{(x,F)} \subseteq F$. Neka je sada $y \in F$. Tada je $(y, F) \geq (x, F)$, odakle je $S_{(y,F)} = y \in T_{(x,F)}$. Dakle, $T_{(x,F)} = F$, to jest svaki trag je član kolekcije Φ. Pokažimo obrnuto, to jest da je svaki član kolekcije Φ trag mreže $M(\Phi)$. Neka je $x \in F \in \Phi$ proizvoljno. Tada $(x, F) \in \Sigma(\Phi)$, pa se istim rezonovanjem pokazuje da je $F = T_{(x,F)}$. ∎

Posledica 5.8. *Neka je Φ proizvoljan filter na skupu X. Tada $F \in \Phi$ ako i samo ako je mreža $M(\Phi)$ rezidualno u F.*

Dokaz. Neka je $F \in \Phi$. Tada je, zbog prethodne teoreme, $F \in F(M(\Phi))$, odakle je, prema lemi 5.4, mreža $M(\Phi)$ rezidualno u F.

Obrnut smer se pokazuje analogno. ∎

PRIMER 1. Neka je na skupu X, sa bar dva elementa, dat trivijalan filter $\Phi = \{X\}$. Tada je domen mreže $M(\Phi)$ skup $\{X\} \times X$ i ona je definisana sa $(x, X) \mapsto x$. Primetimo da za indukovano kvazi-uređenje na X važi $x \leq y$ za sve $x, y \in X$, to jest da je skup X usmeren, ali da relacija $\leq$ nije antisimetrična. Odatle za svako $x \in X$ imamo $T_{(x,X)} = \{y \in X : y \geq x\} = X$, pa je zaista $\Phi = F(M(\Phi))$.

Teorema 5.7 ima i mnoge druge važne posledice. Injektivnost operatora M je jedna od njih. Dakle, različiti filteri će generisati različite mreže. Zatim, operator F je sirjektivan, to jest za svaki filter na skupu X postoji mreža kojoj će upravo taj filter biti pridruženi. Međutim, operator F nije injektivan. Uopšteno govoreći, beskonačno mnogo mreža ima isti priduženi filter (najočigledniji primer je proizvoljan niz, zajedno sa podnizom kom nedostaje samo prvi član, a zatim i podnizom bez prva dva člana itd.). Upravo ta činjenica onemogućuje strogu matematičku ekvivalenciju između klase svih mreža i klase svih filtera na nekom skupu X.

PRIMER 2. Neka je $x : \Sigma \to \{a\}$ konstantna mreža, to jest neka za svako $\sigma \in \Sigma$ važi $x_\sigma = a$. Tada je skup svih tragova mreže x dat sa $\mathcal{T}(x) = \{a\}$, pa je filter generisan mrežom x dat sa $F(x) = \{a\}$. Posmatrajmo sada mrežu $M(F(x))$. Njen indeksni skup ima samo jedan element, par $(a, \{a\})$, dok skup Σ može da ima proizvoljno mnogo elemenata. Odatle zaključujemo da je $x \neq M(F(x))$.

Pretodno razmatranje i primer pokazuju da jednakost $x = M(F(x))$ ne važi u opštem slučaju. Međutim, mreže x i $M(F(x))$ su ekvivalentne u smislu da konvergiraju ka istim tačkama i da imaju iste tačke nagomilavanja u proizvoljnom topološkom prostoru X. Preciznije, važe sledeće teoreme:

Teorema 5.9. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, S mreža na prostoru X, Φ filter na prostoru X i neka je $x_0 \in X$. Tada važi:*

a) *Filter Φ konvergira ka x_0 ako i samo ako mreža $M(\Phi)$ konvergira ka x_0;*

b) *Mreža S konvergira ka x_0 ako i samo ako filter $F(S)$ konvergira ka x_0.*

Dokaz. a) Neka filter Φ konvergira ka x_0 i neka je U proizvoljna okolina tačke x_0. Tada je $(x_0, U) \in \Sigma(\Phi)$, pa za $(x, F) \geq (x_0, U)$ dobijamo $x \in F \subseteq U$. Dakle, mreža $M(\Phi)$ takođe konvergira ka x_0.

Obrnuto, neka mreža $M(\Phi)$ konvergira ka x_0 i neka je U proizvoljna okolina tačke x_0. Tada postoji $(x', F') \in \Sigma(\Phi)$ tako da za sve $(x, F) \geq (x', F')$ važi $x_{(x,F)} = x \in U$. Odatle je $F \subseteq U$, pa, zbog uslova (FI3) za filter Φ, zaključujemo da važi $U \in \Phi$. Kako je okolina U bila proizvoljna, to je $\mathcal{U}(x) \subseteq \Phi$, to jest filter Φ konvergira ka x_0.

b) Neka mreža S konvergira ka x_0 i neka je U proizvoljna okolina tačke x_0. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in U$, to jest $T_{\sigma_0} \subseteq U$. Kako je filter $F(S)$ generisan kolekcijom tragova mreže S, zaključujemo da $U \in F(S)$, a pošto je U bila proizvoljna okolina, sledi $\mathcal{U}(x_0) \subseteq F(S)$, to jest filter $F(S)$ konvergira ka x_0.

Neka sada filter $F(S)$ konvergira ka x_0 i neka je U proizvoljna okolina tačke x_0. Tada je $U \in F(S)$, to jest postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da je $T_{\sigma_0} \subseteq U$. Sada je za svako $\sigma \geq \sigma_0$ ispunjeno $x_\sigma \in T_{\sigma_0} \subseteq U$, odnosno mreža S konvergira ka x_0. ∎

Sledeća lema je vrlo korisna, jer karakteriše tačke nagomilavanja mreže preko tragova te mreže.

Lema 5.10. *Tačka x_0 je tačka nagomilavanja mreže $x : \Sigma \to X$ ako i samo ako je $x_0 \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \overline{T_\sigma}$.*

Dokaz. Neka je x_0 tačka nagomilavanja mreže $x : \Sigma \to X$ i neka je $\sigma \in \Sigma$ proizvoljno. Pretpostavimo suprotno: neka $x_0 \notin \overline{T_\sigma}$. Tada postoji okolina U tačke x_0 koja ne sadrži tačke skupa $\overline{T_\sigma}$. Međutim, prema definiciji tačke nagomilavanja, mreža $x : \Sigma \to X$ je kofinalno u svakoj okolini tačke x_0, pa i u okolini U, što implicira da postoji $\sigma' \geq \sigma$ tako da je $x_{\sigma'} \in U$. Kontradikcija. Dakle, $x_0 \in \overline{T_\sigma}$ za sve $\sigma \in \Sigma$.

Neka sada $x_0 \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \overline{T_\sigma}$ i pretpostavimo da x_0 nije tačka nagomilavanja date mreže. Tada postoji okolina U tačke x_0 takva da mreža $x : \Sigma \to X$ nije kofinalno u U, to jest postoji okolina U tačke x_0 i $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \notin U$. Odatle, za svaku otvorenu okolinu $O \subseteq U$ tačke x_0 takođe važi $\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \notin O$. Tada skup $\overline{T_{\sigma_0}}$ ne seče skup O, jer bi u suprotnom važilo da je $\overline{T_{\sigma_0}} \backslash O$ najmanji zatvoren skup koji sadrži $\overline{T_{\sigma_0}}$, što bi bila kontradikcija. Dakle, $x_0 \notin \overline{T_{\sigma_0}}$, što je u suprotnosti sa uslovom $x_0 \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \overline{T_\sigma}$. Dakle, x_0 jeste tačka nagomilavanja date mreže. ∎

Teorema 5.11. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, S mreža na prostoru X, Φ filter na prostoru X i neka je $x_0 \in X$. Tada važi:*

a) *x_0 je tačka nagomilavanja mreže S ako i samo ako je x_0 tačka nagomilavanja filtera $F(S)$;*
b) *x_0 je tačka nagomilavanja filtera Φ ako i samo ako je x_0 tačka nagomilavanja mreže $M(\Phi)$.*

Dokaz. a) Dovoljno je pokazati da je x_0 tačka nagomilavanja mreže S ako i samo ako je $x_0 \in \overline{F}$ za svaki element F predfiltera koji generiše filter $F(S)$ (jer za svaki element G filtera $F(S)$ postoji element F tog predfiltera tako da je $F \subseteq G$, odakle je $\overline{F} \subseteq \overline{G}$). Međutim, kako je predfilter koji generiše filter $\Phi(S)$ upravo kolekcija tragova mreže S, traženi rezultat sledi direktno iz prethodne leme.

b) Prema tvrđenju (a), x_0 je tačka nagomilavanja mreže $M(\Phi)$ ako i samo ako je x_0 tačka nagomilavanja filtera $F(M(\Phi))$, pa tvrđenje sledi primenom teoreme 5.7, (b). ∎

Prelaskom sa mreže na odgovarajući filter i obrnuto ostaje očuvana i osobina univerzalnosti u odgovarajućem smislu.

Teorema 5.12. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, S mreža na prostoru X i Φ filter na prostoru X. Tada važi:*

a) *Mreža S je univerzalna ako i samo je $F(S)$ ultrafilter;*
b) *Φ je ultrafilter ako i samo ako je mreža $M(\Phi)$ univerzalna.*

Dokaz. a) Neka je mreža S univerzalna, neka je $A \subseteq X$ proizvoljan skup i neka je, bez umanjenja opštosti, S rezidualno u A. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in A$, onda je $T_\sigma \subseteq A$, pa $A \in F(S)$.

Obrnuto, ako je $F(S)$ ultrafilter i ako je proizvoljan skup $A \subseteq X$ element filtera $F(S)$, onda postoji $\sigma_0 \in \Sigma$, tako da je $T_{\sigma_0} \subseteq A$, pa za sve $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in A$, to jest mreža S je rezidualno u A.

b) Prema tvrđenju (a), mreža $M(\Phi)$ je univerzalna ako i samo ako je $F(M(\Phi))$ ultrafilter, pa tvrđenje sledi primenom teoreme 5.7, (b). ∎

Postavlja se pitanje da li se pri prelasku sa mreže na filter i obrnuto očuvava i koncept podmreže, odnosno finijeg filtera. Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 5.13. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ mreža u prostoru X. Ako je $S' = \langle x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma' \rangle$ podmreža mreže S, onda je filter $F(S')$ finiji od filtera $F(S)$.*

Dokaz. Neka monotono preslikavanje $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$ zadovoljava uslove (PM1) i (PM2). Neka je F proizvoljan element filtera $F(S)$. Tada postoji $\sigma_0 \in \Sigma$ tako da je $T_{\sigma_0} \subseteq F$, to jest za svako $\sigma \geq \sigma_0$ važi $x_\sigma \in F$. Zbog uslova (PM1) postoji $\sigma'_0 \in \Sigma'$ tako da je za sve $\sigma' \geq \sigma'_0$ ispunjeno $\varphi(\sigma') \geq \sigma_0$. Jasno, tada je, zbog uslova (PM2), $x_{\sigma'} \in F$ za sve $\sigma' \geq \sigma'_0$. Dakle, važi $T_{\sigma'_0} \subseteq F$, pa kako je $T_{\sigma'_0}$ trag mreže S', skup F pripada filteru generisanom mrežom S', to jest $F \in F(S')$. Kako je $F \in F(S)$ bio proizvoljan element, sledi $F(S) \subseteq F(S')$, to jest filter $F(S')$ je finiji od filtera $F(S)$. ∎

Nažalost, dualno tvrđenje ne važi, to jest ako je filter Φ' finiji od filtera Φ, onda se ne može tvrditi da je mreža $M(\Phi')$ podmreža mreže $M(\Phi)$. Sledeći primer ilustruje tu situaciju.

PRIMER 3. Neka je $X = \mathbf{N}$. Definišimo za svako $n \in \mathbf{N}$ skup F_n sa:

$$F_n = \{1\} \cup \{n, n+1, n+2, \dots\}.$$

Kako je za proizvoljne $m, n \in \mathbf{N}$ ispunjeno $F_m \cap F_n = F_{\max\{m,n\}}$, to je kolekcija $\mathcal{C} = \{F_n : n \in \mathbf{N}\}$ predfilter na skupu X. Neka je $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{1\}$. Tada je i kolekcija $\mathcal{C}'$ predfilter na X i za odgovarajuće filtere $\Phi_{\mathcal{C}}$ i $\Phi_{\mathcal{C}'}$ važi $\Phi_{\mathcal{C}} \subseteq \Phi_{\mathcal{C}'}$. Međutim, za element $(1, \{1\})$ usmerenog skupa $\Sigma(\Phi_{\mathcal{C}'})$ važi $(1, \{1\}) \geq (x, F)$, za sve $(x, F) \in \Sigma(\Phi_{\mathcal{C}'})$, ali takav element ne postoji u usmerenom slupu $\Sigma(\Phi_{\mathcal{C}})$, pa ne postoji monotono preslikavanje $\varphi : \Sigma(\Phi_{\mathcal{C}'}) \to \Sigma(\Phi_{\mathcal{C}})$. Dakle, mreža $M(\Phi')$ ne može biti podmreža mreže $M(\Phi)$.

Definicija podmreže koju smo dali u glavi 3 je zadovoljavajuća u smislu da se uklapa u teoriju konvergencije baš onako kako smo želeli: tvrđenje „x_0 je tačka nagomilavanja mreže S ako i samo ako postoji podmreža te mreže koja konvergira ka x_0" važi sa takvom definicijom. Međutim, sada kada imamo na raspolaganju korespondenciju sa teorijom filtera, možemo dati mnogo jednostavniju definiciju pojma podmreže.

Definicija 5.14. Mreža $S' = \langle x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma' \rangle$ je **podmreža mreže** $S = \langle x_\sigma : \sigma \in \Sigma \rangle$ ako i samo ako je filter generisan mrežom S' finiji od filtera generisanog mrežom S, to jest ako i samo ako važi $F(S) \subseteq F(S')$.

Drugim rečima, mreža S' je podmreža mreže S ako i samo ako za svako $\sigma \in \Sigma$ postoji $\sigma' \in \Sigma'$ tako da je $T^{S}_{\sigma'} \subseteq T^{S'}_{\sigma}$. Koristeći ovu definiciju sa lakoćom se dokazuju ključne teoreme iz Glave 3.

Zaključak

U metričkim prostorima, kao što je skup realnih brojeva sa standardnom metrikom, skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve granice svih konvergentnih nizova koji mu pripadaju. Pored toga, metrički prostor je kompaktan ako i samo ako svaki niz ima konvergentan podniz. Međutim, u proizvoljnim topološkim prostorima ove ekvivalencije ne važe u opštem slučaju. Nažalost, neretko se dešava da neoprezan čitalac tvrdi da je kompaktnost uvek ekvivalentna sekvencijalnoj kompaktnosti.

Takođe, pri radu sa topološkim prostorima, pre ili kasnije, nailazi se na prostore koji nisu Hauzdorfovi ili ne zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti. Dakle, dolazi se u situaciju u kojoj je potrebno okarakterisati topološki prostor, a u kojoj konvergencija nizova nije od velike pomoći. U takvoj situaciji poželjno je poznavati teoriju konvergencije mreža ili filtera.

Svrha ovog rada je da ukaže na to kako nizovi nisu dovoljni za karakterizaciju važnih topoloških svojstava, kao što su neprekidnost, kompaktnost i mnoge druge, a potom i da prikaže osnovne rezultate teorije konvergencije mreža i filtera, koje postižu cilj koji nizovi nisu mogli, ali i više od toga: poznavanjem neke od ove dve teorije, fundamentalna teorema Tihonova se dokazuje u par redova, dok su drugi dokazi znatno duži i komplikovaniji.

U poslednjoj glavi ovog rada prikazano je da se sva tvrđenja iz teorije konvergencije mreža mogu dokazati i pomoću filtera i obrnuto, pa se čitalac može opredeliti za bavljenje samo jednom od ove dve teorije, shodno konkretnom problemu koji treba da reši.

Autor se nada da je ovim master radom dao jednu zaokruženu priču o konvergenciji. Iako je rad napisan prvenstveno u cilju završetka master studija, može poslužiti kao osnov za produbljivanje znanja iz teorije konvergencije svim zainteresovanim čitaocima.

Literatura

[1] Bartle, R. G., *Nets and Filters in Topology*, The American Mathematical Monthly, Volume 62, 551-557, 1955.

[2] Bartle, R. G., *Relations between nets and indexed filter basis*, Colloquium Mathematicum, Volume 10, 211-215, 1963.

[3] Birkhoff, G., *Moore–Smith Convergence in General Topology*, Annals of Mathematics, Volume 38, 1937.

[4] Bourbaki, N., *General Topology*, Springer, 1998.

[5] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

[6] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[7] Franklin, S. P., *Spaces in which sequences suffice*, Fundamenta Mathematicae, Volume 57, 1965.

[8] Gajić, Lj., *Predavanja iz uvoda u analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2004.

[9] Gajić, Lj., *Predavanja iz analize I*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2006.

[10] Hu Sze-Tsen, *Elements of General Topology*, Holden - Day Inc., San Francisco, 1965.

[11] Kelley J. L., *Convergence in topology*, Duke Mathematical Journal, Volume 17, 277-283, 1950.

[12] Kelley J. L., *General Topology*, Springer Verlag New York, 1975.

[13] Kurilić M., *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1998.

[14] Moore, E. H., *On a form of general analysis*, Yale Colloquium Lectures, 1910.

[15] Moore, E. H., *Definition of limit in general integral analysis*, National Academy of Sciences, USA, 1915.

[16] Moore, E. H., Smith H. L., *A general theory of limits*, American Journal of Mathematics, Volume 44, 102-121, 1922.

[17] Steen L. A., Seebach Jr., J. A., *Counterexamples in topology*, Dover Publications, 1978.

Biografija

Jovana Obradović rođena je 6. jula 1988. godine u Kikindi. Odrasla je u Iđošu, gde je završila osnovnu školu „Milivoj Omorac" 2003. godine, kao nosilac „Vukove diplome". Prirodno-matematički smer Gimnazije „Dušan Vasiljev" završila je u Kikindi 2007. godine, takođe sa prosekom 5.00 u svim razredima, i iste godine upisala je Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer „Diplomirani matematičar - profesor matematike". 2011. godine je diplomirala sa prosečnom ocenom 9.53, i upisala master studije matematike na istom fakultetu, modul: nastava matematike. Sve ispite predviđene planom i programom položila je u junskom roku 2012. godine i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, avgust 2012. Jovana Obradović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Jovana Obradović
AU

Mentor: prof. dr Miloš Kurilić
MN

Naslov rada: Mur–Smitova konvergencija
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski i engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2012
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada (broj poglavlja, broj strana, broj literalnih citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga): (5, iii+79, 17, 0, 0, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Topologija
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: nizovi, mreže, filteri, konvergencija, kompaktnost, teorema Tihonova, sekvencijalni prostori
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog master rada je konvergencija mreža, odnosno primena konvergencije mreža na karakterizaciju raznih osobina topoloških prostora. Nakon ispitivanja konvergencije nizova u proizvoljnim, a zatim i u prostorima sa prvom aksiomom prebrojivosti, kao i u sekvencijalnim i metričkim prostorima, uvode se pojmovi mreže, podmreže i ultramreže i prikazuje se kako se pomoću njih mogu okarakterisati zatvorenje skupa, gust skup, kompaktnost, neprekidnost funkcije i druge osobine prostora. Prikazuje se i pogodnost rada sa mrežama u analizi i daje se dokaz teoreme Tihonova. Zatim se uvode filteri i prikazuju se analogoni teorema iz teorije konvergencije mreža, kao i dokaz teoreme Tihonova. Na kraju se prikazuje korespondencija između mreža i filtera.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Aleksandar Pavlović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Jovana Obradović
AU

Mentor: Miloš Kurilić, Ph. D.
MN

Title: Moore–Smith convergence
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian, English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2012
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Matemathics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Physical description (chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements): (5, iii+79, 17, 0, 0, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Topology
SD

Subject/Key words: sequences, nets, filters, convergence, compactness, Tychonoff's theorem, sequential spaces
SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis deals with net convergence and its application to the characterization of various properties of topological spaces. After examining sequence convergence in arbitrary topological scaces, as well as in first countable, sequential and metric spaces, we introduce the concepts of net, subnet and ultranet and demonstrate their use in the characterization of a set closure, dense set, compactness, continuous functions etc. We also show the benefits of working with nets in analysis and we prove Tychonoff's theorem using nets. Moreover, we introduce the theory of filters and give analogues of theorems from the theory of net convergence, as well as Tychonoff's theorem proof. Finally, we present the correspondence between nets and filters.
AB

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Dr Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Aleksandar Pavlović, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad