Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Jelena Alimpijević

ELEMENTI ORDINALNE ARITMETIKE

Master rad

Novi Sad, 2009

Sadržaj

1 Uvod

Ovaj master rad sadrži tri poglavlja i u njemu se daju osnovi ordinalne aritmetike.

U prvom poglavlju se daje pregled aksioma Zermelo-Fraenkelove teorije skupova sa aksiomom izbora i nekih njihovih posledica. To je najrasprostranjeniji sistem aksioma za teoriju skupova.

U drugom poglavlju se opisuju osnovne osobine tranzitivnih i induktivnih skupova. Formalno se uvodi skup prirodnih brojeva i daju neka elementarna svojstva tog skupa, kao i njegovih elemenata.

Treće poglavlje, koje je i srž ovog rada, prvo opisuje neka bitna svojstva ordinala. Definiše sabiranje, množenje i steprnovanje ordinala, pri čemu se koristi transfinitnu rekurziju na ordinalima. Takodje, pokazuje da se rezultati sabiranja i množenja ordinala mogu definisati i kao ordinali nekih "specijalnih" dobrih uredjenja.

Ovom prilikom želim da se zahvalim svim svojim profesorima i asistentima na ukazanom znanju tokom, prvo osnovnih, a potom i master studija. Posebno bih želela da se zahvalima svom mentoru dr Milanu Gruloviću za znanje koje sam stekla radivši sa njim.

2 ZFC teorija skupova

U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa najrasprostranjenijim sistemom aksioma teorije skupova ZFC - Zermelo-Fraenkelova aksiomatika (ZF - prvih osam dole navedenih aksioma) sa aksiomom izbora (AC). ZFC je teorija prvog reda sa jednakošću na jeziku $L_{ZF} = \{\in\}$ i nadalje ćemo zbog kraćeg zapisa formula tog jezika koristiti sledeće oznake:

$x \neq y$ za $\neg(x = y)$

$x \notin y$ za $\neg(x \in y)$

$\{x|\varphi(x)\}$ za kolekciju elemenata sa odredjenim svojstvom (koje opisuje $\varphi(x)$ formula našeg jezika) $\exists x \in y \varphi(x)$ umesto $\exists x(x \in y \wedge \varphi(x))$

$\forall x \in y \varphi(x)$ umesto $\forall x(x \in y \Rightarrow \varphi(x))$

$\exists_1 x \varphi(x)$ umesto $\exists x \forall y(\varphi(y) \Leftrightarrow x = y)$

Skupovi se obično obeležavaju sa mailim i velikim slovima engleskog, grčkog i hebrejskog alfabeta.

1) **Aksioma ekstenzionalnosti**

$$\forall x \forall y(x = y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

Dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente, tj. svaki skup je potpuno odredjen svojim elementima.

Primetimo da zbog prirode relacije $=$ smer $\Rightarrow$ uvek važi, pa se umesto navedene formule ponekad koristi formula

$$(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y.$$

Za formulu

$$(\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

uvedimo oznaku $A \subseteq B$, koju čitamo A je podskup skupa B. Za skup A kažemo da je pravi podskup skupa B, u oznaci $A \subset B$, ako i samo ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$.

Teorema 2.1. Neka je $\varphi(x)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova. Ako postoji skup A takav da su svi njegovi elementi upravo svi skupovi X za koje važi $\varphi(X)$, onda je on jedinstven.

Dokaz. Neka su A i B skupovi, čiji su elementi skupovi koji zadovo ljavaju formulu $\varphi(x)$. Tada, za neki proizvoljan skup a važi:

$$a \in A \text{ akko } \varphi(a) \text{ akko } a \in B.$$

Prema tome, skupovi A i B imaju iste elemente, pa su oni, po aksiomi ekstenzionalnosti, jednaki. **Q.E.D.**

2) **Aksioma para**

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

Ako su x i y skupovi, onda postoji skup koji sadrži tačno x i y kao elemente.

Teorema 2.2. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Tada postoji tačno jedan skup C čiji su jedini elementi A i B (drugim rečima, skup iz aksiome para je jedinstven).

Dokaz. Neka je C skup čiji su elementi skupovi x sa osobinom $x = A \vee x = B$. Po teoremi 1.1, skup C je jedinstven. **Q.E.D.**

Skup čiji su jedini elementi skupovi A i B označavaćemo sa $\{A, B\}$. Skup $\{A, A\}$ je, prema aksiomi ekstenzionalnosti, skup $\{A\}$.

Definicija 2.1. Neka su x i y dva proizvoljna skupa. Uredjeni par (x, y) definisemo kao

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Egzistenciju uredjenog para obezbedjuje aksioma para.

Generalno, za $n \geq 2$ definišemo rekurzivno

$$(x_1, ..., x_n) = ((x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$$

Posebno, za $n = 1$ stavljamo $(x) = x$.

Teorema 2.3. Neka su a, b, c i d proizvoljni skupovi. Tada je $(a, b) = (c, d)$ ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka $(a, b) = (c, d)$. $\{a\} \in (a, b)$, pa $\{a\} \in (c, d)$. Prema aksiomi para, to znači $\{a\} = \{c\}$ ili $\{a\} = \{c, d\}$. Pretpostavimo, prvo, da $\{a\} = \{c\}$. To nam daje $a = c$. Kako je $\{a, b\} \in (c, d)$ dobijamo $\{a, b\} = \{c\}$ ili $\{a, b\} = \{c, d\}$. Iz $\{a, b\} = \{c\}$ sledi $b = c$, a $\{c, d\} = \{a\}$ nam daje $d = a$. Iz $\{a, b\} = \{c, d\}$ sledi $b = d$. Pretpostavimo, sada, $\{a\} = \{c, d\}$, odakle sledi $a = c = d$, a $\{a, b\} = \{c\}$ daje $a = b = c$. **Q.E.D.**

Aksiomom para smo dobili da ako su x i y skupovi onda je i $\{x, y\}$ skup. Ali, niti iz aksiome pare, niti iz bilo koje od do sada navedenih aksioma ne sledi postojanje trojke, tj. ako su x, y i z skupovi, ne možemo tvrditi da je $\{x, y, z\}$ skup. To će nam dati sledeća aksioma.

3) **Aksioma unije**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u))$$

Ako je x skup, onda postoji skup y koji sadrži sve elemente elemenata skupa x.

Skup iz aksiome unije je jedinstven (po aksiomi ekstenzionalnosti) i obeležava se sa $\bigcup x$. Umesto $\bigcup\{A_1, \ldots, A_n\}$ pisaćemo $A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_n$

Lema 2.1. Za svaka tri skupa x, y i z postoji skup čiji su elementi upravo ta tri skupa.

Dokaz. Prema aksiomi para su nam dati skupovi $\{x, y\}$ i $\{z\}$, a tada i (opet prema istoj aksiomi) skup $\{\{x, y\}, \{z\}\}$. Unija tog skupa je baš $\{x, y, z\}$.

Naravno, ova lema važi za bilo koji konačan niz elemenata. **Q.E.D.**

4) **Aksioma partitivnog skupa**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$$

Za svaki skup x, postoji njegov partitivni skup, tj. skup koji sadrži sve podskupove skupa x.

Skup y iz Aksiome partitivnog skupa je (prema aksiomi ekstenzionalnosti) jedinstven i obeležavamo ga sa $P(x)$.

Aksioma partitivnog skupa daje skup svih podskupova nekog skupa x, ali nije dovoljna da se pokaže postojanje nekog specijalnog poskupa od x, koji bi sadržao elemente iz x koji imaju neku zajedničku osobinu.

5) **Aksioma podskupa (šema separacije)**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$$

gde je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljiva z javlja slobodno i u kojoj promenljiva y nema slobodnih javljanja.

Za svaki skup x postoji podskup koji sadrži tačno one elemente iz x koji zadovoljavaju φ.

Ova aksioma je šema aksioma, što znači da za svaku formulu φ imamo po jednu aksiomu.

Prema aksiomi ekstenzionalnosti skup y iz aksiome 7 je jedinstven.

Jedna od posledica predikatskog računa sa jednakošću je $\exists x(x = x)$. Neka je x neki takav skup, tada je $\{y|y \in x \wedge y \notin y\}$ skup po aksiomi podskupa, a aksioma ekstenzionalnosti nam daje jedinstvenost tog skupa. Takav skup, prirodno, nazivamo prazan skup i obeležavamo sa $\emptyset$.

Lema 2.2. $\emptyset$ je podskup svakog skupa.

Dokaz. Neka je y proizvoljan skup, očigledno važi formula $\forall(x)(x \in \emptyset \Rightarrow x \in y)$. **Q.E.D.**

Definicija 2.2. Neka su A, B i C skupovi. Definišimo presek, razliku i simetričnu razliku, respektivno, na sledeći način:

$$A \cap B = \{a|a \in A \wedge a \in B\}$$
$$A \backslash B = \{a|a \in A \wedge a \notin B\}$$
$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Definicija 2.3. Presek nepraznog skupa A definišemo na sledeći način

$$\bigcap A = \{x | \forall y (y \in A \Rightarrow x \in y)\}$$

Na osnovu $Ax1 - Ax5$ možemo definisati pojmove kao što su: presek, razlika, direktan proizvod skupova, relacije, funkcije, ordinali, kardinali. Ali, pomenute aksiome ne obezbedjuju egzistenciju beskonačnog skupa.

6) **Aksioma beskonačnosti**

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x))$$

Definicija 2.4. Skup X je induktivan ako ispunjava uslove aksiome beskonačnosti.

Prema tome, aksioma beskonačnosti kaže da postoji bar jedan induktivan skupa, a svaki takav induktivan skup, sadrži skupove

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}...$$

7) **Aksioma zamene**

$$\forall x (\forall z (z \in x \Rightarrow \exists_1 u \varphi(z, u)) \Rightarrow \exists y \forall u (u \in y \Leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge \varphi(z, u))))$$

gde je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljive z i u javljaju slobodno i u kojoj promenljiva y nema slobodnih javljanja.

Smisao aksiome je sledeći: ako svakom elementu datog skupa x pridružimo tačno jedan elemenat-"sliku", onda postoji skup čiji su elementi "slike" elemenata skupa x i samo one

8) **Aksioma regularnosti (fundacije)**

$$\forall x (x \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists y \in x)(x \cap y = \emptyset)$$

Za svaki neprazan skup x postoji bar jedan njegov element koji nema zajedničkih elemenata sa skupom x

Teorema 2.4. Ne postoji ni jedan skup koji pripada samom sebi.

Dokaz. Prema aksiomi regularnosti je $x \bigcap \{x\} = \emptyset$ pa $x \notin x$. **Q.E.D.**

Teorema 2.5. Ne postoji konačan niz skupova za koje važi

$$X_1 \ni X_2 \ni ... \ni X_n \ni X_1$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji konačan niz skupova za koje važi $X_1 \ni X_2 \ni ... \ni X_n \ni X_1$. To pak implicira da skup $\{X_1, X_2 ....X_n\}$ nije disjunktan ni sa jednim svojim elementom, što je u kontradikciji sa aksiomom regularnosti. **Q.E.D.**

Aksioma izbora (AC)

$$(\forall z)\{[\forall x(x \in z \Rightarrow x \neq \emptyset) \wedge (\forall x \forall y)(x \in z \wedge y \in z \Rightarrow x \cap y = \emptyset \vee x = y)] \Rightarrow \\ (\exists u)(\forall x)(\exists v)(x \in z \Rightarrow u \cap x = \{v\})\}$$

Za svaki neprazan skup z, čiji su elementi neprazni disjunktni skupovi, postoji skup u koji sadrži po tačno jedan element iz svakog člana skupa z.

Napomenimo da je ovo samo jedna od brojnih verzija aksiome izbora. Ova verzija nam kaže da ako imamo nepraznu familiju z nepraznih, uzajamno disjunktnih skupova, onda postoji skup koji sadrži po tačno jedan elemenat iz svakog skupa familije z. Jasno, ako postoji mogućnost "prepoznavanja" nekih elemenata u svakom skupu familije z, tada nam aksioma izbora nije potrebna. Ilustrativan je u tom smislu Raselov primer: Za odabir po jedne cipele iz beskonačnog skupa parova cipela ne treba nam aksioma izbora (uzećemo, recimo, uvek levu); ali ako je u pitanju skupa beskonačno mnogo pari čarapa, onda ne možemo bez aksiome izbora.

3 Funkcije i relacije

Definicija 3.1. Dekartov proizvod skupova A i B, u oznaci $A \times B$, se definiše na sledeći način:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

Teorema 3.1. Neka su A i B skupovi. Tada je Dekartov proizvod skupova A i B skup. Taj skup je jedinstven.

Dokaz. Prema aksiomama unije i partitivnog skupa je i $P(P(A \bigcup B))$ skup, a aksioma separacije nam daje

$$A \times B = \{z : z \in P(P(A \bigcup B)) \wedge (\exists a)(\exists b)(a \in A \wedge b \in B \wedge z = (a,b))\}$$

Q.E.D

Definicija 3.2. f je funkcija, u oznaci $Fun(f)$, ako i samo ako važi:

$$\forall x(x \in f \Rightarrow \exists y \exists z(x = (y,z))) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z)$$

Za funkciju f definišemo:

$$Dom(f) = \{x | \exists y((x,y) \in f)\}$$
$$Ran(f) = \{x | \exists y((y,x) \in f)\}$$

$Dom(f)$ i $Ran(f)$ su skupovi, jer je, na primer: $Dom(f) = \{x | x \in \bigcup f \wedge \exists y((x,y) \in f\}$ Pisaćemo

$$f : A \to B$$

ako i samo ako važi

$$Fun(f) \wedge Dom(f) = A \wedge Ran(f) \subseteq B$$

Umesto $(a,b) \in f$, često se piše i $f(a) = b$.

Neka je $f : A \to B$. Za funkciju f kažemo da je:

1) *injekcija* $(1-1)$ akko važi: $\forall x, y \in A(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

2) *surjekcija* (na) akko važi: $\forall y \in B \quad \exists x \in A(f(x) = y)$.

3) *bijekcija* akko je $1-1$ i na.

Definicija 3.3. Neka je $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Kompozicija funkcija f i g, u oznaci $f \circ g$, je skup

$$f \circ g = \{x | \exists a \exists b \exists c (a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \wedge f(a) = b \wedge g(b) = c \wedge \\ x = (a, c)).$$

$f \circ g$ je, zapravo, skup $\{(x,y) \in P(P(Dom(f) \bigcup Ran(g) | \exists z (x,z) \in f \wedge (z,y) \in g))\}$

Definicija 3.4. Neka je $f : A \to B$. Inverzna slika skupa $X \subseteq B$ je definisana sa

$$f^{-1}[X] = \{a | a \in A \wedge f(a) \in X\}.$$

Definicija 3.5. Neka je $f : A \to B$. Direktna slika skupa $X \subseteq A$ je skup

$$f[X] = \{f(x) | x \in X\}.$$

Lema 3.1. Ako su A i B skupovi, onda je i $\{f | f : A \to B\}$ skup.

Dokaz. $\{f | f : A \to B\} = \{f | f \in P(A \times B) \wedge Fun(f) \wedge Dom(f) = A\}$ je po aksiomi separacije skup. **Q.E.D.**

Skup iz prethodne leme obeležavaćemo sa B^A.

Definicija 3.6. Neka je X skup. Svaki podskup ρ Dekartovog proizvoda $X \times X$ je binarna relacija na skupu X.

Ako je ρ binarna relacija na skupu X umesto $(a,b) \in \rho$ pišemo i $a\rho b$. Neka su $a, b \in X$. Kažemo da su a i b u relaciji ρ , ako važi $(a,b) \in \rho$.

Definicija 3.7. Binarna relacija na skupu X je :

refleksivna ako i samo ako $(\forall a \in X)(a\rho a)$;

irefleksivna ako i samo ako $(\forall a \in X)\neg(a\rho a)$;

simetrična ako i samo ako $(\forall a, b \in X)(a\rho b) \Rightarrow b\rho a)$;

antisimetrična ako i samo ako $(\forall a, b \in X)(a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b)$;

tranzitivna ako i samo ako $(\forall a, b, c \in X)(a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c)$;

relacija ekvivalencije ako i samo ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna;

relacija poretka ako i samo ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna;

relacija strogog poretka ako i samo ako je irefleksivna i tranzitivna.

Po dogovoru, u opštoj priči sa $<_A$ označavamo relaciju strogog poretka na skupu A, a sa $\leq_A$ označavamo sledeći skup

$$\leq_A = <_A \bigcup \{(a,a) | a \in A\}.$$

4 Dobro uredjeni skupovi

Definicija 4.1. $(A, \leq_A)$ je parcijalno uredjen skup ako je $\leq_A$ relacija poretka na skupu A. Par $(A, <_A)$ je strogo parcijalno uredjenje ako je $<_A$ relacija strogog poretka na skupu A.

Definicija 4.2. Neka je $(A, \leq_A)$ parcijalno uredjen skup. Za elemente $x, y \in A$ kažemo da su uporedivi ako važi $x \leq y$ ili $y \leq x$. U suprotnom su x i y neuporedivi.

Definicija 4.3. Neka je $(A, \leq_A)$ parcijalno uredjen skup. Za $B \subseteq A$ kažemo da je lanac ako su svi elementi skupa B uporedivi.

Definicija 4.4. Neka je $(A, \leq_A)$ parcijalno uredjen skup, X neprazan podskup skupa A i neka je $a \in A$.

- Za $a \in A$ kažemo da je majoranta ili gornje ograničenje skupa X ako i samo ako za svako $x \in X$ važi $x \leq_A a$.

- Za $a \in A$ kažemo da je minoranta ili donje ograničenje skupa X ako i samo ako za svako $x \in X$ važi $a \leq_A x$.

- ako postoji jedinstveno gornje ograničenje skupa X, zovemo ga supremum skupa X i označavamo sa $supX$. Ako $supX$ pripada skupu X, onda za njega kažemo da je maksimum skupa X.

- ako postoji jedinstveno najveće donje ograničenje skupa X zovemo ga infimum skupa X i označavamo sa $infX$. Ako $infX$ pripada skupu X, onda za njega kažemo da je minimum skupa X.

- a je minimalni elemenat ukoliko ni za jedno $b \neq a$ nije $b \leq_A a$.

- a je maksimalni elemenat ukoliko ni za jedno $b \neq a$ nije $a \leq_A b$.

Definicija 4.5. Parcijalno uredjen skup je linearan ako i samo ako su svaka dva elementa uporediva.

Definicija 4.6. Strogo uredjen skup $(A, <_A)$ je dobro uredjen ako i samo ako svaki neprazan podskup skupa A ima minimum.

Teorema 4.1. Svako dobro uredjenje je linearno.

Dokaz. Neka je $(A, <_A)$ dobro uredjenje i neka su $x, y \in A$, $x \neq y$. Posmatrajmo skup $B = \{x, y\}$. On je neprazan podskup skupa A i kao takav ima minimalni elemenat, pa je ili $a <_A b$ ili $b <_A a$. **Q.E.D**

Teorema 4.2. Ako je $(A, <_A)$ dobro uredjenje i ako je X podskup skupa A, tada je i $(X, <_A \cap (X \times X))$ dobro uredjenje. Obično se neformalno umesto $(X, <_A \cap (X \times X))$ piše samo $(X, <_A)$.

Definicija 4.7. Neka je $<$ strogo linearno uredjenje skupa A. Podskup B skupa A je početni ili inicijalni segment akko važi: $\forall x \in B \ \forall y \in A$ $(y < x \Rightarrow y \in B)$.

Neka je $a \in A$. $\{x | x \in A \wedge x < a\}$ je početni segment elementa a i obeležava se sa $seg(a)$. Skup A je trivijalni početni segment, ostali početni segmenti su pravi početni segmenti.

Definicija 4.8. Neka su $(A, \leq_A)$ i $(B, \leq_B)$ dva prizvoljna uredjenja. Bijekcija $f : A \to B$ je izomorfizam ako i samo ako važi:

$$\forall x, y \in A(x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y).$$

Ako su $(A, \leq_A)$ i $(B, \leq_B)$ izomorfna uredjenja, pisaćemo $(A, \leq_A) \simeq (B, \leq_B)$

Teorema 4.3. Neka je $(A, <_A)$ dobro uredjenje i $a \in A$. Dobra uredjenja $(A, <_A)$ i $(seg(a), <_A)$ nisu izomorfna uredjenja .

Dokaz. Pretpostavimo da je $f : A \to seg(a)$ izomorfno preslikavanje. Pošto je $seg(a)$ pravi podskup skupa A, skup $X = \{x | x \in A \wedge x \neq f(x)\}$ je neprazan i kao takav ima minimalni elemenat b.

Iz $f(b) <_A b$ sledilo bi $f(f(b)) = f(b)$, što daje $f(b) = b$, kontardikcija.

Iz $b <_A f(b) <_A a$ sledilo bi $f^{-1}(b) < f^{-1}(f(b)) = b$, dakle $f(b) = b$, kontradikcija. **Q.E.D**

Definicija 4.9. Neka je $<$ strogo linearno uredjenje skupa A. Podskup B skupa A je $<-$induktivan akko važi: $\forall a \in A \ seg(a) \subseteq B \Rightarrow a \in B$.

Teorema 4.4. (Transfinitna indukcija na dobrom uredjenju). Ako je $<$ dobro uredjenje skupa A, onda je jedini $<-$induktivan podskup skupa A ceo skup A.

Dokaz. Neka je B $<-$induktivan podskup dobrog uredjenja $(A, <)$ i neka je a $<-$najmanji element skupa A. Tada je $seg(a) = \emptyset \subseteq B$, što implicira da je $a \in B$. Dakle, skup B je neprazan. Ako bi B bio pravi podskup skupa A, tada bi $A \backslash B$ bio neprazan, pa ako bi b bio njegov najmanji elemenat, imali bismo $seg(b) \subseteq B$, dakle i $b \in B$, kontradikcija. **Q.E.D.**

Lema 4.1. Neka je $(A, <)$ strogo linearno uredjenje koje ima samo jedan $<-$ induktivan podskup- skup A. Tada je $<$ dobro uredjenje skupa A.

Dokaz. Neka je B neprazan podskup skupa A. Posmatrajmo skup

$C = \{c \in A | \forall b \in B\ c < b\}$, koji je, evidentno, disjunktan sa skupom B. C nije $<-$ induktivan, pa postoji neki element a iz A, takav da je $seg(a) \subseteq C$, dok $a \notin C$. To, dalje, implicira da je za neko $b \in B\ b \leq a$. Medjutim, ako bi bilo $b < a$, to bi impliciralo da je $b \in C$, što naravno nije moguće, pa je $a = b$. Dakle, a je $<-$ najmanji elemenat skupa B. **Q.E.D.**

Teorema 4.5. (Transfinitna rekurzija na dobrom uredjenju). Neka je $\phi(x, y, u_1, ..., u_m)$ (kraće ćemo pisati $\phi(x, y)$), $m \geq 0$, formula takva da je $\forall x\ \exists_1 y\ \phi(x, y)$ teorema i neka je $(A, <)$ dobro uredjenje. Tada postoji jedinstvena funkcija F čiji je domen skup A i za koju važi: $\forall a \in A\ \phi(F|_{seg(a)}, F(a))$

Dokaz. Neka je A skup i neka je a iz A. Funkcija f je $\phi-$ je konstruisana do a akko važi: $Dom(f) = seg(a) \bigcup \{a\} = \{x \in A | x < a \vee x = a\}$ i za svako $x \in Dom(f)\ \phi(f|_{seg(x)}, f(x))$. Ako su a i b iz A i $a \leq b$ i ako su f i g funkcije $\phi-$konstruisane, respektivno,do a odnosno b, tada je $g|_{Dom(f)} = f$. Jer, ako je skup $\{x \in Dom(f) | f(x) \neq g(x)\} \neq \emptyset$ i ako je c minimalni elemenat toga skupa, imamo $\phi(f|_{seg(c)}, f(c))$ i $\phi(g|_{seg(c)}, g(c))$, no zbog $f|_{seg(c)} = g|_{seg(c)}$ i svojsva formule $\phi(x, y)$ sledi $f(c) = g(c)$. Dakle, postoji najviše jedna $\phi-$konstruisana funkcija do a. Isto tako imamo, ako je f $\phi-$konstruisana do a i ako je $b < a$, onda je funkcija $f|_{seg(b) \bigcup \{b\}}$ $\phi-$konstruisana do b.

Neka je $A_1 = \{x \in A | \exists f\ f$ je $\phi-$konstruisana funkcija do $x\}$ i neka je formula $\varphi(x, f, A, <) \equiv Fun(f) \wedge Dom(f) = \{y \in A | y \leq x\} \wedge \forall y \leq x\ \phi(f|_{seg(y)}, f(y))$. Konstatujmo, uzgred, da je $A_1 \neq \emptyset$, jer; $a_0 <-$ najmanji element skupa A i ako je z jedinstveni elemenat za koji je $\phi(a_0, z)$, onda je funkcija $\{(a_0, z)\}$ $\phi-$konstruisana do a_0 (znači $a_0 \in A_1$). Prema aksiomi zamene je $F_{\phi,A} = \{f | \exists a \in A_1\ f$ je $\phi-$konstruisana funkcija do $a\}$ skup, pa je i $F = \bigcup F_{\phi,A}$ skup.

Pokažimo da je F funkcija. Neka su $(x, y), (x, z) \in F$, dakle, $(x, y) \in f$ i $(x, z) \in g$ za neke funkcije f i g iz $F_{\phi,A}$. Ako je f je $\phi-$ konstruisana do a, a g $\phi-$ konstruisana do b i $a \leq b$, tada je (kako smo već konstatovali) $g|Dom_(f) = f$, što daje $y = f(x) = g(x) = z$.

Ako je $a \in Dom(F)$, onda je, za neko $f \in F_{\phi,A}$, $a \in Domf$. f je $\phi-$ konstruisana do nekog b, što imlicira $a \leq b$. Zbog jedinstvenosti elemenata skupa $F_{\phi,A}$, imamo $f|_{seg(a)} = F|_{seg(a)}$ i $f(a) = F(a)$. Znamo da je $\phi(f|_{seg(a)}, f(a))$, pa je onda i $\phi(F|_{seg(a)}, F(a))$. Dakle, za svako a iz $Dom(F)$ važi $\phi(F|_{seg(a)}, F(a))$.

Jasno je da je $Dom(F) = A_1$. Pokažimo i da je $A = A_1$.Pretpostavimo da je A_1 pravi podskup skupa A i da je $a <-$ minimalan elemenat skupa

$A \setminus A_1$. Tada je $seg(a) \subseteq A_1 = Dom(F)$. Dokažimo da je $seg(a) = A_1$. Pretpostavimo da postoji neko b, $a < b \in Dom(F)$, što implicira da postoji neko $f \in F_{\phi,A}$ tako da $b \in Dom(f)$, pa $seg(b) \subseteq Dom(f) \subseteq Dom(F)$, što implicira $a \in Dom(F)$, kontradikcija. Pretpostavimo da je y jedinstveni elemenat za koji važi $\phi(F, y)$ i neka je $G = F \bigcup \{(a, y)\}$. G je funkcija i $Dom(G) = Dom(F) \bigcup \{a\} = seg(a) \bigcup \{a\}$. Jasno, za $c \in seg(a)$ je $G|_{seg(c)} = F|_{seg(c)}$ i $G(c) = F(c)$, pa je $\phi(G|_{seg(c)}, G(c))$. Za a važi $G|_{seg(a)} = F$ i $G(a) = y$, pa je $\phi(G|_{seg(a)}, G(a))$. Dakle, G je $\phi-$konstruisana funkcija do a, pa $a \in Dom(F)$. Kontradikcija.

Pretpostavimo, sada, da postoji još jedna funkcija H koja ispunjava uslove teoreme i koja je različita od F. Tada je skup $\{x \in A | F(x) \neq H(x)\}$ neprazan i neka je a $<-$ minimalan elemenat toga skupa. Tada je $F|_{seg(a)} = G|_{seg(a)}$, a pošto je važi $\phi(F|_{seg(a)}, F(a))$ i $\phi(H|_{seg(a)}, H(a))$, to sledi da je $F(a) = G(a)$, kontradikcija. Dakle, funkcija F jedinstveno postoji. **Q.E.D.**

Lema 4.2.

1) Neka su $(A, <_A)$ i $(B, <_B)$ dva strogo linearna (dobra) uredjenja i neka su A i B disjunktni skupovi. Tada je $(A \bigcup B, <_A \oplus <_B)$, gde je $<_A \oplus <_B = <_A \cup <_B \bigcup A \times B)$ strogo linearno (dobro) uredjenje. Ako je $(A, <_A) \cong (C, <_C)$ i $(B, <_B) \cong (D, <_D)$ i $C \bigcap D = \emptyset$, onda je $(A \bigcup B, <_A \cup <_B \bigcup A \times B) \cong (C \bigcup D, <_C \cup <_D \bigcup C \times D)$;

2) Ako su $(A, <_A)$ i $(B, <_B)$ dva strogo linearna (dobra) uredjenja, onda je i $(A \times B, <_A \bullet <_B)$, gde je $((a_1, b_1), (a_2, b_2) \in <_A \bullet <_B \Leftrightarrow b_1 <_B b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 <_A a_2)$ takodje strogo linearno (dobro) uredjenje.

   Iz $(A, <_A) \cong (C, <_C)$ i $(B, <_B) \cong (D, <_D)$ sledi $(A \times B, <_A \bullet <_B) \cong (C \times D, <_C \bullet <_D)$.

Dokaz.

2) Neka su $(A, <_A)$ i $(B, <_B)$ dobra uredjenja. Irefleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost i linearnost relacije $<_A \bullet <_B$ slede iz same definicije te relacije i irefleksivnosti, antisimetričnosti, tranzitivnosti i linearnosti relacija $<_A$ i $<_B$. Pokažimo dobru uredjenost. Neka je X neki neprazan podskup skupa $A \times B$. Posmatrajmo skup $B_1 = \{b \in B | \exists a \in A \ (a, b) \in X\}$ i označimo njegov $<_B -$ minimalni elemenat sa y. Posmatrajmo sada skup $A_1 = \{a \in A | (a, y) \in X\}$ i njegov $<_A -$minimalni

elemenat označimo sa x. Neka su $(a,b) \in X$, tada, je zbog izbora elementa y ili $y <_B b$ ili $y = b$. Prvi slučaj automatski daje da je $((x,y),(a,b)) \in <_A \bullet <_B$. U drugom slučaju dobijamo da je ili $x <_A a$ ili $x = a$. Ako važi prvi prvi slučaj, onda je opet $((x,y),(a,b)) \in <_A \bullet <_B$. Drugi slučaj daće $(x,y) = (a,b)$. Dakle, (x,y) je $<_A \bullet <_B$ $-$minimalan elemenat skupa X. **Q.E.D.**

5 Skup prirodnih brojeva

Definicija 5.1. Skup X je tranzitivan ako i samo ako je svaki njegov element istovremeno i njegov podskup.

Lema 5.1. Presek neprazne familije tranzitivnih skupova je tranzitivan skup.

Dokaz. Neka je X neprazna familija tranzitivnih skupova i $a \in X$. Jasno, $\bigcap X = \{y \in a | \forall z \in X\, y \in z\}$, a trivijalno se proverava da je to i tranzitivan skup. **Q.E.D.**

Teorema 5.1. Ako su svi elementi skupa X tranzitivni, onda je i skup $\bigcup X$ tranzitivan.

Dokaz. Neka su svi elementi skupa X tranzitivni skupovi i neka je $y \in \bigcup X$. Treba da pokažemo da je $y \subseteq \bigcup X$. Ako je $y \in z \in X$, onda je $y \subseteq z \subseteq \bigcup X$. **Q.E.D.**

$Ind(x)$ će biti skraćenica za formulu

$$\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y \bigcup \{y\} \in x).$$

(drugim rečima, $Ind(x)$ će značiti da je x induktivan skup). Po dogovoru, umesto $x \cup \{x\}$ pisaćemo x^+ i taj skup ćemo zvati naslednikom skupa x.

Teorema 5.2. Neka je X proizvoljan skup. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

1) X je tranzitivan;

2) $\bigcup X \subseteq X$;

3) $\bigcup X^+ = X$;

4) X^+ je tranzitivan;

5) $P(X)$ je tranzitivan.

Dokaz. 1) $\Rightarrow$ 2) Neka je X tranzitivan skup i neka $y \in \bigcup X$. Po aksiomi unije, to znači da postoji z tako da je $z \in X$ i $y \in z$. Kako je X tranzitivan skup, sledi $y \in X$.

2) $\Rightarrow$ 3) Neka je $\bigcup X \subseteq X$.

Jasno je $X \subseteq \bigcup X^+$

Pokažimo da je $\bigcup X^+ \subseteq X$.

$$z \in \bigcup(X \cup \{X\}) \Leftrightarrow \exists y(y \in X \cup \{X\} \wedge z \in y) \Leftrightarrow$$
$$\exists y((y \in X \vee y \in \{X\}) \wedge z \in y) \Leftrightarrow$$
$$\exists y((y \in X \wedge z \in y) \vee (y \in \{X\} \wedge z \in y)) \Leftrightarrow$$
$$(\exists y)(y \in X \wedge z \in y) \vee (\exists y)(y = X \wedge z \in y)$$

Iz svega prethodnog dobijamo da je $y \in X$ ili $y = X$. Ako je $y \in X$, onda , po aksiomi unije i uslovu teoreme, važi $z \in \bigcup X \subseteq X$ tj. $z \in X$. Ako je $y = X$, onda trivijalno sledi da je $z \in X$.

3) $\Rightarrow$ 4) Neka je $\bigcup X^+ = X$ i neka $b \in a \in X^+$. Po aksiomi unije, dobijamo $b \in \bigcup X^+ = X$, tj. $b \in X \subseteq X^+$. Dakle $b \in X^+$.

4) $\Rightarrow$ 5) Neka je X^+ tranzitivan skup i neka je $a \in b \in P(X)$, dakle, $a \in b \subseteq X \subseteq X^+$. Neka je $c \in a$. Odatle sledi $c \in X^+$, pa je ili $c \in X$ ili $c = X$. Pretpostavka da je $c = X$ daje vezu $X \in a \in X$ što je u kontradikciji sa aksiomom regularnosti.

5) $\Rightarrow$ 1) Ako je $a \in X$, onda iz $a \in \{a\} \in P(X))$ (i datog uslova) sledi $a \in P(X)$. **Q.E.D.**

Lema 5.2. $\cup X^+ = X \cup \bigcup X$

Dokaz.

$$a \in \cup X^+ = \cup(X \cup \{X\}) \Leftrightarrow$$
$$\exists b(b \in X \cup \{X\} \wedge a \in b) \Leftrightarrow$$
$$\exists b((b \in X \vee b = X) \wedge a \in b) \Leftrightarrow$$
$$\exists b((b \in X \wedge a \in b) \vee (b = X \wedge a \in b)) \Leftrightarrow$$
$$\exists b(b \in X \wedge a \in b) \vee \exists b(b \in \{X\} \wedge a \in b)) \Leftrightarrow$$
$$a \in \cup X \vee a \in X \Leftrightarrow$$
$$a \in \cup X \cup X$$

Teorema 5.3. Presek klase svih induktivnih skupova Ind je induktivan skup.

Dokaz. Prema aksiomu beskonačnosti dobijamo je klasa svih induktivnih skupova Ind neprazna. Ako je $Ind(x)$ tada je

$$\bigcap Ind = \{z \in x | \forall y(y(Ind(y) \Rightarrow z \in y\}.$$

Evidentno, za $\bigcap Ind$ važi $\emptyset \in \bigcap Ind$ i ako $z \in \bigcap Ind$, onda i $z^+ \in \bigcap I$.**Q.E.D.**

$\bigcap Ind$ je, naravno, najmanji induktivan skup. Obeležava se sa ω i naziva se skup prirodnih brojeva.

Teorema 5.4. ω je tranzitivan skup.

Dokaz. Posmatrajmo skup

$$X = \{x \in \omega | x \subseteq \omega\}$$

Pokažimo da je X induktivan skup. Jasno je da $\emptyset \in X$. Neka je sada $a \in X$, tj. $a \in \omega$ i $a \subseteq \omega$. Kako je ω induktivan skup važi $a^+ \in \omega$. S druge strane, važi i $a^+ = a \bigcup \{a\} \subseteq \omega$.Dakle, i $a^+ \in X$. Zaključujemo: $X \in \omega$. **Q.E.D.**

Teorema 5.5. Neka je A induktivan skup. Skupovi $B = \{x \in A | x$ je tranzitivan $\}$ i $C = \{x \in A | x$ je tranzitivan $\wedge\ x \notin x\}$ su induktivni. Napomenimo odmah da ne uzimamo u obzir aksiomu regularnosti (inače bi imali $B = C$).

Dokaz. Posmatrćemo samo skup C. Kako je $\emptyset$ tranzitivan i važi $\emptyset \notin \emptyset$, sledi da je $\emptyset \in C$.

Pretpostavimo, sada, da je $x \in C$. Pokažimo da je $x^+ \in C$. Kako je $x \in A$, a A je induktivan skup, sledi da je $x^+ \in A$. Pošto je x tranzitivan skup, to sledi da je i x^+ tranzitivan skup. Još treba pokazati da $x^+ \notin x^+$.

Pretpostavimo suprotno, tj da je $x^+ \in x^+ = x \bigcup \{x\}$, pa dobijamo $x^+ \in x \bigcup \{x\}$. Tada je $x^+ \in x$ ili $x^+ = x$. $x^+ = x$ implicira $x \in x^+ = x$, tj. $x \in x$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $x \in C$. Pretpostavim, sada, da je $x^+ \in x$. Dobijamo $x \in x^+ \in x$. To opet sledi $x \in x$, pa i ovaj slučaj otpada. **Q.E.D.**

Korolar 5.1. (Bez aksiome regularnosti) Svi elementi skupa ω su tranzitivni i ni jedan nije elemenat samog sebe.

Teorema 5.6. Svaki prirodan broj je ili nula ili je naslednik nekog prirodnog broja.

Dokaz. Definišimo sledeći skup

$$A = \{n \in \omega | n = \emptyset \vee \exists k (k \in \omega \wedge\ n = k^+)\}$$

Pokažimo da je A induktivan (a odatle će sledeti $A = \omega$). $\emptyset \in A$ važi zbog definicije skupa A. Pretpostavimo $n \in A$. Kako je ω induktivan skup, to je i $n^+ \in \omega$ i, jasno, $n^+ \in A$. **Q.E.D.**

Lema 5.3. Neka su $k, m \in \omega$. Tada važi

$$k \in m \Leftrightarrow k^+ \in m^+$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Definišimo sledeći skup

$$A = \{m \in \omega | \forall k(k \in m \Rightarrow k^+ \in m^+)\}$$

Pokažimo da je A induktivan skup, tj. da je $A = \omega$. Jasno, $\emptyset \in A$. Pretpostavimo da $m \in A$. ω je induktivan skup pa je $m^+ \in \omega$. Neka je $k \in m^+ = m \bigcup \{m\}$. Odatle dobijamo da je $k \in m$ ili $k = m$. Pretpostavimo da je $k \in m$.Zbog pretpostavke, da je $m \in A$, sledi $k^+ \in m^+ \in (m^+)^+$. Tranzitivnost nam daje da je $k^+ \in (m^+)^+$. Ako, pretpostavimo, da je $k = m$, dobijamo $k^+ = m^+ \in (m^+)^+$; dakle, $m^+ \in A$.

($\Leftarrow$) Ako je $k^+ \in m^+ = m \bigcup \{m\}$, zbog tranzitivnosti prirodnih brojeva, dobijamo $k \in m$. Ako je $k^+ = m$, trivijalno $k \in m$. **Q.E.D.**

Teorema 5.7.

$$\varepsilon_\omega = \{(m, n) \in \omega \times \omega | m \in n\}$$

je dobro uredjenje skupa ω.

Dokaz.

Irefleksivnost i tranzitivnost slede prema Korolaru 4.1

(*linearnost*) Treba da pokažemo, da za bilo koja dva prirodna broja m n, važi jedna od relacija $m \in n$, $m = n$, $n \in m$ (jasno, zbog irefleksivnosti i tranzitivnosti relacije $\in_\omega$ ne mogu istovremeno da važe bilo koje dve od navedenih relacija). Dokaz se svodi na proveru da je, za svako m, skup $A_m = \{n \in_\omega | m \in n \veebar m = n \veebar n \in m\}$ induktivan. Za A_0 je to evidentno. Pretpostavimo $m \neq 0$. Naravno, $0 \in m$ (jer je $A_0 = \omega$). Pretpostavimo $k \in A_m$ i $k \in m$. Dakle, $k^+ \in m^+ = m \bigcup \{m\}$. Sledi $k^= \in m$ ili $k^= m$; u svakom slučaju $k^+ \in A_m$.

Na kraju, treba pokazati da svaki neprazan podskup ima $\in -$ minimalni elemenat. U tu svrhu, uočimo skup $\emptyset \neq B \subseteq \omega$ i pretpostavimo da B nema $\in$-minimalni elemenat. Definišimo sledeći skup

$$C = \{n \in \omega | \forall m \in n \Rightarrow m \notin B\}$$

Pokažimo da je C induktivan skup. Jasno, $0 \in C$. Pretpostavimo da je $k \in C$ i pokažimo da je $k^+ \in C$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $k^+ \notin C$. To znači da postoji neko $l \in k^+$, tako da je $l \in B$. $l \in k$ je kontradiktorno sa pretpostavkom $k \in C$. Dakle, $l = k$. To znači da je $k \in B$. Ali to nam, onda, daje da je k $\in$-minimalni elemenat u B, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da B nema $\in$-minimalni elemenat. Prema tome i $k^+ \in C$. No, iz $C = \omega$ sledi da je B prazan skup, kontradiktorno polaznoj pretpostavci. Zaključujemo: svaki neprazan podskup od ω ima $\in$-minimalni elemenat. **Q.E.D.**

Teorema 5.8. Strogi princip indukcije

$$\forall n(\forall k \in n \quad k \in A \Rightarrow n \in A) \Rightarrow A = \omega$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $A \neq \omega$. Tada je $\omega \backslash A$ neprazan podskup skupa ω i on (po prethodnoj teoremi) ima $\in_\omega$-minimalni element m. Kako je m $\in_\omega$-minimalni element skupa $\omega \backslash A$, to sledi da za svako $k \in m$ važi $k \in A$, što implicira $m \in A$, kontradikcija. **Q.E.D.**

Definicija 5.2. Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Kažemo da su oni ekvipotentni, u oznaci $X \sim Y$, ako postoji bijekcija $f : X \to Y$.

Teorema 5.9. Dirihleov princip: Neka je $n \in \omega$. n nije ekvipotentan svom pravom podskupu.

Dokaz. Definišimo sledeći skup

$$A = \{n \in \omega | \forall f : f : n \to n \text{ je } 1-1 \Rightarrow f \text{ je na } \}$$

Pokažimo da je ovaj skup induktivan. Jasno je da $\emptyset \in A$. Neka je $k \in A$ i neka je $f : k^+ \to k^+$ $1-1$. Pokažimo da je f i na. Kako je f $1-1$, to je moguće:

(1) $Ran(f|_k) \subseteq k$. Iz pretpostavke da je f $1-1$ dobijamo da je $f|_k : k \to k$ $1-1$, a kako je $k \in A$, sledi da je $f|_k$ na. Dakle, $f(k) = k$. Iz svega prethodno rečenog, dobijamo $Ran(f) = k \bigcup \{k\} = k^+$, tj. f je na.

(2) $Ran(f|_k) \nsubseteq k$. Tada postoji $l < k$ takav da je $f(l) = k$. Definišimo funkciju $g : k^+ \to k^+$, tako da važi $g(l) = f(k) \in k$, $g(k) = f(l) = k$ i $g(m) = m$ za sve $m \neq k, l$. Iz definicije funkcije g, vidimo da je ona $1-1$ i da je $Ran(g) = Ran(f)$. $Ran(g|_k) \subseteq k$, pa je prema (1) g na. Dakle, $Ran(f) = Ran(g) = k^+$, tj. f je na. **Q.E.D.**

Korolar 5.2. Neka su $k, n \in \omega$ i $n \neq k$. Tada n i k nisu ekvipotentni.

Dokaz. Kako je $n \neq k$ to je ili $n \in k$ ili $k \in n$. Pretpostavimo da je $k \in n$ (analogno za drugi slučaj). Prema prethodnoj teoremi k i n nisu ekvipotentni. **Q.E.D.**

Definicija 5.3. Skup A je konačan ako i samo ako postoji $n \in \omega$ takvo da su A i n ekvipotentni.

Teorema 5.10.(Rekurzija na ω) Neka je A neprazan skup i neka $a \in A$ i $f : A \to A$. Tada postoji funkcija $g : \omega \to A$ takva da je $g(0) = a$ i $g(n^+) = f(g(n))$.

Dokaz. Definišimo sledeći skup

$$G = \{h \subseteq \omega \times A | h \text{ je funkcija} \wedge 0 \in Dom(h) \Rightarrow h(0) = a \wedge \\ \forall n (n^+ \in Dom(h) \Rightarrow n \in Dom(h) \wedge h(n^+) = f(h(n)))\}.$$

Jasno, $\{(0, a)\} \in G\}$. Stavimo da je $g = \bigcup G$ i pokažimo da je g funkcija i $Dom(g) = \omega$.

Pretpostavimo prvo da g nije funkcija. Prem tome je skup

$$C = \{k \in \omega | \exists x, y \in A \ (x \neq y \wedge (k, x), (k, y) \in g)\}$$

neprazan. Kako je $C \subseteq \omega$, postoji ϵ_ω-najmanji elemenat iz $C - k$ (naravno $k \neq 0$). Neka je $k = n^+$. Tada postoje dve različite funkcije h_1 i h_2 iz G i dva različita elementa a_1 i a_2 iz A, takvi da je $h_1(k) = a_1$ i $h_2(k) = a_2$. Jasno, $h_1(n) = h_2(n)$, odakle sledi da je $a_1 = h_1(n^+) = f(h_1(n)) = f(h_2(n)) = h_2(n^+) = a_2$. Kontradikcija. Dakle, g je funkcija.

Naravno, $g(0) = a$. Neka je $n^+ \in Dom(g)$. Tada postoji neka funkcija $h \in G$, tako da je $n^+ \in Dom(h)$, što implicira da je $n \in Dom(h)$ i $h(n^+) = f(h(n))$, što dalje daje da je $n \in Dom(g)$ i $g(n^+) = h(n^+) = f(h(n)) = f(g(n))$.

Pokažimo da je $Dom(g) = \omega$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $Dom(g)$ pravi podskup od ω i da je $n \in_\omega -$ najmanji elemenat skupa $\omega \setminus Dom(g)$. Neka je $n = m^+$. Tada je $m \in Dom(g)$, pa postoji neko $h \in G$ takvo da je $(m, h(m)) = (m, g(m)) \in g$. Stavimo da je $h_1 = h \bigcup \{(m^+, f(h(m)))\}$. h_1 je element skupa G, pa je $n = m^+ \in Dom(g)$, kontradikcija.

Pokažimo na kraju jedinstvenost funkcije g. Pretpostavimo da i funkcija h koja ispunjava date uslove. Neka je $B = \{k \in \omega | g(k) = h(k)\}$. Jasno, $0 \in B$. Neka je i $n \in B$, tada je $h(n^+) = f(h(n)) = f(g(n)) = g(n^+)$, pa je i $n^+ \in B$. Dakle, B je induktivan skup, što povlači $B = \omega$, odnosno $g = h$. **Q.E.D.**

Korolar 5.3. Neka je A neprazan skup i neka je $\rho \subseteq A^2$ i za svako $x \in A$ postoji $y \in A$ tako da $(y, x) \in \rho$. Tada postoji $g : \omega \to A$ tako da za svako $n \in \omega$ važi $g(n^+) \rho g(n)$.

Dokaz. Aksioma izbora nam daje funkciju $F : P(A) \setminus \{0\} \setminus \emptyset \to P(A)$, tako da važi $\forall B \in P(A) \setminus \emptyset \ F(B) \in B$. Neka je $f : A \to A$ funkcija definisana sa $f(x) = F(A_x)$, pri čemu je $A_x = \{y \in A | y\rho x\}$.

Prema prethodnoj teoremi, za proizvoljno $a \in A$, postoji funkcija $g : \omega \to A$ takva da je $g(0) = a$ i $g(n^+) = f(g(n)) = F(A_{g(n)}) \in A_{g(n)}$. Odatle sledi da je $g(n^+)\rho g(n)$, što je i trebalo pokazati. **Q.E.D.**

Korolar 5.4. Neka je $(A, <)$ strogo linearno uredjenje. Tada važi: $<$ je dobro uredjenje akko ne postoji funkcija $g : \omega \to A$ za koju važi $g(n^+) < g(n)$.

Dokaz. Neka je $(A, <)$ strogo linearno uredjenje.

($\Rightarrow$) Neka je $(A, <)$ dobro uredjenje i pretpostavimo da postoji funkcija g takva da $g : \omega \to A$ i $g(n^+) < g(n)$. Tada skup $\{g(n) | n \in \omega\}$ nema minimalni element, kontradikciji.

($\Leftarrow$) Neka ne postoji funkcija $g : \omega \to A$ takva da je $g(n^+) < g(n)$ za svako $n \in \omega$. Pretpostavimo da $(A, <)$ nije dobro uredjenje. Tada neki skup B, $\emptyset \neq B \subseteq A$, nema $<$- najmanji elemenat. Prema prethodnom korolaru postoji funkcija $g : \omega \to B$ tako da, za svako $n \in \omega$ važi $g(n^+) < g(n)$, kontradiktorno polaznoj pretpostavci. **Q.E.D.**

6 ORDINALI

Definicija 6.1. Za skup A kažemo da je orinal ako je tranzitivan i relacija $\in_A$ je strogo dobro uredjenje na A.

Ordinale ćemo obeležavati malim grčkim slovima α, β, γ...Sa On ćemo obeležati klasu svih ordinala.

Formalan zapis ordinala je sledeći:

$On(\alpha) \Leftrightarrow (\forall xin\alpha(x \subseteq \alpha \wedge \forall x, y, z \in \alpha(x \notin x \wedge (x \in y \vee x = y\, y \in x) \wedge (x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z) \wedge \forall x \subseteq \alpha(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in x \forall z \in x(y \in z \vee y = z))$

Primer 6.1.

a) Prazan skup $\emptyset$ je ordinal. Skup ω je ordinal (na osnovu teorema 4.4 i 4.7) .

b) Skupovi $\{\{\emptyset\}\}$ i $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ nisu ordinali.

c) Svaki tranzitivan skup nije ordinal.

   Skup $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ je tranzitivan, jer je svaki njegov elemenat istovremeno i njegov podskup. Ali, relacija $\in$ nije linearno uredjenje jer $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}\} \notin \emptyset$ i $\{\{\emptyset\}\} \neq \emptyset$.

Definicija 6.2. Za ordinal α kažemo da je naslednik ako je, za neki ordinal β, $\alpha = \beta^+$.

Ako je $\alpha \neq \emptyset$ i nije naslednik, kažemo da je α granični ordinal.

Definicija 6.3. Neka je α neki ordinal i neka je $\beta \in \alpha$. Početni segment od α u zavisnosti od β je sledeći skup:

$$Seg_\beta(\alpha) = \{x \in \alpha | x \in \beta\}.$$

Kako je $\beta \subset \alpha$ možemo primetiti sledeće:

$$Seg_\beta(\alpha) = \{x \in \alpha | x \in \beta\} = \beta \bigcap \alpha = \beta.$$

Teorema 6.1. Svi elementi ordinala su ordinali.

Dokaz. Neka je α neki ordinal i neka je $\beta \in \alpha$. Kako je α tranzitivan skup sledi da je $\beta \subseteq \alpha$, pa je relacija $\in$ strogo dobro uredjenje na β. Ostaje još da pokažemo da je β tranzitivan skup. Neka je $y \in x$ i $x \in \beta(\subseteq \alpha)$; dakle,

$x \in \alpha$. Odatle, zbog tranzitivnosti skupa α, sledi da je $y \in \alpha$. Relacija $\in$ je relacija strogog uredjenja na α pa dobijamo da je $y \in \beta$. **Q.E.D.**

Korolar 6.1. Svi prirodni brojevi su ordinali.

Teorema 6.2. (bez aksiome regularnosti) Neka je α ordinal. Tada važi $\alpha \notin \alpha$.

Dokaz. Znamo da je relacija $\in$ relacija strogog uredjenja na α, pa za svako $\beta \in \alpha$ važi $\beta \notin \beta$. Ako pretpostavimo da je $\alpha \in \alpha$, dobijamo $\alpha \notin \alpha$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom. **Q.E.D.**

Lema 6.1. Za bilo koja dva ordinala α i β važi:

$$(\alpha, \in) \cong (\beta, \in) \text{ akko } \alpha = \beta$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $(\alpha, \in) \cong (\beta, \in)$ i neka je f izomorfizam dobrog uredjenja $(\alpha, \in)$ na dobro uredjenje $(\beta, \in)$. Pokažimo da je f identičko preslikavanje. Pretpostavimo suprotno, tj. da f nije identičko preslikavanje. Tada je skup $A = \{\gamma \in \alpha | f(\gamma) \neq \gamma\}$ neprazan i ima $\in -$ najmanji elemenat δ. $f(\delta) = seg(f(\delta)) = \{f(\eta) | \eta \in \delta\} = \{\eta | \eta \in \delta\} = \delta$, što je u kontradikciji sa izborom elementa δ. **Q.E.D.**

Teorema 6.3. Neka su α i β ordinali i neka je $\alpha \subseteq \beta$ Tada je ili $\alpha = \beta$ ili $\alpha \in \beta$.

Dokaz. Neka je $\alpha = \beta$. Ne može da bude $\alpha \in \beta$, jer bi za posledicu dobili $\alpha \in \alpha$. Neka je $\gamma \in -$ najmanji element skupa $\beta \setminus \alpha$. Jasno, $\gamma \subseteq \alpha$ i kako je $\alpha \subseteq \gamma$, imamo $\alpha = \gamma$ $(\in \beta)$. **Q.E.D.**

Teorema 6.4. Neka su α i β ordinali. Tada važi tačno jedna od relacija

$$\alpha \in \beta,\ \alpha = \beta,\ \beta \in \alpha.$$

Dokaz. Pokažimo prvo da važi bar jedan od tri slučaja.

Neka je $\alpha \bigcap \beta = \gamma$. γ je ordinal, prema Teoremama 4.3 i 3.2.

Razmatramo mogućanosti:

- $\alpha = \gamma$ i $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$
- $\alpha = \gamma$ i $\gamma \in \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$
- $\gamma = \alpha$ i $\beta = \gamma \Rightarrow \beta \in \alpha$

- $\gamma \in \alpha$ i $\gamma \in \beta \Rightarrow \gamma \in \alpha \bigcap \beta$, tj. $\gamma \in \gamma$, kontradikciji (pa ovaj slučaj otpada).

  Pokažimo sada da važi tačno jedan od tri (moguća) slučaja. Pretpostavimo, na primer, da istovremeno važe $\alpha \in \beta$ i $\alpha = \beta$. Odatle dobijamo da je $\beta \in \beta$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je β ordinal. **Q.E.D.**

Korolar 6.2. Za bilo koja dva ordinala α i β važi:

1) $\alpha \in \beta$ akko $\alpha \subset \beta$

2) $\alpha \in \beta$ akko $\alpha^+ \in \beta^+$

3) $\alpha = \beta$ akko $\alpha^+ = \beta^+$.

Dokaz.

1) Jasno, zbog tranzitivnosti β.

2) Neka je $\alpha \in \beta$. Za ordinale α^+ i β^+ važi tačno jedna od relacija $\alpha^+ \in \beta^+$, $\alpha^+ = \beta^+$, $\beta^+ \in \alpha^+$. Pretpostavke $\alpha^+ = \beta^+$ i $\beta^+ \in \alpha^+$ dale bi $\alpha \in \alpha$. **Q.E.D.**

Lema 6.2.

1) α^+ je najmanji ordinal veći od ordinala α;

2) Svaki neprazan skup ordinala ima najmanji $\in -$ elemenat;

3) Tranzitivan skup ordinala je ordinal;

4) Ako je A skup ordinala, onda je $\bigcup A$ najmanji ordinal koji je jednak ili veći od svakog ordinala skupa A, tj. $sup(A) = \bigcup A$;

5) Ako je A neprazan skup ordinala, onda je $\bigcap A$ najmanji ordinal iz skupa A, tj. $inf(A) = \bigcap A$

Dokaz.

1) Jasno je da je $\alpha \subset \alpha^+$, pa je $\alpha \in \alpha^+$. Neka je $\alpha \in \beta$, što implicira $\alpha \subset \beta$, te je $\alpha^+ \subseteq \beta$, odnosno $\alpha^+ = \beta$ ili $\alpha^+ \in \beta$.

2) Neka je A neprazan skup ordinala i neka je $\alpha \in A$. Tada je moguće $A \bigcap \alpha = \emptyset$ ili $A \bigcap \alpha \neq \emptyset$. Jasno, ako je $A \bigcap \alpha = \emptyset$ onda je ordinal α najmanji $\in$-elemenat skupa A. U slučaju $A \bigcap \alpha \neq \emptyset$, najmanji $\in$ element δ preseka $A \bigcap \alpha$ je najmanji $\in$-element skupa A, jer ako, recimo, $\beta \in A$ i $\beta \notin A \bigcap \alpha$, onda $\delta \in \alpha \underline{\in} \beta$.

3) Tranzitivnost nam je data, a po prethodnoj tački imamo da svaki neprazan skup ordinala ima $\in -$ minimalan elemenat.

4) Jasno je da je $\bigcup A$ skup ordinala. Pokažimo da je to i tranzitivan skup. Neka je $\alpha \in \bigcup A$. To znači da postoji neki ordinal $\beta \in A$ takav da je $\alpha \in \beta$, što dalje implicira $\alpha \subset \beta \subseteq \bigcup A$.

   Pokažimo sada da je $\bigcup A$ najmanji ordinal koji je veći od ili jednak svakom ordinalu iz A. Neka je $\alpha \in A$, tada je $\alpha \subseteq \bigcup A$, tj $\alpha \in \bigcup A$ ili $\alpha = \bigcup A$. Neka je za svako $\alpha \in A$, $\alpha \underline{\in} \beta$; odatle sledi $\bigcup A \subseteq \beta$.

5) Neka je $\alpha \in -$ minimalana elemenat skupa A, tj. za svako $\beta \in A$, $\alpha \underline{\in} \beta$ odnosno $\alpha \subseteq \beta$. Odatle sledi $\alpha \subseteq \bigcap A$. Jasno, $\bigcap A \subseteq \alpha$. **Q.E.D.**

Teorema 6.5. Klasa svih ordinala On nije skup.

Dokaz. Pretpostavimo da je klasa On skup. No, on je tranzitivan (Teorema 5.1) i dobro uredjen relacijom $\in$ (Lema 5.2, 2), dakle i sam je ordinal, ali onda $On \in On$, kontradikcija. **Q.E.D.**

Teorema 6.6. Ne postoji skup koji sadrži sve ordinale.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji skup A koji sadrži sve ordinale. Koristeći aksiomu podskupa dobijamo da je $On = \{\alpha \in A | \alpha$ je ordinal $\}$ skup, što je u kontradikciji sa prethodnom teoremom. **Q.E.D.**

Teorema 6.7. Svaki dobro uredjen skup je jedinstveno izomorfan nekom ordinalu.

Dokaz. Neka je $(A, <)$ dobro uredjenje i neka je $\phi(x, y) \equiv y = Ran(x)$. Primenom transfinitne rekurzije na formulu $\phi(x, y)$ i dobro uredjenje $(A, <)$ dobićemo jedinstvenu funkciju F čiji je domen skupa A i za koju važi: $\forall a \in A$ $\phi(F|_{seg(a)}, F(a))$, odnosno $F(a) = Ran(F|_{seg(a)}) = \{F(b) | b \in A \wedge b < a\}$. Stavimo da je $\alpha = Ran(F) = \{F(a) | a \in A\}$ i pokažimo da je F izomorfizam dobrog uredjenja $(A, <)$ na dobro uredjenje $(\alpha, \in_\alpha)$.

Preslikavanje F je "na", po definiciji elementa α. Da bi pokazali injektivnost, pokažimo da je $F(a) \notin F(a)$ za svako $a \in A$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je postoji $a \in A$ tako da je $F(a) \in F(a)$ i posmatrajmo (neprazan) skup $\{a \in A | F(a) \in F(a)\}$. Neka je b njegov $<$ −minimalni elemenat. Tada imamo $F(b) \in F(b) = \{F(c) | c \in A \wedge c < b\}$ što implicira da za neko $d < b$ važi $F(d) = F(b)$, pa je onda i $F(d) \in F(d)$, kontradikcija sa izborom minimalnog elementa. Dakle, $F(a) \notin F(a)$ za svako $a \in A$. Neka je $F(a) = F(b)$. Mora biti $a = b$, jer u suprotnom bi važilo ili $a < b$ ili $b < a$. Pretpostavka da je $a < b$ bi dovela do $F(a) \in F(b) = F(a)$. tj. $F(a) \in F(a)$. Pokažimo sada, da ako je $a < b$ mora biti i $F(a) \in F(b)$ i obratno. Neka je $a < b$; ako bi bilo $F(a) = F(b)$, dobili bi $F(a) \in F(a)$, kontradikcija. Ako je $F(a) \in F(b)$, postoji neko $c < b$ tako da je $F(a) = F(c)$, što zbog injektivnosti funkcije F daje $a = c$, pa je $a < b$.

Neka je C neprazan podskup skupa α i e minimalni elemenat skupa $\{a \in A | F(a) \in C\}$. Tada je $F(e) \in F(d)$ za svako $F(d) \in C$.

Pretpostavimo da je $x \in F(a) \in \alpha$. Tada postoji neko $b \in A$ takvo da je $b < a$ i $x = F(b)$, pa, po definiciji skupa α, $x \in \alpha$. Dakle, pokazali smo da je α tranzitivan, dobro uredjen skup, tj. da je ordinal. **Q.E.D.**

Definicija 6.4. Ordinal α iz prethodne teoreme zove se ordinal dobrog uredjenja $(A, <)$. Pre nego što predjemo na sledeću teormu, uvedimo sledeću notaciju: pisaćemo $C \preceq D$, ako se skup C može injektivno preslikati na skup D.

Teorema 6.8. (Teorema Hartoga) Za svaki skup A postoji ordinal α koji se ne može injektivno preslikati ni na jedan podskup skupa A.

Dokaz. Neka je A neki skup i neka je $\alpha = \{\beta | \beta \in On \wedge \beta \preceq A\}$. Jasno je da je α tranzitivna klasa. Pokažimo da je α skup, što će za posledicu imati da je α ordinal, a time i $\alpha \notin \alpha$. Stavimo da je $C = \{(B, <) | (B, <) \in P(A) \times P(A \times A) \wedge <$ je dobro uredjenje skupa $B\}$.

Neka je $\beta \in \alpha$, što implicira da se β može injektivno preslikati u skup A. Neka je f jedno takvo injektivno preslikavanje. Na skupu $f(\beta) = \{f(\gamma) | \gamma \in \beta\}$ definišimo relaciju $<$ na sledeći način: $f(\delta) < f(\gamma)$ akko $\delta \in \gamma$. Jasno, $<$ je relacija dobrog uredjenja na skupu $f(\beta)$. Dakle, β je ordinal dobrog uredjenja $(f(\beta), <)$, pa je samim tim i svaki ordinal iz α ordinal nekog dobrog uredjenja iz skupa C. Neka je $\phi(y, z) \equiv (y$ je dobro uredjenje & z je ordinal dobrog uredjenja $y)$. Prema aksiomi zamene imamo: $\forall y \in C\ \exists_1 z\ \phi(y, z)$, pa aksiomom separacije dobijamo da postoji skup čiji su elementi ordinali dobrih uredjenja iz C. Jasno, to je α. Dakle, α je tranzitivan skup ordinala, što za posledicu ima da je α ordinal, a samim tim $\alpha \notin \alpha$. **Q.E.D.**

Klasu svih naslednih ordinala obeležavaćemo sa On_n. Klasu svih graničnih ordinala obeležavaćemo sa On_g.

Lema 6.3. Klase On_n i On_g su prave klase.

Teorema 6.9. (Transfinitna indukcija) Neka je A podklasa klase svih ordinala On takva da za svaki ordinal α važi

$$\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A.$$

Tada je $A = On$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $A \neq On$. Tada je $On \backslash A$ neprazna klasa, i ona ima $\in$-minimalni elemenat α. Tada je $\alpha \subseteq A$, odakle sledi da je $\alpha \in A$, što je kontradikcijasa pretpostavkoma da $\alpha \notin A$. **Q.E.D.**

Teorema 6.10. (Transfinitna rekurzija na ordinalima) Neka je $\phi(x, y)$ formula takva da važi $\forall x \exists_1 y \phi(x, y)$. Tada postoji formula $\psi(z, u)$ takav da za svaku ordinal α postoji jedinstveno u takvo da važi $\psi(\alpha, u)$; posebno, ako je F funkcija čiji je domen ordinal α i za koji važi: $\forall \beta \in \alpha\ \psi(\beta, F(\beta))$, onda važi i:

$$\psi(\alpha, u) \text{ akko } \phi(F, u).$$

Dokaz. Neka je $\psi(z, u) \equiv z \in On \ \&\ \exists v \exists F_v (v \in On \wedge z \in v \ \&\ F_v$ je $\phi-$konstruisana funkcija na $(v, \in)\ \&\ u = F_v(z))$.

Neka nam je dat ordinal α. Prateći definiciju formule $\psi(z, u)$, veoma lako možemo pronaći u tako da formula $\psi(\alpha, u)$ bude zadovoljena. Uzećemo neki ordinal koji je veći od α, na primer α^+, i naći $\phi-$ konstruisanu funkciju F_{α^+} na dobrom uredjenju $(\alpha^+, \in)$ i staviti $F_{\alpha^+} = u$. Dokaz jedinstvenosti elementa u dat je u dokazu teoreme o tranzitivnoj rekurziji na dobrim uredjenjima i ovde ga nećemo ponavljati.

Neka je F funkcija čiji je domen α i za koju važi:$\forall \beta \in \alpha\ \psi(\beta, F(\beta))$ i neka je F_α $\phi-$ konstruisana na dobrom uredjenju $(\alpha, \in)$. Tada za svako $\beta \in \alpha$ važi $\psi(\beta, F_\alpha(\beta))$, što implicira $F(\beta) = F_\alpha(\beta)$. Dakle, F je $\phi-$ konstruisana na dobrom uredjenju $(\alpha, \in)$.

Neka je $\psi(\alpha, u)$, tada je $u = F_{\alpha^+}(\alpha))$. $F_{\alpha^+}|_\alpha = F_\alpha$ i važi $\phi(F_{\alpha^+}|_\alpha, F_{\alpha^+}(\alpha))$, tj. $\phi(F, u)$. Neka je ,sada, $\phi(F, u)$, tj. $\phi(F_{\alpha^+}|_\alpha, u)$, tada je $u = F_{\alpha^+}(\alpha))$, pa je prema definiciji formulu ψ i $\psi(\alpha, u)$. **Q.E.D.**

Teorema 6.11. (Opšta rekurzija na skupu ω). Neka je $\phi(x, y)$ formla za koju važi $\forall x \exists_1 y \phi(x, y)$ i neka je a neki skup. Ako $F_\phi : V \to V$ (pri čemu je V klasa svih skupova) funkcija-klasa definisana sa:$F_\phi(x) = y$ akko $\phi(x, y)$, onda postoji jedinstvena funkcija G čiji je domen skup ω i koja ispunjava uslove: $G(0) = a$ i $G(n^+) = F_\phi(G(n))$ za svako $n \in \omega$.

Dokaz. Stavimo $G_\phi = \{g \subset \omega \times (\{a\} \cup \bigcup\{A_k | k \in \omega \setminus \{\emptyset\}\} | g$ je funkcija & $0 \in Dom(g) \Rightarrow g(0) = a$ & $\forall n((n^+ \in Dom(g) \Rightarrow n \in Dom(g) \wedge F_\phi(g(n))\}$, pri čemu je $A_k = \{y | \exists z_1 ... z_{k-1}(\phi(a, z_1) \wedge \phi(z_1, z_2) \wedge ... \wedge \phi(z_{k-2}, z_{k-1}) \wedge \phi(z_{k-1}, y))\}$. Stavimo da je $G = \bigcup G_\phi$. Dokaz da je G funkcija analogan je dokazu Teoreme 4.10

7 Sabiranje ordinala

Sabiranje ordinala definisaćemo na dva načina i pokazati ekvivalentnost tih definicija.

Prvi način: Neka su α i β dva ordinala. $\alpha \oplus \beta$ je ordinal dobrog uredjenja $(\alpha \times \{0\} \bigcup \beta \times \{1\}, \in'_\alpha \oplus \in'_\beta)$, pri čemu je $\in'_\alpha = \{((\gamma, 0), (\delta, 0)) | \gamma \in \delta \in \alpha\}$.

Drugi način: Neka je $\phi^\alpha_S(x, y) \equiv (x = \emptyset \wedge y = \alpha) \vee (x$ je funkcija čiji je domen naslední ordinal β^+ & $y = (x(\beta))^+) \vee (x$ je funkcija čiji je domen granični ordinal β & $y = \bigcup\{x(\gamma) | \gamma \in \beta\} (= \bigcup Ran(x))) \vee (x$ nije funkcija čiji je domen ordinal & $y = \emptyset)$. Prema Teoremi 5.10. formula $\psi^\alpha_S(z, u) \equiv z \in On$ $\wedge\ \exists v \exists F_v(v \in On$ & $z \in v$ & F_v je $\phi-$ konstruisana funkcija na $(v, \in)$ & $u = F_v(z))$ je takva da za svaki ordinal β postoji jedinstveno u tako da važi $\psi^\alpha_S(\beta, u)$ i ako je f funkcija čiji je domen ordinal β i za koju važi: $\forall \gamma \in \beta$ $\psi^\alpha_S(\gamma, f(\gamma))$, onda $\psi^\alpha_S(\beta, u)$ akko $\phi^\alpha_S(f, u)$.

Definišimo sada za svaki ordinal α funkciju klasa $S_\alpha : On \to On$ na sledeći način $S_\alpha(\beta) =$ jedinstveno u za koje je $\psi^\alpha_S(\beta, u)$ i

$$S_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$$

Gornja definicja nam zapravo kaže da, za dati ordinal β, $S_\alpha(\beta)$ je u stvari $F_\gamma(\beta)$ pri čemu je γ neki ordinal veći od od β i F_γ je $\phi-$ konstruisana funkcija na dobrom uredjenju $(\gamma, \in)$. Naravno, za svako $\delta \in \beta$ važi $\psi^\alpha_S(\delta, F_\gamma(\delta))$, pa i za funkciju $F_\gamma|_\beta$ važi: $\psi^\alpha_S(\beta, u)$ akko $\phi^\alpha_S(F_\gamma|_\beta, u)$. F_γ je $\phi-$ konstruisana funkcija na $(\gamma, \in)$ pa je $u = F_\gamma(\beta)$ po definiciji formule ϕ^α_S ordinal. Pokažimo to.

Za $\beta = 0$ i $F_\gamma|_0 = 0$ je $\alpha = S_\alpha(0) = \alpha + 0$ ordinal. Pretpostavimo sada da je za sve ordinale δ koji su manji od ordinala β, $S_\alpha(\delta)$ ordinal.

Pokažimo da je, i za ordinal β, $S_\alpha(\beta)$ ordinal.Neka je β naslední ordinal, tj. $\beta = \eta^+$ za neki ordinal η. Tada je $u = F_\gamma(\beta) = F_\gamma(\eta^+) = (F_\gamma(\eta))^+ \in On$, tj. $\alpha+\beta^+ = (\alpha+\beta)^+$. Ako je β granični ordinal, tada je $F_\gamma(\beta) = \bigcup\{F_\gamma(\zeta)|\zeta \in \beta\}$ najmanji ordinal koji je veći od svakog ordinala skupa $\{F_\gamma(\zeta)|\zeta \in \beta\}$(Lema $5.2, 4)$. Dakle, $\alpha + \beta = \bigcup\{\alpha + \eta|\eta \in \beta\} = sup\{\alpha + \eta|\eta \in \beta\}$.

Pokažimo sada da su prethodne dve definicije ekvivalentne, odnosno da za svaka dva ordinala α i β važi $\alpha + \beta = \alpha \oplus \beta$. Dokaz dajemo transfinitnom indukcijom na klasi ordinala. Neka je ordinal α fiksan. Tada za $\beta = 0$ znamo $\alpha + 0 = \alpha$. $(\alpha \times \{0\} \bigcup 0 \times \{1\}, \in'_\alpha \oplus \in'_0) = (\alpha \times \{0\}, \in'_\alpha)$. Jasno, $(\alpha \times \{0\}, \in'_\alpha) \cong (\alpha, \in_\alpha)$. Pretpostavimo sada da je, za svako $\gamma \in \beta$ $\alpha + \gamma = \alpha \oplus \gamma$. Neka je, prvo, β naslední ordinal- $\beta = \gamma^+$(za neko γ) . Videli smo da je $\alpha+\beta = (\alpha+\gamma)^+$. Dobro uredjenje $(\alpha \times \{0\} \bigcup \gamma^+ \times \{1\}, \in'_\alpha \oplus \in'_{\gamma^+})$ izomorfno je ordinalu $Ran(F)$, pri čemu je F $y = Ran(x)-$ konstruisana na tom dobrom uredjenju (Teorema 5.7). Pretpostavimo da je G $y = Ran(x)-$ konstruisana funkcija na dobrom uredjenju $(\alpha \times \{0\} \bigcup \gamma \times \{1\}, \in'_\alpha \oplus \in'_\gamma)$. Naravno, $G = F|_(\gamma, 1)$. Jasno, $(\gamma, 1)$ je najveći elemenat dobrog uredjenja $(\alpha \times \{0\} \bigcup \gamma^+ \times \{1\}, \in'_\alpha \oplus \in'_{\gamma^+})$. $Ran(F) = \{F((\delta, \eta))|(\delta, \eta) \in seg((\gamma, 1))\} \bigcup \{F((\gamma, 1))\} = \{G((\delta, \eta))|(\delta, \eta) \in seg((\gamma, 1))\} \bigcup \{F((\gamma, 1))\} = Ran(G) \bigcup \{F((\gamma, 1))\} = (\alpha \oplus \gamma) \bigcup \{F((\gamma, 1))\}$. Medjutim, $F((\gamma, 1)) = Ran(F|_(\gamma, 1)) = Ran(G) = \alpha \oplus \gamma$, što impicira $Ran(F) = \alpha \oplus \gamma \{\alpha \oplus \gamma\} = (\alpha \oplus \gamma)^+$. Druga mogućnost: β je granični ordinal. $\alpha+\beta = \bigcup\{\alpha+\gamma|\gamma \in \beta\} = \bigcup\{\alpha\oplus\gamma|\gamma \in \beta\}$. Pokažimo da je ordinal dobrog uredjenja $(\alpha \times \{0\} \bigcup \beta \times \{1\}, \in'_\alpha \oplus \in'_\beta)$. S druge strane, $\alpha \oplus \beta$ je ordinal dobrog uredjenja, tj. $\alpha \oplus \beta$ je $Ran(F)$ gde je F $y = Ran(x)-$ konstruisana funkcija na dobrom uredjenju $(\alpha \times \{0\} \bigcup \beta \times \{1\}, \in'_\alpha \oplus \in'_\beta)$ evidentno, $Ran(F) = \alpha \bigcup \{\alpha \oplus \gamma|\gamma \in \beta\} = \alpha \bigcup \{\alpha + \gamma|\gamma \in \beta\} = \bigcup\{\alpha + \gamma|\gamma \in \beta\}$(u dokazu poslednje jednakosti, u slučaju $\supseteq$ koristimo činjenicu da je $\alpha \bigcup \{\alpha + \gamma|\gamma \in \beta\}$ ordinal (Teorema $5.2, 3$)) .

Lema 7.1.

1) Za svaki ordinal α važi $0 + \alpha = \alpha$;
2) Ako je β granični ordinal, onda je i $\alpha + \beta$ granični ordinal za svaki ordinal α.

Dokaz.

1) Transfinitnom indukcijom po α

2) Fiksirajmo ordinal α. Pretpostavimo da je $\alpha + \beta = \bigcup\{\alpha + \gamma | \gamma \in \beta\}$ nasledni ordinal, tj. $\alpha + \beta = \delta^+$ za neko δ. Tada je $\delta \in \bigcup\{\alpha + \gamma | \gamma \in \beta\}$, što povlači da je, za neko $\eta \in \beta$, $\delta \in \alpha + \eta$, pa $\delta^+ \in (\alpha + \eta)^+ = \alpha + \eta^+$. Sledi, prema tome, da je $\delta^+ \in \alpha + \beta (= \delta^+)$, kontradikcija. **Q.E.D.**

Lema 7.2.

1) Za sve ordinale α, β, γ važi

$$\alpha \in \beta \text{ akko } \gamma + \alpha \in \gamma + \beta;$$

2) Za operaciju sabiranja ordinala važi skraćivanje s leva:

$$\gamma + \alpha = \gamma + \beta \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Dokaz.

1) Neka je $\alpha \in \beta$, tada je $(\gamma \times \{0\} \bigcup \alpha \times \{1\}, \in_\gamma \bigcup \in_\alpha)$, početni segment dobrog uredjenja $(\gamma \times \{0\} \bigcup \beta \times \{1\}, \in_\gamma \bigcup \in_\beta)$, pa odatle sledi da je ordinal dobrog uredjenja $(\gamma \times \{0\} \bigcup \alpha \times \{1\}, \in_\gamma \bigcup \in_\alpha)$ elemenat ordinala dobrog uredjenja $(\gamma \times \{0\} \bigcup \beta \times \{1\}, \in_\gamma \bigcup \in_\beta)$.

   Neka je $\gamma + \alpha \in \gamma + \beta$. Tada za ordinale α i β važi tačno jedna od relacija $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$,$\beta \in \alpha$. Prva relacija bi dala da $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$, a treća , prema prvom delu dokaza bi dala, $\gamma + \beta \in \gamma + \alpha$. Kontradikcija. Dakle, $\alpha \in \beta$. **Q.E.D.**

Lema 7.3. Operacija sabiranje je asocijativna, odnosno za svaka tri ordinala α, β i γ važi:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Dokaz. Dokaz dajemo transfinitnom indukcijom po γ. Za $\gamma = 0$, jasno imamo $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$. Pretpostavimo sada da tvrdjenje važi za svako $\delta \in \gamma$. Pokažimo da važi i za γ. Postoje dve mogućnosti. Prva mogućnost: γ je nasledni ordinal, tj. za neko η $\gamma = \eta^+$. Tada važi: $(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \beta) + \eta^+ = ((\alpha + \beta) + \eta)^+ = (\alpha + (\beta + \eta))^+ = \alpha + (\beta + \eta)^+ = \alpha + (\beta + \eta^+) = \alpha + (\beta + \gamma)$. Druga mogućnost: γ je granični ordinal, tj. $\gamma = \bigcup\{\eta|\eta \in \gamma\}$. Tada je $(\alpha+\beta)+\gamma = \bigcup\{(\alpha+\beta)+\eta|\eta \in \gamma\} = \bigcup\{\alpha+(\beta+\eta)|\eta \in \gamma\} = \alpha + \bigcup\{\beta+\eta|\eta \in \gamma\} = \alpha+(\beta+\gamma)$. **Q.E.D.**

Lema 7.4. Iz $\alpha \in \beta$ sledi: $\alpha+\gamma \underline{\in} \beta+\gamma$ za svaki ordinal γ.

Dokaz. Dokaz dajemo transfinitnom indukcijom po ordinalima po γ. Za $\gamma = 0$ je jasno da važi. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve ordinale δ, $\delta \in \gamma$. Pokažimo da važi i za γ. Ako je γ naslednі ordinal, tj. $\gamma = \delta^+$ za neko δ, onda imamo $\alpha+\gamma = \alpha+\delta^+ = (\alpha+\delta)^+ \underline{\in} (\beta+\delta)^+ = \beta+\delta^+ = \beta+\gamma$. Ako je γ granični ordinal, onda sledi: $\alpha+\gamma = \bigcup\{\alpha+\delta|\delta \in \gamma\} \underline{\in} \bigcup\{\beta+\delta|\delta \in \gamma\} = \beta+\gamma$. **Q.E.D.**

Teorema 7.1. (Teorema oduzimanja ordinala) Neka je $\alpha \underline{\in} \beta$. Tada postoji jedinstveni ordinal γ takav da je $\alpha+\gamma = \beta$.

Dokaz. Prema Lemi 6.2 sledi jedinstvenost ordinala γ za koji je $\alpha+\gamma = \beta$. S toga je samo egzistencija tog ordinala u pitanju. Jasno, samo je slučaj $\alpha \in \beta$ interesantan. Klasa $\{\delta \in On|\alpha+\delta \underline{\in} \beta\}$ je neprazan skup, i evidentno tranzitivan. 0 je tu, a iz $\alpha+\delta \underline{\in} \beta$ sledi $\delta \in \beta+\beta$ $(\beta \in \beta+\beta \underline{\in} (\alpha+\beta)+\beta = \alpha+(\beta+\beta))$. Dati skup je, znači ordinal, recimo, γ. On ne može biti granični ordinal jer bi to dalo $\alpha+\gamma = \bigcup\{\alpha+\delta|\delta \in \gamma\} \underline{\in} \beta$, odnosno $\gamma \in \gamma$. Ako je pak $\gamma = \eta^+$ onda sledi $\alpha+\eta = \beta$. Već imamo $\alpha+\eta \underline{\in} \beta$, a iz $\alpha+\eta \in \beta$ bi sledilo $\alpha+\gamma = \alpha+\eta^+ = (\alpha+\eta)^+ \underline{\in} \beta$, kontradikcija. **Q.E.D.**

Definicija 7.1. Neka je data funkcija-klasa na ordinalima $F : On \to On$. F je monotona funkcija-klasa akko važi: $\alpha \in \beta \Rightarrow F(\alpha) \in F(\beta)$. F je neprekidna funkcija-klasa akko važi: za svaki granični ordinal α je $F(\alpha) = \bigcup\{F(\beta)|\beta \in \alpha\}$. F je normalna funkcija-klasa akko je i monotona i neprekidna.

Lema 7.5. Neprekidna funkcija-klasa F je monotona akko je, za svaki ordinal α: $F(\alpha) \in F(\alpha^+)$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Trivijalno važi.

$(\Leftarrow)$ Neka je, za svaki ordinal α: $F(\alpha) \in F(\alpha^+)$. Fiksirajmo α i transfinitnom indukcijom po ordinalima β pokažimo: $\alpha \in \beta \Rightarrow F(\alpha) \in F(\beta)$. Za $\beta = 0$ implikacija $\alpha \in 0 \Rightarrow F(\alpha) \in F(0)$ je trivijalno zadovoljena. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za svako γ, $\gamma \in \beta$. Neka je β naslednі ordinal - γ^+, i neka je $\alpha \in \beta$. Kako je $\alpha \underline{\in} \gamma$, to sledi $F(\alpha) \underline{\in} F(\gamma) \in F(\gamma^+) = F(\beta)$. Neka je, sada, β granični ordinal i neka $\alpha \in \beta$. Tada je i $\alpha^+ \in \beta$ i važi $F(\alpha) \in F(\alpha^+)$, pa zbog neprekidnosti funkcije F, $F(\alpha) \in \bigcup\{F(\delta)|\delta \in \beta\} = F(\beta)$.**Q.E.D.**

Lema 7.6. Neka je F normalna funkcija-klasa na ordinalima i neka je

$F(0)\subseteq\alpha$. Tada postoji najveći ordinal β takav da je $F(\beta)\subseteq\alpha$.

Dokaz. Posmatrajmo klasu $\{\delta \in On | F(\delta)\subseteq\alpha\}$. Ona je neprazna jer je 0, po uslovu teoreme, u njoj. Zbog monotonosti funkcije F ona je strogi podskup od α^+ (svaki ordinal je manji od ili jednak svojoj slici) , dakle, u pitanju je tranzitivan skup ordinala, odnosno, ordinal, recimo, γ. To ne mozže biti granični ordinal, jer bismo imali: $F(\gamma) = \bigcup\{F(\delta)|\delta \in \gamma\}\subseteq\alpha$, tj. $\gamma \in \gamma$, kontradikcija. Ako je $\gamma = \delta^+$, tada je δ najveći ordinal čija je slika manja od ili jednaka α. **Q.E.D.**

Lema 7.7. Neka je $F : On \rightarrow On$ normalna funkcija-klasa i neka je X neprazan skup ordinala. Tada je $F(\bigcup X) = \bigcup\{F(\alpha)|\alpha \in X\}$.

Dokaz. ($\supseteq$) Ako je $\alpha \in \bigcup X$, tada je $\alpha\subseteq\bigcup X$, pa je, zbog monotonosti funkcije F, $F(\alpha)\subseteq F(\bigcup X)$. Odatle je $\bigcup\{F(\alpha)|\alpha \in X\}\subseteq F(\bigcup X)$.

($\subseteq$) Razmatraćemo dve mogućnosti:

1) X ima najveći elemenat -β. Tada je, jasno, $\bigcup X = \beta$ i za svako α, $\alpha \neq \beta$ i $\alpha \in X$, važi $F(\alpha) \in F(\beta)$, pa je $F(\bigcup X) = F(\beta) = \bigcup\{F(\alpha)|\alpha \in X\}$.

2) X nema najveći elemenat, dakle, $\bigcup X$ granični ordinal. Tada je $F(\bigcup X) = \bigcup\{F(\delta)|\delta \in \bigcup X\} = \bigcup\{F(\eta)|\eta \in X\}$. Dokažimo netrivijalnu inkluziju. ($\subseteq$). Ako $\delta \in F(\eta)$, $\eta \in \bigcup X$, tada je za neko $\theta \in X$, $\eta \in \theta$, pa zbog monotonosti funkcije F, dobijamo $F(\eta) \in F(\theta)$, stoga i $\delta \in F(\theta)$. **Q.E.D.**

Lema 7.8. Neka je $F : On \rightarrow On$ normalna funkcija-klasa. Tada za svaki ordinal α postoji ordinal β takav da je $\alpha\subseteq\beta$ i $F(\beta) = \beta$.

Dokaz. Fiksirajmo ordinal α. Ako je $F(\alpha) = \alpha$, nema šta da se pokazuje. Ako je $\alpha \in F(\alpha)$, tada je, zbog prirode funkcije F, $\alpha \in F(\alpha) \in F(F(\alpha)) \in ....$ Prema Teoremi 5.11 postoji funkcija G čiji je domen ω i za koju važi: $G(0) = \alpha$ i $G(n^+) = F(G(n))$. Ako je $\beta = \bigcup Ran(G) = \{G(n)|n \in \omega\}$. Skup $\{G(n)|n \in \omega\}$ nema najveći elemenat, pa po prethodnoj lemi dobijamo $F(\beta) = F(\bigcup\{G(n)|n \in \omega\}) = \bigcup F(\{G(n)|n \in \omega\}) = \bigcup\{G(n^+)|n \in \omega\} = \beta$. **Q.E.D.**

8 Množenje ordinala

Kao što smo to učinili kod sabiranja ordinala, tako ćemo i monoženje definisati na dva način.

Prvi način: Neka su α i β dva ordinala. Sa $\alpha \odot \beta$ ćemo označavati ordinal dobrog uredjenja $(\alpha \times \beta, \in_\alpha \bullet \in_\beta)$.

Drugi način Neka je $\phi_P^\alpha(x,y) \equiv (x = \emptyset \wedge y = 0) \vee (x$ je funkcija čiji je domen naslednì ordinal β^+ & $y = (x(\beta)) + \alpha)) \vee (x$ je funkcija čiji je domen granični ordinal β & $y = \bigcup\{x(\gamma)|\gamma \in \beta\}(= \bigcup Ran(x))) \vee (x)$ nije funkcija čiji je domen ordinal α & $y = \emptyset)$. Primenjujući transfinitnu rekurziju na ordinalima na formulu $\psi_P^\alpha(z,u) \equiv z \in On \wedge \exists v \exists F_v(v \in On) \wedge z \in v$ & F_v je $\phi_P^\alpha -$ konstruisana funkcija na $(v, \in)$ & $u = F_v(z)$ dobijamo da za svaki ordinal β postoji jedinstveno u tako da važi $\psi_P^\alpha(\beta,u)$ i ako je f funkcija čiji je domen ordinal β i za koju važi: $\forall \gamma \in \beta \ \psi_S^\alpha(\gamma, f(\gamma))$, onda $\psi_P^\alpha(\beta,u)$ akko $\phi_P^\alpha(f,u)$.

Definišimo sada za svaki ordinal α funkciju klasa $P_\alpha : On \to On$ na sledeći način $P_\alpha(\beta) =$ jedinstveno u za koje je $\psi_P^\alpha(\beta,u)$; pišemo $P_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$

Gornja definicja nam zapravo kaže da ako imamo neki ordinal β, $P_\alpha(\beta)$ je u stvari $F_\gamma(\beta)$ pri čemu je γ neki ordinal veći od β i F_γ je $\phi-$ konstruisana funkcija na dobrom uredjenju $(\gamma, \in)$. Naravno za svako $\delta \in \beta$ važi $\psi_P^\alpha(\delta, F_\gamma(\delta))$, pa i za funkciju $F_\gamma|_\beta$ važi:$\psi_P^\alpha(\beta,u)$ akko $\phi_P^\alpha(F_\gamma|_\beta, u)$. F_γ je $\phi-$ konstruisana funkcija na $(\gamma, \in)$ pa je $u = F_\gamma(\beta)$ po definiciji formule ϕ_P^α ordinal. Pokažimo to:

Za $\beta = 0$ $F_\gamma|_0 = 0$, pa je $P_\alpha(0) = \alpha \cdot 0 = 0$ ordinal. Pretpostavimo sada da je za sve ordinale δ koji su manji od ordinala β, $P_\alpha(\delta)$ ordinal. Pokažimo da je i, za ordinal β, $P_\alpha(\beta)$ ordinal. Posmatraćemo dve mogućnosti. Prva mogućnost: β je naslednì ordinal, tj. postoji neki ordinal η, tako da je $\eta^+ = \beta$. Tada je $u = F_\gamma(\eta^+) = F_\gamma(\eta)) + \alpha \in On$, tj. $\alpha \cdot \beta^+ = \alpha \cdot \beta + \alpha$. Druga mogućnost: β je granični ordinal. Tada je $F_\gamma(\beta) = \bigcup\{F_\gamma(\zeta)|\zeta \in \beta\}$ najmanji ordinal koji je veći od svakog ordinala $F_\gamma(\zeta)$, $\zeta \in \beta$, i kao unija ordinala je ordinal. $\alpha \cdot \beta = \bigcup\{\alpha \cdot \eta | \eta \in \beta\} = sup\{\alpha \cdot \eta | \eta \in \beta\}$.

Sada ćemo pokazati da su gornje dve definicije ekvivalentne, tj. da je $\alpha \odot \beta = \alpha \cdot \beta$. Pri tome ćemo koristiti da je $\alpha \odot \beta = Ran(F)$, pri čemu je F $y = Ran(x)-$ konstruisana funkcija na dobrom uredjenju $(\alpha \times \beta, \in_\alpha \bullet \in_\beta)$. Prema tome, za svaki par $(\gamma, \delta) \in \alpha \times \beta$ je $F(\gamma, \delta) = Ran(F|_{seg((\gamma,\delta))}) = \{F((\eta,\xi))|((\eta,\xi),(\gamma,\delta)) \in \in_\alpha \bullet \in_\beta\}$. Dokaz dajemo transfinitnom indukcijom po β za fiksno α. Za $\beta = 0$ jasno je da važi. Pretpostavimo sada da važi za svaki ordinal manji od β i pokažimo da važi i za β. Prva mogućnost: β je naslednì ordinal, tj. za neki ordinal δ, $\beta = \delta^+$. Tada je $\alpha \odot \beta = \{F((\gamma,\delta))|\gamma \in \alpha\} \bigcup \{F((\eta,\xi))|(\eta,\xi) \in \alpha \times \delta\} = \{F((\gamma,\delta))|\gamma \in \alpha\} \bigcup Ran(F|_{seg((0,\delta))})$. Imamo, medjutim, $(\alpha \times \{\delta\}, \in'_\alpha) \cong (\alpha, \in_\alpha) \cong ((\alpha \times \{1\}, \in'_\alpha))$ (namerno smo koristili istu oznaku za relaciju dobrog uredjenja kod prvog i trećeg slučaja, naglašavajući time da se uporedjuju prve komponente); $(\alpha \times \delta, \in_a lpha \bullet \in_\delta) \cong (\alpha \odot \delta, \in_{\alpha \odot \delta}) \cong (\alpha \cdot \delta \times \{0\}, \in'_{\alpha \cdot \delta})$ (jer je, prema induktivnoj pretpostavci, $\alpha \cdot \delta = \alpha \odot \delta$). S toga je ordinal dobrog uredjenja $((\alpha \times \delta) \bigcup (\alpha \times \{\delta\}, \in_\alpha \bullet \in_\delta \cup \in'_\alpha \bigcup (\alpha \times \delta) \times (\alpha \times \{\delta\}))$, (koje je izomorfno dobrom uredjenju) $(alpha \cdot \delta \times \{0\} \bigcup \alpha \times \{1\}, \in'_{\alpha \cdot \delta} \cup \in'_\alpha \bigcup (\alpha \cdot \delta \times \{0\}) \times (\alpha \times \{1\})$ je, znavči $\alpha \cdot \delta + \alpha$. Ako je β granični ordinal, onda je $\alpha \odot \beta = \{F((\gamma, \delta)) | (\gamma, \delta) \in \alpha \times \beta\} = \bigcup \{F((0, \delta)) | \delta \in \beta\} = \bigcup \{Ran(F|_{seg((0,\delta))} | \delta \in \beta\} = \bigcup \{\alpha \odot \delta | \delta \in \beta\} = \bigcup \{\alpha \cdot \delta | \delta \in \beta\}$.

Lema 8.1.

1) Za svaki ordinal α važi: $0 \cdot \alpha = 0$, $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$;

2) Ako je α razlivcito od nule i β granični ordinal, onda je i $\alpha \cdot \beta$ granični ordinal.

Dokaz.

1) Transfinitnom indukcijom po α

2) Pretpostavimo da je $\alpha \cdot \beta$ naslední ordinal, tj. da postoji neko δ tako da je $\alpha \cdot \beta = \bigcup \{\alpha \cdot \gamma | \gamma \in \beta\} = \delta^+$. Tada je za neko η, $\eta \in \beta$, $\delta \in \alpha \cdot \eta$, što implicira da je $\delta^+ \in (\alpha \cdot \eta)^+ \underline{\in} \alpha \cdot \eta^+$, dakle i $\delta^+ \in \alpha \cdot \beta = \delta^+$, kontradikcija. **Q.E.D.**

Lema 8.2. Ako je $1 \underline{\in} \alpha$, onda je P_α normalna funkcija-klasa.

Dokaz. Iz definicije množenja ordinala sledei da je P_α neprekidna funkcija. Znamo $\alpha \cdot \beta^+ = \alpha \cdot \beta + \alpha$. Kako je po uslovu leme $0 \in \alpha$ to sledi $\alpha \cdot \beta \in \alpha \cdot \beta + \alpha$, tj. $P_\alpha(\beta) \in P_\alpha(\beta^+)$. **Q.E.D**

Lema 8.3. Ako je $\alpha \in \beta$, onda je $\alpha \cdot \gamma \underline{\in} \beta \cdot \gamma$ za svaki ordinal γ.

Dokaz. Dokaz dajemo transfinitnom indukcijom po γ. Za $\gamma = 0$, je jasno, $\alpha \cdot 0 = 0 = \beta \cdot 0$. Neka je tvrdjenje tačno za sve ordinale manje od γ. Pokažimo da važi i za γ. Neka je γ naslední ordinal, tj. $\gamma = \delta^+$ za neko δ. Tada imamo: $\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \delta^+ = \alpha \cdot \delta + \alpha \in \beta \cdot \delta + \beta = \beta \cdot \delta^+ = \beta \cdot \gamma$. Slučaj γ je granični ordinal je trivijalan **Q.E.D**

Lema 8.4. Množenje ordinala je distributivno s leva u odnosu na sabiranje, tj. za svaka tri ordinala α, β i γ važi:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Dokaz. Fiksirajmo nenula ordinale α i β i transfinitnom indukcijom po γ pokažimo da tvrdjenje važi. Za $\gamma = 0$, zbog ranijih tvrdjenja imamo $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve ordinale manje od γ i pokažimo da važi i za γ. Ako je γ nasledni ordinal δ^+, tada imamo $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot (\beta + \delta^+) = \alpha \cdot (\beta + \delta)^+ = \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha = (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha = \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \delta + \alpha) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta^+ = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Za γ granivcni ordinal sledi: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \bigcup\{\beta + \delta | \delta \in \gamma\} = \bigcup\{\alpha \cdot (\beta + \delta) | \delta \in \gamma\} = \bigcup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) | \delta \in \gamma\} = \alpha \cdot \beta + \bigcup\{\alpha \cdot \delta) | \delta \in \gamma\} = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ **Q.E.D**

Lema 8.5. Množenje ordinala je asocijativno, tj. za svaka tri ordinala α, β i γ važi:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Dokaz. Fiksirajmo nenula ordinale α i β i transfinitnom indukcijom po γ pokažimo da tvrdjenje važi. Za $\gamma = 0$, jasno da važi. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve ordinale manje od γ i pokažimo da važi i za γ. Ako je γ nasledni ordinal δ^+, tada je: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta^+) = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta + \beta) = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) + \alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta + \alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta^+ = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Ako je γ granični ordinal, imamo: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot \bigcup\{\beta \cdot \delta | \delta \in \gamma\} = \bigcup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) | \delta \in \gamma\} = \bigcup\{(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta | \delta \in \gamma\} = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ **Q.E.D.**

Teorema 8.1. Neka su α proizvoljan i β nenula ordinal. Tada postoje jedinstveni ordinali γ i δ takvi da važi $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ i $\delta \in \beta$.

Dokaz. Neka je β ordinal različit od nule. Tada je $P_\beta(0) = 0 \underline{\in} \alpha$ i P_β je normalana funkcija-klasa, pa postoji najveći ordinal γ takav da je $P_\beta(\gamma) = \beta \cdot \gamma \underline{\in} \alpha$. Prema teoremi o oduzimanju postoji jedinstven ordinal δ takav da je $\beta \cdot \gamma + \delta = \alpha$. Ako nije $\delta \in \beta$, tada bi, opet po teoremi o oduzimanju, postojao ordinal η, takva da je $\delta = \beta + \eta$, pa bi bilo: $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta = \beta \cdot \gamma + (\beta + \eta) = (\beta \cdot \gamma + \beta) + \eta = \beta \cdot (\gamma + 1) + \eta$, što je kontradikcija sa izborom ordinala γ. Dakle, $\delta \in \beta$.

Pretpostavimo da postoje ordinali γ_1 i δ_1 takvi da je $\alpha = \beta \cdot \gamma_1 + \delta_1$ i $\delta_1 \in \beta$. Tada bi, zbog izbora ordinala γ, imali $\gamma_1 \underline{\in} \gamma$. Ako je $\gamma_1 = \gamma$ automatski $\delta_1 = \delta$. U suprotnom bismo imali da postoji neki nenula ordinal η tako da je $\gamma = \gamma_1 + \eta$, što bi dalo $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta = \beta \cdot (\gamma_1 + \eta) + \delta = (\beta \cdot \gamma_1 + \beta \cdot \eta) + \delta = \beta \cdot \gamma_1 + (\beta \cdot \eta + \delta) = \beta \cdot \gamma_1 + \delta_1$. No, $\beta \underline{\in} \beta \cdot \eta \underline{\in} \beta \cdot \eta + \delta = \delta_1$. **Q.E.D.**

9 Stepenovanje ordinala

Neka je α nenula ordinal i $\phi_E^\alpha(x,y) \equiv (x = \emptyset \wedge y = 1) \vee (x$ je funkcija čiji je domen naslední ordinal β^+ & $y = (x(\beta)) \cdot \alpha)) \vee (x$ je funkcija čiji je domen granični ordinal β & $y = \bigcup\{x(\gamma) | \gamma \in \beta\} (= \bigcup Ran(x))) \vee (x$ nije funkcija čiji je domen ordinal α & $y = \emptyset)$. Primenjujuči transfinitnu rekurziju na ordinalima na formulu $\psi_E^\alpha(z,u) \equiv z \in On \wedge \exists v \exists F_v (v \in On) \wedge z \in v$ & F_v je $\phi_E^\alpha-$ konstruisana funkcija na $(v, \in)$ & $u = F_v(z)$ dobijamo da za svaki ordinal β postoji jedinstveno u tako da važi $\psi_E^\alpha(\beta, u)$ i ako je f funkcija čiji je domen ordinal β i za koju važi: $\forall \gamma \in \beta \; \psi_E^\alpha(\gamma, f(\gamma))$, onda $\psi_E^\alpha(\beta, u)$ akko $\phi_E^\alpha(f, u)$.

Definišimo sada za svaki ordinal α funkciju klasa $E_\alpha : On \to On$ na sledeći način $E_\alpha(\beta) =$ jedinstveno u za koje je $\psi_E^\alpha(\beta, u)$ pišemo:

$$E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta.$$

Iz svega gore navedenog sledi: $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \cdot \alpha$, i za granični ordinal γ, je $\alpha^\gamma = \bigcup\{\alpha^\delta | \delta \in \gamma\}$.

Stepenovanje (za "osnovu" nulu) definišemo sa $0^0 = 1$ i $0^\alpha = 0$ za α veće od 0.

Lema 9.1. Za nenula ordinal α i svaki ordinal β je $1 \underline{\in} \alpha^\beta$. Za svaki ordinal β je $1^\beta = 1$.

Lema 9.2. Neka α ordinal veći od 1. Tada važi:

1) E_α je normalna funkcija-klasa;

2) Ako je β granični ordinal, onda je i α^β granični ordinal.

Dokaz.

1) Kako je, po definiciji, stepenovanje ordinala neprekidna funkcija, treba samo da pokažemo monotonost (odnosno, prema Lemi 6.5, $\alpha^\beta \in \alpha^{\beta+1}$). No, $\alpha^\beta = \alpha^\beta \cdot 1 \in \alpha^\beta \cdot \alpha = \alpha^{\beta^+}$ (koristili smo Lemu 7.2); u našoj notaciji $E_\alpha(\beta) \in E_\alpha(\beta^+)$.

2) Pretpostavimo suprotno, tj. da je α^β naslední ordinal δ^+ imamo, dakle, $\delta^+ = \alpha^\beta = \bigcup\{\alpha^\delta | \delta \in \beta\}$. Tada je, za neko $\eta \in \beta$, $\delta \in \alpha^\eta$, pa je $\delta^+ \in \alpha^{\eta^+} \in \bigcup\{\alpha^\gamma | \gamma \in \beta\} = \delta^+$; dakle, $\delta^+ \in \delta^+$, kontradikcija. **Q.E.D.**

Lema 9.3. Za sve ordinale α, β i γ važi:

1) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$;

2) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

Dokaz.

1) Ako je α 0 ili 1, jasno je, da je za sve ordinale β i γ, $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$. Pretpostavimo da je α veće od 1, fiksirajmo β i transfinitnom indukcijom po γ pokažimo da tvrdjenje važi. Za $\gamma = 0$ imamo: $\alpha^{\beta+0} = \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta} \cdot 1 = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{0}$. Pretpostavimo sada da tvrdjenje važi za sve ordinale manje od γ, i pokažimo da važi i za γ. Ako je γ naslední ordinal δ^{+}, onda je $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+\delta^{+}} = \alpha^{(\beta+\delta)^{+}} = \alpha^{(\beta+\delta)}\cdot\alpha = (\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\delta})\cdot\alpha = \alpha^{\beta} \cdot (\alpha^{\delta} \cdot \alpha) = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta^{+}}$. Ako je γ granični ordinal, tada je (pošto je i $\beta + \gamma$ granični ordinal): $\alpha^{\beta+\gamma} = \bigcup\{\alpha^{\xi}|\xi \in \beta + \gamma\} = \bigcup\{\alpha^{\beta+\eta}|\eta \in \gamma\} = \bigcup\{\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\eta}|\eta \in \gamma\} = \alpha^{\beta} \cdot \bigcup\{\alpha^{\eta}|\eta \in \gamma\} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$.

2) Za α 0 ili 1, jasno je, da je za sve ordinale β i γ, $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$. Pretpostavimo da je $1 \in \alpha$, $0 \in \beta$ i transfinitnom indukcijom po γ pokažimo da važi trvdjenje. Za $\gamma = 0$ trivijalno važi. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve ordinale manje od γ i pokažimo da važi i za γ. Ako je γ naslední ordinal δ^{+}, tada je $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = (\alpha^{\beta})^{\delta^{+}} = (\alpha^{\beta})^{\delta} \cdot \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\cdot\delta} \cdot \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\cdot\delta+\beta} = \alpha^{\beta\cdot\delta^{+}} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$. Ako je γ granični ordinal, onda je $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \bigcup\{(\alpha^{\beta})^{\delta}|\delta \in \gamma\} = \bigcup\{\alpha^{\beta\cdot\delta}|\delta \in \gamma\} = \alpha^{\bigcup\{\beta\cdot\delta|\delta\in\gamma\}} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$. **Q.E.D.**

Teorema 9.1. Neka je α proizvoljan nenula ordinal i $1 \in \beta$. Tada postoje jedinstveni ordinali γ, δ i η takvi da važi $\alpha = \beta^{\gamma} \cdot \delta + \eta$ i $\eta \in \beta^{\gamma}$ i $0 \neq \delta \in \beta$.

Dokaz. $E_{\beta}(0) = 1 \underline{\in} \alpha$ i, kako je E_{β} normalna funkcija-klasa, postoji najveći ordinal γ takav da je $E_{\beta}(\gamma) = \beta^{\gamma} \underline{\in} \alpha$ (Lema 6.6) . Prema teoremi 7.1. postoje jedinstveni ordinali δ i η takvi da je $\alpha = \beta^{\gamma} \cdot \delta + \eta$ i $\eta \in \beta^{\gamma}$. Ako nije $\delta \in \beta$, tada bi bilo $\beta \underline{\in} \delta$, što bi dalje impliciralo: $\alpha = \beta^{\gamma} \cdot \delta + \eta \underline{\ni} \beta^{\gamma} \cdot \beta + \eta = \beta^{\gamma+1} + \eta$, kontradiktorno sa izborom ordinala γ. Dakle, $\delta \in \beta$. Naravno, $\delta = 0$, bi dalo: $\beta^{\gamma} \underline{\in} \alpha = \eta \in \beta^{\gamma}$, kontradikcija.

Pretpostavimo sada da je: $\alpha = \beta^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \eta_1$, gde je $0 \neq \delta_1 \in \beta$ i $\eta_1 \in \beta_1^{\gamma}$. $\beta^{\gamma_1} \underline{\in} \alpha = \beta^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \eta_1 = \beta^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \beta^{\gamma_1} \in \beta^{\gamma_1} \cdot (\delta_1 + 1) \underline{\in} \beta^{\gamma_1} \cdot \beta = \beta^{\gamma_1+1}$ sledi (na osnovu izbora ordinala γ) $\gamma = \gamma_1$. A onda, prema teoremi 7.1, imamo i jednakosti $\delta = \delta_1$ i $\eta = \eta_1$. **Q.E.D.**

Korolar 9.1. (Kantorova normalna forma) Svaki nenula ordinal α se može na jedinstven način predstaviti u obliku

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n,$$

pri čemu je $1 \leq n \in \omega$, $\beta_1 \ni ... \ni \beta_n$ i $1 \leq l_i \in \omega$, $i = 1, ..., n$.

Dokaz. Neka je α neki nenula ordinal. Na osnovu prethodne teoreme postoje jedinstveni ordinali β_1, l_1 i η_1 tako da je $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \eta_1$ i $1 \leq l_1 \in \omega$ i $\eta_1 \in \omega^{\beta_1}$. $\eta_1 = 0$ završava dokaz. U suprotnom, ponavljajući postupak, dobijamo jedinstvene ordinale β_2, l_2 i η_2 tako da je $\eta_1 = \omega^{\beta_2} \cdot l_2 + \eta_2$ i $1 \leq l_2 \in \omega$ i $\eta_2 \in \omega^{\beta_2}$; dakle $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \omega^{\beta_2} \cdot l_2 + \eta_2$. Ponovo bismo razmatrali slučajeve $eta_2 = 0$ i $\eta_2 \neq 0$. Naravno ti postupci ne mogu ići u nedogled,(drugim rečima, za neko n mora biti $\eta_n = 0$), jer bismo, u suprotnom, dobili beskonačne strogo opadajuće nizove ordinala $\beta_1 \ni \beta_2 ...$ i $\eta_1 \ni \eta_2 ....$ Tako je, na primer, $\eta_2 \in \omega^{\beta_2} \underline{\in} \omega^{\beta_2} \cdot l_2 + \eta_2 = \eta_1$, $\omega^{\beta_2} \underline{\in} \omega^{\beta_2} \cdot l_2 \in \omega^{\beta_2} \cdot l_2 + \eta_2 = \eta_1 \in \omega^{\beta_1}$, pa $\beta_2 \in \beta_1$ (Lema $8.2, 1$).

Jedinstvenost ordinala $l_1, ..., l_n$, $\beta_1, ..., \beta_n$ direktna su posledica prethodne teoreme. Primetimo samo: ako je $\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot k_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot k_2 \cdots \omega^{\gamma_m} \cdot k_m$, gde je $\gamma_1 \ni \gamma_2 \ni \ldots \ni \gamma_m$ i $0 \neq k_i \in \omega$, $i = 1, ..., m$, onda je $\omega^{\gamma_2} \cdot k_2 \cdots \omega^{\gamma_m} \cdot k_m \underline{\in} \omega^{\gamma_2} \cdot k_2 \cdots \omega^{\gamma_2} \cdot k_m = \omega^{\gamma_2} \cdot (k_2 + \cdots + k_m) \in \omega^{\gamma_2} \cdot \omega = \omega^{\gamma_2^+} \underline{\in} \omega^{\gamma_1}$. **Q.E.D.**

10 Zaključak

Cilj ovog rada je bio da se definišu sabiranje, množenje i stepenovanje ordinala i ispitaju neka njihova osnovna svojstva. Pristup je bio potpuno formalan. Pošlo se od sistema aksioma ZFC-teorije skupova (što je bilo veoma korisno za upoznavanje formalnog prisupa matematici) i nekih njihovih posledica. Naravno, to je pomoglo da se na veoma jednostavan način uvede skup prirodnih brojeva (što je od velikog znavcaja ne samo za ovaj rad, nego i za matematiku kao nauku, s obzirom da se neka osnovna svojstva skupa prirodnih brojeva enalaze u osnovi mnogih matemativckih istraživanja).

Dokaz transfinitne rekurzije na dobrim uredjenjima (specijalno na ordinalima) dat je veoma detaljno. Transfinitna rekurzija na dobrim uredjenjima je jedna od osnovnih metoda konstruisanja novih objekata, ne samo u ovom radu, već i u svim granama matematike. U ovom radu je iskorišćena za definisanje sabiranja, množenja i stepenovanja ordinala. Naravno, sabiranje i mnozenje je definisano i kao ordinal "posebnog" dobrog uredjenja (stepenovanje, takodje, može da se defniše, al na žalost u ovom radu nije izloženo). Pokazalo se da su te dve definicije ekvivalentne. Vrhunac rada je Cantorova normalna forma, čiji dokaz u sebi sadrži osnovna svojstva ordinalne aritmetike.

Literatura

Literatura

[1] Kenneth Kunen *Set Theory-An Introduction to Independence Proofs* - North-Holland Publishing Company 1980.

[2] Aleksandar Perović, Aleksandar Jovanović, Boban Veličković *Teorija Skupova*-Matematički fakultet, Beograd 2007.

[3] Korel Hrbacek, Thomas Jech *Introduction to Set Theory*- Marcel Dekker Inc 1999.

[4] Milan Grulović *Predavanja iz Univerzalne algebre*-rukopis školske 1999/2000.

[5] Slobodan Vujošević *Matematička logika* - CID, Podgorica, 1996.

[6] A. Kron *Elementarna teorija skupova* - Matematički Institut, Beograd, 1992.