UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

REPREZENTACIJA ALGEBARSKIH MREŽA MREŽAMA SLABIH KONGRUENCIJA

MASTER TEZA

Autor:
Dušan Radičanin

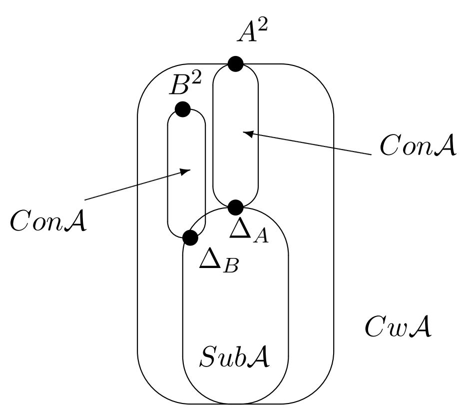
Mentor:
dr Branimir Šešelja

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Predgovor

U strukturalnim istraživanjima algebri i varijeteta, najviše proučavane strukture su mreža poduniverzuma i mreža kongruencija. Te dve mreže se obično izučavaju odvojeno, jer se sastoje od različitih objekata vezanih za algebru: podskupovi nosača i podskupovi kvadratnog stepena nosača. Slabe kongruencije predstavljaju sredstvo za pročavanje obe mreže u isto vreme. Slabe kongruencije predstavljaju simetrične i tranzitivne poduniverzume kvadratnog stepena algebri. Date relacije možemo da posmatramo kao kongruencije svih podalgebri date algebre među kojima dijagonalne relacije reprezentuju podalgebre. Dakle kolekcija $Cw\mathcal{A}$ svih slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ je mreža u odnosu na inkluziju, i $Con\mathcal{A}$, $Sub\mathcal{A}$ i $Con\mathcal{B}$ za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ su njene podmreže.



Ispostavilo se da $Cw\mathcal{A}$ pruža informacije o nekim osobinama algebri, koje ne bismo mogli da izvedemo posmatrajući mrežu poduniverzuma i mrežu kongruencija zasebno. Neke od tih osobina su Hamiltonovost, kvazi-Hamiltonovost, svojstvo proširenja kongruencija.

U ovom master radu dat je pregled osnovnih pojmova i rezultata vezanih za mreže slabih kongruencija, i reprezentaciju algebarskih mreža preko istih.

U prva tri poglavlja prezentujemo univerzalno algebarsku i mrežnu aparaturu koja će nam kasnije u radu biti potrebna. Između ostalog dokazujemo teoremu Mal'ceva, definišemo postupak lepljenja kod mreža i opisujemo mrežu kongruencija proizvoljne mreže.

Četvrto poglavlje se sastoji od tri odeljka. U prva dva odeljka dajemo osnovne osobine kompletnih i algebarskih mreža i uspostavljamo vezu između algebraskih operatora zatvaranja, algebarskih sistema zatvaranja i algebarskih mreža. U poslednjem odeljku ovog poglavlja bavimo se mrežom relacija ekvivalencija. Između ostalog pokazujemo da je data mreža algebarska i prosta, na kraju dajemo dokaz da su sve mreže do na izomorfizam podmreže mreža ekvivalencija.

Peto poglavlje je podeljeno u tri odeljka. Prva dva odeljka se bave distributivnim, kodistributivnim, neutralnim, neprekidnim i ostalim specijalnim elementima mreža, koji predstavljaju jaku aparaturu u opisivanju osobina mreže slabih kongruencija. U trećem odeljku posmatramo kako se specijalni elementi ponašaju u atomarno generisanim mrežama. Literatura na koju se oslanja ovo poglavlje je [26], [31], [37], [38], [39].

Šesto poglavlje sadrži šest odeljaka i bavi se mrežom slabih kongruencija i nekim njenim primenama u univerzalnoj algebri. U prvom odeljku definišemo mrežu slabih kongruencija, dokazujemo da je ta mreža algebarska i dajemo neke njene osnovne osobine. Drugi odeljak daje neke rezultate iz univerzalne algebre koji su u bliskoj vezi sa mrežom slabih kongruencija. Treći odeljak uspostavlja vezu između nekih osobina algebri i mreže slabih kongruencija. Četvrti odeljak je rezervisan za kvadrate, tj. kvadratne stepene podalgebri date algebre. U istom odeljku prezentujemo osnovne osobine kvadrata koje su bliskoj vezi sa Δ-podesnim elementom. U petom odeljku razmatramo kada je mreža slabih kongruencija atomarno generisana i dajemo neke posledice u tom slučaju. Poslednji odeljak ovog poglavlja samo navodi rezultat Miroslava Ploščice o konkretnom predstavljanju mreže slabih kongruencija. Ovo poglavlje se pretežno oslanja na [37] i [39].

Sedmo poglavlje je podeljeno u četri odeljka i bavi se problemima reprezentacije algebraskih mreža. Prvi odeljak predstavlja kratak istorijski osvrt na pomenute probleme. U drugom i trećem odeljku formulišemo i dokazujemo čuvene teoreme Birkhoff-Frink i Grätzer-Schmidt. U četvrtom odeljku navodimo neke rezultate o simultanim reprezentacijama koje su u bliskoj vezi sa problemom reprezentacije mreža slabih kongruencija.

Poslednje, osmo poglavlje najviše se bazira na [37] i [41] i podeljeno je u četri odeljka koja se bave problemom reprezentacije mreža slabih kongruencija. U prvom odeljku definišemo Δ-podesan element i dajemo neke njegove osobine, dok u drugom odeljku posmatramo kako neke mrežne osobine Δ-podesnog elementa utiču na reprezentabilnost. U trećem odeljku dajemo specijalan slučaj predstavljvosti koji se bazira na teorema Birkhoff-Frink i Grätzer-Schmidt. U poslednjem odeljku dajemo primere nekih klasa mreža koje su predstavljive, primera radi pokazujemo da je svaka netrivijalna algebarska Bulova mreža sa bar jednim atomom netrivijalno predstavljiva.

Sledeća lista predstavlja neka od tvrđenja koja je autor samostalno dokazao: 4.15, 4.16, 4.18, 4.19, 4.22, 5.7, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.12 (uz pomoć F. Wehrung-a), 6.17, 6.23, 6.24, 6.32, 6.34, 7.1, 7.9, 7.13.

Orginalni rezultati u ovom master radu su tvrđenja 6.7 i 8.9.

Na kraju, želeo bih da se zahvalim dr Andreji Tepavčević i dr Petru Markoviću na savetima i korisnim sugestijama. Veliku zahvalnost dugujem dr Friedrich Wehrung-u na pomoći oko tvrđenja 6.12 i na redovnom slanju svojih radova i knjiga i obaveštavanju o najnovijim dostignućima i problemima iz teorije mreža.

Nesumnjivo, najveću zahvalnost dugujem svom mentoru dr Branimiru Šešelju, kako na odabiru ovako zanimljive teme, tako i na ažurnosti i svesrdnoj pomoći.

Novi Sad, jun 2013. Dušan Radičanin

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Razvoj problema povezanih sa relacijama slabih kongruencija

Slabe kongruencije predstavljaju poseban slučaj tzv. **saglasnih relacija**. Prvi koji su se bavili sa njima, još 1974. bili su F. Šik i T. D. Mai, mada ih nisu nazivali slabim kongruencijama. Oni su posmatrali strukturu pomenutih relacija na grupama. Isti pojam definišu nezavisno 1988. godine G. Vojvodić i B. Šešelja za proizvoljnu algebru [48]. Oni slabim kongruencijama neke algebre nazivaju relacije na nosaču algebre koje su simetrične, tranzitivne, saglasne sa svim operacijama te algebre i uz to **slabo refleksivne**, što znači da je svaka konstanta te algebre u relaciji sa sobom. U istom radu pokazuju da je uređen skup svih slabih kongruencija proizvoljne algebre u odnosu na inkluziju jedna algebarska mreža. Godinu dana kasnije u radu [49], Gradimir Vojvodić i Branimir Šešelja, dokazuju da je svaka algebarska mreža izomorfna mreži slabih kongruencija neke algebre i definišu Δ-podesan element kao element koji zadovoljava određene mrežno teoretske uslove. Po današnjoj definiciji dati uslovi se izvode kao osobine Δ-podesnog elementa. A. Tepavčević i B. Šešelja 1990. nastavljaju istraživanje slabih kongruencija, navodeći pri tom unekoliko jednostavniju definiciju slabih kongruencija, ekvivalentnu prethodnoj; naime, saglasnost relacije ρ sa konstantnom operacijom c može biti određena uslovom $c\rho c$, pa možemo izostaviti uslov slabe refleksivnosti, podudaran sa zahtevom da je relacija saglasna sa svakom konstantom, jer je ovaj uslov obuhvaćen traženom saglasnošću relacije sa svim operacijama algebre, [34]. Zajedno sa I. Chajdom, B. Šešelja i A. Tepavčević istraživali su, između ostalog, i osobine varijeteta čije algebre imaju modularne mreže slabih kongruencija, kao i problem racionalizacije predstavljanja zadate algebarske mreže mrežom slabih kongruencija neke algebre, gde primenjuju metode koje su B. Jónsson i R. McKenzie razvili u vezi sa starijim problemom predstavljanja algebarske mreže mrežom kongruencija - videti [6] i [7].

Polazeći od mreže slabih kongruencija, G. Vojvodić 1992. godine definiše delimičnu algebru slabih kongruencija, proširujući skup operacija u mreži slabih kongruencija, tako da je, između ostalih, i slaganje relacija jedna delimična operacija te delimične algebre, [50]. Istraživanjem ove delimične algebre, kao i njenog odnosa sa mrežom slabih kongruencija, bavila se, pored G. Vojvodića, i R. Madarász-Silágyi, koja je dala značajne rezultate u vezi sa ovim, [27].

Jedno rešenje problema tzv. konkretnog predstavljanja daje M. Ploščica 1994. godine, [29]. A. Tepavčević 1997. godine rešava problem predstavljanja algebarske mreže mrežom slabih kongruencija algebre u jednom specijalnom slučaju, [46].

V. Lazarević i A. Tepavčević 2001. godine definišu jednu relaciju poretka na skupu slabih kongruencija algebre, koja se razlikuje od inkluzije. Neke osobine algebri se mogu videti na mreži slabih kongruencija, određenoj pomoću ovog novog poretka - videti [25] i [24].

Mrežama slabih kongruencija grupa i primenama istih, posebno u teoriji grupa i srodnim algebrama bavili su se G. Czédli, B. Šešelja, A. Tepavčević i M. Erné, [3] i [4]. Rezultate u vezi sa grupama u ovom kontekstu dali su i A. Lucchini, O. Puglisi, G. Traustason i N.V. Obraztsov. Doprinos rešavanju problema u vezi sa mrežama slabih kongruencija dali su i A. Walendziak i G. Eigenthaler, [2] i [11].

Veliki doprinos u rešavanju problema vezanih za mreže slabih kongruencija dala je i V. Stepanović - pogledati [41], [44] i [43]. Ona i A. Tepavčević 2012. godine uopštavaju neke osobine Δ-podesnog elementa iz [49] - videti [42]. Iste godine, B. Šešelja, V. Stepanović i A. Tepavčević daju nove rezultate po pitanju problema reprezentacije mreža slabih kongruencija, tako što ispituju kako se predstavljivost mreža slaže sa osnovnim algebarskim konstrukcijama, kao što su homorfne slike, podalgebre i direktan proizvod, [40].

1.2 Relacije na skupu

Svaki podskup ρ od A^2 čini jednu **relaciju** skupa A. Umesto $(x,y)\in\rho$ često pišemo $x\rho y$. **Kompozicija** binarnih relacija ρ i θ na skupu A je relacija $\rho\circ\theta$ definisana sa:

$$(x,y)\in\rho\circ\theta\longleftrightarrow(\exists z\in A)((x,z)\in\rho\quad\text{i}\quad(z,y)\in\theta).$$

Najviše izučavane relacije zadovoljavaju neke od osobina:

-**refleksivnost (R)**: $x\rho x$ za svaki element $x\in A$;
-**irefleksivnost (IR)**: $\neg x\rho x$ za svaki element $x\in A$;
-**simetričnost (S)**: $x\rho y$ povlači $y\rho x$ za sve $x,y\in A$;
-**antisimetričnost (AS)**: ako $x\rho y$ i $y\rho x$, onda $x=y$, za sve $x,y\in A$;
-**tranzitivnost (T)**: ako $x\rho y$ i $y\rho z$, onda $x\rho z$, za sve $x,y,z\in A$;
-**linearnost** (L): za svako $x,y\in A$, $x\rho y$ ili $y\rho x$.

Definisaćemo još tri osobine relacija:

-**slaba refleksivnost (SR)**: $x\rho y$ povlači $x\rho x$ i $y\rho y$, za sve $x,y\in A$;
-**dijagonalnost (D)**: $x\rho y$ povlači $x=y$, za sve $x,y\in A$;
-**bijektivnost (B)**: $(\forall x\in A)(\exists_1 y)x\rho y$ i $(\forall y\in A)(\exists_1 x)x\rho y$.

Relaciju koja zadovoljava (R), (S) i (T) zovemo **ekvivalencija**, dok onu koja zadovoljava (R), (AS) i (T) zovemo **relacija uređenja**. Relaciju koja zadovoljava (IR), (AS) i (T) zovemo **relacijom striktnog uređenja**. Relaciju koja zadovoljava (S) i (T) zovemo **slaba ekvivalencija**. Relaciju koja zadovoljava (R) i (T) nazivamo **pretporedak** ili **kvaziuređenje** . Relaciju koja zadovoljava (R) i (S) zovemo **tolerancija**.

Neka je $f:A\to B$ proizvoljno preslikavanje iz skupa A u B. Posmatrajmo relaciju $kerf\subseteq A\times A$ definisanu sa:

$$(x,y)\in kerf\longleftrightarrow f(x)=f(y).$$

Relacija $kerf$ se naziva **jezgro funkcije** f. Na osnovu elementarnih osobina funkcija proverava se da je $kerf$ relacija ekvivalencije na skupu A. Ova relacija će biti korišćena u nastavku rada.

Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu A, sa $[a]_\rho$ obeležavamo skup svih elemenata iz A koji su u relaciji sa a, i dati skup zovemo **klasa ekvivalencije** od ρ. Skup svih klasa ekvivalencije date relacije obeležavamo sa A/θ i zovemo ga **količnički skup** relacije θ na A.

Neka je A priozvoljan neprazan skup, za $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ kažemo da čini **particiju** skupa A ako i samo ako je :
$(i) \forall x(x \in \mathcal{F} \Rightarrow x \neq \emptyset)$
(ii) $\forall x \forall y(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)$
(iii) $\bigcup \mathcal{F} = A$.

Tvrđenje 1.1 *Ako je ρ relacija ekvivalencije na A tada količnički skup čini jednu particiju skupa A.*

Dokaz: Jasno svaki element tog skupa je neprazan zbog refleksivnosti ρ. Presek dva različita elementa iz količničkog skupa je prazan skup, jer inače bi zbog tranzitivnosti realcije ρ dobili da su ta dva elementa ista. Očigledno je da je $\bigcup A/\theta = A$. ∎

Sledeće tvrđenje opravdava naziv pretporetka za relacije koje su tranzitivne i refleksivne.

Tvrđenje 1.2 *Neka je ρ relacija pretporetka na skupu A, i neka je $\delta = \rho \cap \rho^{-1}$. Tada je δ relacija ekvivalencije na A, i relacija $\leq$ definisana sa :*

$$[x]_\delta \leq [y]_\delta \Leftrightarrow x \rho y$$

predstavlja relaciju uređenja na skupu A/δ.

Dokaz: Direktno se proverava da je δ relacija ekvivalencije na skupu A. Za proizvoljne $u \in [x]_\delta$ i $v \in [y]_\delta$ lako se proverava da $[x]_\delta \leq [y]_\delta$ ako i samo ako $u \rho v$, što pokazuje dobru definisanost relacije $\leq$. Refleksivnost relacije $\leq$ sledi iz refleksivnosti relacije ρ. Iz $[x]_\delta \leq [y]_\delta$ i $[y]_\delta \leq [x]_\delta$ sledi $y \rho x$ i $x \rho y$. Odatle $x \delta y$ pa je $[x]_\delta = [y]_\delta$, dakle važi i antisimetričnost. Tranzitivnost sledi direktno iz tranzitivnosti relacije ρ. Dakle $\leq$ je relacija poretka na A/δ. ∎

1.3 Uređeni skupovi

Uređen skup ili **parcijalno uređen skup** je uređen par $(P, \leq)$, gde je P neprazan skup (**nosač** uređenog skupa) i $\leq$ binarna relacija na P koja $\forall x, y, z \in P$ zadovoljava sledeća tri uslova:
(i) $x \leq x$;
(ii) $x \leq y$ i $y \leq x$ implicira $x = y$;
(iii) $x \leq y$ i $y \leq z$ implicira $x \leq z$.

U nastavku teksta nekad ćemo umesto da pišemo $x \leq y$ reći da y **sadrži** x ili da je x **sadržano** u y.

Za uređen skup $(P, \leq)$ kažemo da je **linearno** ili **totalno uređen skup** ako i samo su svaka dva elementa **uporediva**, tj. za svaka dva elementa $x, y \in P$ važi

$$x \leq y \quad ili \quad y \leq x.$$

U tom slučaju za odgovarajuče uređenje kažemo da je **linearno** ili **totalno**.

Neka je $(P, \leq)$ uređen skup.
(i) Za element $m \in P$ kažemo da je **maksimalan** ako i samo ako nije sadržan ni u jednom drugom elementu, tj.

$$\forall p \in P, \quad m \leq p \Rightarrow m = p$$

Za element m iz P kažemo da je **najveći** ako i samo ako sadrži svaki element, tj.

$$\forall p \in P \Rightarrow p \leq m$$

Najveći element skupa(ako postoji) najčešće obeležavamo sa 1 i zovemo ga **jedinični element** ili **jedinica**.

(ii) Za element $m \in P$ kažemo da je **minimalan** ako i samo ako ne sadrži ni u jedan drugi element, tj.

$$\forall p \in P, \quad p \leq m \Rightarrow m = p$$

Za element m iz P kažemo da je **najmanji** ako i samo ako je sadržan u svakom elementu, tj.

$$\forall p \in P \Rightarrow m \leq p$$

Najmanji element skupa (ako postoji) najčešće obeležavamo sa 0 i zovemo ga **nulti element** ili samo **nula**.

Iz antisimetričnosti relacije $\leq$ sledi da ako najmanji ili najveći elementi postoje, oni moraju biti jedinstveni. Za uređen skup kažemo da je **ograničen** ako i samo ako ima nulti i jedinični element.

Neka je sada S proizvoljan podskup od P.
(iii) Za element $x \in P$ kažemo da je **gornje ograničenje** skupa S ako i samo ako za svako $s \in S$ važi $s \leq x$. Skup svih gornjih ograničenja skupa S obležavamo sa S^u. Umesto $\{s\}^u$ pišemo s^u. Ako S^u ima najmanji element, taj element zovemo **supremum** skupa S, i obeležavamo ga sa $\bigvee S$ ili $supS$. Ako je S dvoelementni skup recimo $\{a, b\}$ koristimo oznaku $a \vee b$.

(iv) Za element $x \in P$ kažemo da je **donje ograničenje** skupa S ako i samo ako za svako $s \in S$ važi $x \leq s$. Skup svih donjih ograničenja skupa S obležavamo sa S^l. Umesto $\{s\}^l$ pišemo s^l. Ako S^l ima najveći element, taj element zovemo **infimum** skupa S, i obeležavamo ga sa $\bigwedge S$ ili $infS$. Ako je S dvoelementni skup recimo $\{a, b\}$ koristimo oznaku $a \wedge b$.

Supremum i infimum su, ako postoje, jedinstveni (kao najmanji i najveći element, respektivno, odgovarajućih skupova ograničenja).

Neka je $(P, \leq)$ uređen skup. Za $a, b \in P$ **zatvoren interval** od a do b je skup

$$[a, b] = \{x \in P \mid a \leq x \leq b\}$$

dok je **otvoren interval** od a do b skup

$$(a, b) = \{x \in P \mid a < x < b\}$$

gde je $<$ striktno uređenje indukovano sa $\leq$.

Dalje za svako $a \in P$ definišemo dva podskupa koja ćemo kasnije u radu koristiti,

$$\downarrow a = \{x \in P \mid x \leq a\}$$

i

$$\uparrow a = \{x \in P \mid a \leq x\}.$$

Neka su $a, b \in P$, tada po definiciji

$$a \prec b \quad \text{ako i samo ako je} \quad a < b \quad \text{i} \quad (a, b) = \emptyset.$$

Relaciju $\prec$ zovemo relacijom **pokrivanja** i kažemo da je a **donje pokrivanje** elementa b, odnosno da b je **gornje pokrivanje** elementa a.

Ako je $(P, \leq)$ uređen skup sa nulom, za element $a \in P$ kažemo da je **atom** ako i samo ako je $0 \prec a$. Analogno ako je $(P, \leq)$ uređen skup sa jedinicom, za element $a \in P$ kažemo da je **koatom** ako i samo ako je $a \prec 1$.

Neka su $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ uređeni skupovi i neka $f : P \to Q$.

(i) Preslikavanje f je **monotono** ili **izotono** ako i samo ako

$$x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y);$$

za isto preslikavanje kažemo da je **striktno monotono** ako i samo ako

$$x <_P y \Rightarrow f(x) <_Q f(y);$$

(ii) Preslikavanje f je **u-potapanje** ako i samo ako

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y)$$

Primetimo da je svako potapanje injektivno preslikavanje.

(iii) Za potapanje f kažemo da je **u-izomorfizam** ako i samo ako je sirjektivno preslikavanje. Za uređene skupove $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ kažemo da su izomorfni u oznaci $(P, \leq_P) \cong (Q, \leq_Q)$ ako i samo ako postoji u-izomorfizam iz P u Q.

Lako se proverava da je f u-izomorfizam između uređenih skupova $(P, \leq_P$ $)$ i $(Q, \leq_Q)$ ako i samo ako je f^{-1} u-izomorfizam izmedju $(Q, \leq_Q)$ i $(P, \leq_P)$.

Za podskup $S \subseteq P$, gde je P proizvoljan uređen skup, kažemo da je **usmeren** ako i samo ako za proizvoljne $x, y \in S$ postoji $a \in S$ tako da je $a \in \{x, y\}^u$. Iz definicije zaključujemo da ako je S usmeren onda za svaki konačan podskup $N \subseteq S$ postoji $a \in S$ tako da $a \in N^u$.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi univerzalne algebre

Jezik ili **tip algebre** je uređen par $(\mathcal{F}, ar)$, gde je $\mathcal{F}$ neprazan skup, tzv. skup **operacijskih simbola**, dok je ar funkcija koja preslikava $\mathcal{F}$ u ω. Ako je $ar(f) = n$ kažemo da je f **operacijski simbol arnosti** n, ili n-**arni operacijski simbol**. Operacije arnosti 1 zovemo unarnim operacijama. $\mathcal{F}_n$ je oznaka za skup svih operacijskih simbola iz $\mathcal{F}$ arnosti n. Neka je $\mathcal{F}$ neki tip algebri. **Algebra tipa** $\mathcal{F}$ je svaki uređen par $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$, gde je A neprazan skup a $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ preslikavanje koje svaki n-arni operacijski simbol $f \in \mathcal{F}$ slika u n-arnu operaciju $f^{\mathcal{A}}$ skupa A. Skup A je nosač algebre $\mathcal{A}$, operacije $f^{\mathcal{A}}$ zovemo **fundamentalne operacije** algebre $\mathcal{A}$. Ako algebra ima samo unarne fundamentalne operacije onda je zovemo **unarna algebra**.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ i $B \subseteq A$. Kažemo da je B **poduniverzum** od $\mathcal{A}$ ako i samo ako, za svako $n \in \omega$, $f \in \mathcal{F}_n$, i $b_1, \dots b_n$, važi $f^{A}(b_1, \dots, b_n) \in B$. Skup svih poduniverzuma od $\mathcal{A}$ obeležavamo sa $Sub\mathcal{A}$. Nosač algebre je uvek poduniverzum, dok je $\emptyset$ poduniverzum ako i samo ako algebra nema nularne operacije. Za poduniverzum B kažemo da je **netrivijalan** ako i samo je $B \neq \emptyset$, dok za isti kažemo da je **pravi** ako i samo ako je $B \neq \emptyset$ i $B \neq A$. Jasno $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ je jedan uređen skup.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre tipa $\mathcal{F}$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ **podalgebra** algebre $\mathcal{A}$ ako i samo ako su sve fundamentalne operacije algebre $\mathcal{B}$ restrikcije fundamentalnih operacija algebre $\mathcal{A}$. U tom slučaju pišemo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Primetimo da je nosač podalgebre $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ uvek poduniverzum algebre $\mathcal{A}$. Sa druge strane, svaki neprazan poduniverzum B algebre $\mathcal{A}$ je nosač jedinstveno određene podalgebre od $\mathcal{A}$.

Za relaciju ekvivalencije θ na skupu A koji je domen algebre $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$, kažemo da je **relacija kongruencije** ako i samo ako za sve $n \in \omega$, sve $f \in \mathcal{F}_n$, i sve $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ važi

$$a_1 \theta b_1, \ldots, a_n \theta b_n \quad \text{implicira} \quad f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \theta f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n). \tag{2.1}$$

Implikacija 2.1 se naziva **pravilo zamene**. Skup svih relacija kongruencija algebre $\mathcal{A}$ se obeležava sa $Con\mathcal{A}$. Δ i $A \times A$ su uvek kongruencije. Neka je $K \subseteq A \times A$. Presek svih kongruencija koje sadrže podskup K je opet kongruencija i nju obeležavamo sa $con_{\mathcal{A}}(K)$, jasno to je najmanja kongruencija koja sadrži podskup K. U slučaju da je K jednoelementni skup, recimo (a, b), koristimo oznaku $con_{\mathcal{A}}(a, b)$ i takve kongruencije zovemo **glavnim**. Za kongruenciju θ kažemo da je **netrivijalna** ako i samo je $\theta \neq \Delta$, dok za istu kažemo da je **prava** ako i samo ako je $\theta \neq \emptyset$ i $\theta \neq A \times A$. Jasno $(Con\mathcal{A}, \subseteq)$ je jedan uređen skup. Za algebru $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ kažemo da je **prosta** ako i samo nema nijednu pravu kongruenciju.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre tipa $\mathcal{F}$. Za preslikavanje $h : A \to B$ kažemo da je **homomorfizam** ako i samo ako za svako $n \in \omega$, $f \in \mathcal{F}_n$ i $a_1 \ldots a_n \in A$,

$$h(f^A(a_1, \ldots, a_n)) = f^B(h(a_1), \ldots, h(a_n)). \tag{2.2}$$

Sirjektivni homomorfizam nazivamo **epimorfizam**, dok injektivni homomorfizam zovemo **potapanje** ili **monomorfizam**. Bijektivni homomorfizam se zove **izomorfizam**, koristimo oznaku $A \cong B$ kada postoji izomorfizam iz algebre A u algebru B i tada kažemo da su algebre A i B **izomorfne**.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, i neka je $\theta \in Con\mathcal{A}$. **Faktor algebra algebre $\mathcal{A}$ po kongruenciji** θ je algebra tipa $\mathcal{F}$, sa nosačem A/θ i fundamentalnim operacijama $f^{\mathcal{A}/\theta}$, koje su definisane na sledeći način: za proizvoljno $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$, i $[a_1]_\theta, [a_2]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta \in A/\theta$,

$$f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, [a_2]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) = f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2 \ldots, a_n)/\theta.$$

Ako je $f \in \mathcal{F}_0$, onda

$$f^{\mathcal{A}/\theta} = f^{\mathcal{A}}/\theta.$$

Faktor algebru $\mathcal{A}$ po kongruenciji θ obeležavamo sa $\mathcal{A}/\theta$.

Tvrđenje 2.1 *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre tipa $\mathcal{F}$ tada :*
(i) Ako je $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam, onda $ker\psi \in Con\mathcal{A}$.
(ii) Svaka kongruencija θ algebre $\mathcal{A}$ je jezgro nekog homomorfizma, tačnije prirodnog homomorfizma $nat_\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta$, definisanog sa $nat_\theta(a) = a/\theta$, za svako $a \in A$.

Dokaz: Sledi direktno iz definicija relacije $ker f$, kongruencije i homomorfizma. ■

Tvrđenje 2.2 (Prva teorema o izomorfizmu) *Neka je $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ epimorfizam i $\theta = ker\psi$. Tada postoji izomorfizam $\chi : \mathcal{A}/\theta \to \mathcal{B}$, takav da je $\psi = \chi \circ nat_\theta$.*

Dokaz: Lako se proverava da je traženi izomorfizam za kojeg važi tražena jednakost, preslikavanje $\chi : A \to A/\theta$ definisano sa $\chi([a]_\theta) = \psi(a)$, za svako $a \in A$. ■

Neka je θ kongruencija algebre $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$, i neka $B \in Sub\mathcal{A}$. Posmatrajmo sada sledeći skup,

$$B[\theta] := \{x \in A \mid (x, b) \in \theta \text{ za neko } b \in B\ \}$$

Lema 2.3 *$B[\theta]$ je unija svih blokova koji imaju neprazan presek sa B.*

Dokaz: Direktno se proverava da je $B[\theta] = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}} Y$ gde je

$$\mathcal{P} = \{X \in A/\theta \mid X \cap B \neq \emptyset\}.$$

■

Lema 2.4 *$B[\theta]$ je poduniverzum od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka su $n \in \omega$, $f \in \mathcal{F}_n$ i $x_1, \ldots, x_n \in B[\theta]$ proizvoljno dati. Neka su dalje $b_1, \ldots, b_n \in B$ takvi da $(x_1, b_1), \ldots, (x_n, b_n) \in \theta$. Pošto je θ kongruencija sledi da je $(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^A(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta$. Iz pretpostavke B je poduniverzum pa $f^A(b_1, \ldots, b_n) \in B$. Dakle važi $f^A(x_1, \ldots, x_n) \in B[\theta]$. ■

Kao posledicu ove leme dobijamo da ako u algebri $\mathcal{A}$, klasa neke kongruencije sadrži neki poduniverzum onda je ta klasa takodje poduniverzum.

Tvrđenje 2.5 (Druga teorema o izomorfizmu) *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ i $\rho \in Con\mathcal{A}$. Tada je*

$$\mathcal{B}/(\rho \cap B^2) \cong \mathcal{B}[\rho]/(\rho \cap \mathcal{B}[\rho]).$$

Dokaz: Lako se proverava da je preslikavanje $\gamma : \mathcal{B}/(\rho \cap B^2) \to \mathcal{B}[\rho]/(\rho \cap \mathcal{B}[\rho])$ definisano sa

$$\gamma([b]_{\rho \cap B}) = [b]_{\rho \cap B[\rho]}$$

traženi izomorfizam. ■

Neka je $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ familija algebri tipa $\mathcal{F}$. Tada je njihov **direktan proizvod** algebra $\mathcal{A} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ tipa $\mathcal{F}$, čiji je nosač $\prod_{i\in I} A_i$, dok su operacije definisane na sledeći naćin : za proizvoljno $n \in \omega$, $f \in \mathcal{F}_n$, elemente $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$, i $j \in I$,

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)(j) = f^{\mathcal{A}_j}(a_1(j), \ldots, a_n(j)).$$

Ako su u familiji $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ sve algebre iste, recimo jednake algebri $\mathcal{B}$, onda se odgovarajući direktan proizvod $\prod_{i\in I} A_i$ obeležava sa B^I i naziva **direktan stepen**. U slučaju da je skup I kardinalnosti 2 onda odgovarajući direktan stepen nazivamo **kvadratni stepen**.

Za skup svih jezika uvedimo oznaku $\mathcal{F}^*$. Dalje, za svaki jezik $\mathcal{F}$ sa $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ obeležavamo klasu svih algebri datog jezika. Za preslikavanje

$$F : \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{F}^*} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{\mathcal{F}}) \to \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{F}^*} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$$

kažemo da je **operator** ako i samo ako za svako $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^*$ i svako $K \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ važi $F(K) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$. U daljem delu teksta za klasu $\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{F}^*} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$ koristićemo simbol $\mathcal{U}$. Jasno, oznaka $K \in \mathcal{U}$ je zamena za rečenicu "Neka je K klasa algebri nekog fiksiranog tipa ". Za klasu $K \in \mathcal{U}$ kažemo da je zatvorena za operator F ako i samo ako je $F(K) \subseteq K$. Za operator F kažemo da je :

(i) **ekstenzivan** ako i samo ako za svako $K \in \mathcal{U}$ važi $K \subseteq F(K)$,

(ii) **monoton** ako i samo ako za svako $K, L \in \mathcal{U}$ važi da iz $K \subseteq L$ sledi $F(K) \subseteq F(L)$,

(iii) **idempotentan** ako i samo ako za svako $K \in \mathcal{U}$ važi $F(F(K)) = K$.

Sada definišemo neke od najčešće korišćenih operatora u univerzalnoj algebri. Neka je $K \in \mathcal{U}$, tada:

$A \in \mathbf{I}(K)$ ako i samo ako je $\mathcal{A}$ izomorfna sa nekim elementom iz K;

$A \in \mathbf{S}(K)$ ako i samo ako je $\mathcal{A}$ izomorfna podalgebri neke algebre iz K;

$A \in \mathbf{H}(K)$ ako i samo ako je $\mathcal{A}$ homomorfna slika nekog elementa iz K;

$A \in \mathbf{P}(K)$ ako i samo ako je $\mathcal{A}$ izomorfna direktnom proizvodu familije algebri iz K.

Primedba: Primetimo da za neku klasu algebri K, koristeći tvrđenje 2.2 imamo da $\mathcal{A} \in \mathbf{H}(K)$ ako i samo ako $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}/\theta$, gde je $\mathcal{B}$ neka algebra iz K a $\theta \in Con\mathcal{B}$.

Tvrđenje 2.6 *Operatori* **I**, **S**, **H** *i* **P** *su monotoni, ekstezivni i idempotentni.*

Dokaz: Sledi direktno iz definicija odgovarajućih operatora. ■

Tvrđenje 2.7 *Za operatore* **H**, **S** *i* **P** *važe sledeće nejednakosti:*

$$\mathbf{SH} \leq \mathbf{HS}, \mathbf{PS} \leq \mathbf{SP}, \mathbf{PH} \leq \mathbf{HP}$$

Dokaz: Neka je K proizvoljna klasa algebri i pretpostavimo da $\mathcal{A} \in \mathbf{SH}(K)$. Dalje dobijamo da je $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} \in \mathbf{H}(K)$. Sada postoji $\mathcal{C} \in K$, tako da je $\mathcal{B}$ homomorfna slika od $\mathcal{C}$, i neka je α taj epimorfizam. Lako se proverava da je kompletna inverzna slika podalgebre podalgebra, pa sledi da $\alpha^{-1}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{C}$, pa dakle $\alpha^{-1}(\mathcal{A}') \in \mathbf{S}(K)$. Prema tome $\mathcal{A}' \in \mathbf{HS}(K)$ pa samim tim i $\mathcal{A} \in \mathbf{HS}(K)$. Na sličan način se pokazuju i preostale dve relacije. ■

Za klasu algebri K kažemo da je **varijetet** ako i samo ako je zatvorena u odnosu na **H**, **S** i **P**.

Tvrđenje 2.8 *Neka je $K \in \mathcal{U}$ proizvoljno dato. Tada je* $\mathbf{HSP}(K)$ *najmanji varijetet koji sadrži K.*

Dokaz: Očigledno da za proizvoljan varijete K_1 sa osobinom $K \subseteq K_1$ sledi da $\mathbf{HSP}(K) \subseteq K_1$. Koristeći tvrđenja 2.6 i 2.7 dobijamo sledeće :

$\mathbf{HHSP}(K) = \mathbf{HSP}(K)$;
$\mathbf{SHSP}(K) \subseteq \mathbf{HSSP}(K) = \mathbf{HSP}(K)$;
$\mathbf{PHSP}(K) \subseteq \mathbf{HPSP}(K) \subseteq \mathbf{HSPP}(K) = \mathbf{HSP}(K)$.

Dakle $\mathbf{HSP}(K)$ je varijetet i time je dokaz završen. ■

Neka je X skup simbola koji ćemo zvati **skup promenljivih** i neka je $\mathcal{F}$ neki tip algebri. **Skup termova** tipa $\mathcal{F}$ **nad** X u oznaci $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$ je najmanji skup za koji važi:
(i) $X \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$
(ii) $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$
(iii) iz $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$ i $f \in \mathcal{F}_n$ sledi $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$.
Elemente skupa $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$ zovemo **termi** tipa $\mathcal{F}$ nad X.

Neka je $t(x_1, \dots, x_n)$ term tipa $\mathcal{F}$ nad algebrom $\mathcal{A}$ istog tipa. **Termovsko preslikavanje indukovano sa** t **u algebri** je preslikavanje $t^A : A^n \to A$, definisano na sledeći način :
(i) Ako je $t = c$ i $c \in \mathcal{F}_0$, onda $t^A(a_1, \dots, a_n) = c^A$;
(ii) Ako je $t = x_i$ za neko $1 \leq i \leq n$ onda $t^A(a_1, \dots, a_n) = a_i$, za sve $a_1, \dots, a_n \in A$;
(iii) Ako je $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(X)$, i $t = f(t_1, \dots t_n)$, onda za sve $a_1, \dots, a_n \in A$

$$t^A(a_1, \dots, a_n) = f^A(t_1^A(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^A(a_1, \dots, a_n)).$$

Za operaciju $g : A^n \to A$ kažemo da je **termovska** operacija algebre $\mathcal{A}$ ako i samo ako postoji term $t(x_1, \dots, x_n)$ tipa $\mathcal{F}$ takav da je $g = t^{\mathcal{A}}$. Za preslikavanje $p : A^n \to A$ kažemo da je **polinomna operacija** algebre $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ ako i samo ako je p termovska operacija algebre $\mathcal{A}_A$ koja se dobija od algebre $\mathcal{A}$ dodavanjem svakog elementa $a \in A$ kao nove nularne operacije u jezik $\mathcal{F}$.

Lema 2.9 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ i $\theta \in Con\mathcal{A}$. Neka je dalje t n-arni term tipa $\mathcal{F}$, tada za sve $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n \in A$ važi : ako $a_1 \rho b_1, a_2 \rho b_2, \dots, a_n \rho b_n$, tada $t^{\mathcal{A}}(a_1, a_2 \dots, a_n) \theta t^{\mathcal{A}}(b_1, b_2 \dots, b_n)$.*

Dokaz: Indukcijom po dužini terma t se direktno pokazuje da za t važi pravilo zamene. ■

Teorema 2.10 *(Mal'cev) Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, i a, b njeni proizvoljni elementi, tada $(x, y) \in con_{\mathcal{A}}(a, b)$ ako i samo ako postoji $n \in \omega$, niz elemenata $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$ i niz unarnih polinomnih operacija $p_0, \dots, p_{n-1}$ iz $\mathcal{A}$ tako da*

$$\{p_i(a), p_i(b)\} = \{z_i, z_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dokaz: Za proizvoljno $a, b \in A$ definišimo relaciju $\theta \subseteq A \times A$ na sledeći način : $(x, y) \in \theta$ ako i samo ako postoji niz elemenata $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$ iz A i niz unarnih polinomnih operacija $p_0, \ldots, p_{n-1}$ tako da važi

$$\{p_i(a), p_i(b)\} = \{z_i, z_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Za proizvoljno $(x, y) \in \theta$, uzastopnom primenom leme 2.9 dobijamo da $(x, y) \in con_{\mathcal{A}}(a, b)$. Dakle $\theta \subseteq con_{\mathcal{A}}(a, b)$. Dalje trivijalno važi da $(a, b) \in \theta$. Direktnom proverom se utvrđuje da je θ kongruencija algebre $\mathcal{A}$, a pošto smo već konstatovali da ona sadrži (a, b) sledi da je $con_{\mathcal{A}}(a, b) \subseteq \theta$, pa važi i jednakost. ■

Prirodna ekstenzija prethodnog rezultata je sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.11 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, i $H \subseteq A$, tada $(x, y) \in con_{\mathcal{A}}(H)$ ako i samo ako postoji $n \in \omega$, niz elemenata $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$, niz uređenih parova $(a_i, b_i) \in H$ i niz unarnih polinomnih operacija p_i, $1 \leq i \leq n$, tako da*

$$\{p_i(a), p_i(b)\} = \{z_i, z_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Poglavlje 3

Polumreže i mreže

3.1 Polumreže

Za algebru $\mathcal{S} = (S, *)$ kažemo da je **polumreža** ako i samo ako za sve $x, y, z \in L$ važi :
(i)(**idempotentnost**) $x * x = x$
(ii)(**komutativnost**) $x * y = y * x$
(iii)(**asocijativnost**) $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Tvrđenje 3.1 *Na polumreži $\mathcal{S} = (S, *)$ definišemo binarnu relaciju $x \leq y$ ako i samo ako $x * y = y$. Tada je $\mathcal{S}^{Ord} = (S, \leq)$ uređen skup u kojem za svako x, y postoji $x \vee y$. Obrnuto ako krenemo od uređenog skupa $\mathcal{P} = (P, \leq)$ u kojem za svaka dva elementa postoji najmanje gornje ograničenje i definišemo operaciju $*$ sa $x * y = x \vee y$, dobijamo da je $\mathcal{P}^{Alg} = (P, *)$ polumreža. Važi da je i $\mathcal{P}^{Alg^{Ord}} = \mathcal{P}$ i $\mathcal{S}^{Ord^{Alg}} = \mathcal{S}$.*

Dokaz: Neka je $(S, *)$ polumreža i neka je $\leq$ definisano kao gore. Prvo proveravamo da je $\leq$ uređenje na skupu S.

(1) $x * x = x$ implicira $x \leq x$.

(2) Ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, dobijamo da $x = x * y = y * x = y$.

(3) Ako je $x \leq y \leq z$, onda imamo $x*z = x*(y*z) = (x*y)*z = y*z = z$, dakle $x \leq z$.

Kako je $y * (x * y) = y * (y * x) = (y * y) * x = y * x = x * y$ imamo $y \leq x * y$. Slično se pokazuje da je $x \leq x * y$. Dakle $x * y$ je gornje ograničenje skupa $\{x, y\}$. Da bi pokazali da je to najmanje gornje ograničenje, pretpostavimo da je $x \leq z$ i $y \leq z$. Tada $(x * y) * z = x * (y * z) = x * z = z$, što implicira $x * y \leq z$, što je i trebalo pokazati.

Obrnuto tvrđenje se dobija direktnom primenom definicija, tako da dokaz izostavljamo. Pokažimo još da je $\mathcal{P}^{Alg^{Ord}} = \mathcal{P}$, dok se $\mathcal{S}^{Ord^{Alg}} = \mathcal{S}$ pokazuje na sličan način. Neka je $\leq^*$ uređenje indukovano algebrom $\mathcal{P}^{Alg}$. Sada imamo $x \leq^* y$ ako i samo ako $x * y = y$ ako i samo ako $x \vee y = y$ ako i samo ako $x \leq y$. ■

Na isti način se pokazuje i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.2 *Na polumreži $\mathcal{S} = (S, *)$ definišemo $x \leq y$ ako i samo ako $x * y = x$. Tada je $\mathcal{S}^{Ord} = (S, \leq)$ uređen skup u kojem za svako x, y postoji $x \wedge y$. Obrnuto ako krenemo od uređenog skupa $\mathcal{P} = (P, \leq)$ u kojem za svaka dva elementa postoji najveće donje ograničenje i definišemo operaciju $*$ sa $x * y = x \wedge y$, dobijamo da je $\mathcal{P}^{Alg} = (P, *)$ polumreža. Važi da je i $\mathcal{P}^{Alg^{Ord}} = \mathcal{P}$ i $\mathcal{S}^{Ord^{Alg}} = \mathcal{S}$.*

Za uređen skup $(P, \leq)$ kažemo da je **sup-polumreža** ili $\vee$**-polumreža** ako i samo ako za svaka dva elementa postoji najmanje gornje ograničenje. Za uređen skup $(P, \leq)$ kažemo da je **inf-polumreža** ili $\wedge$**-polumreža** ako i samo ako za svaka dva elementa postoji najveće donje ograničenje. Tvrđenja 3.1 i 3.2 nam u stvari kažu da su pojmovi polumreže kao algebre i kao posebnog uređenog skupa na neki način ekvivalentni. Na slici 3.1 pod (a) je dat primer inf-polumreže sa nulom, dok je na istoj slici pod (b) dat primer sup-polumreže sa jedinicom.

(a) (b)

Slika 3.1

Neprazni podskup I sup-polumreže $\mathcal{S}$ naziva se **ideal** ako i samo ako ispunjava uslove :
(i) iz $a, b \in I$ sledi $a \vee b \in I$
(ii) iz $a \in I$ i $c \leq a$ sledi $c \in I$.
Skup svih ideala sup-polumreže $\mathcal{S}$ obeležavamo sa $\mathcal{I}_d(S)$.

Neprazni podskup F inf-polumreže $\mathcal{S}$ naziva se **filter** ako i samo ako ispunjava uslove :
(i) iz $a, b \in F$ sledi $a \wedge b \in F$
(ii) iz $a \in F$ i $a \leq c$ sledi $c \in F$.
Skup svih filtara inf-polumreže $\mathcal{S}$ obeležavamo sa $\mathcal{F}_i(S)$.

3.2 Mreže

Za uređen skup $(L, \leq)$ kažemo da je **mreža kao uređeni skup** ako i samo je sup-polumreža i inf-polumreža. Mreža se može definisati i kao algebra. Za algebru $(L, \vee, \wedge)$ kažemo da je **mreža kao algebra** ako i samo ako za sve $x, y, z \in L$ važi :

(i)(**komutativnost**) $x \vee y = y \vee x$ i $x \wedge y = y \wedge x$,

(ii)(**asocijativnost**) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ i $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

(iii)(**idempotentnost**) $x \vee x = x$ i $x \wedge x = x$,

(iv) (**apsorpcija**) $x \vee (y \wedge x) = x$ i $x \wedge (y \vee x) = x$.

Sledeća teorema pokazuje da su ove dve definicije mreža ekvivalentne, tj. da opisuju iste objekte.

Tvrđenje 3.3 *Neka je algebra $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ mreža, definišimo $x \leq y$ ako i samo ako $x \wedge y = x$. Tada je uređen skup $\mathcal{L}^{Ord} = (L, \leq)$ isto mreža. Obrnuto, ako je uređen skup $\mathcal{P} = (P, \leq)$ mreža, definišimo $x \wedge y = inf\{x, y\}$ i $x \vee y = sup\{x, y\}$. Tada je algebra $\mathcal{P}^{Alg} = (P, \vee, \wedge)$ mreža. Važi da je i $\mathcal{P}^{Alg^{Ord}} = \mathcal{P}$ i $\mathcal{L}^{Ord^{Alg}} = \mathcal{L}$.*

Dokaz: Na osnovu zakon apsorpcije u svakoj mreži važi $x \wedge y = x$ ako i samo ako $x \vee y = y$. Koristeći ovu osobinu ostatak dokaza je direktna ekstenzija tvrđenja 3.1. ■

Prethodno tvrđenje nam daje za pravo da kad god dokazujemo neke osobine mreža, ravnopravno možemo koristiti uređenje i operacije te mreže. U nastavku rada u nekim slučajevima nećemo posebno naglašavati da li se radi o mreži kao uređenom skupu ili algebri. Kada kažemo neka je $\mathcal{L}$ mreža podrazumevaćemo da je odgovarajuće uređenje dato a samim tim i operacije koje ono indukuje.

Neka je $\mathcal{L} = (L, \leq)$ mreža. Za neprazan skup $I \subseteq L$ kažemo da je **ideal** mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je on ideal sup-polumreže $(L, \leq)$. Analogno za neprazan skup $F \subseteq L$ kažemo da je **filter** mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je on filter inf-polumreže $(L, \leq)$. Lako se pokazuje da je $\downarrow a$ ideal za svako $a \in L$, i ideale tog oblika zovemo **glavnim idealima**, analogno se proverava da je $\uparrow a$ filter za svako $a \in L$ i filtere tog oblika nazivamo **glavnim filterima**. Direktno se proverava da je presek proizvoljne familije ideala opet ideal. Iz ovog zaključujemo da za svaki podskup H mreže $\mathcal{L}$ postoji najmanji ideal, u oznaci $\downarrow H$, koji ga sadrži. Sledeće tvrđenje opisuje dati skup.

Tvrđenje 3.4 *Neka je $\mathcal{L}$ mreža i $\emptyset \neq H \subseteq L$, onda je*

$$\downarrow H = \{x \in L \mid x \leq h_1 \vee \cdots \vee h_n \quad \textit{za neke} \quad h_1, \ldots, h_n \in H\}.$$

Dokaz: Označimo skup

$$\{x \in L \mid x \leq h_1 \vee \cdots \vee h_n \quad \text{za neke} \quad h_1, \ldots, h_n \in H\}$$

sa I. Lako se proverava da je I ideal mreže $\mathcal{L}$. Pošto je $H \subseteq I$ sledi da je $\downarrow H \subseteq I$. Sa druge strane, neka je $x \in I$ proizvoljno dato, tada je po definiciji skupa I, $x \leq h_1 \vee \cdots \vee h_n$ za neke $h_1, \ldots, h_n \in H$. Kako je $\downarrow H$ ideal i važi $H \subseteq \downarrow H$ zaključujemo da $x \in \downarrow H$. Pa kako važi i druga inkluzija sledi $I = \downarrow H$. ■

Za relaciju ekvivalencije θ na mreži $\mathcal{L}$ kažemo da je **konguencija** ako i samo ako je θ kongruencija na algebri $(L, \vee, \wedge)$.

Tvrđenje 3.5 *Relacija ekvivalencije θ na mreži $\mathcal{L}$ je njena kongruencija ako i samo ako za sve $x, y, z \in L$ važi,*

$$Iz \quad (x, y) \in \theta \quad sledi \quad (x \wedge z)\theta(y \wedge z) \quad i \quad (x \vee z)\theta(y \vee z).$$

Dokaz: Direktna primena mrežnih identiteta. ■

Za neprazan podskup K mreže $\mathcal{L}$ kažemo da je **podmreža** date mreže ako i samo ako je poduniverzum algebre $(L, \vee, \wedge)$. Za neprazan podskup K mreže $\mathcal{L}$ kažemo da je **konveksan** ako i samo ako za svaka dva elementa $a, b \in K$ važi,

$$(\forall x \in L)(x \in (a, b) \Longrightarrow x \in K).$$

Tvrđenje 3.6 *Neka je θ relacija kongruencije na $\mathcal{L}$. Za svako $a \in L$, $[a]_\theta$ je konveksna podmreža od $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Neka su $x, y \in [a]_\theta$, tada je $x\theta a$ i $y\theta a$, pa je $x \wedge y\theta a$ i $x \vee y\theta a$, tj. $x \vee y, x \wedge y \in [a]_\theta$. Dakle $[a]_\theta$ je podmreža od $\mathcal{L}$. Pokažimo da važi i konveksnost. Neka su $x, y \in [a]_\theta$, $x \leq y$ i $x \leq z \leq y$. Iz $x\theta y$ i $z\theta z$ sledi da $x \vee z\theta y \vee z$, tj. $z\theta y$. Dakle zaključujemo da $z \in [y]_\theta = [a]_\theta$. ■

Tvrđenje 3.7 *Refleksivna relacija θ mreže $\mathcal{L}$ je njena kongruencija ako i samo ako za svako $x, y, z, u \in L$ važe sledeća tri uslova:*

(*i*) $(x, y) \in \theta \Longleftrightarrow (x \wedge y, x \vee y) \in \theta$,

(*ii*) *Iz* $x \leq y \leq z$, $x\theta y$ *i* $y\theta z$ *sledi* $x\theta z$,

(*iii*) *Iz* $x \leq y$ *i* $x\theta y$ *sledi* $x \wedge u\theta y \wedge u$ *i* $x \vee u\theta y \vee u$.

Dokaz: Jasno je da ako je θ kongruencija da važe uslovi (*i*), (*ii*) i (*iii*). Dokažimo sada drugu implikaciju. Neka je θ refleksivna relacija za koju važe uslovi (*i*), (*ii*) i (*iii*). Dokažimo prvo jednu trivijalnu činjenicu koju ćemo iskoristiti u dokazu tvrđenja. Neka su $b, c \in [a, d]$ i $(a, d) \in \theta$, tada $(b, c) \in \theta$. Zaista, iz $(a, d) \in \theta$ i $a \leq d$ koristeći uslov (*iii*) dobijamo

$$b \wedge c = (b \wedge c) \wedge (b \vee c)\theta d \vee (b \wedge c) = d.$$

Dalje iz $b \wedge c \leq d$ i uslova (*iii*) dobijamo

$$b \wedge c = (b \wedge c) \wedge (b \vee c)\theta d \wedge (b \vee c) = b \vee c,$$

pa zbog uslova (*i*) dobijamo da $(b, c) \in \theta$.

Iz uslova (*i*) se vidi da je relacija θ simetrična. Dokažimo sada tranzitivnost. Neka je $x\theta y$ i $y\theta z$. Iz uslova (*i*) imamo da $x \vee y\theta x \wedge y$, a iz (*iii*) da

$$y \vee z = (y \vee z) \vee (x \wedge y)\theta(y \vee z) \vee (x \vee y) = x \vee y \vee z.$$

Na isti način se pokazuje da $x \wedge y \wedge z\theta y \wedge z$, pa imamo da važi

$$x \wedge y \wedge z\theta y \wedge z\theta y \vee z\theta x \vee y \vee z$$

i

$$x \wedge y \wedge z \leq y \wedge z \leq y \vee z \leq x \vee y \vee z.$$

Primenjujući uslov (ii) dva puta dobijamo da $(x \vee y \vee z, x \wedge y \wedge z) \in \theta$. Sada primenimo pomoćno tvrđenje sa početka dokaza sa $a = x \wedge y \wedge z$, $b = x$, $c = z$, $d = x \vee y \vee z$, i dobijamo da $(x, z) \in \theta$.

Neka je sada $(x, y) \in \theta$, pokažimo da za proizvoljno $t \in L$ važi $(x \wedge t, y \wedge t)$. Zaista na osnovu (i) dobijamo da $x \wedge y \theta x \vee y$, što dalje na osnovu (iii) implicira da $x \wedge y \wedge t \theta (x \vee y) \wedge t$. Pošto

$$x \wedge t, y \wedge t \in [x \wedge y \wedge t, (x \vee y) \wedge t],$$

dobijamo da $(x \wedge t, y \wedge t) \in \theta$. Dokaz da $(x \vee t, y \vee t) \in \theta$ je analogan. Dakle na osnovu tvrđenja 3.5 sledi da je θ kongruencija mreže $\mathcal{L}$. ■

Lako se vidi da je za proizvoljnu mrežu $\mathcal{L}$, uređeni skup $(Con\mathcal{A}, \subseteq)$ ustvari mreža. Infimum dve kongruencije, ρ i θ je njihov presek, dok je supremum jednak preseku svih kongruencija koje sadrže $\rho \cup \theta$.

Tvrđenje 3.8 *Neka je $\mathcal{L}$ mreža. Za $\rho, \theta \in Con\mathcal{L}$ i $x, y \in L$ važi:*

$x \rho \vee \theta y$ ako i samo ako postoji niz

$$z_1 = x \wedge y \leq z_2 \leq \cdots \leq z_{n-1} \leq z_n = x \vee y,$$

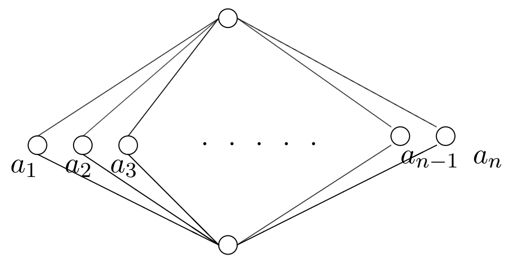
takav da je $z_i \rho z_{i+1}$ ili $z_i \theta z_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Dokaz: Neka je γ relacija na L definisana kao tvrđenju teoreme. Jasno je da $\rho \subseteq \gamma$ i $\theta \subseteq \gamma$. Ako je α kongruencija sa osobinom $\rho \subseteq \alpha$ i $\theta \subseteq \alpha$ i $(x, y) \in \gamma$, tada za svako i, $(z_i, z_{i+1}) \in \rho$ ili $(z_i, z_{i+1}) \in \theta$. Dakle $(z_i, z_{i+1}) \in \alpha$ za svako i. Zbog tranzitivnosti dobijamo da $(x \wedge y, x \vee y) \in \alpha$, što dalje implicira da $(x, y) \in \alpha$. Dakle $\gamma \subseteq \alpha$. Da bi pokazali da je $\gamma = \rho \vee \theta$ dovoljno je da pokažemo da je γ kongruencija mreže $\mathcal{L}$.

Očigledno da je γ refleksivna relacija i da zadovoljava uslov (i) tvrđenja 3.7. Neka je $(x, y) \in \gamma$, $(y, z) \in \gamma$ i $x \leq y \leq z$. Iz definicje relacije γ dobijamo dva niza koja spajaju $x \wedge y$ sa $x \vee y$ i $y \wedge z$ sa $z \vee y$. Spajanjem ta dva niza dobijamo da $(x, z) \in \gamma$. Neka je sada dato proizvoljno $(x, y) \in \gamma$ tako da $x \leq y$, neka je $z_1, z_2, \ldots, z_n$ odgovarajući niz iz definicje relacije γ, i neka je $t \in L$. Sada zaključujemo da je $z_1 \vee t, z_2 \vee t, \ldots, z_n \vee t$ niz koji spaja $x \vee t$ sa $y \vee t$ i $z_1 \wedge t, z_2 \wedge t, \ldots, z_n \wedge t$ niz koji spaja $x \wedge t$ sa $y \wedge t$. Dakle $(x \vee t, y \vee t) \in \gamma$ i $(x \wedge t, y \wedge t) \in \gamma$. Na osnovu tvrđenja 3.7 sledi da $\gamma \in Con\mathcal{L}$. ■

Mreža $\mathcal{L}$ je **prosta** ako i samo ako je algebra $(L, \vee, \wedge)$ prosta.

Tvrđenje 3.9 *Mreža M_n (slika 3.2) je prosta za svako $n \geq 3$*



Slika 3.2

Dokaz: Neka je $\alpha = con_{M_n}(a_i, a_j)$ gde je $i \neq j$. Sada imamo

$$1 = a_i \vee a_j \alpha a_i \vee a_i = a_i = a_i \wedge a_i \alpha a_i \wedge a_j = 0.$$

Dakle $con_{M_n}(a_i, a_j) = M_n^2$. Dalje posmatrajmo $\beta = con_{M_n}(a_i, 0)$ i neka je dato proizvoljno $j \neq i$. Tada imamo $1 = a_i \vee a_j \beta 0 \vee a_j = a_j$. Dakle važi $con_{M_n}(a_j, 1) \subseteq con_{M_n}(a_i, 0)$ za svako $j \neq i$. Pretpostavimo da su i, j, k različiti. Jasno $(a_j, 1) \in \beta$, iz ovog sledi da $(a_j \wedge a_i, 1 \wedge a_i) = (0, a_i) \in \beta$ što implicira $(0 \vee a_k, a_i \vee a_k) = (a_k, 1) \in \beta$. Iz $(a_j, 1) \in \beta$ i $(a_k, 1) \in \beta$ sledi $(a_k, a_j) \in \beta$ što implicira $M_n^2 = con_{M_n}(a_i, a_j) \subseteq con_{M_n}(a_i, 0)$. Na sličan način se pokazuje da $con_{M_n}(a_i, 1) = M_n^2$. Lako se pokazuje da mreže M_2 i M_1 nisu proste. ■

Neka su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{K}$ mreže. Za presliakvanje $f : L \to K$ kažemo da je **homomorfizam**, **monomorfizam** (**potapanje**), **epimorfizam**, **izomorfizam** iz $\mathcal{L}$ u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je f homomorfizam, monomorfizam, epimorfizam, izomorfizam respektivno, između algebri $(L, \vee, \wedge)$ i $(K, \vee, \wedge)$. Za preslikavanje $g : L \to K$ kažemo da je $\wedge$-**homorfizam** iz mreže $\mathcal{L}$ u mrežu $\mathcal{K}$ ako i samo ako je g homomorfizam između algebri $(L, \wedge)$ i $(K, \wedge)$. Za preslikavanje $h : L \to K$ kažemo da je **u-potapanje**, **u-izomorfizam** respektivno, između mreža $\mathcal{L}$ i $\mathcal{K}$ ako i samo ako je h u-potapanje, u-izomorfizam između uređenih skupova $(L, \leq)$ i $(K, \leq)$.

Sledeće tvrđenje pokazuje da su pojmovi u-izomorfizama i izomorfizama ustvari ekvivalentni.

Tvrđenje 3.10 *Mreže* $(L, \vee, \wedge)$ *i* $(M, \vee, \wedge)$ *su izomorfne ako i samo ako su izomorfni odgovarajući uređeni skupovi* $(L, \leq)$ *i* $(M, \leq)$.

Dokaz: Neka je $f : L \to M$ izmomorfizam između $(L, \vee, \wedge)$ i $(M, \vee, \wedge)$. Tada je $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, tj. $f(x) \leq f(y)$. Dakle f je monotona funkcija. Sa druge strane iz $f(x) \leq f(y)$ dobijamo $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x)$, pa zbog injektivnosti sledi $x \wedge y = x$, tj. $x \leq y$.

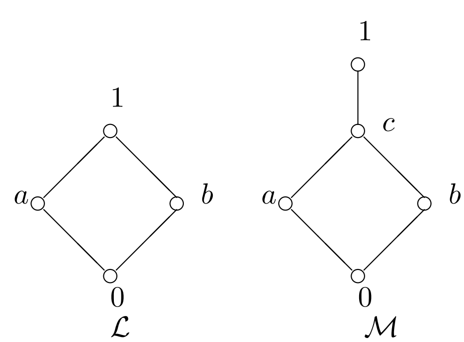
Obratno, neka je f u-izomorfizam iz $(L, \leq)$ u $(M, \leq)$. Pokažimo saglasnost sa operacijom $\wedge$, dok se saglasnost sa $\vee$ dokazuje analogno. Jasno je da važi $f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$. Sa druge strane iz $f(x \wedge y) \leq f(x)$ i $f(x \wedge y) \leq f(y)$ sledi

$$f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) \leq f^{-1}(f(x)) = x \quad i \quad f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) \leq f^{-1}(f(y)) = y.$$

Odavde dobijamo $f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) \leq x \wedge y$, što dalje implicira $f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y)$. ∎

Ovo tvrđenje nam daje zapravo da kažemo da su dve mreže **izomorfne** ako i samo ako su izomorfne kao uređeni skupovi, odnosno ako i samo ako su izomorfne kao algebre. Sa druge strane pojmovi u-potapanje i potapanja nisu ekvivalentni, lako se pokazuje da je svako u-potapanje ujedno i potapanje. Dok obrnuta implikacija ne važi, što pokazuje sledeći primer.

Primer 3.11 *Posmatrajmo mreže* $\mathcal{L}$ *i* $\mathcal{M}$ *na slici 3.3. Lako se vidi da je preslikavanje* $f : L \to M$ *definisano sa* $f(x) = x$ *u-potapanje između mreža* $\mathcal{L}$ *i* $\mathcal{M}$. *Dato preslikavanje nije potapanje jer se ne slaže sa operacijom* $\vee$. *Zaista,* $f(a \vee b) = 1$ *dok je* $f(a) \vee f(b) = c$.

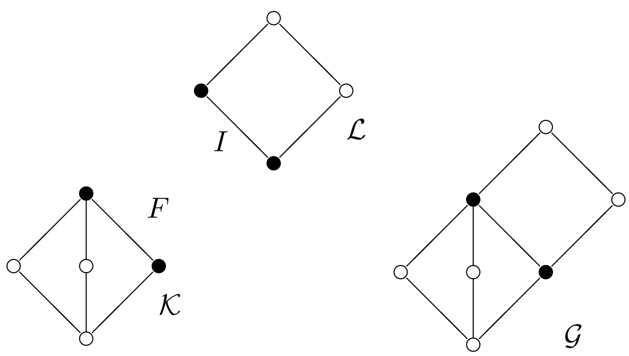


Slika 3.3

Neka su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{K}$ mreže. Neka je dalje I ideal mreže $\mathcal{L}$ i F filter mreže $\mathcal{K}$. Ako su F i I izomorfni (sa izomorfizmom ψ), tada definišemo mrežu $\mathcal{G}$, koja nastaje **lepljenjem** mreža $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ preko I i F, na sledeći način:

U disjunktnoj uniji nosača K i L svaki element $a \in F$ identifikujemo sa $\psi(x) \in I$, tako dobijamo nosačG, mreže $\mathcal{G}$. Uređenje definišemo na sledeći način (pogledati sliku 3.4):

$$a \leq b \quad \text{ako i samo ako} \quad \begin{cases} a \leq_K b, & \text{ako } a, b \in K; \\ a \leq_L b, & \text{ako } a, b \in L; \\ a \leq_K x \quad \text{i} \quad \psi(x) \leq_L b, & \text{za } a \in K,\ b \in L, \\ & \text{i za neko } x \in F. \end{cases}$$



Slika 3.4: Jednostavan primer lepljenja.

Direktno se proverava da je $(\mathcal{G}, \leq)$ mreža.

Ako je α_K relacija na K i α_L relacija na L tada **refleksivni proizvod** relacija α_K i α_L je relacija

$$\alpha_K \circ^r \alpha_L := \alpha_K \cup \alpha_L \cup \alpha_K \circ \alpha_L.$$

Sledeće tvrđenje opisuje kongruencije na mreži $\mathcal{G}$.

Tvrđenje 3.12 *Svaka kongruencija mreže $\mathcal{G}$ se može na jedinstven način prikazati u obliku*

$$\alpha = \alpha_K \circ^r \alpha_L,$$

gde je

(*i*) α_K *je kongruencija mreže* $\mathcal{K}$*;*

(ii) α_L je kongruencija mreže $\mathcal{L}$;

(iii) Restrikcija α_K na F je jednako (pod identifikacijom preko izomorfizma ψ) sa restrikcijom α_L na I.

Sa druge strane ako imamo kongruencije α_K, α_L na $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ redom, i ako za njih važi uslov (iii) tada je $\alpha = \alpha_K \circ^r \alpha_L$ kongruencija na $\mathcal{G}$

Dokaz: Može se naći u [16]. ■

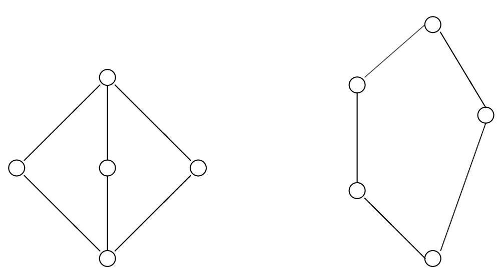
Kao direktnu posledicu ovog tvrđenja dobijamo da lepljenjem dve proste mreže (pa samim tim i konačno mnogo) dobijamo opet prostu mrežu.

Primer 3.13 *Za cele brojeve $k \geq 2$ i $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 2$, mreža $M_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ se dobija na sledeći način (pogledaj sliku 6.2 na strani 68). Krenemo od mreže M_{n_1} i izvršimo lepljenje sa mrežom M_{n_2}, i tako dobijamo mrežu M_{n_1,n_2}. Sada izvršimo lepljenje mreže M_{n_1,n_2} sa mrežom M_{n_3} i dobijamo mrežu M_{n_1,n_2,n_3}. U tom stilu nastavljamo postupak i na kraju dobijamo mrežu $M_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. Primenom tvrđenja 3.12 i 3.9 dobijamo da je mreža $M_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ prosta.*

Za mrežu $\mathcal{L}$ kažemo da je **modularna** ako i samo za sve $a, b, c \in L$ važi implikacija $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Tvrđenje 3.14 *(Dedekind) Mreža $\mathcal{L}$ je modularna ako i samo ako ne sadrži podmrežu izomorfnu sa M_3.*

Dokaz: Može se naći recimo u [38]. ■



M_3 N_5

Slika 3.5

Za mrežu $\mathcal{L}$ kažemo da je **distributivna** ako i samo za sve $a, b, c \in L$ važi $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Tvrđenje 3.15 *(Birkhoff) Mreža $\mathcal{L}$ je distributivna ako i samo ako ne sadrži podmrežu izomorfnu sa N_5 ili M_3.*

Dokaz: Može se naći recimo u [38]. ■

Tvrđenje 3.16 *Mreža $\mathcal{L}$ je distributivana ako i samo ako za sve $x, y, z \in L$ važi :*

$$(x \wedge y) \vee (z \wedge y) \vee (z \wedge x) = (z \vee y) \wedge (z \vee x) \wedge (x \vee y). \tag{3.1}$$

Dokaz: Neka je mreža $\mathcal{L}$ distributivna, onda imamo da važe sledeće jednakosti,

$$\begin{aligned} &(x \vee y) \wedge (z \vee y) \wedge (z \vee x) = \\ &= ((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge (y \vee x) \wedge z) \\ &= (x \wedge (y \vee z)) \vee (z \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\ &= (x \vee y) \wedge (z \vee y) \wedge (z \vee x). \end{aligned}$$

Obratno pretpostavimo da važi 3.1, i pokažimo prvo da je mreža $\mathcal{L}$ modularna. Koristeći $x \leq z$ uslov 3.1 postaje $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z$, odakle sada direktno sledi zakon modularnosti. Sada koristeći modularnost pokažimo da je mreža $\mathcal{L}$ distributivna. Označimo levu stranu uslova 3.1 sa l, a desnu sa d. Na osnovu zakona apsorpcije važi $x \wedge r = x \wedge (y \vee z)$, dok iz $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leq x$, koristeći modularnost i apsorpciju sledi

$$\begin{aligned} x \wedge l &= x \wedge ((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)) \\ &= (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \\ &= (x \wedge z) \vee (x \wedge y). \end{aligned}$$

Jasno je da je $x \wedge r = x \wedge l$, što implicira $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. ■

Podsetimo se, u drugom poglavlju smo definisali pojam glavne kongruencije za algebre (strana 14), analogno se pojam glavnih kongruencija definiše i za mreže.

Tvrđenje 3.17 *Neka je $\mathcal{L}$ distributivna mreža, $a, b, x, y \in L$ i neka je $a \leq b$. Tada*

$$(x, y) \in con(a, b) \quad akko \quad x \vee b = y \vee b \quad i \quad x \wedge a = y \wedge a.$$

Dokaz: Neka je β relacija na L definisana sa $(x, y) \in \beta$ ako i samo ako $x \vee b = y \vee b$ i $x \wedge a = y \wedge a$. Lako se vidi da je β relacija ekvivalencije na L. Neka su dalje $(x, y) \in \beta$ i $z \in L$ proizvoljno dati, tada

$$(x \wedge z) \vee a = (z \vee a) \wedge (x \vee a) = (z \vee a) \wedge (y \vee a) = (y \wedge x) \vee a,$$

i

$$(x \wedge z) \wedge b = z \wedge (x \wedge b) = z \wedge (y \wedge b) = (y \wedge z) \wedge b;$$

pa $(x \wedge z, y \wedge z) \in \beta$. Slično se pokazuje da $(x \vee z, y \vee z) \in \beta$. Na osnovu tvrđenja 3.5 sledi da je β kongruencija na $\mathcal{L}$. Jasno je da $(a, b) \in \beta$, što implicira da $con(a, b) \subseteq \beta$. Sa druge strane, neka je α proizvoljna relacija za koju važi $(a, b) \in \alpha$, i neka je $(x, y) \in \beta$, pokažimo da tada $(x, y) \in \alpha$. Iz definicija datih relacija imamo $x \vee a = y \vee a$, $x \wedge b = y \wedge b$, $(x \vee a, x \vee b) \in \alpha$ i $(x \wedge b, x \wedge a) \in \alpha$. Imajući ove osobine u vidu dalje izvodimo

$$x = x \vee (x \wedge a) = x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge (x \vee a),$$

i

$$\begin{aligned} y &= y \vee (y \wedge a) = y \vee (x \wedge a) \\ &= y \vee (x \wedge b) = (x \vee y) \wedge (y \vee b) = (x \vee y) \wedge (x \vee b), \end{aligned}$$

pa zbog $((x \vee y) \wedge (x \vee a), (x \vee y) \wedge (x \vee b)) \in \alpha$ sledi da $(x, y) \in \alpha$. Kako je α proizvoljno birano sledi da $(x, y) \in con(a, b)$, tj. važi i $\beta \subseteq con(a, b)$. ■

Posledica 3.18 *Neka je $\mathcal{L}$ distributivna mreža, $\mathcal{K}$ njena podmreža i $a, b \in K$. Tada je $con_{\mathcal{K}}(a, b) = con_{\mathcal{L}}(a, b) \cap K^2$.*

Dokaz: Direktno se proverava primenom prethodnog tvrđenja. ■

Za mrežu $\mathcal{L}$ kažemo da je **ograničena** ako i samo je ograničena kao uređen skup. U ograncičenoj mreži $\mathcal{L}$ za element x' kažemo da je **komplement** elementa x ako i samo ako je $x \vee x' = 1$ i $x \wedge x' = 0$. Za ograničenu mrežu kažemo da je **komplementirana** ako i samo ako svaki element ima komplement, dok u slučaju kada svaki element ima tačno jedan komplement kažemo da je mreža $\mathcal{L}$ **jednoznačno komplementirana**. Distributivna komplementirana mreža zove se **Bulova mreža**. Sledeće tvrđenje kaže da je Bulova mreža jedinstveno komplementirana.

Tvrđenje 3.19 *Ako element ograničene distributivne mreže ima komplement, onda je taj komplement jedinstven.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}$ ograničena distributivna mreža, $x \in L$ i x', x'' dva njegova komplementa. To znači da je

$$x \wedge x' = x \wedge x'' = 0 \quad \text{i} \quad x \vee x' = x \vee x'' = 1.$$

Odakle na osnovu distributivnog zakona dobijamo,

$$\begin{aligned} x' &= x' \wedge 1 = x \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') \\ &= (x'' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') = x'' \wedge (x \vee x') = x'' \wedge 1 = x''. \end{aligned}$$

■

Za elemenet a mreže $\mathcal{L}$ kažemo da je **atom**, **koatom** ako i samo ako je atom, koatom redom, u uređenom skupu $(L, \leq)$. Direktno se proverava da je u Bulovoj mreži komplement atoma (ako postoji) koatom, i obrnuto da je komplement koatoma (ako postoji) atom.

Poglavlje 4

Algebarske i kompletne mreže

4.1 Kompletne mreže

Za uređen skup $\mathcal{L} = (L, \leq)$ kažemo da je **kompletna mreža** (**potpuna**) ako i samo ako svaki podskup ima supremum i infimum.

Tvrđenje 4.1 *Svaka kompletna mreža je ograničena.*

Dokaz: Lako se proverava da je $\bigwedge \emptyset = 1$ i da je $\bigvee \emptyset = 0$ ■

Tvrđenje 4.2 *Neka je $(P, \leq)$ uređen skup, sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) $(P, \leq)$ je kompletna mreža;
(ii) $\bigvee A$ postoji za svaki $A \subseteq P$;
(iii) $\bigwedge A$ postoji za svaki $A \subseteq P$.

Dokaz: $(iii) \Rightarrow (ii)$ Neka je $A \subseteq P$, direktno se proverava da je

$$\bigvee A = \bigwedge A^u.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Za proizvoljno $A \subseteq P$ lako se pokazuje da je

$$\bigwedge A = \bigvee A^u.$$

Ostale implikacije trivijalno važe. ■

Tvrđenje 4.3 *Neka je* $(P, \leq)$ *uređen skup, sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) $(P, \leq)$ *je kompletna mreža;*
(ii) P *ima najmanji element i* $\bigvee A$ *postoji za svaki neprazan* $A \subseteq P$*;*
(iii) P *ima najveći element i* $\bigwedge A$ *postoji za svaki neprazan* $A \subseteq P$*.*

Dokaz: Direktna posledica prethodna dva tvrđenja. ∎

Posledica 4.4 *Neka je* X *proizvoljan skup i* $L \subseteq \mathcal{P}(X)$ *tako da važi :*
(i) $X \in L$,
(ii) $\bigcap_{i \in I} A_i \in L$ *za svaku nepraznu familiju* $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq L$*.*
Tada je $(L, \subseteq)$ *kompletna mreža u kojoj je*

$$\bigwedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

$$\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap \{B \in L \mid \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B\}.$$

Dokaz: Direktna posledica prethodnog tvrđenja. ∎

Za proizvoljno algebru $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$, uređen skup svih kongruencija je kompletna mreža. Jasno $A^2 \in Con\mathcal{A}$, dok se direktno proverava da je presek proizvoljne familije kongruencija opet kongruencija. Na isti način se pokazuje da uređen skup svih poduniverzuma date algebre čini kompletnu mrežu.

Za preslikavanje $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, gde je A proizvoljan skup kažemo da je **operator zatvaranja** na skupu A ako i samo ako za svako $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ važe sledeći uslovi :
(C_1) $X \subseteq C(X)$;
(C_2) $C(C(X)) = C(X)$;
(C_3) $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$.

Ako je C operator zatvaranja na skupu A sa A_C obeležavamo skup svih podskupova od A koji su zatvoreni u odnosu na operator C, tj. onih podskupova od A za koje važi $C(X) = X$. Jasno je da je $(A_C, \subseteq)$ jedan uređen skup, šta više važi i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 4.5 *Ako je* C *operator zatvaranja na skupu* A *tada je* $(A_C, \subseteq)$ *kompletna mreža.*

Dokaz: Na osnovu posledice 4.4 dovoljno je da pokažemo da $A \in A_C$ i da je A_C zatvoren za proizvoljne preseke nepraznih familija. Jasno je da je $C(A) \subseteq A$, pa zbog uslova (C_1) sledi da je $C(A) = A$, tj. $C(A) \in A_C$.
Neka je sada $\mathcal{F} = \{A_i \subseteq A \mid i \in I\}$ familija podskupova iz A, treba da pokažemo da je $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$. Dovoljno je da pokažemo da je $C(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$. Za svako $i \in I$ važi $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq C(A_i)$, pa sledi da je $C(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} C(A_i)$, ali $C(A_i) = A_i$ za svako $i \in I$, i time je dokaz gotov. ■

Tvrđenje 4.6 *Neka je C operator zatvaranja na A, tada za proizvoljnu familiju elemenata $\{A_i \mid i \in I\}$ iz A_C važi*

$$\bigvee\{A_i \mid i \in I\} = C(\bigcup\{A_i \mid i \in I\})$$

Dokaz: Jasno je da je $C(\bigcup_{i\in I})A_i \in A_C$ i da je isti gornje ograničenje skupa $\{A_i \mid i \in I\}$. Neka je sada $D \in A_C$ neko drugo gornje ograničenje skupa $\{A_i \mid i \in I\}$. Onda imamo $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq D$, što dalje implicira $C(\bigcup_{i\in I} A_i) \subseteq C(D) = D$. ■

Tvrđenje 4.7 *Za svaku kompletnu mrežu $\mathcal{L} = (L, \subseteq)$ postoji skup A i operator zatvaranja na njemu tako da je $(L, \subseteq) \cong (A_C, \subseteq)$.*

Dokaz: Za skup A uzmimo baš nosač mreže $\mathcal{L}$, i na $\mathcal{P}(L)$ definišimo preslikavanje $X \mapsto C(X)$ sa $C(X) = \{x \in L \mid x \leq \bigvee X\}$. Ovako definisano preslikavanje je operator zatvaranja na skupu L, uslovi C_1 i C_3 su očigledni, dok tačnost uslova C_2 sledi iz činjenice da je za proizvoljan podskup X iz L $\bigvee\{x \in L \mid x \leq \bigvee X\} = \bigvee X$. Sada se lako proverava da je preslikavanje f, definisano sa $f(x) = \downarrow x$, izomorfizam između mreža $(L, \subseteq)$ i $(L_C, \subseteq)$. ■

Ovim tvrđenjem smo uspostavili vezu izmedju kompletnih mreža i operatora zatvaranja.

Za familiju podskupova $\mathcal{F}$ nekog skupa A kažemo da je **sistem zatvaranja** ako i samo ako je $\mathcal{F}$ zatvoren za proizvoljne preseke. Direktno iz definicije sledi da $A \in \mathcal{F}$ (kao presek prazne familije), dok iz posledice 4.4 sledi da je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža. U naredna dva tvrđenja uspostavljamo vezu između operatora zatvaranja i sistema zatvaranja.

Tvrđenje 4.8 *Neka je $\mathcal{F}$ sistem zatvaranja na A, tada postoji operator zatvaranja na A čiji su zatvoreni skupovi tačno elementi familije $\mathcal{F}$.*

Dokaz: Posmatrajmo preslikavanje $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ definisano sa

$$C(X) := \bigcap \{Y \in \mathcal{F} \mid X \subseteq Y\}. \tag{4.1}$$

Ovo preslikavanje je dobro definisano jer $A \in \mathcal{F}$. Uslovi (C_1) i (C_3) slede direktno iz definicije preslikavanja C. Dokažimo da važi uslov C_2. Neka je $X \subseteq A$ Jasno ako je $C(X) = X$ da onda $X \in \mathcal{F}$. Obrnuto, ako je $X \in \mathcal{F}$ onda direktno iz definicije operatora C sledi da je $C(X) = X$, i time je dokaz gotov. ■

Tvrđenje 4.9 *Ako je C_1 operator zatvaranja na A, tada je familija svih zatvorenih skupova u odnosu na C_1 jedan sistem zatvaranja, i ako nad tim sistemom zatvaranja definišemo operator zatvaranja C kao u (4.1) dobijamo operator zatvaranja C_1 od koga smo i krenuli.*

Dokaz: Na osnovu tvrđenja 4.5 sledi da je $(A_{C_1}, \subseteq)$ kompletna mreža. Odavde direktnom proverom dobijamo da je A_{C_1} sistem zatvaranja na A. Dalje, definišimo nad tim sistemom zatvaranja, operator C kao u 4.1. Dokažimo da je $C = C_1$. Neka je $X \subseteq A$ proizvoljno dato, tada imamo

$$C(X) = \bigcap \{Y \in A_{C_1} \mid X \subseteq Y\} = \bigcap \{C_1(Y) \mid X \subseteq Y\} = C_1(X).$$

■

4.2 Algebarske mreže

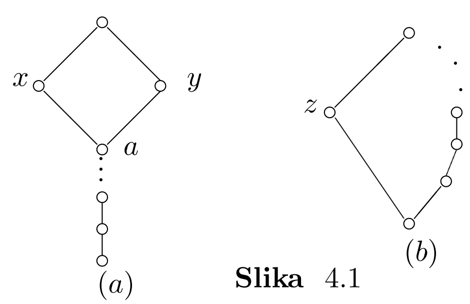
Za elemenat a mreže L kažemo da je **kompaktan** ako i samo ako je ispunjeno: iz $a \leq \bigvee A$ za proizvoljan podskup A iz L, sledi da postoji konačan podskup B skupa A, takav da je $a \leq \bigvee B$. Jasno u svakoj mreži sa najmanjim elementom, 0 je kompaktan element. Mreža je **kompaktno generisana** ako i samo ako je svaki element supremum kompaktnih elemenata. Za mrežu L kažemo da je **algebarska** ako i samo ako je kompletna i kompaktno generisana. Jasno, u algebarskoj mreži svaki element je jednak supremumu kompaktnih elemenata koji se nalaze ispod njega u odnosu na uređenje mreže. Skup svih kompaktnih elemenata u mreži $\mathcal{L}$ obeležavamo sa $\mathcal{K}(L)$.

Tvrđenje 4.10 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \leq)$ mreža i neka $c \in L$, sledeći uslovi su ekvivalentni :*
(i) c je kompaktan element;
(ii) za svaki ideal mreže $\mathcal{L}$, ako I ima supremum i $c \leq supI$, tada $c \in I$;
(iii) za svaki usmeren podskup D od L koji ima supremum, važi: ako je $c \leq supD$, tada $c \leq d$ za neko $d \in D$.

Dokaz: $(ii) \Rightarrow (i)$ Neka je $c \leq \bigvee M$ za neko $M \subseteq L$. Posmatrajmo $\overline{M} = \downarrow\{a_0 \vee a_1 \vee \cdots \vee a_n \mid a_0, \ldots, a_n \in M \text{ i } n \in \omega\}$ (najmanji ideal koji sadrži M). Sada imamo da je $c \leq \bigvee \overline{M}$, pa zbog pretpostavke sledi da $c \in \overline{M}$, tj. postoje elementi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in M$ tako da je $c \leq \bigvee\{a_0, \ldots, a_n\}$. Dakle c je kompaktan element.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je sada $c \leq I$ za neko $I \in \mathcal{I}_d(L)$. Tada zbog kompaktnosti elementa c sledi da je $c \leq \bigvee\{i_0, i_1, \ldots, i_n\}$ za neke elemente $i_0, \ldots, i_n \in I$. Iz definicije ideala sledi da $c \in I$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Neka je dato proizvoljno $I \in \mathcal{I}_d(L)$, i neka je $c \leq \bigvee I$. Pošto je I usmeren podskup od L sledi da je $c \leq i$ za neko $i \in I$. Sada iz definicje ideala sledi da $c \in I$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka je $c \leq \bigvee D$, gde je D neki usmeren podskup od L. Posmatrajmo skup $\downarrow D = \{x \in L \mid \exists d \in D \text{ i } x \leq D\}$. Jasno je da $D \subseteq \downarrow D$ i zbog usmerensoti skupa D sledi da je $\downarrow D \in \mathcal{I}_d(L)$ (šta više to je najmanji ideal koji sadrži I). Sada iz $\bigvee D \leq \bigvee \downarrow D$ sledi da $c \leq \bigvee \downarrow D$, pa zbog pretpostavke dobijamo da $c \in \downarrow D$, tj. $c \leq d$ za neko $d \in D$. ■

Tvrđenje 4.11 *Uređen skup $(\mathcal{K}(L), \subseteq)$ je sup-polumreža sa nulom.*

Dokaz: Jasno, svaka algebarska mreža ima najmanji element, i on je kompaktan. Neka su sada a i b dva kompaktna elementa mreže $\mathcal{L}$, iz $a \vee b \leq \bigvee\{c_i \mid i \in I\}$ i kompaktnosti elemenata a i b sledi da je $a \vee b \leq \bigvee\{c_i \mid i \in I_0\}$ gde je I_0 neki konačan podskup od I ■



Slika 4.1

Jasno, svaka konačna mreža je algebarska. Na slici 4.1 pod (a) je dat primer kada infimum dva kompaktna elementa ne mora biti kompaktan. Lako se vidi koristeći tvrđenje 4.10 da element a nije kompaktan. Na istoj slici pod (b) dat je primer kompletne mreže koja nije algebarska. Lako se vidi da element z nije kompaktan pa nije ni supremum kompaktnih elemenata.

Za operator zatvaranja C na skupu A kažemo da je **algebarski** ako i samo ako važi uslov:

(C_4) za svako $X \in \mathcal{P}(A)$, $C(X) = \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}$.

Rečima, zatvorenje skupa X je unija zatvorenja svih njegovih konačnih podskupova. Lako se može proveriti da je uslov (C_3) posledica uslova (C_4).

Tvrđenje 4.12 *Neka C algebarski operator zatvaranja na skupu A, tada je mreža $(A_C, \subseteq)$ algebarska.*

Dokaz: Na osnovu tvrđenja 4.5 dovoljno je da pokažemo da je $(A_C, \subseteq)$ kompaktno generisana mreža. Pokažimo da su kompaktni elementi tačno oblika $C(X)$ za neki konačan $X \subseteq A$, i odatle će trivijalno na osnovu uslova (C_4) da sledi da je svaki element iz A_C kompaktno generisan. Neka je X konačan skup, i pretpostavimo da je $C(X) \subseteq \bigvee\{A_i \mid i \in I\}$, tj $C(X) \subseteq C(\bigcup_{i\in I} A_i)$. Na osnovu C_1 i C_4 sledi da je

$$X \subseteq \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \text{ i } Y \text{ je konačan }\}.$$

Prema tome, za sve $x \in X$ postoji neki konačan podskup Y_x od $\bigcup_{i\in I} A_i$ takav da $x \in C(Y_x)$. U datim oznakama dobijamo da je $X \subseteq \{C(Y_x) \mid x \in X\}$. Iz konačnosti Y_x, sledi da za svako $x \in X$ postoji konačan indeksni skup $I_x \subseteq I$ takav da je $Y_x \subseteq \bigcup\{A_i \mid i \in I_x\}$. Uzmimo $J = \bigcup\{I_x \mid x \in X\}$. Znamo da je J konačan i da je $J \subseteq I$, i lako se proverava da je

$$C(X) \subseteq C(\bigcup\{A_j \mid j \in J\}) = \bigvee\{A_j \mid j \in J\}.$$

Ostaje još da se pokaže da ako je $C(X)$ kompaktan da je onda $C(X) = C(Z)$, za neki konačan $Z \subseteq A$. Iz činjenice da je C algebarski operator zatvaranja dobijamo da je $C(X) \subseteq \bigvee\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan }\}$. Zbog kompaktnosti $C(X)$ postoji konačna podfamilija $\{C(Y_i) \mid i \in I\}$ od $\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan }\}$ tako da je $C(X) \subseteq \bigvee\{C(Y_i) \mid i \in I\}$. Neka je sada $Z = \bigcup_{i\in I} Y_i$. Jasno je da je Z konačan, i lako se pokazuje da je $C(X) = C(Z)$. ■

Tvrđenje 4.13 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \leq)$ algebarska mreža, tada postoji skup A i algebarski operator zatvaranja C nad A, tako da je $(L, \subseteq) \cong (A_C, \subseteq)$.*

Dokaz: Za skup A uzmimo $\mathcal{K}(L)$, i definišimo preslikavanje na $\mathcal{P}(\mathcal{K}(L))$, koje svakom $X \subseteq \mathcal{K}(L)$ dodeljuje $C(X) = \{k \in \mathcal{K}(L) \mid k \leq \bigvee X\}$. Lako se proverava da je ovako definisano preslikavanje operator zatvaranja na $\mathcal{K}(L)$. Za proizvoljno $k \in C(X)$ sledi, zbog kompaktnosti k, da je $k \leq \bigvee X$, za neki konačan $Y \subseteq X$. Odavde sledi da $k \in C(Y)$. Dakle dobili smo da je

$$C(X) \subseteq \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}.$$

Inkluzija u drugom smeru je trivijalna, pa je tako ispunjen uslov C_4 i operator zatvaranja je algebarski. Sada definišemo preslikavanje $f : L \to \mathcal{K}(L)_C$ sa $f(x) = {\downarrow}x \cap \mathcal{K}(L)$. Elementarnom proverom zaključujemo da je ovo dobro definisano preslikavanje, da je bijekcija i da čuva poredak, pa je uspostavljen traženi izomorfizam i mreže $(L, \leq)$ i $(\mathcal{K}(L)_C, \subseteq)$ su izomorfne. ■

Za sistem zatvaranja na skupu A kažemo da je **algebarski sistem zatvaranja** ako i samo ako sadrži uniju svake svoje usmerene podfamilije, drugim rečima ako i samo ako je zatvoren za proizvoljne unije usmerenih podfamilija. Naredna teorema dovodi u vezu algebarske sisteme zatvaranja i algebarske operatore zatvaranja.

Tvrđenje 4.14 *Neka je $\mathcal{F}$ sistem zatvaranja na skupu A. Tada je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih skupova o odnosu na neki algebarski operator zatvaranja na A ako i samo ako je $\mathcal{F}$ algebarski sistem zatvaranja.*

Dokaz: Neka je C algebarski operator zatvaranja na A i neka je $\mathcal{F}$ odgovarajući sistem zatvaranja koji čine zatvoreni podskupovi u odnosu na taj operator. Neka je sada $\mathcal{Y} = \{Y_i \mid i \in I\}$ usmerena familija podskupova iz $\mathcal{F}$. Neka je $\bigcup \mathcal{Y} = Z$, treba pokazati da je $C(Z) = Z$. Neka je $z \in C(Z)$, pošto je C algebarski operator zatvaranja sledi da postoji konačan podskup H od Z tako da je $z \in C(H)$. Pošto je H konačan skup elemenata iz $\bigcup \mathcal{F}$, sledi da postoji neki element Y iz $\mathcal{F}$ tako da je $H \subseteq Y$, pa je i $C(H) \subseteq C(Y) = Y$, pa dobijamo da $z \in Z$. Kako znamo da je $Z \subseteq C(Z)$, sledi da je $C(Z) = Z$. Obratno, ako je sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ na A algebarski, hoćemo da pokažemo da je operator zatvaranja C definisan sa 4.1 algebarski. Pokažimo da važi $C(X) \subseteq \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}$, dok druga inkluzija trivijalno važi. Za svako $x \in X$ važi

$$x \in \{x\} \subseteq C(\{x\}) \subseteq \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\},$$

pa je $X \subseteq \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}$. Lako se proverava da je familija $\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}$ na gore usmerena familija, pa je $\bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}$ zatvoren skup, pa zbog uslova (C_3) sledi $C(X) \subseteq \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ i } Y \text{ je konačan}\}$, i time je dokaz završen. ■

Ovim tvrđenjima smo uspostavili vezu između algebarskih mreža, algebarskih operatora zatvaranja i algebarskih sistema zatvaranja. Zato ćemo u nastavku teksta često, umesto da direktno po definiciji dokazujemo da je neka familija podskupova algebarska mreža, pokazati da je ta familija algebarski sistem zatvaranja.

Posledica 4.15 *Neka je $\mathcal{S} = (S, \vee)$ sup-polumreža sa nulom, tada je uređeni skup ideala $(\mathcal{I}_d(S), \subseteq)$ algebarska mreža, i za proizvoljnu familiju ideala $\{I_j \mid j \in J\}$, važi*

$$\bigvee\{I_j \mid j \in J\} = \downarrow\bigcup\{I_j \mid j \in J\}.$$

Dokaz: Dokažimo da je $\mathcal{I}_d(S)$ algebarski sistem zatvaranja. Jasno $S \in \mathcal{I}_d(S)$, presek proizvoljne familije ideala polumreže $\mathcal{S}$ je opet ideal. Taj presek je neprazan jer svaki ideal sadrži nulu, dok se ostala dva uslova direktno proveravaju po definiciji. Dakle $\mathcal{I}_d(S)$ je jedan sistem zatvaranja. Neka je sada $\{I_j \mid j \in J\}$ usmerena familija ideala. Dokažimo da je $\bigcup\{I_j \mid j \in J\}$ ideal. Neka je $a, b \in \bigcup\{I_j \mid j \in J\}$, tada $a \in I_j$ i $b \in I_k$ za neke $j, k \in J$. Ali zbog usmerenosti date familije ideala sledi da postoji neki ideal I iz te iste familije tako da $I_j, I_k \subseteq I$, pa $a \vee b \in I \subseteq \bigcup\{I_j \mid j \in J\}$. Drugi uslov trivijalno važi pa je $\mathcal{I}_d(S)$ zatvoren za unije usmerenih familija, pa je algebarski sistem zatvaranja pa zbog tvrđenja 4.14 $(\mathcal{I}_d(S), \subseteq)$ je algebarska mreža. Pokažimo sada drugi deo dokaza. Na osnovu tvrđenja 4.6 imamo da je

$$\bigvee\{I_j \mid j \in J\} = C(\bigcup\{I_j \mid j \in J\}),$$

gde je C operator definisan kao u 4.1. Na osnovu definicije datog operatora zaključujemo da je $C(\bigcup\{I_j \mid j \in J\})$ najmanji ideal koji sadrži $\bigcup\{I_j \mid j \in J\}$. Sada na osnovu tvrđenja 3.4 sledi da je

$$C(\bigcup\{I_j \mid j \in J\}) = \downarrow\bigcup\{I_j \mid j \in J\}.$$

Time je dokaz završen. ■

Za podskup K od kompletne mreže $\mathcal{L}$ kažemo da je **kompletna podmreža** ako i samo ako za svaki neprazan podskup A od K važi $\bigvee A \in K$ i $\bigwedge A \in K$.

Teorema 4.16 *Kompletna podmreža algebarske mreže je algebarska mreža.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna algebarska mreža, neka je M njena kompletna podmreža. Na osnovu tvrđenja 4.13 i 4.14 znamo da je $\{D_a \mid a \in L\}$ algebarski sistem zatvaranja koji je izomorfan sa mrežom $\mathcal{L}$, pri čemu je D_a oznaka za $\{x \leq a \mid x \in \mathcal{K}(L)\}$. Posmatrajmo sada familiju podskupova $\{D_a \mid a \in M\}$, i pokažimo da je ona algebarski sistem zatvaranja. Neka je $\{D_a \mid a \in B\}$ za $B \subseteq M$ proizvoljna podfamilija od početne familije. Lako se proverava da je

$$\bigcap\{D_a \mid a \in B\} = D_{\bigwedge B}.$$

Neka je sada $\{D_a \mid a \in B\}$ za $B \subseteq M$ jedna usmerena familija. Pokažimo da je $\bigcup\{D_a \mid a \in B\} = D_{\bigvee B}$. Jedna inkluzija je jasna. Neka je sada dato proizvoljno $a \in M$ i $a \leq \bigvee B$. Iz kompaktnosti elementa a sledi da je $a \leq b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_n$ za neke $b_1, b_2, \ldots b_n \in B$, tj. dobijamo da $a \in D_{b_1 \vee \cdots \vee b_n}$. Zbog usmerenosti znamo da postoji neko $b \in B$ tako da je $D_{b_1}, \ldots, D_{b_n} \subseteq D_b$. Odavde sledi da je $b_1 \vee \cdots \vee b_n \leq b$, što dalje implicira $D_{b_1 \vee \cdots \vee b_n} \subseteq D_b$. Dakle $a \in D_b$ za neko $b \in B$ pa važi i druga inkluzija. Dakle $\{D_a \mid a \in M\}$ je jedan algebarski sistem zatvaranja i lako se pokazuje da je u odnosu na inkluziju on izomorfan sa kompletnom podmrežom $(M, \subseteq)$. Dakle $(M, \subseteq)$ je algebarska mreža. ∎

Posledica 4.17 *Svaki zatvoren interval algebarske mreže je algebarska mreža.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}$ algebarska mreža i neka su $u, v \in L$. Direktno se proverava da je $[u, v] = \{x \in L \mid u \leq x \leq v\}$ kompletna podmreža od $\mathcal{L}$ pa je na osnovu prethodnog tvrđenja ona i algebarska mreža. ∎

Tvrđenje 4.18 *Svaka mreža može da se potopi u neku algebarsku mrežu.*

Dokaz: Neka je data proizvoljna mreža $(L, \subseteq)$, posmatrajmo mrežu $(\mathcal{I}_d(L) \cup \{\emptyset\}, \subseteq)$. Na osnovu tvrđenja 4.15 znamo da je familija $\mathcal{I}_d(L) \cup \{\emptyset\}$ zatvorena za unije usmerenih familija. Pošto je u familju ideala uključen i prazan skup, data familija je zatvorena i za proizvoljne preseke. Dakle $\mathcal{I}_d(L) \cup \{\emptyset\}$ čini jedan algebarski sistem zatvaranja, pa je on samim tim i algebarska mreža. Posmatrajmo sada preslikavanje $F : L \to \mathcal{I}_d(L) \cup \{\emptyset\}$, definisano sa $F(x) = {\downarrow} x$. Lako se proverava da je ovo preslikavanje potapanje. ∎

U sledećem poglavlju ćemo dati dosta jači rezultat od ovog, koji će u stvari biti analogan Kejlijevoj teoremi u teoriji grupa, i kaže da se svaka mreža može potopiti u mrežu relacija ekvivalencija nad nekim skupom.

4.3 Mreža $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$

Podsetimo se da pod slabim ekvivalencijama na skupu podrazumevamo simetrične i tranzitivne relacije nad datim skupom. Po definiciji $\emptyset$ je slaba ekvivalencija. Skup svih slabih ekvivalencija na skupu A obeležavamo sa $\mathcal{E}_w(A)$. Jasno $(\mathcal{E}_w(A), \subseteq)$ je jedan uređen skup. Sledeće tvrđenje kaže da je data relacijska struktura dosta bogatija.

Tvrđenje 4.19 *Mreža $(\mathcal{E}_w(A), \subseteq)$ je algebarska za svaki skup A.*

Dokaz: Dokažimo da je $\mathcal{E}_w(A)$ algebarski sistem zatvaranja na $A \times A$. Jasno je da $A \times A \in \mathcal{E}_w(A)$. Neka je $\{\rho_i \mid i \in I\}$ familija slabih ekvivalencija tako da $\rho_i \in \mathcal{E}(B_i)$ i $B_i \subseteq A$ za $i \in I$. Direktno se proverava da $\bigcap_{i\in I} \rho_i \in \mathcal{E}(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \mathcal{E}(A)$, u slučaju da je $\bigcap_{i\in I} B_i \neq \emptyset$. Ako je pak presek datih podskupova prazan skup onda je i presek odgovarajućih slabih ekvivalencija prazan skup (koji je isto slaba ekvivalencija). Neka je sada $\mathcal{M} = \{\rho_i \mid i \in I\}$ usmerena familija slabih ekvivalencija, pri čemu za svako $i \in I$, $\rho_i \in \mathcal{E}(B_i)$, gde su B_i neki podskupovi od A. Sada se lako pokazuje da $\bigcup_{i\in I} \rho_i \in \mathcal{E}(\bigcup_{i\in I} B_i) \subseteq \mathcal{E}_w(A)$. Simetričnost je jasna, dok tranzitivnost sledi iz usmerenosti familije $\mathcal{M}$. ■

Pod relacijom ekvivalencije na nepraznom skupu A podrazumevamo refleksivne slabe ekvivalencije na A. Skup svih relacija ekvivalencije na skupu A obeležavamo sa $\mathcal{E}(A)$.

Tvrđenje 4.20 *Za svaki neprazan skup A,*

$$\mathcal{E}_w(A) = \bigcup \{\mathcal{E}(A) \mid B \in \mathcal{P}(A)\}.$$

Dokaz: Neka je $\rho \in \mathcal{E}_w(A)$ proizvoljno dato, i posmatrajmo skup

$$B_\rho = \{x \in A \mid \exists y \in A \text{ i } (x, y) \in \rho\}.$$

Na osnovu simetričnosti i tranzitivnosti relacije ρ sledi da je $\triangle_{B_\rho} \subseteq \rho$, pa $\rho \in \mathcal{E}(B_\rho)$. Obrnuta inkluzija je očigledna. ■

Tvrđenje 4.21 *U mreži slabih ekvivalencija na skupu A važe sledeća tvrđenja:*
(i) $\uparrow\Delta = \mathcal{E}(A)$;
(ii) $\downarrow\Delta \cong \mathcal{P}(A)$.

Dokaz: (i) Neka je $\rho \in \uparrow\Delta = \{\rho \in \mathcal{E}_w(A) \mid \Delta \subseteq \rho\}$. Iz $\rho \in \mathcal{E}_w(A)$ sledi da je ρ simetrična i tranzitivna relacija, dok iz $\Delta \subseteq \rho$ sledi da je i refleksivna, dakle $\rho \in \mathcal{E}(A)$. Obrnuta inkluzija je jasna.
(ii) Primetimo da je $\downarrow\Delta = \{\triangle_B \mid B \in \mathcal{P}(A)\}$. Posmatrajmo preslikavanje $F : \Delta_B \mapsto B$. Lako se pokazuje da je dato preslikavanje izomorfizam izmedju mreža $(\downarrow\Delta, \subseteq)$ i $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. ■

Tvrđenje 4.22 *Za svaki neprazan skup A mreža $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$ je algebarska.*

Dokaz: Na osnovu prethodnog tvrđenja zaključujemo da je $\mathcal{E}(A)$ zatvoren interval u mreži $(\mathcal{E}_w(A), \subseteq)$. Na osnovu tvrđenja 4.19 znamo da je mreža slabih ekvivalencija algebarska. Koristeći posledicu 4.17 zaključujemo da je mreža $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$ algebarska. ■

Tvrđenje 4.23 *Neku su ρ i θ iz $\mathcal{E}(A)$, tada je*

$$\rho \vee \theta = \rho \cup (\rho \circ \theta) \cup (\rho \circ \theta \circ \rho) \cup (\rho \circ \theta \circ \rho \circ \theta) \ldots,$$

dok je za proizvoljnu familiju $\{\rho_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{E}(A)$,

$$\bigvee\{\rho_i \mid i \in I\} = \bigcup\{\rho_{i_0} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \mid i_1, \ldots, i_k \in I, k \in \omega \setminus \{0\}\},$$

$$\bigwedge\{\rho_i \mid i \in I\} = \bigcap\{\rho_i \mid i \in I\}.$$

Dokaz: Direktno se proverava da je presek proizvoljne familije relacija ekvivalencije opet relacija ekvivalencije. Neka su dalje $\rho, \theta \in \mathcal{E}(A)$ proizvoljno dati. Obeležimo sa β relaciju $\rho \cup (\rho \circ \theta) \cup (\rho \circ \theta \circ \rho) \cup (\rho \circ \theta \circ \rho \circ \theta) \ldots$. Lako se proverava da je β relacija ekvivalencije na skupu A. Takođe jasno je da je β gornje ograničenje skupa $\{\rho, \theta\}$. Pokažimo da je to i najmanje gornje ograničenje datog skupa. Neka je dato proizvoljno $\sigma \in \mathcal{E}(A)$ sa osobinom $\rho \subseteq \sigma$ i $\theta \subseteq \sigma$. Dokažimo da je $\beta \subseteq \sigma$. Neka je dato proizvoljno $(x, y) \in \beta$. Tada po definiciji relacije β postoje $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k \in A$, bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $k = 2n$ za neko $n \in \omega$, tako da važi

$$x = z_0 \rho z_1 \sigma z_2, \ldots, z_{k-1} \sigma z_k = y.$$

Odavde direktno sledi da $(x, y) \in \theta^k = \theta \circ \theta \cdots \circ \theta = \theta$. Dakle $\beta \subseteq \sigma$, pa je $\rho \vee \theta = \beta$.

Označimo sada relaciju $\bigcup\{\rho_{i_0} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \mid i_1, \ldots, i_k \in I, k \in \omega \setminus \{0\}\}$ sa γ. Lako se proverava da $\gamma \in \mathcal{E}(A)$ i da $\gamma \in \{\rho_i \mid i \in I\}^u$. Neka je dalje dato proizvoljno $\alpha \in \{\rho_i \mid i \in I\}^u$. Sada se lako vidi da za proizvoljno $k \in \omega \setminus \{0\}$ i $i_1, \dots, i_k \in I$ važi $\rho_{i_1} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \subseteq \theta$. Dakle,

$$\bigcup \{\rho_{i_0} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \mid i_1, \dots, i_k \in I, k \in \omega \setminus \{0\}\} \subseteq \alpha$$

što dalje implicira $\bigvee \{\rho_i \mid i \in I\} = \bigcup \{\rho_{i_0} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \mid i_1, \dots, i_k \in I, k \in \omega \setminus \{0\}\}$. ■

Kao što smo pomenuli u odeljku 1.2, particija nepraznog skupa A je skup π svih nepraznih u parovima disjunktnih podskupova od A čija je unija skup A. Elemente skupa π zovemo **blokovi** ili **klase** skupa π. Blokovi čiji su elementi samo singltoni se nazivaju **trivijalni**. Ako su elementi a i b u istom bloku particije π pišemo $(a, b) \in \pi$ ili $a\pi b$. Skup svih particija na skupu A obeležavamo sa $\Pi(A)$.

Tvrđenje 4.24 *Mreža* $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$ *je izomorfna mreži* $(\Pi(A), \subseteq)$ *particija skupa* A.

Dokaz: Posmatrajmo preslikavanje $F : \mathcal{E}(A) \to \Pi(A)$ definisano sa $F(\rho) = \{[a]_\rho \mid a \in A\}$. Na osnovu tvrđenja 1.1 sledi da je F dobro definisano preslikavanje. Za proizvoljnu particiju $\{X_i \mid i \in I\} \in \Pi(A)$, definišimo relaciju ρ na skupu A sa: $(x, y) \in \rho$ ako i samo ako postoji $i \in I$ tako da $x, y \in X_i$. Lako se pokazuje da je ρ relacija ekvivalencije i da je $F(\rho) = \{X_i \mid i \in I\}$. Po definiciji se proverava da je preslikavanje F potapanje pa sledi da su date mreže izomorfne. ■

Sledeća lema sledi direktno iz definicije particije i prethodno dokazanih tvrđenja.

Lema 4.25 (i) *Mreža* $(\Pi(A), \subseteq)$ *je algebarska i*

$$(x, y) \in \bigwedge \{\pi_i \mid i \in I\}$$

ako i samo ako $(x, y) \in \pi_i$ *za svako* $i \in I$*;*

$$(x, y) \in \bigwedge \{\pi_i \mid i \in I\}$$

ako i samo ako postoje $n \in \omega$*,* $i_0, \dots, i_n \in I$ *i* $x_0, \dots, x_{n+1} \in A$*, tako da* $x = z_0, y = x_{n+1}$*, i* $(x_j, x_{j+1}) \in \pi_{i_j}$ *za svako* $0 \leq j \leq n$*.*
Nula u datoj mreži ima samo trivijalne blokove, dok jedinica ima tačno jedan blok.

(ii) Atomi u mreži $(\Pi(A), \subseteq)$ *su particije sa tačno jednim netrivijalnim blokom, i taj blok ima tačno dva elementa. Koatomi date mreže su particije sa tačno dva bloka.*
(iii) u mreži $(\Pi(A), \subseteq)$, $\pi_1 \prec \pi_2$ *ako i samo ako se* π_2 *dobija tako što se dva bloka od* π_1 *zamene sa njihovom unijom.*

Za elemente a i b mreže $\mathcal{L}$ kažemo da su **perspektivni**, u oznaci $a \sim b$ ako i samo ako postoji element $c \in L$ sa osobinom

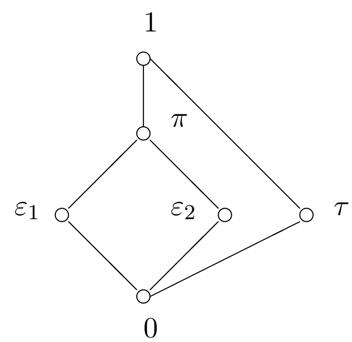
$$a \wedge c = b \wedge c = 0 \quad \text{i} \quad a \vee c = b \vee c.$$

Teorema 4.26 *Mreža* $(\Pi(A), \subseteq)$ *je prosta za svaki neprazan skup* A.

Dokaz: Dokažimo prvo da su u mreži $(\Pi(A), \subseteq)$ svaka dva (različita) atoma perspektivna. Neka su π_1 i π_2 atomi i neka su $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ redom njihovi netrivijalni blokovi. Ako je $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ posmatrajmo particiju $\tau = \{\{a, c\}, A \setminus \{a, c\}\}$. Sada se lako proverava da je $\pi_1 \wedge \tau = \pi_2 \wedge \tau = 0$ i $\pi_1 \vee \tau = \pi_2 \vee \tau = 1$. Ako je pak $\{a, b\} \cap \{c, d\} = e$ onda uzimamo particiju $\tau = \{\{e\}, A \setminus \{e\}\}$, i opet se lako proverava da je $\pi_1 \wedge \tau = \pi_2 \wedge \tau = 0$ i $\pi_1 \vee \tau = \pi_2 \vee \tau = 1$.
Pretpostavimo da je A konačan skup. Uzmimo $\alpha \in Con(\Pi(A))$ sa osobinom $\alpha \neq 0$. Tada postoji $(\pi_1, \pi_2) \in \alpha$ gde je $\pi_1 < \pi_2$. Neka je q_1 atom sa osobinom $q_1 \leq \pi_2$ i $q_1 \not\leq \pi_2$. Odavde dobijamo da $(0, q_1) \in \alpha$, ali pošto su svi atomi perspektivni dobijamo da ako su $\{q_1, \ldots, q_n\}$ svi atomi, da $(0, q_i) \in \alpha$ za svako $1 \leq i \leq n$. Očigledno je da $q_1 \vee \cdots \vee q_n = 1$, pa dobijamo da $(0, 1) \in \alpha$.
Neka je sada A beskonačan skup, i neka je $\alpha \in Con(\Pi(A))$ sa osobinom $\alpha \neq 0$. Kao u konačnom slučaju zaključujemo da za svaki atom $q \in \Pi(A)$ važi $(0, q) \in \alpha$. Pošto je A beskonačan skup možemo da izvršimo particiju $\{A_0, A_1\}$ tako da su A_0 i A_1 iste kardinalnosti. Neka je φ bijekcija između A_0 i A_1. Dalje posmatrajmo sledeće particije na skupu A. Neka je $\pi = \{A_0, A_1\}$, neka je τ particija čiji su blokovi oblika $\{x, \varphi(x)\}$ gde $x \in A_0$, i na kraju neka su ε_0 i ε_1 particije čiji su jednini netrivijalni blokovi redom A_0 i A_1. Lako se pokazuje da date particije čine podmrežu od $\Pi(A)$ (pogledati sliku 4.2). Neka je dalje q atom sa osobinom $q \leq \tau$ i $q \not\leq \pi$. Iz $(q, 0) \in \alpha$ sledi, pošto je π koatom, da $(1, \pi) \in \alpha$. Dalje zaključujemo da $(a \wedge \tau, \pi \wedge \tau) = (\tau, 0) \in \alpha$. Odavde dalje izvodimo da $(1, \varepsilon_0) \in \alpha$ i $(1, \varepsilon_1) \in \alpha$. Ali ovo implicira da $(1, \varepsilon_0 \wedge \varepsilon_0) = (1, 0) \in \alpha$. ■

Posledica 4.27 *Mreža* $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$ *je prosta za svaki skup* A.

Dokaz: Direktno sledi na osnovu tvrđenja 4.24 i 4.26. ■



Slika 4.2. Particije iz dokaza teoreme 4.26

P. M. Whiteman [53] je 1946 dokazao da se svaka mreža može potopiti u mrežu relacija ekvivalencija nekog skupa. B. Jónsson [17] 1953 nalazi lakši dokaz koji daje malo jači rezultat. U nastavku teksta dajemo dokaz tog rezultata, ali pre dokaza glavne teoreme uvodimo neke pojmove i dokazujemo dve leme.

Pod **reprezentacijom** mreže $\mathcal{L} = (L, \leq)$ podrazumevamo uređen par (X, F) gde je X skup a $F : L \to \mathcal{E}(X)$ mrežno potapanje. Za reprezentaciju (X, F) kažemo da je

(i) **tipa 1** ako i samo ako je $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y)$ za sve $x, y \in L$

(ii) **tipa 2** ako i samo ako je $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y) \circ F(x)$ za sve $x, y \in L$

(iii) **tipa 3** ako i samo ako je $F(x) \vee F(y) = F(x) \circ F(y) \circ F(x) \circ F(y)$ za sve $x, y \in L$.

Pod **slabom reprezentacijom** mreže $(L, \leq)$ podrazumevamo uređen par (U, F) gde je U neprazan skup i $F : L \to \mathcal{E}(U)$ injektivni $\wedge$- homomorfizam. Slabe reprezentacije mreže $\mathcal{L}$ možemo urediti na sledeći način :

$(U, F) \sqsubseteq (V, G)$ ako i samo ako $U \subseteq V$ i $G(x) \cap U^2 = F(x)$ za svako $x \in L$.

Ideja dokaza je da konstruišemo niz $(U_\xi, F_\xi)_{\xi<\lambda}$ slabih reprezentacija mreže $\mathcal{L}$, sa osobinom $(U_\alpha, F_\alpha) \sqsubseteq (U_\beta, F_\beta)$ kad god je $\alpha \leq \beta$, tako da unija bude potapanje iz mreže L u $\mathcal{E}(\bigcup_{\xi<\lambda} U_\xi)$. Primer slabe reprezentacije sa kojom možemo početi konstrukciju je (U_0, F_0), gde je $U_0 = L$ i $(y, z) \in F_0(x)$ ako i samo ako $y = z$ ili $y \vee z \leq x$.

Lema 4.28 *Neka je (U, F) slaba reprezentacija mreže $\mathcal{L}$ i neka $(p, q) \in F(x \vee y)$, tada postoji slaba reprezentacija $(V, G) \sqsupseteq (U, F)$ tako da $(p, q) \in G(x) \circ G(y) \circ G(x) \circ G(y)$.*

Dokaz: Neka je skup V dobijen dodavanjem tri nova elementa u skup U, tj. $V = U \cup \{r, s, t\}$ pri čemu $r, s, t \notin U$. Hoćemo da definišemo preslikavanje $G : L \to \mathcal{E}(V)$ koje će predstavljati ekstenziju početne slabe reprezentacije sa osobinom

$$pG(x)rG(y)sG(x)tG(q)$$

Za proizvoljno $z \in L$ definišimo relaciju $G(z)$ na V tako da bude refleksivna i simetrična i da za proizvoljne $u, v \in U$ zadovoljava sledeće uslove :
(1) $uG(z)v$ ako i samo ako $uF(z)v$;
(2) $uG(z)r$ ako i samo ako $z \geq x$ i $uF(z)p$;
(3) $uG(z)t$ ako i samo ako $z \geq y$ i $uF(z)q$;
(4) $rG(z)s$ ako i samo ako $z \geq y$;
(5) $sG(z)t$ ako i samo ako $z \geq x$;
(6) $rG(z)t$ ako i samo ako $z \geq x \vee y$;
(7) $uG(z)s$ ako i samo ako $z \geq x \vee y$ i $uF(z)p$.

Dokaz da je ovako definisana relacija tranzitivna je rutinski ali zahteva dosta ispisivanja tako da ćemo ga izostaviti i samo ćemo naglasiti da se dokaz sastoji iz četri slučaja u zavisnosti da li je $z \geq x$ i $z \geq y$.

Uslov (1) na kaže da je $G(z) \cap U^2 = F(z)$. Pošto je F injektivno preslikavanje sledi da je G isto injektivno. Direktnom primenom uslova $(1) - (7)$ lako se proverava da je $G(z_1 \wedge z_2) = G(z_1) \wedge G(z_2)$. Dakle (V, G) je slaba reprezentacija sa osobinom $(U, F) \sqsubseteq (V, G)$, i jasno važi $(p, q) \in G(x) \circ G(y) \circ G(x) \circ G(y)$. ■

Lema 4.29 *Neka je λ granični ordinal, i neka je za svako $\xi < \lambda$ (U_ξ, F_ξ), slaba reprezentacija od $(L, \leq)$, i važi da iz $\alpha < \beta < \lambda$ sledi $(U_\alpha, F_\alpha) \sqsubseteq (U_\beta, F_\beta)$. Neka je $V = \bigcup_{\xi<\lambda} U_\xi$ i $G(x) = \bigcup_{\xi<\lambda} F_\xi(x)$ za svako $x \in L$. Tada je (V, G) slaba reprezentacija od $\mathcal{L}$ i važi da je $(U_\xi, F_\xi) \sqsubseteq (V, G)$ za svako $\xi < \lambda$.*

Dokaz: Lako se proverava da je G dobro definisana funkcija, tj da $G(x) \in \mathcal{E}(V)$ za svako $x \in L$. Neka je $\xi < \lambda$. Pošto je λ granični ordinal i za svako

$\alpha < \xi$ važi $F_\alpha = F_\xi(x) \cap U_\alpha^2 \subseteq F_\xi(x)$ i $F_\xi(x) = F_\beta(x) \cap U_\xi^2$ kad god je $\beta \geq \xi$, za svako $x \in L$ imamo

$$\begin{aligned} G(x) \cap U_\xi^2 &= (\bigcup_{\gamma<\lambda} F_\gamma(x)) \cap U_\xi^2 \\ &= \bigcup_{\gamma<\lambda} (F_\gamma(x) \cap U_\xi^2) \\ &= F_\xi(x). \end{aligned}$$

Dakle važi da je $(U_\xi, F_\xi) \sqsubseteq (V, G)$. Zbog date inkluzije i činjenice da je F_0 injektivno preslikavanje, sledi da je G isto injekcija. Ostaje da pokažemo da je G $\wedge$-homomorfizam. Jasno je da je G monotono preslikavanje pa važi da je za svako $x, y \in L$, $G(x \wedge y) \subseteq G(x) \cap G(y)$. Za proizvoljno $(u, v) \in G(x) \cap G(y)$ možemo naći $\gamma < \lambda$ tako da $(u, v) \in F_\gamma(x) \cap F_\gamma(y)$, ali pošto je $F_\gamma(x) \cap F_\gamma(y) = F_\gamma(x \wedge y) \subseteq G(x \wedge y)$, sledi $G(x) \cap G(y) \subseteq G(x \wedge y)$. ■

Teorema 4.30 *Svaka mreža ima reprezentaciju tipa 3.*

Dokaz: Počnimo sa proizvoljnom reprezentacijom (U_0, F_0) mreže $\mathcal{L}$. Posmatrajmo skup svih uređenih četvorki (p, q, x, y) gde $p, q \in U_0$, $x, y \in L$ i $(p, q) \in F_0(x \vee y)$. Primenom princip dobrog uređenja dobijamo skup $\{(p_\xi, q_\xi, x_\xi, y_\xi) \mid \xi < \eta\}$. Sada uzastopnom primenom lema 4.28 i 4.29 i transfinitne rekurzije dobijamo niz slabih reprezentacija $\{(U_\xi, F_\xi) \mid \xi \leq \eta\}$ sa sledećim osobinama :

(1) ako je $\xi < \eta$ tada je $(U_\xi, F_\xi) \sqsubseteq (U_{\xi+1}, F_{\xi+1})$ i $(p_\xi, q_\xi) \in F_{\xi+1}(x_\xi) \circ F_{\xi+1}(y_\xi) \circ F_{\xi+1}(x_\xi) \circ F_{\xi+1}(y_\xi)$;

(2) ako je $\lambda \leq \eta$ granični ordinal, tada je $U_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} U_\xi$ i $F_\lambda(x) = \bigcup_{\xi<\lambda} F_\xi(x)$ za svako $x \in L$.

Neka je sada $V_1 = U_\eta$ i $G_1 = F_\eta$. Neka su $x, y \in L$ i $p, q \in U_0$ proizvoljno dati i neka je $pF_0(x \vee y)q$, tada je $(p, q, x, y) = (p_\xi, q_\xi, x_\xi, y_\xi)$ za neko $\xi < \eta$ pa sledi da $(p, q) \in F_{\xi+1}(x_\xi) \circ F_{\xi+1}(y_\xi) \circ F_{\xi+1}(x_\xi) \circ F_{\xi+1}(y_\xi)$. Dakle dobili smo da je $F_0(x \vee y) \subseteq G_1(x) \circ G_1(y) \circ G_1(x) \circ G_1(y)$ i jasno važi $(U_0, F_0) \sqsubseteq (V_1, G_1)$. U procesu transfinitne rekurzije najverovatnije smo dobili dosta elemenata koji ne zadovoljavaju $\vee$-svojstvo. Kako bi to popravili prethodni postupak ponavljamo ω puta (opet koristimo transfinitnu rekurziju), i dobijamo sledeći niz :

$$(U_0, F_0) = (V_0, G_0) \sqsubseteq (V_1, G_1) \sqsubseteq (V_2, G_2) \sqsubseteq \ldots$$

koji ima osobinu da za svako $n \in \omega$, $x, y \in L$, $G_n(x \vee y) \subseteq G_{n+1}(x) \circ G_{n+1}(y) \circ G_{n+1}(x) \circ G_(n+1)(y)$. Konačno uzimamo $W = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ i $H(x) = \bigcup_{n\in\omega} G_n(x)$ za svako $x \in L$, tada je (W, G) reprezentacija tipa 3 mreže $\mathcal{L}$. ■

Poglavlje 5

Posebni elementi u mreži

5.1 Osnovni pojmovi

Element a mreže $\mathcal{L}$ je **kodistributivan** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y).$$

Element a mreže $\mathcal{L}$ je **distributivan** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

Sledeća teorema predstavlja karakterizaciju kodistributivnog elementa.

Tvrđenje 5.1 *Neka je a element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni :*
(i) a je kodistributivan ;
(ii) preslikavanje $m_a : L \to {\downarrow}a$ definisano sa $m_a(x) = a \wedge x$ je mrežni homomorfizam;
(iii) binarna relacija θ_a definisana sa : $(x, y) \in \theta_a$ ako i samo ako $a \wedge x = a \wedge y$, je kongruencija na $\mathcal{L}$.

Dokaz: $(i) \Rightarrow (ii)$ Jasno da je funkcija m_a dobro definisana. Pošto je a kodistributivan važe sledeće jednakosti :

$$m_a(x \vee y) = a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) = m_a(x) \vee m_a(y).$$

$$m_a(x \wedge y) = a \wedge (x \wedge y) = (a \wedge x) \wedge (a \wedge y) = m_a(x) \wedge m_a(y).$$

Otuda je m_a homomorfizam.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Relacija θ_a je jezgro homomorfizma m_a pa je zato kongruencija

na L.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Iz definicije kongruencije θ_a sledi $x\theta_a(a \vee x)$ i $y\theta_a(a \vee y)$, pa je na osnovu saglasnosti kongruencije sa $\wedge$

$$(x \wedge y)\theta_a(a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

Pa ponovo po definiciji relacije θ_a sledi

$$a \vee (x \wedge y) = a \vee ((a \vee x) \wedge (a \vee y)) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

■

Za svaki element x iz mreže $\mathcal{L}$, sa L_x obeležimo njegovu klasu u odnosu na relaciju m_a. Sada dobijemo:

$$L_x = \{y \in L \mid a \wedge y = a \wedge x\} = \{y \in L \mid a \wedge y = a \wedge (a \wedge x)\} = L_{x \wedge a}.$$

Svaka, dakle, klasa L_x može se videti kao klasa nekog elementa b iz $\downarrow a$. Za svako $x \in L_b$, važi $a \wedge x = a \wedge b = b$, pa imamo da je $b \leqslant x$. Stoga je $b \in \downarrow a$ najmanji element u svojoj klasi, a nosač L možemo predstaviti kao disjunktnu uniju klasa elemenata iz $\downarrow a$:

$$L = \bigcup \{L_b \mid b \in \downarrow a\}.$$

Na osnovu tvrđenja 3.6 znamo da klase čine podmreže polazne mreže. One imaju najmanji element, ali ne moraju imati najveći. Najveći element u klasi elementa x ako postoji obeležavaćemo sa $\overline{x}$. U tom slučaju je $L_x = [a \wedge x, \overline{x}]$.

Za disributivne elemente važi slična karakterizacija.

Tvrđenje 5.2 *Neka je a element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni :*
(i) a je distributivan ;
(ii) preslikavanje $n_a : L \to \uparrow a$ definisano sa $n_a(x) = a \vee x$ je mrežni homomorfizam;
(iii) binarna relacija θ_a definisana sa : $(x, y) \in \theta_a$ ako i samo ako $a \vee x = a \vee y$, je kongruencija na $\mathcal{L}$.

Dokaz: Dokaz je analogan onom u prethodnom tvrđenju. ■

Element a mreže $\mathcal{L}$ je **neutralan** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi :

$$(x \wedge y) \vee (a \wedge y) \vee (a \wedge x) = (a \vee y) \wedge (a \vee x) \wedge (x \vee y).$$

Element a mreže $\mathcal{L}$ je **skrativ** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi sledeća implikacija:

$$iz \quad x \wedge a = y \wedge a \quad i \quad x \vee a = y \vee a \quad sledi \quad x = y.$$

Element a je **modularan** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi sledeća implikacija :

$$Iz \quad a \leq y \quad sledi \quad a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge y.$$

Tvrđenje 5.3 *Neka je a element mreže $\mathcal{L}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) a je neutralan ;
(ii) a je distributivan, kodistributivan i skrativ;
(iii) $\mathcal{L}$ se može potopiti u direktan proizvod $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, gde je $\mathcal{M}$ mreža sa jedinicom (1) a $\mathcal{N}$ mreža sa nulom (0), tako da se a preslikava u par (1,0);
(iv) za proizvoljne $x, y \in L$, elementi a, x i y generišu distributivnu podmrežu mreže $\mathcal{L}$.

Dokaz: $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je a neutralan element mreže $\mathcal{L}$. Dokažimo prvo da je a modularan element. Neka je $a \leq y$, tada na osnovu definicije neutralnog elementa i višestruke primene zakona apsorpcije sledi

$$a \vee (x \wedge y) = (x \wedge y) \vee (a \wedge y) \vee (a \wedge x) = (a \vee y) \wedge (a \vee x) \wedge (x \vee y) = (a \vee x) \wedge y$$

Dakle a je modularan element mreže $\mathcal{L}$. Sada tu modularnost koristimo da bi pokazali da je a distributivan element.

$$\begin{aligned} a \vee (x \wedge y) &= a \vee (x \wedge y) \vee (a \wedge y) \vee (a \wedge x) \\ &= a \vee ((a \vee y) \wedge (a \vee x) \wedge (x \vee y)) \\ &= (a \vee y \vee x) \wedge (a \vee x) \wedge (a \vee y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y); \end{aligned}$$

Dakle a je distributivan, na dualan način se pokazauje da je a i kodistributivan. Neka je sada $x \vee a = y \vee a$ i $x \wedge a = y \wedge a$. Tada je

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a \vee y) \wedge (a \vee x) \wedge (x \vee y) \\ &= x \wedge ((x \wedge y) \vee (a \wedge y) \vee (a \wedge x)) \\ &= x \wedge ((x \wedge y) \vee (a \wedge x)) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \\ &= (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a). \end{aligned}$$

Isto se dobija polazeći od elementa y, pa je $x = y$, dakle a je i skrativ element.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Pošto je a kodistributivan i distributivan element na osnovu tvrđenja 5.1 i 5.2 sledi da je preslikavanje $f : x \mapsto (x \wedge a, x \vee a)$ homomorfizam iz L u $\downarrow a \times \uparrow a$. Pošto je a skrativ dato prelikavanje je injekcija, dakle potapanje. Najzad, kako je $f(a) = (a, a)$ sledi da je i poslednji zahtev ispunjen, pošto je a najveći element u $\downarrow a$, a najmanji u $\uparrow a$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Na osnovu pretpostavke znamo da je $\mathcal{L}$ do na izomorfizam jednaka podmreži direktnog proizvoda $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ tako da se a slika u $(0, 1)$. Jasno je da u mrežama $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, skupovi $\{1, x, y\}$, $x, y \in M$ i $\{0, u, v\}$, $u, v \in U$, redom generišu distributivne podmreže. Odavde neposredno sledi da skup $\{(1, 0), (x, u), (y, v)\}$ generiše distributivnu podmrežu u $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ što implicira da a, x i y generišu distributivnu podmrežu u $\mathcal{L}$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Na osnovu tvrđenja 3.16 znamo da na svakoj distributivnoj mreži važi zakon medijane. ■

Posledica 5.4 *Element a mreže $\mathcal{L}$ je neutralan ako i samo ako je preslikavanje $x \mapsto (x \vee a, x \wedge a)$, iz L u $\downarrow a \times \uparrow a$, potapanje.*

Dokaz: Sledi direktno iz dokaza $(ii) \Rightarrow (iii)$ prethodnog tvrđenja. ■

Centar ograničene mreže $\mathcal{L}$ je skup neutralnih elementa iz $\mathcal{L}$ koji imaju komplemente.

Posledica 5.5 *Element a mreže $\mathcal{L}$ se nalazi u centru ako i samo ako je preslikavanje $x \mapsto (x \vee a, x \wedge a)$, iz $\mathcal{L}$ u $\downarrow a \times \uparrow a$, izomorfizam.*

Dokaz: Na osnovu posledice 5.4 sledi da je preslikavanje $x \mapsto (x \vee a, x \wedge a)$, iz $\mathcal{L}$ u $\downarrow a \times \uparrow a$ potapanje, dok je proizvoljan element $(u, v) \in \downarrow a \times \uparrow a$ slika elementa $(u \vee a') \wedge v$, gde je a' komplement od a. Obrnuta implikacija je direktna posledica posledice 5.4. ■

Element a je **kostandardan** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi :

$$x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge (x \vee y).$$

Element a je **standardan** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi :

$$x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y).$$

Tvrđenje 5.6 *U proizvoljnoj mreži $\mathcal{L}$, svaki standardan element je i distributivan.*

Dokaz: Neka je $a \in L$ standardan element. Sada koristeći pretpostavku imamo,

$$\begin{aligned}(a \vee x) \wedge (a \vee y) &= (a \wedge (a \vee y)) \vee (x \wedge (a \vee y)) \\ &= a \vee (x \wedge (a \vee y)) = a \vee ((x \wedge a) \vee (x \wedge y)) \\ &= a \vee (x \wedge y).\end{aligned}$$

■

Tvrđenje 5.7 *Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna mreža. Element $a \in L$ je standardan ako i samo ako je distributivan i skrativ.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je element a iz L standardan, na osnovu 5.6 znamo da je onda a distributivan, pa ostaje preostaje da pokažemo da je skrativ. Neka su $x, y \in L$ i neka je $x \vee a = y \vee a$ i $x \wedge a = y \wedge a$. Sada dobijamo sledeće,

$$\begin{aligned}x &= x \wedge (x \vee a) \\ &= x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) \\ &= (x \wedge y) \vee (y \wedge a) = (x \vee a) \wedge y \\ &= (y \vee a) \wedge y = y.\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je a skrativ i distributivan i dokažimo da je onda i standardan. Dovoljno je da pokažemo da je

$$(x \wedge (y \vee a)) \vee a = ((x \wedge y) \vee (x \wedge a)) \vee a \quad i \quad (x \wedge (y \vee a)) \wedge a = ((x \wedge y) \vee (x \wedge a)) \wedge a.$$

Koristeći distributivnost i zakon apsorpcije dobijamo,

$$(x \wedge (y \vee a)) \vee a = (a \vee x) \wedge (a \vee y) = a \vee (x \wedge y) = ((x \wedge y) \vee (x \wedge a)) \vee a.$$

Pošto je $x \wedge (a \vee y) \wedge a = x \wedge a$, pokažimo da je

$$((x \wedge y) \vee (x \wedge a)) \wedge a = x \wedge a.$$

Kako je $(x \wedge a) \vee (x \wedge y) \leq x$, sledi $((x \wedge y) \vee (x \wedge a)) \wedge a \leq x \wedge a$. Sa druge strane kako je $x \wedge a \leq a$ i $x \wedge a \leq ((x \wedge y) \vee (x \wedge a))$ dobijamo $x \wedge a \leq ((x \wedge y) \vee (x \wedge a)) \wedge a$. ■

Sledeće tvrđenje se pokazuje na sličan način kao prethodno.

Tvrđenje 5.8 *Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna mreža. Element $a \in L$ je kostandardan ako i samo ako je kodistributivan i skrativ.*

Element a je **s-modularan** ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi sledeća implikacija :

$$Iz \quad x \leq y \quad sledi \quad x \vee (a \wedge y) = (a \vee x) \wedge y.$$

Tvrđenje 5.9 *Neka je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(i) a je skrativ;
(ii) a je s-modularan;
(iii) a je kostandardan;
(iv) za sve $x, y \in L$, ako je $x \leq \overline{y}$, tada $x \vee (a \wedge \overline{y}) = (x \vee a) \wedge \overline{y}$;
(v) za sve $x \in L$ postoji $y \in {\uparrow}a$ tako da je $y \wedge \overline{x} = x$.

Dokaz: $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je $x \leq y$, zbog skrativosti elementa a dovoljno je da pokažemo da je $x \vee (a \wedge y) \vee a = ((x \vee a) \wedge y) \vee a$ i $x \vee (a \wedge y) \wedge a = ((x \vee a) \wedge y) \wedge a$. Jasno je da je $x \vee (a \wedge y) \vee a = x \vee a$. Iz $x \leq y$ i $x \leq x \vee a$ sledi $x \leq (x \vee a) \wedge y$, što dalje implicira $x \vee a \leq ((x \vee a) \wedge y) \vee a$, obrnuta nejednakost sledi iz uslova $a \leq x \vee a$ i $(x \vee a) \wedge y \leq x \vee a$. Sa druge strane zbog kodistributivnosti elementa a dobijamo $x \vee (a \wedge y) \wedge a = (x \wedge a) \vee (a \wedge y) = y \wedge a$ dok je jasno $((x \vee a) \wedge y) \wedge a = a \wedge y$. Dakle element a je s-modularan.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Treba da pokažemo da je $x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge (x \vee y)$. Zbog redom, zakona apsorpcije, kodistributivnosti i s-modularnosti dobijamo $x \vee (a \wedge y) = x \vee (a \wedge y) \vee (a \wedge x) = x \vee (a \wedge (x \vee y)) = (x \vee a) \wedge (x \vee y)$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sledi direktno iz pretpostavki.
$(iv) \Rightarrow (v)$ Neka je $x \in L$. Tada $x \vee a \in {\uparrow}a$, i važi $(x \vee a) \wedge \overline{x} = x \vee (a \wedge \overline{x}) = x$.
$(v) \Rightarrow (i)$ Dokaz dajemo metodom kontrapozicije. Pretpostavimo da a nije skrativ. Tada postoje $x, y \in L$ tako da je $x \wedge a = y \wedge a$ i $x \neq y$. Neka je $x < y$ (ako su x i y neuporedivi možemo posmatrati x i $x \vee y$, koji zadovoljavaju iste uslove). Sada imamo,

$$(x \vee a) \wedge \overline{x} = (y \vee a) \wedge \overline{x} \geq y > x.$$

Ako bi sada za neko $y \in {\uparrow}a$ važilo $y \wedge \overline{x} = x$, onda bi dobili

$$x \leq (x \vee a) \wedge \overline{x} \leq y \wedge \overline{x} = x,$$

što je kontradikcija. Znači postoji $x \in L$ tako da je za svako $y \in {\uparrow}a$ $y \wedge \overline{x} \neq x$.
■

Tvrđenje 5.10 *Neka je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$ i neka klase kongruencije generisane sa m_a imaju najveće elemente, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna :*
(i) a je modularan i skrativ;
(ii) za svako $x \in {\downarrow}a$, preslikavanje $y \mapsto y \vee a$ je izomorfizam između intervala $[x, \overline{x}]$ i $[a, \overline{x} \vee a]$.

Dokaz: $(i) \Rightarrow (ii)$ Jasno je da je preslikavanje dobro definisano. Neka je $z \in [a, \overline{x} \vee a]$ proizvoljno dato. Pošto je a modularan element imamo $(z \wedge \overline{x}) \vee a = z \wedge (\overline{x} \vee a) = z$ i kako je $z \wedge \overline{x} \in [x, \overline{x}]$ sledi da je preslikavanje sirjektivno.

Neka su dalje dati $y, z \in [x, \overline{x}]$, takvi da $y \vee a \leq z \vee a$. tj. ekvivalentno $(z \vee a) \wedge (y \vee a) = y \vee a$. Zbog modularnosti elementa a sledi da je $((y \vee a) \wedge z) \vee a = y \vee a$. Pošto trivijalno važi $((y \vee a) \wedge z) \wedge a = y \wedge a$, zbog skrativosti elementa a sledi $(y \vee a) \wedge z = y$, što implicira $y \leq z$. Pošto jasno iz $y \leq z$ sledi $y \vee a \leq z \vee a$, dobili smo da je dato preslikavanje potapanje, i pokazali smo da je i sirjekcija pa sledi da je izomorfizam.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Neka su da ti $y, z \in L$ tako da je $y \wedge a = z \wedge a$ i $y \vee a = z \vee a$. Iz $y \wedge a = z \wedge a$ zaključujemo da postoji neko $x \in {\downarrow}a$ tako da $y, z \in [x, \overline{x}]$. Sada iz $y \vee a = z \vee a$ i činjenice da je preslikavanje iz pretpostavke injektivno dobijamo $y = z$. Dakle element a je skrativ.

Neka je $a \leq z$, $y \in L$, i neka $x \in {\downarrow}a$ tako da $y \in [x, \overline{x}]$. Pošto $(a \vee y) \wedge z \in [a, \overline{x} \vee a]$, zbog (ii) sledi da postoji $y \in [x, \overline{x}]$ tako da je $t \vee a = (a \vee y) \wedge z$. Dalje dobijamo

$$\begin{aligned}(a \vee y) \wedge z = (a \vee x) \wedge ((a \vee y) \wedge z) = (a \vee y) \wedge (a \vee t) = a \vee (y \wedge t) \leq \\ \leq a \vee (y \wedge (t \vee a)) = a \vee (y \wedge (a \vee y) \wedge z) = a \vee (y \wedge z).\end{aligned}$$

Kako druga nejednakost važi u svakoj mreži sledi da je a modularan element. ■

Tvrđenje 5.11 *Neka je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$ i neka klase kongruencije generisane sa m_a imaju najveće elemente. Tada je a neutralan ako i samo ako za svako $x, y \in L$ važi :*
(i) preslikavanje $z \mapsto z \vee a$ je izomorfizam između $[x, \overline{x}]$ i $[a, \overline{x} \vee a]$;
(ii) $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee a = (\overline{x} \vee a) \wedge (\overline{y} \vee a)$.

Dokaz: Ako je a neutralan element tada uslov (i) sledi na osnovu prethodnog tvrđenja, dok uslov (ii) sledi na osnovu distributivnosti elementa a.

Sa druge strane iz (i) i prethodnog tvrđenja sledi da je a modularan i skrativ element. Neka su $x, y \in L$ proizvoljno dati. Na osnovu tvrđenja 5.9 i skrativosti elementa a postoje elementi $c, d \in \uparrow a$ tako da je $\overline{y} \wedge d = y$ i $\overline{x} \wedge c = x$. Sada na osnovu modularnosti elementa a i uslova (ii) dobijamo,

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee a &= (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge c \wedge d) \vee a \\ &= (c \wedge d) \wedge ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee a) \\ &= (c \wedge d) \wedge (\overline{x} \vee a) \wedge (\overline{y} \vee a) \\ &= (c \wedge (\overline{x} \vee a)) \wedge (d \wedge (\overline{y} \vee a)) \\ &= ((c \wedge \overline{x}) \vee a) \wedge ((d \wedge \overline{y}) \vee a) \\ &= (x \vee a) \wedge (y \vee a).\end{aligned}$$

Dakle element a je distributivan, kodistribtuivan i skrativ pa na osnovu tvrđenja 5.3 sledi da je neutralan. ■

Za element a mreže $\mathcal{L}$ kažemo da je **izuzetan** ako i samo je neutralan i klase kongruencije generisane sa m_a imaju najveće elemente, koji formiraju podmrežu M_a od $\mathcal{L}$.

Posledica 5.12 *Neka je $\mathcal{L}$ mreža, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
(i) *a je izuzetan element;*
(ii) 1) *Preslikavanje $n_a : x \mapsto x \vee a$ gde $x \in \downarrow a$, je izomorfizam između $[x, \overline{x}]$ i $[a, a \vee \overline{x}]$;*
2) *Za $x \in \downarrow a$, preslikavanje $f_a : x \mapsto \overline{x} \vee a$ je homomorfizam iz $\downarrow a$ u $\uparrow a$.*

Dokaz: Sledi direktno iz definicije izuzetnog elementa i prethodnog tvrđenja. ■

5.2 Beskonačno kodistributivni i neprekidni elementi

Element a mreže $\mathcal{L}$ je $\wedge$-**neprekidan** ako i samo ako za svaki lanac $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$ važi,

$$a \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i).$$

Element a mreže $\mathcal{L}$ je **beskonačno kodistributivan** ako i samo ako za svaku familiju $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$ važi,

$$a \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i).$$

Tvrđenje 5.13 *Neka je $\mathcal{L}$ kompletna mreža, za proizvoljno $a \in L$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) a je $\wedge$-neprekidan,
(ii) za svaki usmeren skup $D \subseteq L$ važi $a \wedge \bigvee D = \bigvee_{d \in D} a \wedge d$,
(iii) za svaki skup $S \subseteq L$,

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee_{F \in \mathcal{S}_{fin}} (a \wedge \bigvee F),$$

gde je $\mathcal{S}_{fin} = \{F \subseteq S \mid |F| < \aleph_0\}$.

Dokaz: Direktno se proverava da (iii) implicira (ii) i da (ii) implicira (i). Mi pokazujemo da (i) implicira (iii). Dokaz ide indukcijom po $|S|$. Osobina (iii) jasno važi ako je S konačan skup, tako da pretpostavimo da je S beskonačan skup i neka je λ najmanji ordinal za koji važi $|S| = \lambda$ (λ je u stvari kardinal). Dalje neka je $S = \{x_\xi \mid \xi < \lambda\}$, i za svako $\xi < \lambda$ definišimo $S_\xi = \{x_\eta \mid \eta < \lambda\}$. Lako se vidi da je za svako $\xi < \lambda$, $|S_\xi| < |S|$ i da $\{\bigvee S_\xi \mid \xi < \lambda\}$ čini lanac. Sada koristeći osobinu (i) dobijamo,

$$\begin{aligned} a \wedge \bigvee S &= a \wedge \bigvee_{\xi < \lambda} \bigvee S_\xi \\ &= \bigvee_{\xi < \lambda} (a \wedge \bigvee S_\xi) \\ &= \bigvee_{\xi < \lambda} (\bigvee_{F \in \mathcal{S}_{\xi fin}} (a \wedge \bigvee F)) \\ &= \bigvee_{F \in \mathcal{S}_{fin}} (a \wedge \bigvee F). \end{aligned}$$

Dobili smo što smo tražili, i time je dokaz gotov. ∎

Tvrđenje 5.14 *U algebarskoj mreži $\mathcal{L}$ svaki element je $\wedge$-neprekidan.*

Dokaz: Neka su a i C redom proizvoljan element i proizvoljan lanac iz L. Dovoljno je da pokažemo da je $a \wedge \bigvee_{x \in C} x \leq \bigvee_{x \in C} a \wedge x$, jer druga nejednakost važi u svakoj mreži. Neka je $a \wedge \bigvee_{x \in C} x = \bigvee \{a_i \mid i \in I\}$ gde je $\{a_i \mid i \in I\}$ skup kompaktnih elemenata. Iz te iste kompaktnosti sledi da za svako $i \in I$ postoji neki konačan podskup $C_0 \subseteq C$ tako da je $a_i \leq \bigvee C_0 \in C$. Dakle za svako, $i \in I$ a_i je manji od nekog elementa iz C, odakle sledi za svako $i \in I$ $a_i \leq \bigvee_{x \in C} a \wedge x$ što implicira $\bigvee \{a_i \mid i \in I\} \leq \bigvee_{x \in C} a \wedge x$. ∎

Tvrđenje 5.15 *U algebarskoj mreži svaki kodistributivan element je beskonačno kodistributivan.*

Dokaz: Neka je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$. Na osnovu tvrđenja 5.14, a je $\wedge$-neprekidan. Koristeći osobinu (iii) iz tvrđenja 5.13 lako izvodimo da je a beskonačno kodistributivan element. ■

Tvrđenje 5.16 ([37]) *Ako je a kodistributivan element algebarske mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $b \in \downarrow a$, skup $\{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ ima najveći element.*

Dokaz: Posmatrajmo element $c = \bigvee\{x \in L \mid a \wedge x = b\}$. Primenom tvrđenja 5.15 dobijamo

$$\begin{aligned} a \wedge c &= a \wedge \bigvee\{x \in L \mid a \wedge x = b\} \\ &= \bigvee\{a \wedge x \mid x \in L \quad \text{i} \quad a \wedge x = b\} = b. \end{aligned}$$

Dakle $c \in \{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ pa je jasno c traženi najveći element. ■

Posledica 5.17 *U algebarskoj mreži svaki neutralan element je izuzetan.*

Dokaz: Sledi direktno iz prethodnog tvrđenja, definicije izuzetnog elementa i tvrđenja 5.3. ■

Videli smo da kodistributivan element u proizvoljnoj mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ razbija mrežu, tj. njen nosač na uniju disjunktnih podskupova oblika $L_b = \{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ za neko $b \in L$, koji su klase ekvivalencije $x\theta_a y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$. Svaka klasa ima najmanji element. Ukoliko je mreža $\mathcal{L}$ algebarska, tada na osnovu tvrđenja 5.16 svaka klasa ima i najveći element (obeležen sa $\overline{x}$, gde je x bilo koji element u klasi), tako da je mreža kodistributivnim elementom a razbijena na uniju disjunktnih zatvorenih intervala:

$$L = \bigcup\{[b, \overline{b}] \mid b \in \downarrow a\}.$$

Takođe, svaki kodistributivni element a u algebarskoj mreži određuje i skup

$$M_a = \{\overline{b} \mid b \in \downarrow a\}.$$

Za date elemente važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 5.18 *Neka je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$, tada važi,*
(i) $b \leqslant c \leqslant a \Rightarrow \overline{b} \leqslant \overline{c}$;
(ii) $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y}$, *za svaka dva* $x, y \in L$.

Dokaz: Naime, ako je $b \leqslant c \leqslant a$, dobijemo: $a \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) = (a \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{c}) = b \vee c = c$, odakle je $\overline{b} \vee \overline{c} \leqslant \overline{c}$, pa važi $\overline{b} \leqslant \overline{c}$, tako da važi (i). Na osnovu (i) sad važi $\overline{x} \geqslant \overline{x \wedge y}$ i $\overline{y} \geqslant \overline{x \wedge y}$, odakle $\overline{x} \wedge \overline{y} \geqslant \overline{x \wedge y}$; s druge strane $a \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = a \wedge \overline{x} \wedge a \wedge \overline{y} = x \wedge y$, pa važi i obrnuta nejednakost $\overline{x} \wedge \overline{y} \leqslant \overline{x \wedge y}$.
∎

5.3 Posebni elementi u atomarno generisanoj mreži

Skup svih atoma date mreže obeležavamo sa $\mathcal{A}_t(L)$. Za datu mrežu kažemo da je **atomarna** ako i samo ako za svako $a \in L$, $a \neq 0$ važi $[0, a] \cap \mathcal{A}_t(L) \neq \emptyset$. Sa $A(a)$ označavamo skup $\downarrow a \cap \mathcal{A}_t(L)$. Za mrežu $\mathcal{L}$ (naravno sa 0) kažemo da je **atomarno generisana** ako i samo ako za svako $a \in L$, $a = \bigvee A(a)$. Lako se vidi da su svi atomi u (atomarno generisanoj) algebarskoj mreži kompaktni elementi i da je za svako $x, y \in L$,

$$A(x \wedge y) = A(x) \cap A(y) \quad i \quad A(x) \cup A(y) \subseteq A(x \vee y).$$

Sledeće tvrđenje nam kaže za koje elemente u gornjoj formuli važi jednakost.

Tvrđenje 5.19 *Neka je $\mathcal{L}$ atomarno generisana algebarska mreža. Za element $a \in L$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) a je distributivan;
(ii) a je standardan;
(iii) za svako $b \in L$, $A(a \vee b) = A(a) \cup A(b)$.

Dokaz: $(i) \Rightarrow (iii)$ Dovoljno je da pokažemo da $A(a \vee b) \subseteq A(a) \cup A(b)$,jer obrnuta inkluzija kao što smo videli važi uvek. Neka je p atom sa osobinom $p \leq a \vee b$. Neka je $A(a) = \{a_i \mid i \in I\}$ i $A(b) = \{b_j \mid j \in J\}$. Pošto je p kompaktan element imamo $p \leq a_1 \vee \ldots a_n \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m$. Ako je za svako $1 \leq j \leq m$, $b_j \leq a$, onda je $p \leq a$, i dokaz je gotov. Pretpostavimo bez umanjenja opštosti da je za svako $1 \leq j \leq m$, $b_j \nleq a$, i neka je $b' = b_1 \vee \cdots \vee b_m$. Iz ovog dalje sledi $p \leq (a \vee p) \wedge (a \vee b')$, pa zbog distributivnosti elementa a dobijamo $p \leq a \vee (p \wedge b')$. Sada ako je $p \leq b'$ onda je $p \leq b$, a ako $p \nleq b'$ onda je $p \wedge b' = 0$ pa je $p \leq a$. Dakle dobili smo da $p \in A(a) \cup A(b)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Direktno se proverava da iz osobine (iii) i $A(x \wedge y) = A(x) \cap A(y)$ sledi $x \wedge (a \vee y) \leq (x \wedge a) \vee (x \wedge y)$, pa pošto druga nejednakost uvek važi, imamo da je a standardan element. Implikacija $(ii) \Rightarrow (i)$ sledi na osnovu tvrđenja 5.6. ■

Tvrđenje 5.20 ([26]) *U atomarno generisanoj algebarskoj mreži element je neutralan ako i samo ako je distributivan i kodistributivan.*

Dokaz: Ako je element neutralan na osnovu tvrđenja 5.3 sledi je distributivan i kodistributivan. Pretpostavimo sada da je element $a \in L$, distributivan i kodistributivan. Iz tvrđenja 5.19 sledi da je a standardan element. Dalje na osnovu tvrđenja 5.7 sledi da je a skrativ element. Dakle imamo da je a skrativ, distributivan i kodistributivan element, pa je jasno neutralan. ■

Tvrđenje 5.21 ([31]) *U atomarno generisanoj mreži svaki kostandardan element je neutralan.*

Dokaz: Neka je $a \in L$ kostandardan element. Na osnovu tvrđenja 5.8 sledi da je a kodistributivan i skrativ element. Da bismo pokazali da je neutralan element treba da pokažemo da je distributivan. Iz dokaza tvrđenja 5.19 vidimo da je dovoljno da pokažemo da je za svako $x \in L$, $A(x \vee a) \subseteq A(x) \cup A(a)$. Neka je dat atom $p \in A(x \vee a)$, i neka $p \notin A(a)$. Pokažimo da onda $p \in A(x)$. Iz činjenice da je $p \vee x \leq x \vee a$ dobijamo,

$$x = x \vee 0 = x \vee (a \wedge p) = (x \vee a) \wedge (x \vee p) = x \vee p.$$

Dakle $p \leq x$, pa $p \in A(x)$. ■

Teorema 5.22 ([39]) *Svaki kodistributivan element s u atomarno generisanoj algebarskoj mreži ima komplement s' koji je distributivan. Pored toga važi :*
(i) jezgra homomorfizama $x \mapsto x \wedge s$ koje slika L u $\downarrow ws$ i $x \mapsto x \vee s'$ koje slika L u $\uparrow s'$ se poklapaju;
(ii) preslikavanje $x \mapsto x \wedge s$ je izomorfizam izmedju $\uparrow s'$ i $\downarrow s$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}$ atomarno generisana algebarska mreža. Ako je $s = 1$ onda je dokaz očigledan. Pretpostavimo dakle da je $s \neq 1$. Dokažimo da je $s' = \bigvee(\mathcal{A}_t(L) \backslash A(s))$ komplement od s. Jasno je da $s \vee s' = 1$. Pretpostavimo sada da je $s \wedge s' \neq 0$. Pošto je $\mathcal{L}$ atomarno generisana pa samim tim i atomarna mreža znamo da postoji atom a sa osobinom $a \leq s \wedge s'$. Pošto je a kompaktan element, sledi da postoje atomi $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}_t(L) \setminus A(s)$ tako da $a \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Kako je $s \wedge a_i = 0$ za svako $1 \leq i \leq n$, koristeći distributivnost elementa s dobijamo $a \leq s \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_n) = 0$, kontradikcija. Dakle $s \wedge s' = 0$, tj. s' je komplement od s.

Kako je s kodistributivan element na osnovu tvrđenja 5.1 sledi da je preslikavanje $x \mapsto x \wedge s$, homomorfizam iz L u $\downarrow s$. Za odgovarajuću kongruenciju iz istog tvrđenja koristićemo oznaku θ_s. Na osnovu tvrđenja 5.16 znamo da za svako $y \in L$, klasa $[y]_{\theta_s}$ ima najveći element $\overline{y}$. Pre nego što pokažemo distributivnost elementa s', dokažimo da za svako $b \in \downarrow s$ važi $b \vee s' = \overline{b}$. Iz $s' \theta_s 0$ i $b \theta_s \overline{s}$ imamo da je $s' \vee b \theta_s \overline{b}$, pa je $s' \vee b \leq \overline{b}$. Ako bi $s' \vee b < \overline{b}$, tada bi postojao atom p sa osobinom $p \leq b, p \neq s'$ i $p \neq b$. Ali onda bi imali $p \leq s$, pa bi $p \leq s \wedge \overline{b} = s \wedge (b \vee s') = (s \wedge b) \vee (s \wedge s') = b$, kontradikcija. Šta više lako se vidi da za svako $x \in [b]_{\theta_s}$ važi $x \vee s' = \overline{b}$.

Sada koristeći ovu osobinu dokazujemo distributivnost elementa s'. Neka su $x, y \in L$, i neka $x \in [b, \overline{b}]$ i $y \in [c, \overline{c}]$, za neke $b, c \in L$. Jasno $x \wedge y \in [b \wedge c, \overline{b} \wedge \overline{c}]$. Imajući tvrđenje 5.18 na umu dobijamo,

$$(x \wedge y) \vee s' = \overline{x \wedge y} = \overline{b \wedge c} = \overline{b} \wedge \overline{c} = (x \vee s') \wedge (y \vee s').$$

Pokažimo sada da su kongruencije θ_s i kongruencija koja je jezgro homomorfizma $x \mapsto x \vee s'$, u oznaci $\rho_{s'}$ jednake. Iz $x \wedge s = y \wedge s$ i distributivnosti elementa s' dobijamo,

$$x \vee s' = (x \vee s') \wedge (s \vee s') = (x \wedge s) \vee s' = (y \wedge s) \vee s' = (y \vee s') \wedge (s \vee s') = y \vee s'.$$

Sa druge strane iz $x \vee s' = y \vee s'$ i kodistributivnosti elementa s na sličan način kao malopre dobijamo da $x \wedge s' = x \wedge s$. Dakle $\rho_{s'} = \theta_s$.

Na kraju pokažimo da je preslikavanje $x \mapsto x \wedge s$ izomorfizam između $\uparrow s'$ i $\downarrow s$, tj. dovoljno je da pokažemo da je bijekcija jer na osnovu tvrđenja 5.1 znamo da je homomorfizam. Neka je $x, y \in \uparrow s'$ i $x \wedge s = y \wedge s$. Tada je zbog malopre dokazanog $x \vee s' = y \vee s'$, pa je $x = y$. Dakle preslikavanje je injektivno. Neka je dalje $x \in \downarrow s$ proizvoljno dato. Tada za $x \vee s' \in \uparrow s'$ imamo

$$(x \vee s') \wedge s = (x \wedge s) \vee (s \wedge s') = x \wedge s = x$$

pa je preslikavanje i sirjektivno. ■

Posledica 5.23 *Ako je s kodistributivan i distributivan element atomarno generisane algebarske mreže $\mathcal{L}$, tada je $\mathcal{L} \cong \downarrow s \times \uparrow s$ i $\mathcal{L} \cong \downarrow s' \times \uparrow s'$, gde je s' komplement od s.*

Dokaz: Na osnovu tvrđenja 5.20 sledi da je element s neutralan. Sada na osnovu posledice 5.5 sledi da je $\mathcal{L} \cong \downarrow s \times \uparrow s$. Na osnovu prethodne teoreme znamo da je $\uparrow s' \cong \downarrow s$ i $\uparrow s \cong \downarrow s'$, što dalje implicira $\mathcal{L} \cong \downarrow s' \times \uparrow s'$. ■

Poglavlje 6

Mreža slabih kongruencija

6.1 Osnovni pojmovi

Pod **slabom kongruencijom** algebre $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ podrazumevamo tranzitivne i simetrične relacije na A, koje su kompatibilne sa svim operacijama algebre, uključujući i nularne operacije. Drugim rečima slaba kongruencija algebre $\mathcal{A}$ je slaba ekvivalencija na skupu A koja je kompatibilna sa svim operacijama date algebre. Skup svih slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ obeležavamo sa $Cw\mathcal{A}$.

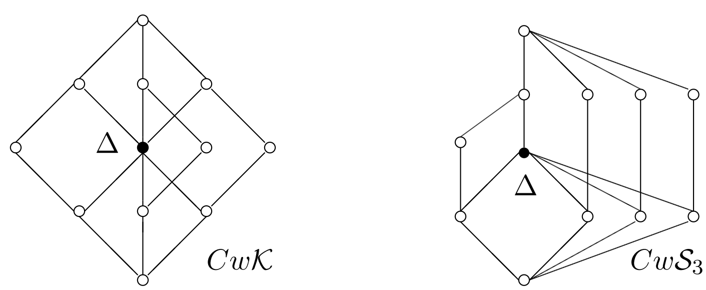
Tvrđenje 6.1 *Mreža $(Cw\mathcal{A}, \subseteq)$ je algebrarska za svaku algebru $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$.*

Dokaz: Dovoljno je da pokažemo da je $Cw\mathcal{A}$ algebarski sistem zatvaranja na $A \times A$. Jasno $A \times A \in Cw\mathcal{A}$. Neka je $\{\rho_i \mid i \in I\}$ proizvoljna familija slabih kongruencija i neka su $\mathcal{B}_i$ za $i \in I$ podalgebre takve da $\rho_i \in Con\mathcal{B}_i$. Tada $\bigcap\{\rho_i \mid i \in I\} \in Con \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i \subseteq Cw\mathcal{A}$. Neka je sada $\mathcal{N} = \{\theta_i \mid i \in I\}$ usmerena familija slabih kongruencija, i neka su $\mathcal{B}_i$ za $i \in I$ podalgebre takve da $\rho_i \in Con\mathcal{B}_i$. Pokažimo da $\bigcup_{i \in I} \theta_i \in Con \bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i$. Iz očigledne činjenice da je $\bigvee_{i \in I} \Delta_i = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ i tvrđenja 4.19 sledi da $\bigcup_{i \in I} \theta_i \in \mathcal{E}(\bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i)$. Ostaje još da pokažemo da važi pravilo zamene. Neka su $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \bigcup_{i \in I} \theta_i$, $n \in \omega$ i $f \in \mathcal{F}_n$ proizvoljno dati. Zbog usmerenosti familije $\mathcal{N}$ postoji neko $\theta \in \mathcal{N}$ tako da $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \theta$. Pošto za θ važi pravilo zamene sledi da $(f^A(a_1, \ldots, a_n), f^A(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta \subseteq Cw\mathcal{A}$. Dakle važi $\bigcup \mathcal{N} \in Cw\mathcal{A}$, pa je $Cw\mathcal{A}$ algebarski sistem zatvaranja na $A \times A$. ■

Tvrđenje 6.2 *U mreži slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ algebre $\mathcal{A}$ važe sledeće osobine :*
(i) Δ je kodistributivan element u mreži $Cw\mathcal{A}$;
(ii) $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ je izomorfna sa podmrežom $(\downarrow\Delta, \subseteq)$ u $Cw\mathcal{A}$;

(iii) $Con\mathcal{A}$ je jednak filtru $\uparrow\Delta$ u $Cw\mathcal{A}$;
(iv) za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$, nosač mreže kongruencija, $Con\mathcal{B}$ jednak je intervalu $[\Delta_B, B^2]$ u mreži $Cw\mathcal{A}$.

Dokaz: (i) Neka su ρ i θ slabe kongruencije na $\mathcal{A}$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ podalgebre takve da $\rho \in Con\mathcal{B}$ $\theta \in Con\mathcal{C}$, treba da proverimo da je $\Delta \cap (\theta \wedge \rho) = (\Delta \cap \theta) \cap (\Delta \cap \rho)$. Pošto $\rho \vee \theta \in Con(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ sledi da $\Delta \wedge (\rho \vee \theta) = \Delta_{B \vee C}$. Direktno se proverava da je $\Delta_{B \vee C} = \Delta_B \cup \Delta_C$, i pošto je $\Delta_B = \Delta \cap \rho$ i $\Delta_C = \Delta \cap \theta$ sledi kodistributivnost Δ.
(ii) Posmatrajmo preslikavanje $\Psi : Sub\mathcal{B} \to \downarrow\Delta$ definisano sa $\Psi(B) = \Delta_B$. Jasno je da važi $B \subseteq C \Leftrightarrow \Delta_B \subseteq \Delta_C$, pa ostaje samo da pokažemo da je Ψ sirjektivno preslikavanje. Neka je data proizvoljna slaba kongruencija $\rho \in \downarrow w\Delta$, tada po definiciji skupa $\downarrow\Delta$ i $Cw\mathcal{A}$ sledi da postoji $B \in Sub\mathcal{A}$ takvo da $\rho = \Delta_B$. Sada direktno se pokazuje da je $\Psi(B) = \rho$. Dakle, zaključujemo da je Ψ izomorfizam.
(iii) Iz činjenice da je svaka kongruencija refleksivna relacija i da je svaka kongruencija slaba kongruencija sledi $Con\mathcal{A} \subseteq \uparrow\Delta$. Pošto je svaka refleksivna slaba kongruencija algebre $\mathcal{A}$ njena kongruencija, važi obrnuta inkluzija, tj $\uparrow\Delta \subseteq Con\mathcal{A}$.
(iv) Očigledno važi $Con\mathcal{B} \subseteq [\Delta_B, B^2]$. Sa druge strane iz $\rho \in [\Delta_B, B^2] = \{\rho \in Cw\mathcal{A} \mid \Delta_B \leq \rho \leq B^2\}$ sledi da $\rho \in Con\mathcal{D}$ za neko $D \in Sub\mathcal{A}$ i $\Delta_B \subseteq \rho \subseteq B^2$. Iz $\Delta_B \subseteq \rho$ sledi $B \subseteq D$, dok iz $\rho \subseteq B^2$ sledi $D \subseteq B$. Dakle $\rho \in Con\mathcal{B}$, pa je $[\Delta_B, B^2] \subseteq Con\mathcal{A}$. ■



Slika 6.1

Na gornjoj slici su date redom, mreža slabih kongruencija Klajnove i simetrične grupe. Primetimo da supremum dve slabe kongruencije algebre $\mathcal{A}$ u mreži $\mathcal{E}(A)$ u opštem slučaju ne mora da bude slaba kongruencija. Ako posmatramo mrežu slabih kongruencija Klajnove grupe kao podskup mreže slabih ekvivalencija nad skupom $\{a, b, c, d\}$, lako se vidi da supremum (u mreži $\mathcal{E}_w(A)$) dva kvadrata podalgebri ne mora biti slaba kongruencija. Dakle mreža slabih kongruencija u opštem slučaju nije podmreža mreže slabih ekvivalencija.

Pokazali smo da je Δ kodistributivan element. Kako je $\mathcal{C}w\mathcal{A}$ algebarska mreža, element Δ je i beskonačno kodistributivan. On razbija skup $\mathcal{C}w\mathcal{A}$ na disjunktnu uniju skupova oblika:

$$\mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B} = \{\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A} \mid \rho \cap \Delta = \Delta_B\},\ B \text{ je poduniverzum od } \mathcal{A}.$$

Uočimo da je $\mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B} = [\Delta_B, B^2]$. Naime, ako $\rho \in [\Delta_B, B^2]$, jasno je da $\rho \cap \Delta = \Delta_B$. Sada neka je $\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$. Ako $x\rho y$, onda $y\rho x$, na osnovu simetričnosti, a $x\rho y$ i $y\rho x$ povlači $x\rho x$ i $y\rho y$, na osnovu tranzitivnosti, pa $(x, x), (y, y) \in \rho\cap\Delta$; pošto $\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$, dobijemo da $(x, x), (y, y)$ leže u Δ_B, pa $(x, y) \in B^2$. S druge strane, $\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$ povlači $\rho \geqslant \Delta_B$, tako da ako $x \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$, onda $x \in [\Delta_B, B^2]$. Dakle,

$$\mathcal{C}w\mathcal{A} = \bigcup\{[\Delta_B, B^2] \mid B \text{ je poduniverzum od } \mathcal{A}\}.$$

No, relacije u skupu $[\Delta_B, B^2]$ koje su simetrične, tranzitivne i saglasne sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ su upravo kongruencije algebre $\mathcal{B} = (B, H)$. Tako,

$$\mathcal{C}w\mathcal{A} = \bigcup\{Con\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \leq \mathcal{A}\}.$$

Ako je $\mathcal{L}$ algebarska mreža sa više od dva elementa, i ako $a \in L$ ima komplement, recimo b, onda je i $\overline{b}$, najveći element u klasi $[b]_{\theta_a}$, (pogledati odeljak 5.2) takođe komplement. Zaista, $a \wedge \overline{b} = a \wedge b = 0$, i $1 \geq a \vee \overline{b} \geq a \vee b = 1$, pa je $a \vee b = 1$.

Tvrđenje 6.3 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$. Tada Δ ima komplement u mreži $Cw\mathcal{A}$ ako i samo ako $\mathcal{A}$ ima nularne operacije i ne postoji klasa neke kongruencije koja je pravi poduniverzum.*

Dokaz: Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je B^2, za neko $B \in Sub\mathcal{A}$, komplement od Δ. Tada B mora da bude pravi poduniverzum, šta više on je ustvari minimalni poduniverzum od $\mathcal{A}$. Dakle svakako algebra $\mathcal{A}$ mora imati nularne operacije. Pretpostavimo da postoji $\rho \in Con\mathcal{A}$ tako da je $C = [a]_\rho$ pravi poduniverzum za neko $a \in L$, naravno onda je i ρ prava kongruencija. Jasno je da $B^2 \subseteq C^2 \subseteq \rho$, pa otuda je $\rho = \rho \vee \Delta = A^2$. Kontradikcija, jer je ρ prava kongruencija.

Sa druge strane, neka je C minimalni poduniverzum algebre $\mathcal{A}$. Dokažimo da je C^2 komplement od Δ. Δ_C je najmanji element mreže $Cw\mathcal{A}$ i $C^2 \cap \Delta = \Delta_C$. Ostaje da se pokažemo da je $\Delta \vee C^2 = A^2$. Jasno $\Delta \vee C^2 \in Con\mathcal{A}$. Pretpostavimo da je $\Delta \vee C^2 \subset A^2$. Tada za proizvoljno $c \in C$ važi $C \subseteq [c]_{\Delta \vee C}$, pa je $[c]_{\Delta \vee C}$ pravi poduniverzum algebre $\mathcal{A}$. Kontradikcija sa pretpostavkom da ne postoji klasa neke kongruencije koja je pravi poduniverzum. ■

6.2 Hamiltonove algebre i CEP

Neke od bitnih osobina algebri su Hamiltonovost i svojstvo proširenja kongruencija u oznaci CEP, i one su u bliskoj vezi sa mrežom slabih kongruencija i reprezentacijom algebarskih mreža preko istih, pa iz tih razloga posvećujemo ovo poglavlje tim svojstvima i nekim njihovim posledicama.

Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da zadovoljava **svojstvo proširenja kongruencija**, **CEP** (engl. *Congruence Extension Property*) ako i samo ako za svaku kongruenciju ρ na podalgebri $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$, postoji kongruencija θ na $\mathcal{A}$, tako da je $\rho = B^2 \cap \theta$.

Tvrđenje 6.4 *Varijetet distributivnih mreža zadovoljava CEP.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}$ distributivna mreža i neka je $\mathcal{K}$ njena podmreža. Neka je dalje α proizvoljna kongruencija na $\mathcal{K}$, dokažimo da je tada $\beta = con_{\mathcal{L}}(\alpha)$ tražena ekstenzija, tj. da važi $\beta \cap K^2 = \alpha$. Kako je

$$con_{\mathcal{L}}(\alpha) = \bigvee \{con_{\mathcal{L}}(x,y) \mid x, y \in \alpha\}$$

i $con_{\mathcal{K}}(\alpha) = \bigvee \{con_{\mathcal{K}}(x,y) \mid x, y \in \alpha\}$, ako bi kojim slučajem $\beta \cap K^2 \neq con_{\mathcal{L}}(\alpha)$ onda bi došli u kontradikciju sa posledicom 3.18. Dakle zaključujemo da varijetet distributivnih mreža zadovoljava CEP. ■

Tvrđenje 6.5 *Varijetet svih mreža ne zadovoljava CEP.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da varijetet mreža zadovoljava CEP. Neka je $\mathcal{L}$ mreža koja ima pravu pomrežu $\mathcal{K}$ sa osobinom da postoji prava kongruencija $\theta \in Con\mathcal{K}$ (takva mreža $\mathcal{L}$ uvek postoji, na primer mreže na slici 6.1). Na osnovu teorema 4.26 i 4.30 znamo da se svaka mreža može potopiti u neku prostu mrežu. Neka je $\mathcal{C}$ prosta mreža u koju se potapa $\mathcal{L}$, i neka je ψ dato potapanje. Lako se proverava da je $\psi(K)$ podmreža mreže $\mathcal{C}$ i da je

$$\psi(\theta) = \{(\psi(a), \psi(b)) \mid (a,b) \in \theta\}$$

prava kongruencija na $\psi(K)$. Pošto $\mathcal{C}$ zadvoljava CEP postoji prava kongruencija ρ na $\mathcal{C}$ tako da je $\psi(\theta) = \psi(K)^2 \cap \rho$. Ali onda $\mathcal{C}$ nije prosta, kontradikcija. ■

Tvrđenje 6.6 *Varijetet Abelovih grupa zadovoljava CEP.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljna Abelova grupa i $\theta \in Con\mathcal{B}$ gde je $\mathcal{B}$ podgrupa grupe $\mathcal{A}$. Posmatrajmo sledeću relaciju na A,

$$\rho = \theta \cup \Delta_{A\setminus B} \cup \mathcal{F}$$

gde je $\mathcal{F} = \{(ax, bx) \mid (a, b) \in \theta \text{ i } x \in A \setminus B\}$.

Primetimo da je $B^2 \cap \mathcal{F} = B^2 \cap \Delta_{A\setminus B} = \emptyset$, pa je $\rho \cap B^2 = \theta \cap B^2 = \theta$. Pokažimo da je ρ kongruencija grupe $\mathcal{A}$. Direktno iz definicije relacije ρ se dokazuje refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost. Ostaje samo da proverimo uslov kompatibilnosti. Neka su $(ax, bx), (cy, dy) \in \mathcal{F}$, treba da pokažemo da $(axcy, bxdy) \in \rho$. Kako je grupa $\mathcal{A}$ Abelova dovoljno je da pokažemo da $(xyac, xybd) \in \rho$. Neka $xy \in A \setminus B$, pošto je θ kongruencija na B imamo $(ac, bd) \in \theta$ pa sledi $(xyac, xybd) \in \mathcal{F} \subseteq \rho$. Ako pak $xy \in B$ onda iz refleksivnosti i kompatibilnosti relacije θ sledi $(xyac, xybd) \in \theta$. Ostali slučajevi ili trivijalno važe ili se pokazuju na sličan način kao malopre. Dakle data relacija je kompatibilna, i time je dokaz gotov. ■

Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da je **Hamiltonova** ako i samo ako za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ postoji $\theta \in Con\mathcal{A}$ tako da je $[b]_\theta = B$ za neko $b \in A$. Za varijetet algebri $\mathcal{V}$ kažemo da je **Hamiltonov** ako i samo ako je svaka algebra iz $\mathcal{V}$ Hamiltonova. Klasičan primer Hamiltonovih algebri su Hamiltonove grupe (grupe čije su sve podgrupe normalne). Napomenimo da klasa svih Hamiltonovih algebri nije varijetet. Lako se vidi da je data klasa zatvorena za podalgebre i homomorfne slike, ali nije zatvorena za direktne proizvode. Na primer kvadratni stepen grupe kvarteriona nije Hamiltonova grupa.

Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da zadovoljava **jako svojstvo proširenja kongruencija**, **SCEP**(engl. *Strong Congruence Extension Property*) ako i samo ako za svaku kongruenciju ρ na podalgebri $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$, postoji kongruencija θ na $\mathcal{A}$, tako da je $\rho = B^2 \cap \theta$ i da je svaka klasa od θ ili sadržana u B ili disjunktna sa B. Primer algebri koje zadovoljavaju SCEP su Abelove grupe.

Tvrđenje 6.7 *Algebra $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ zadovoljava SCEP ako i samo ako je Hamiltonova i zadovoljava CEP.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava SCEP, jasno da onda važi CEP. Neka je dalje $\mathcal{B}$ proizvoljna podalgebra. Za B^2 postoji $\theta \in Con\mathcal{A}$ tako da je $\theta \cap B^2 = B^2$ i svaka klasa od θ je ili sadržana u B ili disjunktna sa B. Sada proverimo da je za proizvoljno $b \in B$, $[b]_\theta = B$. Jasno je da je $B \subseteq [b]_\theta$, dok sa druge strane iz $(x,b) \in \theta$ sledi $x \in B$ jer bi u suprotnom došli u kontradikciju sa uslovom da je svaka klasa od θ ili sadržana u B ili disjunktna sa B.
Neka je sada algebra $\mathcal{A}$ Hamiltonova i neka važi CEP, dokažimo da važi SCEP. Neka je $\theta \in Con\mathcal{B}$ gde je $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{A}$ i neka je $B = [b]_\rho$ za $\rho \in Con\mathcal{A}$. Na osnovu CEP znamo da postoji $\alpha \in Con\mathcal{A}$ sa osobinom $\alpha \cap B^2 = \theta$. Posmatrajmo kongruenciju $\alpha \cap \rho$. Lako se vidi da je $\alpha \cap \rho \cap B^2 = \theta$, jer je $\rho \cap B^2 = B^2$. Neka je dalje za $x \in B$ i $x \in A$ važi $(x,y) \in \alpha \cap \rho$, ali pošto onda $(x,y) \in \rho$ a znamo da $(y,b) \in \rho$ sledi da $x \in [b]_\rho = B$. Time je dokaz završen. ■

Koristeći ovo tvrđenje lako se zaljučuje da svaka unarna algebra zadovoljava SCEP.

E. W. Kiss je 1981 dokazao da svaki Hamiltonov varijetet zadovoljava CEP. Osam godine kasnije V. Gould i M. Wild [12] daju dosta kraći dokaz istog tvrđenja. U nastavku prezentujemo taj rezultat.

Tvrđenje 6.8 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tako da je $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ Hamiltonova, tada $\mathcal{A}$ ima SCEP.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ Hamiltonova algebra, fiksirajmo podalgebru $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$ i kongruenciju θ na $\mathcal{B}$.
$(*)$ Dokažimo prvo da za proizvoljnu unarnu polinomnu operaciju p na $\mathcal{A}$ i za sve elemente $b, b' \in B$, iz $b\theta b'$ i $p(b) \in B$ sledi $p(b)\theta p(b')$.

Lako se vidi da je θ podalgebra od $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, pa samim tim i podalgebra na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Tada zbog pretpostavke postoji kongruencija Φ na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ koja sadrži θ kao klasu. Kako (b,b) i (b,b') iz θ sledi da je $(b,b')\Phi(b,b)$. Posmatrajmo unarnu polinomnu operaciju na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ definisanu sa $\overline{p}((a,a')) := (p(a), p(a'))$. Iz leme 2.9 imamo da je $(p(b), p(b')) = \overline{p}((b,b'))\Phi\overline{p}((b,b)) = (p(b), p(b))$. Dakle $(p(b), p(b'))$ i $(p(b), p(b))$ su u istoj Φ-klasi, tačnije u θ jer $p(b) \in B$.

Neka je sada ρ kongruencija na $\mathcal{A}$ generisana sa podskupom θ od $A \times A$, i fiksirajmo $c \in B$ i $a \in A$ tako da je $c\rho a$. Na osnovu uopštenja Mal'cev-ljeve teoreme 2.11 znamo da postoje unarne polinomne operacije p_i i parovi (b_i, b_i') $(1 \leq i \leq n)$ tako da je $c = p_1(b_1), p_1(b_1') = p_2(b_2), p_2(b_2') = p_3(b_3), \ldots, p_n(b_n') = a$. Sada primenjujući $(*)$ uzastopno dobijamo da je $c\theta a$.

Sa ovim smo pokazali da je $\rho \cap B^2 = \theta$ i da je svaka θ-klasa ili sadržana u B ili disjunktna od B. ■

Posledica 6.9 *Svaki varijetet Hamiltonovih algebri zadovoljava CEP.*

Dokaz: Sledi direktno iz prethodnog tvrđenja, definicije varijeteta, tačnije njegove zatvorenosti za direktne proizvode, i činjenice da SCEP implicira CEP. ■

Obrnuta implikacija ne važi, tj. postoje algebre koje zadovoljavaju CEP a nisu Hamiltonove, sledi primer.

Primer 6.10 *Posmatrajmo troelementni lanac $\mathcal{L}$ sa nosačem $L = \{0, a, 1\}$. Jasno, $\mathcal{L}$ je distributivna mreža, pa na osnovu tvrđenja 6.4 sledi da $\mathcal{L}$ zadovoljava CEP. Ali data mreža nije Hamiltonova jer podmreža $\mathcal{K}$ sa nosačem $K = \{0, 1\}$ nije klasa nijedne kongruencije, jer nije konveksna. Dakle varijetet distributivnih mreža zadovoljava CEP ali nije Hamiltonov.*

Šta više postoje i algebre koje su Hamiltonove ali ne zadovoljavaju CEP, sledi primer.

Primer 6.11 *Posmatrajmo algebru $\mathcal{A}$, čiji je nosač $A = \{a, b, c, d\}$ i skup operacija $\{\cdot, c\}$, gde je c nularna operacija, a $\cdot$ binarna operacija data na sledeći način:*

$*$	a	b	c	d
a	b	b	c	b
b	b	a	c	c
c	c	c	c	a
d	a	b	c	d

Algebra $\mathcal{A}$ ima tačno tri podalgebre, i to $\{c\}$, $\mathcal{S}$ sa nosačem $S = \{a, b, c\}$ i celu algebru $\mathcal{A}$. $\{c\}$ je klasa dijagonalne relacije, A je klasa relacije $A \times A$. Šta više S je klasa kongruencije θ koja je određena klasama $\{a, b, c\}$ i $\{d\}$. Dakle algebra $\mathcal{A}$ je Hamiltonova. Sa druge strane data algebra ne zadovoljava CEP. Posmatrajmo relaciju ekvivalencije α na $\{a, b, c\}$ određenu klasama $\{a, b\}$ i $\{c\}$. Lako se proverava da $\alpha \in Con\mathcal{S}$. Pretpostavimo da postoji $\beta \in Con\mathcal{A}$ tako da je $\beta \cap S^2 = \alpha$. Pošto $(a, b) \in \alpha$, sledi $(a, b) \in \beta$. Dalje kako $(d, d) \in \beta$ sledi da

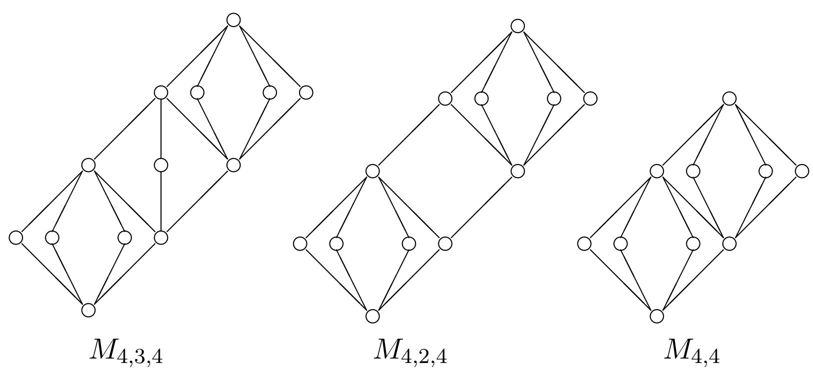
$$(b, c) = (a \cdot d, b \cdot d) \in \beta.$$

Odavde sledi da $(b, c) \in \beta \cap S^2$, ali to je kontradikcija jer $(b, c) \notin \alpha$.

U poglavlju 2 smo definisali operatore **H**, **S** i **P**, nas će posebno interesovati operatori **H** i **S**, jer ćemo date dovesti u vezu sa osobinom CEP. Podsetimo se da smo u istoj glavi pokazali da je $\mathbf{SH} \leq \mathbf{HS}$, sledeće tvrđenje kaže da je u stvari $\mathbf{SH} < \mathbf{HS}$.

Tvrđenje 6.12 $\mathbf{SH} \neq \mathbf{HS}$.

Dokaz: Posmatrajmo sledeće mreže, $M_{4,3,4}$, $M_{4,2,4}$ i $M_{4,4}$ (slika 6.2). Mreža $M_{4,2,4}$ se može potopiti u mrežu $M_{4,3,4}$, a mreža $M_{4,4}$ je homomorfna slika od $M_{4,2,4}$. Dakle $M_{4,4} \in \mathbf{HS}(M_{4,3,4})$. Na osnovu tvrđenja 3.9 i 3.12 zaključujemo da je mreža $M_{4,3,4}$ prosta, što dalje implicira $\mathbf{SH}(M_{4,3,4}) = \mathbf{S}(M_{4,3,4})$. Direktno se proverava da se mreža $M_{4,4}$ ne može potopiti u $M_{4,3,4}$. Dakle $\mathbf{SH} \neq \mathbf{HS}$. ∎



Slika 6.2

Logično je postaviti pitanje za koju klasu algebri važi $\mathbf{SH} = \mathbf{HS}$. Sledeće tvrđenje daje jedan dovoljan uslov.

Tvrđenje 6.13 *Neka V klasa algebri koje zadovoljavaju CEP, tada za sve $K \subseteq V$ važi $\mathbf{SH}(K) = \mathbf{HS}(K)$.*

Dokaz: Neka je $K \subseteq V$ proizvoljno dato. Dovoljno je da pokažemo da je $\mathbf{HS}(K) \subseteq \mathbf{SH}(K)$. Neka je dalje dato proizvoljno $\mathcal{A} \in \mathbf{HS}(K)$. Tada postoji $\mathcal{C} \in K$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ i $\theta \in Con\mathcal{B}$ tako da je $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}/\theta$. Sada zbog uslova CEP znamo da postoji $\rho \in Con\mathcal{C}$, tako da $\rho \cap B^2 = \theta$. Na osnovu tvrđenja 2.5 imamo da je

$$\mathcal{B}/(\rho \cap B^2) \cong \mathcal{B}[\rho]/(\rho \cap \mathcal{B}[\rho]).$$

Lako se proverava da je $\mathcal{B}[\rho]/(\rho \cap \mathcal{B}[\rho]) \subseteq \mathcal{C}/\rho$, pa pošto je

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}[\rho]/(\rho \cap \mathcal{B}[\rho])$$

zaključujemo da $\mathcal{A} \in \mathbf{SH}(K)$. ■

Posledica 6.14 *Neka je V varijetet Hamiltonovih algebri, tada za svako $K \subseteq V$ važi $\mathbf{SH}(K) = \mathbf{HS}(K)$.*

6.3 Neke osobine algebri u mrežnom jeziku

U narednih par tvrđenja ćemo da dovedemo u vezu CEP sa mrežom slabih kongruencija.

Lema 6.15 *Neka je ρ slaba kongruencija algebre $\mathcal{A}$ i neka je ρ_A najmanja kongruencija na $\mathcal{A}$ koja sadrži ρ, tj.*

$$\rho_A := \bigcap \{\theta \in Con\mathcal{A} \mid \rho \subseteq \theta\}$$

tada je $\rho_A = \rho \vee \Delta$.

Dokaz: Iz $\rho \subseteq \rho_A$ i $\Delta \subseteq \rho_A$ sledi $\rho \vee \Delta \subseteq \rho_A$. Sa druge strane pošto je $\rho \subseteq \rho \vee \Delta \in \uparrow\Delta = Con\mathcal{A}$ i kako je ρ_A najmanja kongruencija na $\mathcal{A}$ koja sadrži ρ sledi $\rho_A \subseteq \rho \vee \Delta$. ■

Lema 6.16 *Ako algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP onda za proizvoljnu kongruenciju ρ na podalgebri $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$ važi $\rho_A \cap B^2 = \rho$.*

Dokaz: Neka je θ kongruencija algebre $\mathcal{A}$ koja proširuje ρ, tj. važi $\theta \cap B^2 = \rho$. Pošto je ρ_A najmanja kongruencija algebre $\mathcal{A}$ koja sadrži ρ sledi da je $\rho \subseteq \rho_A$. Sada dobijamo :

$$\rho = \rho \cap B^2 \subseteq \rho_A \cap B^2 \subseteq \theta \cap B^2 = \rho$$

pa sledi $\rho_A \cap B^2 = \rho$. ■

Teorema 6.17 *Algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP ako i samo ako je Δ skrativ element u mreži $Cw\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP i neka je $\rho \vee \Delta = \delta \vee \Delta$ i $\rho \wedge \Delta = \delta \wedge \Delta$, gde su ρ i δ proizvoljne slabe kongruncije. Iz $\rho \wedge \Delta = \delta \wedge \Delta$ sledi da su ρ i δ kongruencije na istoj podalgebri, recimo $\mathcal{B}$, od $\mathcal{A}$. Iz $\rho \vee \Delta = \delta \vee \Delta$ i lema 6.15 i 6.16 sledi da je $\rho = \delta$, dakle Δ je skrativ element u mreži $Cw\mathcal{A}$. Obrnuto pretpostavimo da je Δ skrativ element u $Cw\mathcal{A}$. Pokažimo da je za proizvoljnu slabu kongruenciju $\rho \in Con\mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B}$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$, $\rho_A \cap B^2 = \rho$. Lako se pokazuuje da je $(\rho_A \cap B^2) \vee \Delta = \rho \vee \Delta$ i da je $(\rho_A \cap B^2) \wedge \Delta = \rho \wedge \Delta$, pa zbog skrativosti elementa Δ sledi da algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP. ■

Ova teorema nam kaže da je svojstvo CEP za algebre ustvari mrežno teoretska osobina.

Tvrđenje 6.18 *Za algebru $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ sledeće činjenice su ekvivalentne :*

(i) $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP;

(ii) U mreži $Cw\mathcal{A}$, za $\rho, \theta \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$,

$\rho \vee \Delta = \theta \vee \Delta$ implicira $\rho = \theta$;

(iii) Za $\rho, \theta \in Cw\mathcal{A}$,

$\rho \leq \theta$ implicira $\rho \vee (\Delta \wedge \theta) = (\rho \vee \Delta) \wedge \theta$;

(iv) za $\rho \in Cw\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$,

$\rho \leq B^2$ implicira $\rho \vee (\Delta \wedge B^2) = (\rho \vee \Delta) \wedge B^2$;

(v) za $\rho, \theta \in Cw\mathcal{A}$,

$\rho \vee (\Delta \wedge \theta) = (\rho \vee \Delta) \wedge (\rho \vee \theta)$.

Dokaz:

Sledi direktno na osnovu tvrđenja 5.9. ■

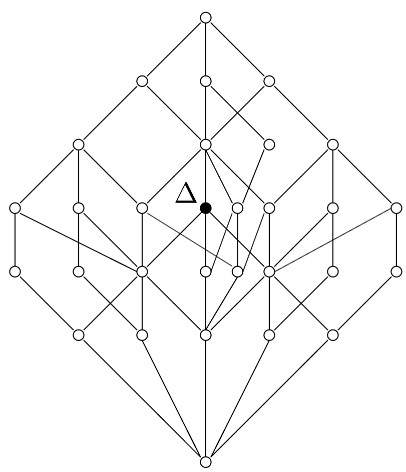
Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da zadovoljava **svojstvo preseka kongruencija**, **CIP** (*engl. Congruence Intersection Property*) ako i samo ako za svake dve kongruencije ρ i θ na proizvoljnim podalgebrama od $\mathcal{A}$, važi

$$\rho_A \cap \theta_A = (\rho \cap \theta)_A.$$

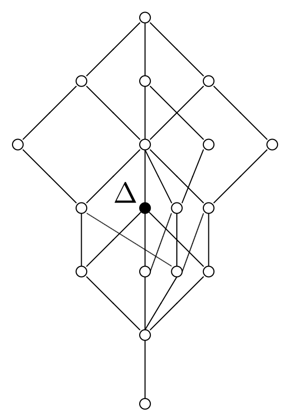
Tvrđenje 6.19 *Algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CIP ako i samo ako je Δ distributivan element u mreži $Cw\mathcal{A}$.*

Dokaz: Algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CIP ako i samo ako $\rho_A \cap \theta_A = (\rho \cap \theta)_A$ za proizvoljne slabe kongruencije ρ i θ, što je na osnovu leme 6.15 dalje ekvivalentno sa $(\rho \vee \Delta) \cap (\rho \vee \Delta) = (\rho \cap \theta) \vee \Delta$. ■

Na slici 6.3 pod (a) je prikazana mreža slabih kongruencija dijedarske grupe reda 8 dok je pod (b) data mreža slabih kongruencija grupe kvaterniona. Iz slike i na osnovu prethodnih tvrđenja se vidi da grupa kvaterniona zadovoljava CEP i CIP, dok dijedarska grupa ne zadovoljava nijednu od datih osobina.



(a)



(b)

Slika 6.3

Tvrđenje 6.20 *Algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP i CIP ako i samo ako je Δ neutralan element u mreži $Cw\mathcal{A}$.*

Dokaz: Na osnovu tvrđenja 6.17, 6.19, 6.2 znamo da je Δ skrativ, distributivan i kodsitributivan element mreže $Cw\mathcal{A}$, dok je na osnovu tvrđenja 5.3 Δ neutralan element. Obrnuta implikacija isto važi jer se u svim pomenutim tvrđenjima javlja ekvivalencija datih pojmova. ■

Posledica 6.21 *Ako algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP i CIP, onda se mreža $Cw\mathcal{A}$ može potopiti u mrežu $Sub\mathcal{A} \times Con\mathcal{A}$. Ako Δ ima komplement u $Cw\mathcal{A}$, onda je to potapanje izomorfizam.*

Dokaz: Na osnovu prethodnog tvrđenja, posledice 5.4, i tvrđenja 6.2 sledi da se $Cw\mathcal{A}$ može potopiti u mrežu $Sub\mathcal{A} \times Con\mathcal{A}$. Dok u slučaju kad Δ ima komplement u mreži $Cw\mathcal{A}$, tvrđenje sledi na osnovu posledice 5.5. ■

Specijalan slučaj svojstva preseka kongruencija je **slabo svojstvo preseka kongruencija**, **wCIP** (engl. *Weak Congruence Intersection Property*). Za algebru $\mathcal{A}$ kažemo da zadovoljava wCIP ako i samo ako za svako $\rho \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$, i za svako $\theta \in Con\mathcal{A}$, važi

$$(\rho \cap \theta)_A = \rho_A \cap \theta.$$

Lako se vidi da svaka prosta algebra zadovoljava wCIP.

Tvrđenje 6.22 *Algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava wCIP ako i samo ako je Δ modularan element u mreži $Cw\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je $\rho, \theta \in Cw\mathcal{A}$ i neka je $\Delta \leq \theta$. Dakle imamo $\rho \in Con\mathcal{B}$ za neko $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$ i $\theta \in Con\mathcal{A}$. Zbog pretpostavke dobijamo $(\rho \cap \theta)_A = \rho_A \cap \theta$, što dalje na osnovu leme 6.15 daje

$$(\rho \cap \theta) \vee \Delta = (\rho \vee \Delta) \cap (\theta \vee \Delta).$$

■

U prethodnom poglavlju smo definisali kada je algebra Hamiltonova, sada dovodimo tu osobinu u vezu sa mrežom slabih kongruencija.

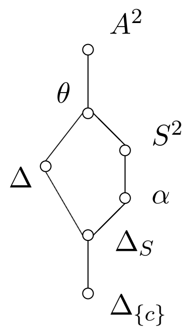
Za preslikavanje f, koje slika uređen skup $(P, \leq)$ u uređen skup $(Q, \leq)$, kažemo da je **slabo injektivno** ako i samo ako za sve $x, y \in P$ važi

$$x < y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Tvrđenje 6.23 *Algebra $\mathcal{A}$ je Hamiltonova ako i samo ako je preslikavanje $f : Sub\mathcal{A} \rightarrow Con\mathcal{A}$ definisano sa $f(B) = B^2 \vee \Delta$ slabo injektivno.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ Hamiltonova algebra i pretpostavimo suprotno, tj. da je za neke $B, C \in Sub\mathcal{A}$ važi $B < C$ i $B^2 \vee \Delta = C^2 \vee \Delta$. Zbog Hamiltonovosti sledi da je $B = [b]_\rho$ za neko $\rho \in Con\mathcal{A}$. Odavde sledi da $B^2 \subseteq \rho$, što dalje implicira $B^2 \vee \Delta \subseteq \rho$ i $C^2 \vee \Delta \subseteq \rho$. Jasno za proizvoljno $c \in C \setminus B$ važi $(b, c) \notin \rho$, ali sa druge strane imamo i $(b, c) \in C^2 \subseteq C^2 \vee \Delta = B^2 \vee \Delta \subseteq \rho$, kontradikcija.
Pretpostavimo sada da je funkcija f slabo injektivna i dokažimo da je za proizvoljni neprazni poduniverzum B, $B = [b]_{B^2 \vee \Delta}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $[b]_{B^2 \vee \Delta} = C$. Jasno je da je onda $B \subset C$, pa na osnovu leme 2.4 sledi da je i C podalgebra od $\mathcal{A}$. Ali direktnom proverom

dobijamo da je $C^2 \vee \Delta = B^2 \vee \Delta$ što je kontradikcija sa pretpostavkom o slaboj injektivnosti funkcije f. ■



Slika 6.4

Primer 6.24 *Podsetimo se algebre $\mathcal{A}$ iz primera 6.11. Njena mreža slabih kongruencija je data na slici 6.4. Pošto je $\Delta \vee S^2 = \Delta \vee \alpha$ i $\Delta \wedge S^2 = \Delta \wedge \alpha$ a $\alpha \neq \Delta$, sledi da Δ nije skrativ element u mreži $Cw\mathcal{A}$ pa zbog tvrđenja 6.17 algebra $\mathcal{A}$ ne zadovolajva CEP. Lako se pokazuje da je preslikavanje iz tvrđenja 6.23 slabo injektivno pa zbog istog tvrđenja algebra $\mathcal{A}$ je Hamiltonova. Dakle u ovom primeru smo demonstrirali kako uvid u mrežu slabih kongruencija može olakšati proveravanje nekih osobina algebri.*

Za algebru $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ kažemo da je **kvazi-Hamiltonova** ako i samo ako je svaki maksimalni poduniverzum klasa neke kongruencije. Pod **maksimalnim poduniverzumom** podrazumevamo maksimalni element u uređenom skupu $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$. Primer kvazi-Hamiltonove algebre je svaka konačna nilpotentna grupa.

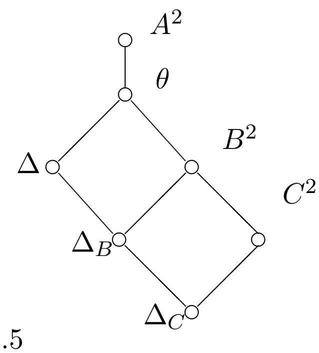
Tvrđenje 6.25 *Algebra $\mathcal{A}$ je kvazi-Hamiltonova ako i samo ako za svaki poduniverzum B od $\mathcal{A}$ važi,*

$$B \prec A \quad \textit{implicira} \quad B^2 \vee \Delta < A^2.$$

Dokaz: Reformulacija dokaza tvrđenja 6.23. ■

Sledeći jednostavan primer demonstrira kako preko mreže slabih kongruencija možemo da pokažemo da je neka algebra kvazi-Hamiltonova.

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	b
c	b	c	c	b
d	d	d	d	c



Slika 6.5

Posmatrajmo četvoroelementnu algebru $\mathcal{A}$ koja od fundamentalnih operacija ima dve konstante a i b i jednu binarnu operaciju $*$ definisanu u tablici iznad. Lako se proverava da su jedini pravi poduniverzumi $C = \{a, b\}$ i $B = \{a, b, c\}$ i da je jedina prava kongruencija θ koja je određena particijom $\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$. Mreža slabih kongruencija date algebre je data na slici 6.5. Sada korišćenjem tvrđenja 6.25 dobijamo da je algebra $\mathcal{A}$ kvazi-Hamiltonova.

6.4 Kvadrati

Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, sa M_Δ obeležavamo nosač uređenog skupa kvadrata u mreži $Cw\mathcal{A}$:

$$(\{B^2 \mid B \in Sub\mathcal{A}\}, \subseteq).$$

Očigledno je da je uređen skup $(M_\Delta, \subseteq)$ u stvari $\wedge$-polumreža sa jedinicom. Na kraju ovog odeljka ćemo dati i neke uslove pod kojima M_Δ čini mrežu, tj. podmrežu mreže $Cw\mathcal{A}$.

Neka je θ kongruencija algebre $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$, i neka $B \in Sub\mathcal{A}$. Podsetimo se, u poglavlju 2 smo definisali skup

$$B[\theta] = \{x \in A \mid (x, b) \in \theta \text{ za neko } b \in B\ \},$$

i pokazali da je $B[\theta]$ unija svih blokova koji imaju neprazan presek sa B i da $B[\theta] \in Sub\mathcal{A}$.

Lema 6.26 *Neka je $\{\theta_i \mid i \in I\}$ familija kongruencija sa osobinom $B[\theta_i] = B$ za svako $i \in I$. Tada je $B[\bigvee_{i \in I} \theta_i] = B$.*

Dokaz: Jasno važi $B \subseteq B[\bigvee_{i \in I} \theta_i]$. Neka je dato proizvoljno $a \in B[\bigvee_{i \in I} \theta_i]$. Sledi da postoji $b \in B$ i $i_1, i_2, \ldots i_k \in I$ tako da $(a, b) \in \theta_{i_1} \circ \theta_{i_2} \cdots \circ \theta_{i_k}$. Neka su dalje $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, c_k$ elementi iz A za koje važi

$$a = c_0 \theta_{i_1} c_1 \theta_{i_2} \ldots c_{k-1} \theta_{i_k} c_k = b.$$

Iz $(b, c_{k-1}) \in \theta_{i_k}$ sledi da $c_{k-1} \in B[\theta_{i_k}] = B$. Na isti način zaključujemo da $c_{k-2} \in B$, i ako nastavimo postupak dalje, dobili bi da i $c_1 \in B$. Ali sada pošto $(a, c_1) \in \theta_{i_1}$ sledi da $a \in B[\theta_{i_1}] = B$. Dakle dobili smo da važi i druga inkluzija, i time je dokaz gotov. ■

Lema 6.27 *Neka je $B \in Sub\mathcal{A}$, i $\theta \in Con\mathcal{A}$, tada sledeća jednakost važi u mreži $Cw\mathcal{A}$:*

$$B^2 \vee \theta = B[\theta]^2 \vee \theta.$$

Dokaz: Trivijalno važi $B^2 \vee \theta \subseteq B[\theta]^2 \vee \theta$. Za obrnutu inkluziju dovoljno je da pokažemo da je $B[\theta]^2 \subseteq B^2 \vee \theta$. Podsetimo se da je

$$B^2 \vee \theta = \bigcap\{\rho \in Cw\mathcal{A} \mid B^2 \cup \theta \subseteq \rho\}.$$

Neka su $(x, y) \in B[\theta]^2$ i $\rho \in Con\mathcal{A}$ sa osobinom $B^2 \cup \theta \subseteq \rho$ proizvoljno dati. Neka su dalje b_1, b_2 elementi iz B tako da $(x, b_1), (y, b_2) \in \theta$. Lako se vidi da $(x, b_1), (b_1, b_2), (b_2, y) \in \rho$, pa zbog tranzitivnosti sledi da $(x, y) \in \rho$. Dakle $(x, y) \in B^2 \vee \theta$. ■

Posledica 6.28 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, i neka $B \in Sub\mathcal{A}$ i $\theta \in Con\mathcal{A}$. Ako je $B[\theta] = A$ tada je $B^2 \vee \theta = A^2$.*

Dokaz: Direktna posledica prethodne leme. ■

Za $B \in Sub\mathcal{A}$ definišimo

$$\theta(B) := \bigvee\{\theta \in Con(A) \mid B[\theta] = B\}.$$

Rečima, $\theta(B)$ je najveća kongruencija na $\mathcal{A}$ u kojoj je B unija nekih blokova te kongruencije.

Tvrđenje 6.29 *Neka je $B \in Sub\mathcal{A}$ i $\rho \in Con\mathcal{A}$ tada,*
(i) $B[\rho] = B$ ako i samo ako $\rho \subseteq \theta(B)$.
(ii) $B[\theta(B)] = B$.

Dokaz: (ii) Direktna posledica leme 6.26.
(i) Jasno je da iz $B[\rho] = B$ sledi $\rho \subseteq \theta(B)$, jer je $\theta(B)$ supremum relacija sa takvom osobinom. Sa druge strane iz $\rho \subseteq \theta(B)$ sledi $B[\rho] \subseteq B[\theta(B)] = B$. ■

Teorema 6.30 *Ako je $\mathcal{A}$ algebra i ako su $B, C \in Sub\mathcal{A}$ tako da $B \prec C$, onda važi*

$$\bigvee\{\theta \in Con\mathcal{C} \mid \theta \vee B^2 < C^2\} \neq C^2.$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{F} = \{\theta \in Con\mathcal{C} \mid \theta \vee B^2 < C^2\}$, gde su B i C poduniverzumi iz pretpostavke. Na osnovu posledice 6.28 zaključujemo da za svako $\theta \in \mathcal{F}$ važi $B[\theta] \neq C$. Pošto je $B \prec C$ sledi da je $B[\theta] = B$ za svako $\theta \in \mathcal{F}$. Dalje dobijamo da je za svako θ iz $\mathcal{F}$, $\theta \subseteq \theta(B)$, gde je $\theta(B) = \bigvee\{\theta \in Con\mathcal{C} \mid B[\theta] = B\}$, što dalje implicira da je $\bigvee \mathcal{F} \subseteq \theta(B)$. Jasno je da $B[\theta(B)] = B$ pa opet zbog posledice 6.28 sledi da $B^2 \vee \theta(B) = B^2$, tj. $\theta(B) \subseteq B^2 \subset C^2$. Dakle važi $\bigvee \mathcal{F} \neq C^2$. ■

Teorema 6.31 *Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ podalgebre od $\mathcal{A}$ i neka $B \prec C$. Neka je još za proizvoljno $\beta \in Con\mathcal{B}$*

$$Ext(\beta) := \{\gamma \in Con\mathcal{C} \mid \gamma \cap B^2 = \beta\}$$

Tada postoji $\gamma \in Con\mathcal{C}$ sa sledećim osobinama :
(i) za svako $\beta \in Con\mathcal{B}$ skup $\{\alpha \in Ext(\beta) \mid \alpha \leq \gamma\}$ je ili prazan ili poseduje najveći element.
(ii) za svako $\beta \in Con\mathcal{B}$ skup $\{\alpha \in Ext(\beta) \mid \alpha \nleq \gamma\}$ je antilanac(moguće prazan skup).

Dokaz: Neka je

$$\Gamma = \{\rho \in Con\mathcal{C} \mid \text{ne postoji } x \in B,\ y \in C \setminus B \text{ tako da } (x, y) \in \rho\ \}.$$

Primetimo da je $\Gamma \neq \emptyset$, jer barem sadrži Δ_C. Pokažimo prvo da je Γ kompletna podmreža od $Con\mathcal{C}$. Zatvorenost za preseke je jasna. Neka je $\{\gamma_i \mid i \in I\} \subseteq \Gamma$ i pretpostavimo da je $\bigvee\{\gamma_i \mid i \in I\} \notin \Gamma$. Tada po definiciji skupa Γ postoje $x \in B$, $y \in C \setminus B$ tako da važi $x \bigvee\{\gamma_i \mid i \in I\} y$. Dalje sledi da postoje $i_0, i_1, \ldots, i_n \in I$ i $z_0, z_1, \ldots z_n \in C$ tako da

$$x = z_0 \rho_{i_0} z_1 \rho_{i_1} z_2 \ldots z_{k-1} \rho_{i_k} z_k = y.$$

Pošto $y \in C \setminus B$, ako bi z_{k-1} bilo iz B onda bi došli u kontradikciju činjenicom da $\rho_{i_k} \in \Gamma$, dakle $z_{k-1} \in C \setminus B$. Nastavljamo dalje postupak, i pretpostavimo da smo došli do z_1. Iz istih razloga kao malopre zaključujemo da $z_1 \in C \setminus B$, ali sada opet dobijamo kontradikciju sa $\rho_{i_0} \in \Gamma$ jer $x \in B$. Dakle $\bigvee\{\gamma_i \mid i \in I\} \in \Gamma$, pa je Γ je kompletna podmreža od $Con\mathcal{C}$.
Dokažimo da je $\gamma = \bigvee \Gamma$ kongruencija koja se traži u tvrđenju teoreme.
(i) Neka je $\beta \in Con\mathcal{B}$ proizvoljno dato i neka je

$$X = \{\alpha \in Ext(\beta) \mid \alpha \leq \gamma\} \neq \emptyset$$

Primetimo da pošto $\gamma \in \Gamma$ sledi da je $X \subseteq \Gamma$. Dokažimo da je $\bigvee X \in X$. Jasno je da $\bigvee X \leq \gamma$, tako da ostaje da se pokaže da je $\beta = (\bigvee_{\alpha \in X} \alpha) \cap B^2$.

Jedna inkluzija trivijalno važi, ostaje samo da pokažemo $(\bigvee_{\alpha \in X} \alpha) \cap B^2 \subseteq \beta$. Dovoljno je da pokažemo da za proizvoljno $\alpha_1, \dots \alpha_n \in X$ važi

$$\alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n \cap B^2 \subseteq \beta.$$

Neka je dato proizvoljno $(a, b) \in \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n \cap B^2$. Dalje po definiciji dobijamo da postoje $z_1, z_2, \dots, z_n \in C$ tako da

$$(a, z_1) \in \alpha_1, (z_1, z_2) \in \alpha_2, \dots, (z_n, b) \in \alpha_n.$$

Kako su relacije $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ iz X pa samim tim i iz Γ, zaključujemo da su $z_1, z_2, \dots, z_n \in B$, što dalje implicira da $(a, b) \in \beta$. Dakle skup X ima najveći element.
(ii) Neka je

$$Y = \{\alpha \in Ext(\beta) \mid \alpha \nleq \gamma\} \neq \emptyset$$

Neka su dalje $\alpha_1, \alpha_2 \in Y$, pri čemu je $\alpha_1 \neq \alpha_2$, treba pokazati da su ta dva elementa neuporediva.
Iz $\alpha_1 \neq \gamma$ sledi da $\alpha_1 \notin \Gamma$, tj. postoji $b \in B$ i $c \in C \setminus B$ tako da $(b, c) \in \alpha_1$. Ovo dalje implicira $B \subset B[\alpha_1]$, pa pošto je $B \prec C$ sledi da je $B[\alpha_1] = C$. Iz istih razloga važi i $B[\alpha_2] = C$. Dakle svaka klasa ekvivalencije od kongruencija α_1 i α_2 (napomenimo da $\alpha_1, \alpha_2 \in Con\mathcal{C}$) seče B.
Pretpostavimo da je $\alpha_1 \subset \alpha_2$, tada sledi da postoji klase $[a]_{\alpha_2}$, $[d]_{\alpha_1}$ i $[c]_{\alpha_1}([d]_{\alpha_1} \neq [c]_{\alpha_1})$ tako da je

$$[d]_{\alpha_1} \cup [c]_{\alpha_1} \subseteq [a]_{\alpha_2}.$$

Neka je $b_0 \in [d]_{\alpha_1} \cap B$ i $b_1 \in [c]_{\alpha_1} \cap B$. Tada $b_0, b_1 \in [a]_{\alpha_2}$, što dalje implicira da $(b_0, b_1) \in \alpha_2 \cap B^2 = \alpha_1 \cap B^2$. Ali onda bi $[d]_{\alpha_1} = [c]_{\alpha_1}$, što je kontradikcija. Dakle $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$, i na isti način dobijamo da $\alpha_2 \not\subset \alpha_1$. Zaključujemo da je Y antilanac. ■

Tvrđenje 6.32 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, i neka su $B, C \in Sub\mathcal{A}$, tada $B \cap C \neq \emptyset$ implicira da je $B^2 \vee C^2 = (B \vee C)^2$ u mreži $Cw\mathcal{A}$.*

Dokaz: Jasno je da važi $B^2 \vee C^2 \subseteq (B \vee C)^2$, ostaje da pokažemo da važi i obrat. Neka je $D = B \cap C$, pa kako je po pretpostavci $D \neq \emptyset$ sledi da $D \in Sub\mathcal{A}$. Posmatrajmo skup $D[B^2 \vee C^2]$. Na osnovu leme 2.4 sledi $D[B^2 \vee C^2] \in Sub(B \vee C)$. Elementarnom proverom dobijamo da je

$$D[B^2 \vee C^2] \subseteq B^2 \vee C^2. \tag{6.1}$$

Iz $B, C \subseteq D[B^2 \vee C^2]$ dobijamo da je $B \vee C \subseteq D[B^2 \vee C^2]$, što dalje implicira

$$(B \vee C)^2 \subseteq D[B^2 \vee C^2]^2. \tag{6.2}$$

Iz 6.1 i 6.2 dobijamo da je $(B \vee C)^2 \subseteq B^2 \vee C^2$. ■

Posledica 6.33 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ i neka je $\bigcap Sub\mathcal{A} \neq \emptyset$, tada je M_Δ podmreža mreže $Cw\mathcal{A}$.*

Tvrđenje 6.34 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$, tada M_Δ je zatvoren za operaciju $\vee$ u mreži $Cw\mathcal{A}$ ako i samo ako dve disjunktne podalgebre nikad nisu klase od iste slabe kongruencije na $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je prvo M_Δ zatvoren za operaciju $\vee$, tj. važi $B^2 \vee C^2 = (B \vee C)^2$, pokažimo da tada dve disjunktne podalgebre nikad nisu klase od jedne slabe kongruencije na $\mathcal{A}$. Pretpostavimo suprotno, neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ dve disjunktne podalgebre, i neka postoji slaba kongruencija ρ sa osobinom $[b]_\rho = B$ i $[c]_\rho = C$ za neko $b \in B$ i $c \in C$. Jasno je da onda $(b, c) \notin \rho$. Lako se vidi da je $B^2 \subseteq \rho$ i $C^2 \subseteq \rho$, što implicira $(B \vee C)^2 = B^2 \vee C^2 \subseteq \rho$. Pošto $(b, c) \in (B \vee C)^2$, dobili bi da $(b, c) \in \rho$, kontradikcija.

Dokazimo da važi i obrnuta implikacija. Pretpostavimo da je $B \cap C = \emptyset$, jer u slučaju da je presek neprazan, dokaz bi sledio na osnovu tvrđenja 6.32. Neka je $B^2 \vee C^2 = \rho$, jasno $\rho \in Con(B \vee C)$. Pretpostavimo dalje da je $\rho \neq (B \vee C)^2$. Za proizvoljno $b \in B$ i $c \in C$ posmatrajmo klase $[b]_\rho$i $[c]_\rho$. Lako se vidi da je $B \subseteq [b]_\rho$ i $C \subseteq [c]_\rho$, pa na osnovu tvrđenja 2.4 sledi da su $[b]_\rho$ i $[c]_\rho$ podalgebre. Ako bi $[b]_\rho = [c]_\rho$, onda bi $B \vee C \subseteq [b]_\rho$, ali onda je $\rho = (B \vee C)^2$, što je kontradikcija. Dakle $[b]_\rho$ i $[c]_\rho$ su disjunktne podalgebre koje su klase iste slabe kongruencije, opet kontradikcija. ■

Kao posledicu poslednjeg dokazanog tvrđenja dobijamo sledeći rezultat.

Tvrđenje 6.35 *Za algebru $\mathcal{A}$, M_Δ je podmreža od $Cw\mathcal{A}$ ako i samo svaka slaba kongruencija od $\mathcal{A}$ sadrži najviše jednu klasu koja je podalgebra algebre $\mathcal{A}$.*

6.5 Atomarno generisane mreže slabih kongruencija

Lema 6.36 *Ako je mreža slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ atomarno generisana tada algebra $\mathcal{A}$ ima barem jednu konstantu, koja nije podalgebra.*

Dokaz: Ako je algebra $\mathcal{A}$ bez konstanti, tada je $\emptyset$ najmanji element mreže $Cw\mathcal{A}$. Odavde sledi da su svi atomi, dijagonalne relacije podalgebri, algebre $\mathcal{A}$. Ali u ovom slučaju nijedna slaba kongruencija koja nije dijagonalna relacija ne može da se prikaže kao supremum nekih atoma, što implicira da $Cw\mathcal{A}$ nije atomarno generisana. U slučaju kada algebra $\mathcal{A}$ ima jednu konstantu koja je podalgebra dokaz je sličan. ■

Teorema 6.37 ([39]) *Mreža slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ je atomarno generisana ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*
(i) *Mreža $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ je atomarna.*
(ii) *Algebra $\mathcal{A}$ ima najmanju netrivijalnu podalgebru $\mathcal{B}_m$, čija je mreža kongruencija atomarno generisana.*
(iii) *Svaka slaba kongruencija je najmanja ekstenzija neke kongruencije na $\mathcal{B}_m$.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ atomarno generisana. Primetimo prvo da je svaki ideal u atomarno generisanoj mreži takođe atomarno generisana mreža. Kako je $Sub\mathcal{A}$ ideal u mreži $Cw\mathcal{A}$ sledi uslov (i). Egzistencija netrivijalne podalgebre $\mathcal{B}_m$ sledi iz leme 6.36. Njena mreža kongruencija je takođe ideal u mreži $Cw\mathcal{A}$ pa je $Con\mathcal{B}_m$ atomarno generisana mreža. Dakle važi uslov (ii).

Dokažimo sada uslov (iii). Neke je $\rho \in Con\mathcal{B}$, gde $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$. Pošto je mreža $Cw\mathcal{A}$ atomarno genrisana, sledi da je θ supremum nekih atoma, među kojima može biti dijagonalnih relacija i elemenata iz $Con\mathcal{B}_m$. Kako je supremum dijagonalnih relacija opet dijagonalna relacija i supremum elemenata iz $Con\mathcal{B}_m$ opet u $Con\mathcal{B}_m$ dobijamo da je $\theta = \Delta_D \vee \rho$ gde $\rho \in Con\mathcal{B}_m$ i $\mathcal{D} \in Sub\mathcal{A}$. Pošto je $\mathcal{B}_m$ najmanja podalgebra sledi da je $D = B$. Dakle θ je najmanja kongruencija na $\mathcal{B}$ koja sadrži ρ.Ako je pak θ dijagonalna relacija onda je jasno najmanja ekstenzija relacije Δ_{B_m}.

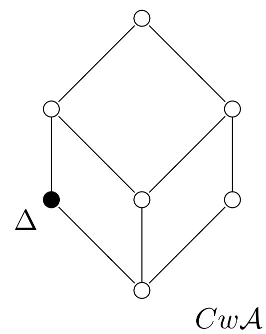
Sa druge strane pretpostavimo da važe uslovi (i), (ii) i (iii). Kako je svaka slaba kongruencija najmanja ekstenzija neke kongruencije na $\mathcal{B}_m$, sledi da je za $\theta \in Con\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in Sub\mathcal{A}$ imamo $\theta = \Delta_B \vee \rho$ gde $\rho \in Con\mathcal{B}_m$. Pošto je $Sub\mathcal{A}$ atomarno generisana mreža sledi da je Δ_B supremum neki atoma (dijagonalnih relacija). Istim rezonovanjem zaključujemo da je ρ supremum atoma iz $Con\mathcal{B}_m$. Dakle, $Cw\mathcal{A}$ je atomarno generisana mreža. ■

Tvrđenje 6.38 *Algebra $\mathcal{A}$ čija je mreža slabih kongruencija atomarno generisana zadovoljava CEP ako i samo ako zadovoljava CIP.*

Dokaz: Od ranije (tvrđenje 6.2) znamo da je Δ kodistributivan element u mreži $Cw\mathcal{A}$. Ako pretpostavimo da algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CIP onda je Δ i distributivan element mreže $Cw\mathcal{A}$. Sada na osnovu tvrđenja 5.20 sledi da je Δ u stvari neutralan element mreže $Cw\mathcal{A}$, pa samim tim i skrativ. Ali onda na osnovu tvrđenja 6.17 zaključujemo da na $\mathcal{A}$ važi CEP.

Sa druge strane ako algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP onda je Δ skrativ element mreže $Cw\mathcal{A}$. Pošto je Δ takodje i kodistributivan, tvrđenje 5.8 nam kaže da je onda i kostandardan. Dalje korišćenjem tvrđenja 5.21 dobijamo da je Δ neutralan element pa samim tim i distributivan. Dakle algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CIP (tvrđenje 6.19). ■

$*$	a	b	c	d
a	a	b	b	d
b	b	b	b	d
c	b	b	c	d
d	a	a	d	c



Slika 6.6

Primer 6.39 *Posmatrajmo algebru $\mathcal{A}$ čiji je nosač $\{a, b, c, d\}$, a od fundamentalnih operacija ima tri konstante a, b, c i binarnu opeaciju $*$ koja je zadata u tablici ispod. Iz slike 6.6 se vidi da je mreža slabih kongruencija date algebre atomarno generisana.*

Posledica 6.40 *Ako algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava CEP i $Cw\mathcal{A}$ je atomarna mreža, tada je $Cw\mathcal{A} \cong Sub\mathcal{A} \times Con\mathcal{A}$.*

Dokaz: Na osnovu prethodnog tvrđenja sledi da algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava i CIP, dok na osnovu tepreme 5.22 sledi da Δ ima komplement u mreži $Cw\mathcal{A}$. Sada na osnovu posledice 6.21 sledi da je $Cw\mathcal{A} \cong Sub\mathcal{A} \times Con\mathcal{A}$. ■

6.6 Problem konkretnog predstavljanja

Bjarni Jónsson u svojoj knjizi [17] kaže da postoje dva problema reprezentacije za mreže kongruencija: konkretan i apstraktan. Konkretan problem se bavi proučavanjem uslova pod kojima je neka familija relacija ekvivalencija jednaka sa $Con\mathcal{A}$ za neku algebru $\mathcal{A}$ iz klase $\mathcal{K}$. Apstraktan problem se bavi proučavanjem uslova pod kojim je proizvoljno data algebarska mreža izomorfna sa $Con\mathcal{A}$ za neku algebru $\mathcal{A}$ iz $\mathcal{K}$. Apstraktnim problemom ćemo se baviti u poslednjem poglavlju.

Videli smo da je mreža slabih kongruencija neke algebre podskup mreže slabih ekvivalencija na nosaču te algebre. Ovde se prirodno javlja pitanje: kada je podskup mreže slabih ekvivalencija nekog skupa ujedno i mreža svih slabih kongruencija neke algebre na tom skupu? Problem srodan ovome - problem predstavljanja zadate mreže particija nekog skupa mrežom kongruencija neke algebre nad tim skupom rešio je H. Werner 1976. godine, [52].

Polazeći od ovog Wernerovog rešenja, u [29] M. Ploščica daje rešenje pomenutog problema predstavljanja podskupa mreže slabih ekvivalencija mrežom slabih kongruencija neke algebre. Pri tom koristi nešto modifikovani pojam grafičke kompozicije, koji su pre njega uveli B. Jónsson i H. Werner - videti [52] i [18].

Neusmereni graf je par (V, E), gde je V skup **temena** i E skup **grana**, zajedno sa preslikavanjem $\nu : E \longrightarrow \mathcal{P}_1(V) \cup \mathcal{P}_2(V)$, pri čemu je $\mathcal{P}_i(V)$ skup svih i-elementnih podskupova skupa V, za $i = 1, 2$. Ako je $\nu(e) = \{x, y\}$, za $x \neq y$, kažemo da je e **grana koja spaja x i y**. Ako je $\nu(e) = \{x\}$, tada je e **petlja oko x**.

Neka je $G = (V, E)$ graf i $\varphi : E \longrightarrow Rel(X)$ neko preslikavanje iz E u skup $Rel(X)$ svih relacija na skupu X. Funkciju $f : V \longrightarrow X$ zovemo φ-**saglasno etiketiranje** ako za svako $e \in E$ i $\nu(e) = \{x, y\}$,

$$(f(x), f(y)) \in \varphi(e).$$

Sada, za svaka dva fiksirana temena $0, 1 \in V$ definišemo jednu relaciju:

$$S_{G,0,1}(\varphi) :=$$
$$\{(a, b) \in X^2 \mid a = f(0), b = f(1) \text{ za neko } \varphi\text{-saglasno etiketiranje } f\}.$$

Preko $S_{G,0,1}$ definišemo jedno preslikavanje:

$$P_{G,0,1} : \mathcal{E}w(X)^E \longrightarrow \mathcal{E}w(X),$$

gde je $P_{G,0,1}(\varphi)$ slaba ekvivalencija generisana sa $S_{G,0,1}(\varphi)$, tj. simetrično i tranzitivno zatvorenje restrikcije relacije $S_{G,0,1}(\varphi)$ na domen te relacije, tj. na najveći skup A, takav da je $\Delta_A \subseteq S_{G,0,1}(\varphi)$. Uočimo da je $P_{G,0,1}$ jedna $|E|$-arna operacija na $\mathcal{E}w(X)$ koju određuje graf sa svoja dva temena. Svaku takvu operaciju nazivamo **grafička kompozicija**.

Teorema 6.41 ([29]) *Skup $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}w(A)$ je skup svih slabih kongruencija neke algebre ako i samo ako je $\mathcal{F}$ zatvoreno za svaku grafičku kompoziciju i svaku uniju familije slabih ekvivalencija koja je usmerena na gore, tj. takva da za svake dve slabe ekvivalencije iz te familije postoji u istoj familiji jedna veća od njih.*

Poglavlje 7

Reprezentacija algebarskih mreža

7.1 Uvodni pojmovi i istorija problema

Tvrđenje 7.1 $(Con\mathcal{L}, \subseteq)$ *je distributivna mreža za svaku mrežu* $\mathcal{L}$.

Dokaz: Neka su dati $\rho, \theta, \sigma \in Con\mathcal{L}$. Dovoljno je da pokažemo da je

$$\rho \cap (\theta \vee \sigma) \subseteq (\rho \cap \theta) \vee (\rho \cap \sigma),$$

jer druga inkluzija trivijalno važi. Neka je dato proizvoljno $(x, y) \in \rho \cap (\theta \vee \sigma)$, tj. $(x, y) \in \rho$ i $(x, y) \in (\theta \vee \sigma)$. Iz $(x, y) \in (\theta \vee \sigma)$ i tvđenja 3.8 dobijamo da postoji niz

$$z_1 = x \wedge y \leq z_2 \leq \cdots \leq z_{n-1} \leq z_n = x \vee y, \tag{7.1}$$

takav da je $z_i \theta z_{i+1}$ ili $z_i \sigma z_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Iz $(x, y) \in \rho$ sledi $(x \wedge y, x \vee y) \in \rho$, a kako su na osnovu tvrđenja 3.6 klase kongruencija konveksne dobijamo da $z_1, z_2, \ldots, z_n \in [x \wedge y]_\rho$. Dakle imamo da $(z_i, z_{i+1}) \in \rho$ za $1 \leq i \leq n-1$. Sada koristeći (7.1) dobijamo da postoji niz

$$z_1 = x \wedge y \leq z_2 \leq \cdots \leq z_{n-1} \leq z_n = x \vee y,$$

takav da je $z_i \theta \cap \rho z_{i+1}$ ili $z_i \sigma \cap \rho z_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Sada opet na osnovu tvrđenja 3.8 sledi da $(x, y) \in (\rho \cap \theta) \vee (\rho \cap \sigma)$. $\blacksquare$

Ovaj rezultat su 1942 dokazali Funayama i Nakayama. Birkhoff i Frink 1948 pokazaju da je uređen skup svih kongruencija proizvoljne algebre, algebarska mreža (dokaz dajemo u odeljku 7.2). Problem koji je nastao kao posledica kombinovanja ove dve dosta jednostavne teoreme je takozvani **CLP**(**Congruence Lattice Problem**) problem.

CLP. Da li je svaka algebarska distributivna mreža izomorfna mreži kongruencija neke mreže ?

Ovaj problem je prvi put prezentovan od strane Diliworth-a, koji je i dokazao konačnu verziju datog problema, tj. pokazao je da je svaka konačna distributivna mreža izomorfna mreži kongruencija neke konačne mreže, mada isti rezultat nije objavio. Ovaj rezultat prvi put objavljuju Grätzer i Schmidt 1963. Uopštenje tog rezultata daje A.P.Huhn 1989.

Teorema 7.2 *(Huhn) Svaka algebarska distributivna mreža sa najviše* $\aleph_1$ *kompaktnih elemenata je izomorfna mreži kongruencije neke mreže.*

Beskonačan slučaj CLP-a je rešen 2006 od strane Wehrung-a ([51]) i skoro 60 godina je predstavljao jedan od najtežih problema u teoriji mreža.

Teorema 7.3 *(F. Wehrung) Postoji algebarska distributivna mreža sa* $\aleph_{\omega+1}$ *kompaktnih elemenata koja nije izomorfna mreži kongruencija nijedne mreže.*

Iste godine Pavel Růžička dokazuje da algebarska distributivna mreža iz Wehrung-ovog dokaza može da bude manja.

Teorema 7.4 *(P.Růžička) Postoji algebarska distributivna mreža sa* $\aleph_2$ *kompaktnih elemenata koja nije izomorfna mreži kongruencija nijedne mreže.*

Ključni deo Wehrung-ovog dokaza je bila jedna kombinatorna teorema Kuratovskog. Sa $[X]^{<\omega}$ označimo skup svih konačnih podskupova skupa X, dok sa $[X]^n$, gde je $n \in \omega$, označimo skup svih n-elementnih podskupova skupa X. Za $(n+1)$-elementni podskup U skupa X kažemo da je **slobodan u odnosu na preslikavanje** $\Phi : [X]^n \to [X]^{<\omega}$ ako i samo ako $x \notin \Phi(U \setminus \{x\})$, za svako $x \in U$.

Teorema 7.5 *(Teorema Kuratovskog o slobodnom skupu) Neka je* n *prirodan broj, i neka je* X *skup kardinalnosti najmanje* $\aleph_n$. *Za svako preslikavanje* $\Phi : [X]^n \to [X]^{<\omega}$, *postoji slobodan podskup, kardinalnosti* $n+1$, *skupa* X *u odnosu na* Φ.

G. Birkhoff je 1945 tokom svojih predavanja postavio pitanje da li se mreže kongruencija algebri mogu okarakterisati kao algebarske mreže, tj. da li je svaka algebarska mreža izomorfna mreži kongruencija neke algebre.

Grätzer i Schmidt 1963 daju pozitivan odgovor na dati problem. Dokaz te teoreme je dosta naporan i dugačak i koristi teoriju parcijalnih algebri. Grubo rečeno, konstruiše se transfinitni niz parcijalnih algebri u kojem svaki sledeći član bliže karakteriše datu algebarsku mrežu. Na kraju se pokaže da je transfinitna unija datog niza parcijalnih algebri čini algebru, čija je mreža kongruencija izomorfna sa datom algebarskom mrežom. Data algebra je beskonačna i ima beskonačno fundamentalnih operacija

Za kraće verzije orginalnog dokaza su zaslužni W. A. Lampe, 1968, 1973; E. T. Schmidt, 1969; E. Nelson, 1980; i P. Pudlák, 1976. R. N. McKenzie i B. Jónsson su imali svoje verzije datog problema ali ih nisu publikovali. Zajednička stvar u svim tim dokazima je bila da se za veće algebarske mreže konstruišu algebre sa sve više i više operacija. Prirodno je postaviti pitanje, da li je to neophodno? Odgovor na to pitanje je potvrdan i daje ga sledeća teorema.

Teorema 7.6 *(R.Freese, W.A. Lampe, W.Taylor 1979)*
Neka je dat beskonačno dimenzionalan vektorski prostor $\mathcal{V}$ nad neprebrojivim poljem K. Ako je mreža $Con\mathcal{V}$ izomorfna mreži kongruencija $Con\mathcal{A}$ neke algebre $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$, tada je $|\mathcal{F}| \geq |K|$

Ze neke specijalne algebarske mreže se može dati karakterizacija preko algebri sa konačno mnogo operacija.

Za algebarsku mrežu $\mathcal{L}$ kažemo da je **stegnuta** ako i samo ako postoji skup I kompaktnih elemenata iz mreže $\mathcal{L}$ tako da je $\bigvee I = 1$ i da je svaki kompaktan element iz L uporediv sa svakim elementom iz I.

Teorema 7.7 *(W.A.Lampe 1982) Svaka stegnuta mreža je izomorfna mreži kongruencija nekog grupoida.*

Drugo pitanje koje je proizašlo iz Teoreme Grätzer-Schmidt je da li algebra koja se konstruiše u istoj teoremi mora biti beskonačna iako je početna mreža konačna? Za dati problem se obično koristi skraćenica **FCLP**(**The finite congruence lattice problem**). FCLP je do danas nerešen i predstavlja jedan od najtežih i najduže nerešenih problema univerzalne algebre. Najpoznatiji rezultat na tu temu svodi taj problem na ekvivalentan problem u teoriji grupa:

Teorema 7.8 *(Pálffy, Pudlák) Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *Svaka konačna mreža je izomorfna mreži kongruencija neke konačne algebre.*

(ii) *Svaka konačna mreža je izomorfna nekom intervalu u mreži podgrupa neke konačne grupe.*

7.2 Teorema Birkhoff-Frink

Tvrđenje 7.9 *Uređen skup* $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ *je algebarska mreža za svaku algebru* $\mathcal{A}$ *tipa* $\mathcal{F}$*.*

Dokaz: Posmatrajmo mrežu slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$, $Cw\mathcal{A}$. Tvrđenje 6.2 nam kaže da je $\downarrow\Delta \cong Sub\mathcal{A}$. Pošto je $\downarrow\Delta$ zatvoren interval u mreži slabih kongruencija, za koju smo pokazali da je algebarska, na osnovu posledice 4.17 sledi da je $\downarrow\Delta$ algebarska mreža. Dakle $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ je algebarska mreža. ■

Tvrđenje 7.10 *Svaka algebarska mreža izomorfna je mreži ideala neke polumreže sa nulom.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L} = (L, \leq)$ proizvoljna algebarska mreža na osnovu tvrđenja 4.11 znamo da je $(\mathcal{K}(L), \subseteq)$ sup-polumreža sa nulom. Na osnovu posledice 4.15 znamo da je $(\mathcal{I}_d(\mathcal{K}(L)), \subseteq)$ algebarska mreža. Posmatrajmo preslikavanje $f : L \to \mathcal{I}_d(\mathcal{K}(L))$, definisano sa $f(a) = \bigvee\{\downarrow a_i \mid i \in I\}$ gde je $\{a_i \mid i \in I\} = \downarrow a \cap \mathcal{K}(L)$. Za proizvoljno $I \in \mathcal{I}_d(\mathcal{K}(L))$, važi da je $f(\bigvee I) = I$, pa je f sirjekcija. Direktno po definiciji se proverava da se f slaže sa poretkom, pa sledi da je f izomorfizam. Dakle $(L, \leq) \cong (\mathcal{I}_d(\mathcal{K}(L)), \subseteq)$ ■

Teorema 7.11 (**Birkhoff**, **Frink**) *Svaka algebarska mreža izomorfna je mreži poduniverzuma neke algebre.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L} = (L, \leq)$ proizvoljna algebarska mreža. Posmatrajmo algebru $\mathcal{A} = (\mathcal{K}(L), \vee, \{f_{a,b} \mid a, b \in K\})$, gde je $(\mathcal{K}(L), \vee)$ polumreža kompaktnih elemenata, dok je za proizvoljno $x \in \mathcal{K}(L)$,

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a, & za \quad a \vee b = x \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

Sada se lako pokazuje da je $Sub\mathcal{A} = \mathcal{I}_d(\mathcal{K}(L))$, pa na osnovu tvrđenja 7.10 sledi da je $(L, \leq) \cong Sub(\mathcal{A}, \subseteq)$. ■

Algebra konstruisana u prethodnoj teoremi ima puno operacija u slučaju kada je algebarska mreža velika. Prirodno je postaviti pitanje u kom slučaju možemo smanjiti broj fundamentalnih operacija date algebre. Sledeća teorema daje odgovor na to pitanje.

Tvrđenje 7.12 *Za mrežu $\mathcal{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni :*
(i) $\mathcal{L}$ je izomorfna mreži poduniverzuma neke algebre prebrojivog tipa;
(ii) $\mathcal{L}$ je izomorfna mreži poduniverzuma nekog komutativnog grupoida;
(iii) $\mathcal{L}$ je algebarska mreža tako da za svaki kompaktan element a iz L, skup svih kompaktnih elemenata koji pripadaju $\downarrow a$ je prebrojiv.

Dokaz: Jasno je da (ii) implicira (i). Koristeći trivijalnu činjenicu da su u mreži $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ kompaktni elementi tačno konačno generisani poduniverzumi neke algebre $\mathcal{A}$ lako se pokazuje da (i) implicira (iii). Da bismo kompletirali dokaz ostaje da pokažemo da (iii) implicira (ii).

Označimo sa K skup svih ne-nula kompaktnih elemenata mreže $\mathcal{L}$. Za svako $a \in K$ dobro uredimo skup $K \cap \downarrow a$ u niz (napomenimo da nam za to ne treba aksioma izbora jer je dati skup po pretpostavci prebrojiv) $a' = (a'_0, a'_1, \dots)$ na sledeći način:

$a'_0 = a$ i ako a sadrži beskonačno mnogo elemenata iz K, tada niz a' nema ponavljanja, ali ako sadrži samo konačno mnogo elemenata, recimo n, tada je niz a' periodičan i to sa $a'_i = a'_j$ ako i samo ako $i \equiv j (\mathrm{mod}\ n)$.

Sada za $a, b \in V$ definišimo

$$a * b = \begin{cases} a'_{i+1}, & \text{ako } b = a'_i \\ b'_{i+1}, & \text{ako } a = b'_i \\ a \vee b, & \text{inače.} \end{cases}$$

Jasno je da je $\mathcal{A} = (K, *)$ komutativan grupoid. Direktno se pokazuje da su poduniverzumi grupoida $\mathcal{A}$ tačno prazan skup i ideali polumreže $(K, \vee)$ (pogledati tvrđenje 4.11). Sada na osnovu tvrđenja 7.10 sledi da je $(L, \leq) \cong (Sub(\mathcal{A}), \subseteq)$. ■

7.3 Teorema Grätzer-Schmidt

Tvrđenje 7.13 *Uređeni skup* $(Con\mathcal{A}, \subseteq)$ *je algebarska mreža za svaku algebru* $\mathcal{A}$ *tipa* $\mathcal{F}$.

Dokaz: Iz tvrđenja 6.2(iii) znamo da je $Con\mathcal{A}$ zatvoren interval u algebarskoj mreži $Cw\mathcal{A}$ pa na osnovu posledice 4.17 sledi da je $(Con\mathcal{A}, \subseteq)$ algebarska mreža. ■

U nastavku odeljka dokazujemo Teoremu Grätzer-Schmidt, koja kaže da za svaku algebrasku mrežu $\mathcal{L}$ postoji algebra čija je mreža kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$. Napomenimo da ne dajemo orginalni dokaz već pratimo rad [30].

Označimo zbog čitljivosti sa K skup $\mathcal{K}(L) \setminus \{0\}$ svih nenula kompaktnih elemenata neke proizvoljne netrivijalne algebarske mreže $\mathcal{L}$. Za uređenu trojku $\mathcal{A} = (A, r, h)$ kažemo da je K-**vredonosni graf** ako i samo ako je (A, r) neusmeren graf bez petlji i $h : r \to K$ proizvoljno preslikavanje iz skupa grana r u K.

Ako su $\mathcal{A}_i = (A_i, r_i, h_i)$, $i = 0, 1$ dva K-vredonosna grafa, za preslikavanje $f : A_0 \to A_1$ kažemo da je **stabilno** ako i samo ako za svako $\{a, b\} \in r_0$ važi ili da je $f(a) = f(b)$ ili

$$\{f(a), f(b)\} \in r_1 \quad \text{i} \quad h_1(\{f(a), f(b)\}) = h_0(\{a, b\}).$$

Sa $Stab(\mathcal{A})$ obeležavamo monoid svih stabilnih preslikavanja iz A u A, i zovemo ga **stabilizator** od $\mathcal{A}$.

Neka je F skup preslikavanja iz X u X, i neka su $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ podskupovi skupa X. Kažemo da $\{a, b\}$ **dominira** $\{c, d\}$ preko F u oznaci $\{a, b\}D_F\{c, d\}$ ako i samo ako postoje elementi $c = u_0, u_1, \ldots, u_n = d$ iz X i funkcije $f_1, \ldots, f_n \in F$ tako da je $\{f_i(a), f_i(b)\} = \{u_{i-1}, u_i\}$ za $1 \leq i \leq n$.

Neka je $\mathcal{A} = (A, r, h)$ K-vredonosni graf, i zbog čitkosti sa $\mathcal{I}$ označimo skup $\mathcal{I}_d(K) \cup \{\emptyset\}$. Sa $\mathcal{E}_c$ označimo operator zatvaranja na $\mathcal{P}(A)$ koji svaku familiju podskupova slika u najmanju particiju koja sadrži datu familiju. Definišimo dve preslikavanja $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{E}(A)$ i $\psi : Con(A, Stab(\mathcal{A})) \to \mathcal{P}(K)$ na sledeći način:

$\varphi(I) = \mathcal{E}_c(h^{-1}[I])$, za $I \in \mathcal{I}$,

$\psi(E) = h[r \cap E]$, za $E \in Con(A, Stab(\mathcal{A}))$.

Lako se proverava da je kodomen funkcije φ u stvari $Con(A, Stab(\mathcal{A}))$.

Tvrđenje 7.14 *Neka je $\mathcal{A} = (A, r, h)$ K-vredonosni graf, $F \subseteq Stab(\mathcal{A})$ i pretpostavimo da*
(i) h je sirjektivno preslikavanje,
(ii) ako je $x \in r$ i $h(x) \leq \alpha_1 \vee \alpha_2$ za $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, onda postoji ciklus $x, x_1, \ldots, x_n$ iz r tako da je $h(x_i) \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$ za $1 \leq i \leq n$,
(iii) ako je $x, x_1, \ldots, x_n$ ciklus iz r, tada je $h(x) \leq h(x_1) \vee \cdots \vee h(x_n)$,
(iv) ako $x, y \in r$ i važi $h(x) = h(y)$ tada postoji $f \in F$ tako da je $f[x] = y$,
(v) ako $c, d \in A$ i $c \neq d$ tada postoji put $x_1, \ldots, x_n \in r$ koji spaja c i d sa osobinom da $\{c, d\} D_F x_i$ za svako $1 \leq i \leq n$.

Tada $\psi(E) \in \mathcal{I}$ za svaku kongruenciju E algebre (A, F) i $\psi = \varphi^{-1}$.

Dokaz: Dokažimo prvo da je $\psi(E)$ ideal polumreže K. Neka su $\alpha_1, \alpha_2 \in \psi(E)$ i neka je $\alpha \leq \alpha_1 \vee \alpha_2$. Pošto je h sirjektivno preslikavanje znamo da postoji neko $x \in r$ tako da je $h(x) = \alpha$. Na osnovu uslova (ii) znamo da postoji ciklus $x, x_1, \ldots, x_n$ iz r sa osobinom da $h(x_i) \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$ za $1 \leq i \leq n$. Dalje neka je $\alpha_1 = h(y_1)$ i $\alpha_2 = h(y_2)$ za neke $y_1, y_2 \in r \cap E$. Kako je $x, x_1, \ldots, x_n$ ciklus, uzastopnom primenom uslova (iv) i tranzitivnosti kongruencije E dobijamo da $x \in E$, što implicira $h(x) = \alpha \in \psi(E)$. Dakle $\psi(E) \in \mathcal{I}$.

Dokažimo sada da je $\psi\varphi = 1$. Neka je I proizvoljan ideal polumreže K. Kako je preslikavanje h sirjektivno sledi da

$$\psi\varphi(I) = h[r \cap \mathcal{E}_c(h^{-1}(I))] \supseteq h[h^{-1}[I]] = I.$$

Sa druge strane neka je dato proizvoljno $x \in r \cap \mathcal{E}_c(h^{-1}(I))$. Tada je na osnovu uslova (iii)

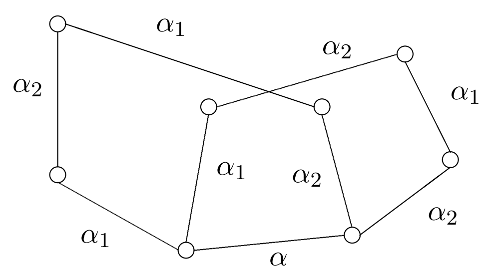
$$\alpha = h(x) \leq h(x_1) \vee \cdots \vee h_(x_n),$$

gde je $x_1, \ldots, x_n \in h^{-1} \cap r$ ciklus koji povezuje krajnje tačke x. Kako je I ideal sledi da $\alpha \in I$. Dakle važi i druga inkluzija.

Dokažimo još da je $\varphi\psi = 1$ i time ćemo kompletirati dokaz. Neka je dato proizvoljno $E \in Con(A, F)$. Jasno važi $\varphi\psi(E) = \mathcal{E}_c(h^{-1}h[r \cap E]) \supseteq \mathcal{E}_c(r \cap E)$. Neka je sada $\{a, b\} \in \mathcal{E}_c(h^{-1}h[r \cap E])$ proizvoljno dato. Tada postoji put $x_1, \ldots, x_k$ koji spaja a i b sa osobinom da je za proizvoljno $1 \leq i \leq k$ $h(x_i) = h(y_i)$ za neko $y_i \in r \cap E$. Iz uslova (iv) dobijamo da $x_i \in E$, što dalje implicira da $\{a,b\} \in \mathcal{E}_c(r \cap E)$. Pošto je E relacija ekvivalencije važi $\mathcal{E}_c(r \cap E) \subseteq E$. Sa druge strane neka je $\{c,d\} \in E$ proizvoljno dato. Na osnovu uslova (v) postoji put $z_1, \dots, z_n$ iz r koji spaja c i d i važi da $\{c,d\} D_F z_i$ za $1 \leq i \leq n$. Pošto je E kongruencija algebre (A,F), dobijamo da $z_i \in E$ za svako $1 \leq i \leq n$, što dalje implicira da $\{c,d\} \in \mathcal{E}_c(r \cap E)$. Sa ovim je dokaz završen. ■

Kako su ψ i φ monotona preslikavanja sledi da je $(\mathcal{I}, \subseteq) \cong (Con(A,F), \subseteq)$. Dalje tvrđenje 7.10 nam kaže da je $\mathcal{L} = (L, \leq) \cong (\mathcal{I}, \subseteq)$, pa odatle sledi da je $(L, \leq) \cong (Con(A,F), \subseteq)$.

Dakle da bismo dokazali Grätzer-Schmidt-ovu teoremu dovoljno je da konstruišemo K-vredonosni graf $\mathcal{A} = (A, r, h)$ koji zajedno sa svojim stabilizatorom $F = Stab(\mathcal{A})$ zadovoljava uslove $(i) - (v)$ iz prethodne teoreme. U nastavku teksta konstruišemo takav K-vredonosni graf.



Slika 7.1

Za svako $\alpha \in K$ definišimo K-vredonosni graf $\mathcal{B}_\alpha = (B_\alpha, s_\alpha, k_\alpha)$, koji ćemo zvati α-**ćelija**, na sledeći način:
sa αC označimo skup $\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha \leq \alpha_1 \vee \alpha_2\}$. Sada za svako $w = (\alpha_1, \alpha_2) \in \alpha C$ označimo

$$x_i^w = \{u_{i-1}^w, u_i^w\}, \tag{7.2}$$

$1 \leq i \leq 4$, pri čemu je $u_0^w = a$, $u_4^w = b$, za svako $w \in \alpha C$, i sva ostala temena su različita.

Sada imamo,

$B_\alpha = \{a,b\} \cup \{u_i^w \mid 1 \leq i \leq 3,\ w \in \alpha C\}$,

$$s_\alpha = \{\{a,b\}\} \cup \{x_i^w \mid 1 \le i \le 4,\ w \in \alpha C\},$$

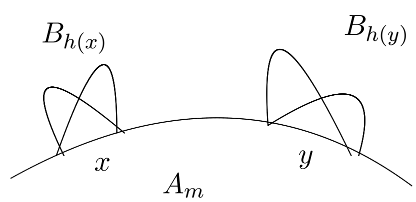
$$k_\alpha(\{a,b\}) = \alpha,\ k_\alpha(x_1^w) = k_\alpha(x_3^w) = \alpha_1,\ k_\alpha(x_2^w) = k_\alpha(x_4^w) = \alpha_2.$$

$\{a,b\}$ ćemo nazivati **baza** α-ćelije $\mathcal{B}_\alpha$. (7.2) ćemo nazivati **lanac** od $\mathcal{B}_\alpha$, (pogledati sliku 7.1). U nastavku teksta izostavljamo indekse.

Sada se traženi K-vredonosni graf $\mathcal{A} = (A, r, h)$ konstruiše induktivno na sledeći način.

Uzmimo neki element α_0 iz K. $\mathcal{A}_0 = (A_0, r_0, h_0)$ će biti graf sa jednom granom, pri čemu će slika te grane u odnosu na preslikavanje h_0 biti α_0. Ako je $\mathcal{A}_n = (A_n, r_n, h_n)$ konstruisano, onda $\mathcal{A}_{n+1} = (A_{n+1}, r_{n+1}, h_{n+1})$ konstruišemo na sledeći način:

Neka je $x \in r_n \setminus r_{n-1}$, $x = \{c, d\}$ i $h_n(x) = \alpha$. Zalepimo kopiju od $\mathcal{B}_\alpha$ za $\mathcal{A}_n$ tako što idetntifikujemo $\{c,d\}$ sa bazom $\{a,b\}$ od $\mathcal{B}_m$. Drugim rečima, prošireni graf za skup temena ima $A_n \cup (B_\alpha \setminus \{a,b\})$, dok je skup svih grana $r_n \cup (s_\alpha \setminus \{\{a,b\}\})$. Kako je $h_n(x) = \alpha = k_\alpha(\{a,b\})$, sledi da je zajednička ekstenzija od h_n i k_α dobro definisana. Primenjujući ovaj postupak za svako $x \in r_n \setminus r_{n-1}$, dobijamo $\mathcal{A}_{n+1} = (A_{n+1}, r_{n+1}, h_{n+1})$, (pogledati sliku 7.2).



Slika 7.2

Primetimo da je $A_n \subseteq A_{n+1}$, $r_n \subseteq r_{n+1}$, $h_n \subseteq h_{n+1}$. Koristeći datu činjenicu lako se pokazuje da je $\mathcal{A} = (A, r, h)$ definisan sa

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n, \quad r = \bigcup_{n\in\omega} r_n, \quad h = \bigcup_{n\in\omega} h_n,$$

jedan K-vredonosni graf.

Tvrđenje 7.15 *$\mathcal{A}$ zadovoljava uslove (i), (ii), (iii).*

Dokaz: (i) Pošto je $\alpha_0 \leq \alpha \vee \alpha_0$ za svako $\alpha \in K$, dobijamo da je h_1 sirjektivno preslikavanje, pa je samim tim i h sirjektivno.

(ii) Svaka grana $x \in r$ je baza od neke kopije od $h(x)$-ćelije. Dakle ako važi $h(x) \leq \alpha_1 \vee \alpha_2$, onda se ciklus x, x_1, x_2, x_3, x_4 nalazi u datoj $h(x)$-ćeliji i vrednovan je redom sa $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2$.

(iii) Dokaz dajemo indukcijom. $\mathcal{A}_0$ ne sadrži cikluse pa trivijalno važi uslov (iii). Pretpostavimo da dati uslov važi za sve cikluse u $\mathcal{A}_m$, i neka je $x, x_1, \ldots, x_n$ proizvoljni ciklus iz $\mathcal{A}_{m+1}$. Ako je $x \in r_{m+1} \setminus r_m$, tada se x nalazi na jednom od lanaca neke α-ćelije $\mathcal{B}_\alpha$, koja je dodata u $(m+1)$-om koraku. Po konstrukciji, svaki ciklus koji sadrži x mora da sadrži i dati lanac. Dakle dobijamo da je $h(x) = h(x_k)$ za neko $1 \leq k \leq n$ što dalje implicira $h(x) \leq \bigvee_{1 \leq i \leq n} h(x_i)$. Neka je sada $x \in r_m$. Zamenimo svaku granu ciklusa $x, x_1, \ldots, x_n$ koja nije sadržana u r_m sa bazom njene ćelije. Ovim postupkom dobijamo ciklus $x, y_1, \ldots, y_k$ iz r_m. Na osnovu indukcijske hipoteze sledi $h(x) \leq \bigvee_{1 \leq i \leq k} h(y_i)$, dok iz trivijalne činjenice da je vrednost baze proizvoljne α-ćelije uvek sadržana u supremumu vrednosti grana svakog njenog lanca dobijamo da je $\bigvee_{1 \leq i \leq k} h(y_i) \leq \bigvee_{1 \leq i \leq n} h(x_i)$. Dakle važi $h(x) \leq \bigvee_{1 \leq i \leq n} h(x_i)$, i time je dokaz gotov. ∎

Ostaje još da pokažemo da dati K-vredonosni graf zadovoljava uslove (iv) i (v). Da bi pokazali ta dva uslova moraćemo da definišemo eksplicitno neka stabilna preslikavanja.

Prvo primetimo da za svaku α-ćeliju $\mathcal{B}_\alpha$, sa bazom $\{a, b\}$, postoji stabilna involucija f iz $\mathcal{B}_\alpha$ u $\mathcal{B}_\alpha$ takva da je $f(a) = b$ i $f(b) = a$. Ova trivijalna činjenica nam daje motivaciju za sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 7.16 *Svako stabilno preslikavanje $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$ može da se proširi do stabilnog preslikavanja $f' : \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_{m+1}$, pa samim tim i do stabilnog preslikavanja $f'' : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je $t \in A_{n+1} \setminus A_n$, označimo sa $\{a, b\}$ bazu ćelije $\mathcal{B}$ koja sadrži t. Ako je $f(a) = f(b)$, uzmimo da je $f'(t) = f(a)$. Ako je pak $c = f(a) \neq f(b) = d$, onda kako je f stabilno preslikavanje dobijamo $h_n(\{a, b\}) = h_m(\{c, d\})$. Odavde zaključujemo da je $\{c, d\}$ baza neke kopije od ćelije $\mathcal{B}$. Za datu ćeliju znamo da postoji stabilna involucija koja je određena sa $f|_{\{a,b\}}$, f' je tada ekstenizija od f definisana preko pomenute involucije. U oba slučaja je jasno da je f' stabilno preslikavanje. ∎

Neka je sada $x \in r_m \setminus r_{m-1}$, $m \geq 0$. Definišimo $f_x : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_m$ na sledeći način:

Neka je x grana lanca x_1, x_2, x_3, x_4 čija je baza $\{a, b\} \in r_{m-1}$, $a = u_0$, $b = u_4$, $x_i = \{u_{i-1}, u_i\}$ za $i = 1, 2, 3, 4$, $h_m(x_j) = h_m(x_{j+2}) = \alpha_j$ za $j = 1, 2$.

Ako je $k = 1, 2$ uzmimo

$$f_{x_k}(u_k) = f_{x_k}(u_{k+1}) = u_k \text{ i } f_{x_k}(y) = u_{k-1} \text{ za sve ostale } y \in A_m,$$

a ako je $k = 3, 4$ uzmimo

$$f_{x_k}(u_k) = f_{x_k}(u_{k-1}) = u_{k-1} \text{ i } f_{x_k}(y) = u_k \text{ za sve ostale } y \in A_m.$$

U slučaju da $x \in r_0$, za f_x uzmimo identično preslikavanje na A_0. Jasno je da su sva preslikavanja f_{x_k} stabilna i da važi $f_{x_k}[A_m] = x_k$.

Tvrđenje 7.17 *$\mathcal{A}$ zadovoljava uslov (iv).*

Dokaz: Neka je $x \in r_m \setminus r_{m-1}$, $y \in r_m$, $h(x) = h(y)$. Neka je dalje $f_x : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_m$ gore definisano stabilno preslikavanje. Pošto je $f_x[A_m] = x$, kompozicija $g \circ f_x$, gde je $g : x \to y$, je takođe stabilno preslikavanje iz $\mathcal{A}_m$ u $\mathcal{A}_n$. Na osnovu tvrđenja 7.16 $g \circ f_x$ može da se proširi do stabilnog preslikavanja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Jasno tada je $f[x] = y$. ■

Tvrđenje 7.18 *$\mathcal{A}$ zadovoljava uslov (v).*

Dokaz: Dokaz dajemo indukcijom. Kako se identično preslikavanje skupa A nalazi u F, tada sve grane iz r zadovolajvaju uslov (v), tj. $\mathcal{A}_0$ zadovoljava uslov (v).

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $\mathcal{A}_m$ i dokažimo da važi za $\mathcal{A}_{m+1}$. Neka je $c, c' \in A_{m+1}$, $c, c' \notin r$ i $c \neq c'$. Konstruisaćemo put $x_1, \ldots, x_s$ koji spaja neku tačku a iz A_m sa c. Ako je $c \in A_m$ put je prazan. Ako $c \in A_{m+1} \setminus A_m$, onda c leži na nekom lancu $a = u_0, \ldots, u_n = b$ neke ćelije sa bazom $\{a, b\}$ koja je dodata u $(m+1)$-om koraku konstrukcije, i uzmimo da je recimo $c = u_s$ za $0 < s \leq 2$. Tada je put $x_1, \ldots x_s$ u stvari $\{u_0, u_1\}, \ldots, \{u_{s-1}, u_s\}$. Pošto $\{c, c'\} \notin r$ imamo da je $c \neq u_{s+1}$ i $c' \neq u_{s-1}$, što dalje implicira da f_{x_i} preslikava $\{c, c'\}$ sirjektivno na x_i za $i = 1, \ldots, s$. Dakle $\{c, c'\}$ dominira $\{c, a\}$. Na sličan način pokazujemo da postoji put $x'_1, \ldots x'_t$, koji spaja teme a' iz A_m sa c' i važi $\{c, c'\} D_F x'_1, \ldots, x'_t$, pa jasno i $\{c, c'\} D_F \{c', a'\}$. Zbog identičnog preslikavanja imamo da $\{c, c'\} D_F \{c, c'\}$, koristeći tu činjenicu dobijamo da $\{c, c'\} D_F \{a, a'\}$. Zbog indukcijske hipoteze znamo da postoji put, recimo $y_1, \ldots y_n$, iz r koji spaja a i a' sa osobinom da $\{a, a'\} D_F y_i$ za svako $1 \leq i \leq n$. Pošto je F monoid i D_F tranzitivna relacija imamo da $\{c, c'\} D_F y_1, \ldots, y_n$. Stoga $x_s, \ldots, x_1, y_1, \ldots y_n, x'_1, \ldots, x'_t$ je traženi put iz r koji spaja c sa c'. ∎

7.4 Simultane reprezentacije

Možemo li dve ili više zadatih mreža predstaviti mrežama relacija, koje su sve povezane sa jednom istom algebrom? Godine 1972. Lampe je dokazao da je to moguće uraditi pomoću mreže kongruencija i mreže podalgebri:

Teorema 7.19 ([21]) *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ dve zadate algebarske mreže, takve da $\mathcal{L}_2$ sadrži bar dva elementa, tada postoji algebra $\mathcal{A}$, takva da je $Sub\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$, a $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_2$.*

Ovim je praktično dokazano da su mreže kongruencija i podalgebri nezavisne jedna od druge. Videli smo da su automorfizmi bijektivne relacije saglasne sa strukturom algebre. No, kako oni ne čine mrežu u odnosu na inkluziju, već grupu u odnosu na operaciju slaganja relacija, problem njihove nezavisnosti u odnosu na podalgebre ili kongruencije treba postaviti ovako: ako je zadata mreža $\mathcal{L}$ i grupa $\mathcal{G}$, da li postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je njena mreža podalgebri (ili kongruencija) izomorfna sa $\mathcal{L}$, a grupa automorfizama izomorfna sa $\mathcal{G}$. Odgovor je pozitivan u slučaju podalgebri, a i u slučaju kongruencija pod uslovom da je $|L| \geqslant 2$, tj. da mreža $\mathcal{L}$ ima bar dva elementa (videti [20]). Najzad, Lampe je dokazao i da su sve tri strukture nezavisne:

Teorema 7.20 ([22]) *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ dve zadate algebarske mreže, takve da $\mathcal{L}_2$ sadrži bar dva elementa, a $\mathcal{G}$ zadata grupa, tada postoji algebra $\mathcal{A}$, takva da je $Sub\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$, $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_2$ i $Aut\mathcal{A} \cong \mathcal{G}$.*

Najzad, možemo se pitati da li dve zadate algebarke mreže možemo predstaviti mrežama kongruencije algebre i njene podalgebre. Jedan dovoljan uslov dao je Lampe 2005. godine:

Teorema 7.21 ([23]) *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_0$ dve algebarske mreže s kompaktnim najvećim elementom, pri čemu $\mathcal{L}_1$ ima bar elementa, postoji grupoid $\mathcal{A}$ takav da $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$ i $Con\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{L}_0$, za neki podgrupoid $\mathcal{A}_0$ grupoida $\mathcal{A}$.*

Kako su konačne mreže algebarske i, štaviše, sastoje se isključivo od kompaktnih elemenata, ovim je rešen problem simultanog predstavljanja dve konačne mreže mrežama kongruencije algebre i neke njene podalgebre:

Posledica 7.22 *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_0$ dve konačne mreže, takve da $\mathcal{L}_1$ sadrži bar dva elementa, postoji grupoid $\mathcal{A}$ takav da $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$ i $Con\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{L}_0$, za neki podgrupoid $\mathcal{A}_0$ grupoida $\mathcal{A}$.*

Poglavlje 8

Reprezentacija mrežama slabih kongruencija

8.1 Δ-podesan element mreže

Konkretni problem reprezentacije mreža slabih kongruencija smo spominjali u odeljku 6.6, i taj problem je uspešno rešen od strane M. Ploščice u [29]. Sa druge strane problem apstraktnog problema je dokazan u [49]. Sledi dokaz tog tvrđenja.

Tvrđenje 8.1 *Za svaku algebarsku mrežu $\mathcal{L}$ postoji algebra $\mathcal{A}$ tako da je $Cw\mathcal{A}$ izomorfno sa $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Na osnovu teoreme Grätzer-Schmidt znamo da postoji algebra $\mathcal{A}_0 = (A, F)$ tako da je $Con\mathcal{A}_0$ izomorfno sa $\mathcal{L}$. Definišimo sada algebru $\mathcal{A}$ koja ima isti nosač kao i $\mathcal{A}_0$ dok na dati skup operacija dodamo svaki element nosača kao konstantu. U tom slučaju algebra $\mathcal{A} = (A, F \cup A)$ ima samo jedan poduniverzum (celu algebru), što implicira $Con\mathcal{A} = Cw\mathcal{A}$. Pošto dodavanje konstanti ne utiče na strukturu mreža kongruencije dobijamo da je $Con\mathcal{A}_0 \cong Con\mathcal{A}$. Dakle zaključujemo $Cw\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$. ■

U poglavlju 6 smo videli da dijagonala ima poseban značaj u mreži slabih kongruencija, tj. da su mnoge lepe osobine te mreže direktno povezane sa relacijom Δ. Tako da se sledeći problem (još uvek nerešen) prirodno javlja.

Problem reprezentacije mreža slabih kongruencija. Neka je $\mathcal{L}$ algebarska mreža i neka je $a \in L$. Da li postoji algebra tako da je mreža slabih kongruencija date algebre izomorfna sa $\mathcal{L}$ pri čemu se element a datim izomorfizmom slika u dijagonalnu relaciju ?

Generalno problem reprezentacije algebarskih mreža preko slabih kongruencija ima negativan odgovor. Kao što znamo dijagonala je uvek kodistibutivan element u mreži slabih kongruencija, tako da za svaku algebarsku mrežu sa fiksiranim elementom, taj element mora biti kodistributivan, ako element nije kodistributivan onda ne postoji reprezentacija datog tipa.

Neka je $\mathcal{L}$ algebarska mreža. Za element $a \in L$ kažemo da je je Δ-**podesan** ako i samo ako postoji algebra $\mathcal{A}$ tako da je mreža slabih kongruencija izomorfna $Cw\mathcal{A}$ izomorfna sa $\mathcal{L}$, i ako se datim izomorfizmom Δ slika u a. Takođe u tom slučaju kažemo da algebra $\mathcal{A}$ **reprezentuje** (**predstavlja**) mrežu $\mathcal{L}$ sa fiksiranim elementom a, ili da je mrežu $\mathcal{L}$ sa fiksiranim elementom a **predstavljiva** algebrom $\mathcal{A}$.

U nastavku odeljka se podrazumeva da su sve mreže algebarske tako da se taj uslov neće posebno naglašavati.

Tvrđenje 8.2 *Svaki Δ-podesan element mreže je kodistributivan.*

Dokaz: Posledica tvrđenja 6.2 (i). $\blacksquare$

Tvrđenje 8.3 ([37]) *Δ-podesan element mreže zadovoljava sledeće uslove:*

(i) ako je $x \wedge y \neq \mathbf{0}$, onda je $\overline{x \vee y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;

(ii) ako je $x \neq \mathbf{0}$ i $\overline{x} < y$, tada $\overline{y \wedge a} \neq y \wedge a$;

(iii) ako je $\overline{x} \neq 0$ i $x \prec a$, tada $\bigvee\{y \in \uparrow a \mid y \vee \overline{x} < \mathbf{1}\} \neq \mathbf{1}$;

(iv) ako $y \in \downarrow a$ i $x \prec y$, tada postoji $z \in [y, \overline{y}]$, tako da
- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \leqslant z\}$ je ili prazan ili ima najveći element, i
- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \nleqslant z\}$ je totalno neuređen skup (može biti i prazan).

Ovde je
$$\mathrm{Ext}_x^y(t) := \{w \in [y, \overline{y}] \mid w \wedge \overline{x} = t\}.$$

Dokaz: (i) Na osnovu tvrđenja 6.32.

(ii) Ova formula je ekvivalentna sa uslovom da ako y nije najmanji element a nije ni atom, tada klasa $[y]_{\theta_a}$ ima više od jednog elementa. Ali to sledi trivijalno iz činjenice da klase u mreži slabih kongruencija imaju samo jedan element ako i samo ako predstavljaju prazan poduniverzum ili su u pitanju singltoni(misli se na podalgebre sa jednim elementom).

(iii) Direktna posledica teoreme 6.30.

(iv) Posledica teoreme 6.31. ■

Tvrđenje 8.4 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$ i $|[0]_{\theta_a}| > 1$, tada je $M_a = \{\overline{b} \mid b \in \downarrow a\}$ podmreža mreže $\mathcal{L}$.*

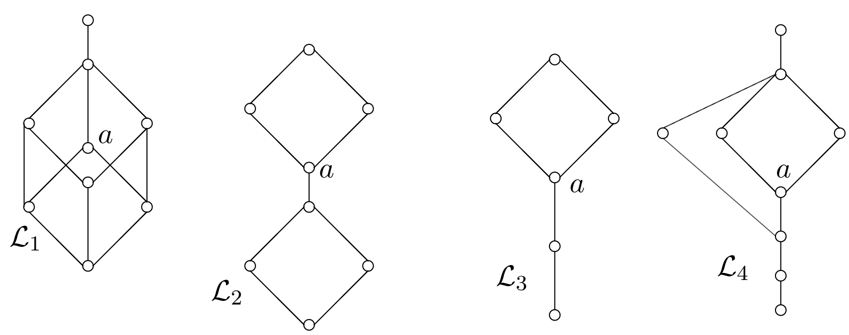
Dokaz: Ranije smo pokazali da je M_a zatvoren za operaciju $\wedge$. Pošto imamo $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y} \geq \overline{0} > 0$ na osnovu uslova (i) tvrđenja 8.3 sledi da

$$\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = \overline{x} \vee \overline{y}.$$

Koristeći ovu jednakost dobijamo

$$\overline{x} \vee \overline{y} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \geq \overline{x \vee y}.$$

Sa druge strane iz $\overline{x} \leq \overline{x \vee y}$ i $\overline{y} \leq \overline{x \vee y}$ sledi $\overline{x} \vee \overline{y} \leq \overline{x \vee y}$. ■



Slika 8.1

Slika 8.1 nam daje primer četiri elementa koja nisu Δ- podesni. Element a mreže $\mathcal{L}_1$ nije Δ-podesan jer ne zadovoljava uslov (i) tvrđenja 8.3. Zaista, klasa $[0]_{\theta_a}$ ima više od jednog elementa, pa bi na osnovu tvrđenja 8.4 skup svih najvećih elemenata (koji reprezentuju kvadrate podalgebri) trebao da bude zatvoren za supremume, što u ovom primeru nije slučaj. Element a mreže $\mathcal{L}_2$ nije Δ-podesan. Zaista, θ_a-klasa elementa koji je donje pokrivanje elementa a ima jedan element što je kontradikcija sa uslovom (ii). Koristeći uslov (iii) direktno se proverava da a nije Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}_3$. Takođe element a mreže $\mathcal{L}_\triangle$ nije Δ-podesan zbog uslova (iv).

Tvrđenje 8.5 *U mreži sa više od dva elementa, najveći element nikad nije* Δ*-podesan.*

Dokaz:

Direktna posledica uslova (ii) tvrđenja 8.3. ■

Podsetimo se da algebra $\mathcal{A}$ iz dokaza tvrđenja 8.1 ima samo jednu podalgebru. Tako da ako preformulišemo dato tvrđenje u jeziku Δ-podesnog elementa dobijamo da je u svakoj mreži najmanji element uvek Δ-podesan. Za reprezentaciju u tom slučaju kažemo da je **trivijalna**. Za predstavljanje koje nije trivijalno kažemo da je **netrivijalno**. Postoje mreže koje imaju samo trivijalnu reprezentaciju, ali o tome ćemo više pričati u poslednjem odeljku.

8.2 Predstavljivost posebnim algebrama

Problem predstavljivosti zadate mreže mrežama slabih kongruencija nekih posebnih klasa algebri možemo postaviti dvojako. Možemo se pitati koji su neophodni ili dovoljni uslovi da bi neka mreža sa svojim elementom a bila predstavljiva kao mreža slabih kongruencija algebre koja zadovoljava neke zadate osobine, tj. pripada nekoj zadatoj klasi algebri. Takođe, ako je zadata mreža $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i element $a \in L$, koje osobine mora zadovoljavati algebra $\mathcal{A}$, da bi mogla predstaviti mrežu $\mathcal{L}$ i element a svojom mrežom slabih kongruencija i elementom Δ.

Tvrđenja u ovom odeljku se reformulacija tvrđenja iz odeljka 6.3 prevedena na jezik reprezentacija.

Tvrđenje 8.6 *Ako je mreža* $\mathcal{L}$ *zajedno sa elementom a predstavljiva pomoću CEP algebre, u njoj važe sledeći uslovi:*

(i) *a je skrativ;*

(ii) *a je s-modularan;*

(iii) a je kostandardan;
(iv) za sve $x, y \in L$, *ako je* $x \leqslant \overline{y}$, *tada* $x \vee (a \wedge \overline{y}) = (x \vee a) \wedge \overline{y}$;
(v) za svako $x \in L$ *postoji* $y \in {\uparrow}a$ *takvo da* $y \wedge \overline{x} = x$.

Obrnuto, ako je zadovoljen neki od uslova (i)-(v) (samim tim i svi ostali), tada svaka algebra koja reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ *sa elementom a zadovoljava CEP.*

Dokaz:
Sledi direktno na osnovu tvrđenja 5.9 i 6.17. ■

Tvrđenje 8.7 *Da bi mreža* $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ *bila izomorfna mreži slabih kongruencija neke CIP algebre* $\mathcal{A}$, *u izomorfizmu koji slika* $a \in L$ *u* Δ, *neophodno je da a bude distributivno u* $\mathcal{L}$. *Takođe, ako je a distributivan, tada svaka algebra koja reprezentuje mrežu* $\mathcal{L}$ *sa elementom a zadovoljava CIP.*

Dokaz: Posledica tvrđenja 5.2. ■

Tvrđenje 8.8 *Ako je a kodistributivan element mreže* $\mathcal{L}$ *takav da važi: preslikavanje* $\phi : {\downarrow}a \to {\uparrow}a$ *definisano sa* $\phi(x) = a \vee \overline{x}$ *je slabo injektivno, tada je svaka algebra koja reprezentuje mrežu* $\mathcal{L}$ *sa elementom a, Hamiltonova. Obrnuto, ako je mreža* $\mathcal{L}$ *zajedno sa elementom a predstavljiva preko neke Hamiltonove algebre, onda je preslikavanje* ϕ *slabo injektivno.*

Dokaz: Direktna posledica tvrđenja 6.23. ■

Tvrđenje 8.9 *Ako je a kodistributivan element mreže* $\mathcal{L}$ *takav da važi: preslikavanje* $\phi : {\downarrow}a \to {\uparrow}a$ *definisano sa* $\phi(x) = a \vee \overline{x}$ *je slabo injektivna i a je skrativ element tada svaka algebra koja predstavlja mrežu* $\mathcal{L}$ *sa elementom a zadovoljava SCEP. Obrnuto, ako je mreža* $\mathcal{L}$ *zajedno sa elementom a predstavljiva preko neke SCEP algebre onda je a skrativ element i preslikavanje* ϕ *je slabo injektivno.*

Dokaz: Direktna posledica tvrđenja 6.7. ■

Tvrđenje 8.10 *Da bi mreža* $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ *bila izomorfna mreži slabih kongruencija neke wCIP algebre* $\mathcal{A}$, *u izomorfizmu koji slika* $a \in L$ *u* Δ, *potrebno je da a bude modularan u* $\mathcal{L}$. *Takođe, ako je a modularan, tada svaka algebra koja reprezentuje mrežu* $\mathcal{L}$ *sa elementom a zadovoljava wCIP.*

Dokaz: Sledi direktno na osnovu tvrđenja 6.22. ■

Tvrđenje 8.11 *Ako je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$. Ako je $a \vee \overline{b} < 1$ za svako $b \prec a$, tada je svaka algebra koja reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ sa elementom a kvazi-Hamiltonova. Sa druge strane, ako je algebra $\mathcal{A}$ koja reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ sa elementom a kvazi-Hamiltonova onda je $a \vee \overline{b} < 1$ za svako $b \prec a$.*

Dokaz: Sledi direktno iz 6.25. ∎

Tvrđenje 8.12 *Ako kodistributivan element a mreže $\mathcal{L}$ ima komplement, tada svaka algebra koja reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ sa elementom a nema poduniverzum koji je klasa neke kongruencije te algebre. Obratno, ako algebra $\mathcal{A}$ koja reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ sa elementom a nema poduniverzum koji je klasa kongruencije te algebre i ima bar jednu konstantu, onda a ima komplement u $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Direktna posledica tvrđenja 6.3. ∎

Tvrđenje 8.13 *Neka je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$. Ako je M_a podmreža mreže $\mathcal{L}$, tada svaka slaba kongruencija algebre $\mathcal{A}$ koja reprezentuje $\mathcal{L}$ ima najviše jednu klasu koja je podalgebra algebre $\mathcal{A}$. Obrnuto, ako algebra $\mathcal{A}$, čija svaka slaba kongruencija ima najviše jednu klasu koja je podalgebra, reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ onda je M_a podmreža mreže $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Direktna posledica tvrđenja 6.35. ∎

Tvrđenje 8.14 *Ako je $\mathcal{L}$ atomarno generisana mreža i neka je a fiksirani element. Tada svaka algebra koja reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ sa elementom a zadovoljava uslove (i), (ii) i (iii) teoreme 6.37. Obratno, ako algebra $\mathcal{A}$ koja reprezentuje mrežu $\mathcal{L}$ sa elementom a zadovoljava uslove (i), (ii) i (iii) teoreme 6.37 onda je mreža $\mathcal{L}$ atomarna.*

Dokaz: Sledi direktno iz teoreme 6.37. ∎

Sledeće tvrđenje predstavlja sistematizaciju do sada navedenih rezultata:

Tvrđenje 8.15 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, važi sledeće:*

(i) $x \wedge a < y \wedge a$ povlači $\overline{x} \vee a < \overline{y} \vee a$ za sve $x, y \in L$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a Hamiltonova algebra;

(ii) a je skrativi element mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a CEP algebra;

(iii) a je distributivan element mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a CIP algebra;

(iv) a je modularan element mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a wCIP algebra;

(v) $\overline{x} \vee a = \mathbf{1}$ za svako $x \in L$ ako i samo ako nijedna kongruencija algebre koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a nema klasu koja je pravi poduniverzum te algebre;

(vi) $x \prec a$ povlači $\overline{x} \vee a < 1$ za svako $x \in L$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a kvazi-Hamiltonova;

(vii) a ima komplement u mreži $\mathcal{L}$ ako i samo ako svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a ima bar jednu konstantu i nema nijednu kongruenciju čija je klasa pravi poduniverzum te algebre.

Tvrđenje 8.16 *Ako je a Δ-podesan element koji pripada centru mreže $\mathcal{L}$, tada svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zadovoljava sledeće:*

- $\mathcal{A}$ ima najmanje jednu konstantu;

- $\mathcal{A}$ je CEP i CIP algebra;

- za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$, $Con\mathcal{B}$ je izomorfno sa $Con\mathcal{A}$;

- $\mathcal{A}$ nije Hamiltonova algebra, šta više, nijedna kongruencija algebre $\mathcal{A}$ nema klasu koja je njen poduniverzum.

Dokaz: Sledi direktno na osnovu definicije centra mreže i tvrđenja 5.11, 6.3 i 6.20. ■

Na osnovu prethodnog pa i svih ostalih tvrđenja iz ovog odeljka zaključujemo da generalan odgovor na problem reprezentacije mreža slabih kongruencija ne može da se da preko teorema Birkhoff-Frink i Grätzer-Schmidt. Samim izabirom elementa neke mreže za kojeg ispitujemo da li je Δ-podesan mi namećemo neke uslove na algebru koja će da reprezentuje datu mrežu. Na primer ako je taj element skrativ algebra mora da zadovoljava CEP.

U posebnom slučaju problem reprezentacije mreža slabih kongruencija može da se reši koristeći teoreme Birkhoff-Frink i Grätzer-Schmidt. Taj slučaj raspravljamo u sledećem odeljku.

8.3 Poseban slučaj predstavljivosti

Sledeća teoreme daje rešenje problema predstavljivosti u jednom posebnom slučaju:

Teorema 8.17 ([46]) *Neka je $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ algebarska mreža i a element koji pripada centru mreže, takav da filter $\uparrow a$ ima tačno jedan koatom. Tada postoji algebra $\mathcal{A}$, čija je mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ izomorfna sa $\mathcal{L}$ u nekom preslikavanju f, takvom da $f(\Delta) = a$.*

Dokaz:

Neka je algebra $\mathcal{B} = (B, G)$, takva da je $Sub\mathcal{B} \cong \downarrow a$ - takva algebra postoji na osnovu teoreme Birkhoffa i Frinka. Zatim neka je algebra $\mathcal{C} = (C, H)$, takva da je $Con\mathcal{C} \cong \downarrow a \setminus \{1\}$ - takva algebra postoji prema teoremi Grätzera i Schmidta. Sada za nosač tražene algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ uzmemo $B \cup C$ i bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $B \cap C = \emptyset$, dok je skup operacija $F = G^* \cup H^* \cup \{c_x \mid x \in C\} \cup \{s\}$ definisan na sledeći način A na sledeći način:

Za svaku operaciju iz $g \in G$ odgovarajuća operacija iz G^* je

$$g^*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} g(x_1, x_2, ..., x_n), & x_1, x_2, ..., x_n \in B \\ x_1, & \text{inače;} \end{cases}$$

na isti način za svaku operaciju $h \in H$ definišemo odgovarajuću operaciju iz H^* sa:

$$h^*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} h(x_1, x_2, ..., x_n), & x_1, x_2, ..., x_n \in C \\ x_1, & \text{inače;} \end{cases}$$

i na kraju s je operacija dužine 4 definisana na skup A na sledeći način:

$$s(x, y, z, t) = \begin{cases} z, & \text{ako je } x = y \text{ i } x \in B \\ t, & \text{ako je } x \neq y \text{ i } x \in B \\ x, & \text{ako je } x \in C; \end{cases}$$

i, najzad, elemente skupa C uzmemo za konstante algebre $\mathcal{A}$. Pokažimo da je $Sub\mathcal{B} \cong Sub\mathcal{A}$ i da je $Con\mathcal{C} \cong Con\mathcal{A} \setminus \{A^2\}$.

Pošto je C poduniverzum od $\mathcal{A}$, lako se vidi da su svi poduniverzumi iz $\mathcal{A}$ tačno oblika $C \cup X$ gde je X poduniverzum algebre $\mathcal{B}$.

Sada ćemo da pokažemo da su sve kongruencije na $\mathcal{A}$ sem $\mathcal{A}^2$ tačno oblika $\rho \cup \Delta_B$ gde je ρ kongruencija na $\mathcal{C}$. Neka je ρ proizvoljna kongruencija na $\mathcal{C}$ pokažimo da je $\rho \cup \Delta_B$ kompatibilna sa svim operacijama iz F. Neka je $g^* \in G^*$ n-arna operacija ($n \geq 1$) i neka su $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n \in A$ takvi da

$x_i \rho \cup \Delta_B y_i$ za $1 \leq i \leq n$. Odavde sledi da za svako $1 \leq i \leq n$

$$x_i \rho y_i \quad i \quad x_i, y_i \in C \quad ili \quad x_i = y_i \quad i \quad x_i, y_i \in B.$$

Ako su svi x_i i y_i iz B onda je $g^*(x_1, \ldots, x_n) = g^*(y_1, \ldots, y_n)$ pa zbog refleksivnosti relacije $\rho \cup \Delta_B$ sledi $g^*(x_1, \ldots, x_n) \rho \cup \Delta_B g^*(y_1, \ldots, y_n)$. Ako pak postoji neko x_j koje nije iz B onda ni y_j ne pripada B pa dobijamo

$$g^*(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \rho \cup \Delta_B y_1 = g^*(y_1, \ldots, y_n).$$

Na isti način se pokazuje da je $\rho \cup \Delta_B$ kompatibilna sa svim operacijama $h^* \in H^*$. Samo nam ostaje da pokažemo kompatibilnost sa operacijom s. Neka je $x_i \rho \cup \Delta_B y_i$ za $1 \leq i \leq 4$. Ako $x_1 \in C$ tada i $y_1 \in C$, pa sledi da $s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \rho \cup \Delta_B y_1 = s(y_1, y_2, y_3, y_4)$. Ako je $x_1 \in B$ i $x_1 = x_2$ tada je $y_1 = x_1$, $y_1 = y_2$ i $y_1 \in B$, što implicira da $s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 \rho \cup \Delta_B y_3 = s(y_1, y_2, y_3, y_4)$. Ako je pak $x_1 \in B$ i $x_1 \neq x_2$, tada je i $y_1 \neq y_2$, pa sledi da $s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 \rho \cup \Delta_B y_4 = s(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Pokažimo još da je proizvoljna kongruencija θ na $\mathcal{A}$, sa uslovom $\theta \neq A^2$, oblika $(\theta \cap C^2) \cup \Delta_B$. Pretpostavimo suprotno, neka postoje elementi a, b tako da $a \neq b$, $a \in B$ i $a \theta b$. Tada za proizvoljne elemente x, y iz A važi

$$x = s(a, a, x, y) \theta s(a, b, x, y) = y,$$

ali to implicira da $\theta = A^2$, kontradikcija.

Pošto je element a iz centra mreže $\mathcal{L}$, na osnovu tvrđenja 5.5 dobijamo $\mathcal{L} \cong \uparrow a \times \downarrow a$. Lako se proverava da se i Δ nalazi u centru mreže $Cw\mathcal{A}$, pa na osnovu istog tvrđenja sledi da je $Cw\mathcal{A} \cong Con\mathcal{A} \times Sub\mathcal{A}$. Na osnovu malopre dokazanog imamo da je $Sub\mathcal{A} \cong Sub\mathcal{B}$ i kako je $Sub\mathcal{B} \cong \uparrow a$ dobijamo $\uparrow a \cong Sub\mathcal{A}$. Kako je $Con\mathcal{C} \cong Con\mathcal{A} \setminus \{A^2\}$, $Con\mathcal{C} \cong \downarrow a \setminus \{1\}$ i a jedinstveni koatom, dobijamo da je $\uparrow a \cong Con\mathcal{A}$. Dakle dobijamo $\mathcal{L} \cong Cw\mathcal{A}$ i jasno takav izomorfizam slika Δ u a. $\blacksquare$

Sledeća dva tvrđenja predstavljaju primer izvedene predstavljivosti, tj. kada iz predstavljivost mreže $\mathcal{L}$ sa fiksiranim elementom a sledi predstavljivost neke njene podmreže (naravno sa nekim fiksiranim elementom).

Tvrđenje 8.18 *Ako je a Δ-podesan element u mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i x element od L, takav da je $x = \overline{x}$, tada je $a \wedge x$ Δ-podesan u mreži $\downarrow x$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra za koju važi da je $Cw\mathcal{A}$ izomorfno sa $\mathcal{L}$ u mrežnom izomorfizmu π, koji preslikava Δ u a. Budući da je $a \wedge x \leqslant a$,

$a \wedge x$ odgovara relaciji Δ_B, za neku podalgebru $\mathcal{B} = (B, H)$ algebre $\mathcal{A}$. Sada je mreža $Sub\mathcal{B}$ izomorfna sa $\downarrow a \wedge x$ u izomorfizmu $\pi|_{\downarrow \Delta_B}$, dok je mreža $Cw\mathcal{B}$ izomorfna mreži $\downarrow x$ u izomorfizmu $\pi|_{\downarrow B^2}$ koje preslikava dijagonalnu relaciju Δ_B u $a \wedge x$. Dakle, $a \wedge x$ je Δ-podesan u mreži $\downarrow x$. ■

Tvrđenje 8.19 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, on je Δ-podesan i u mreži $\uparrow b$, kad god je $b \leqslant a$, tj. kad je b najmanji element neke klase ekvivalencije definisane sa: $x \sim y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$.*

Dokaz: Ako je b najmanji element u mreži, reprezentacija je trivijalna, pa možemo pretpostaviti da je $b \neq 0$.

Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra, čija je mreža slabih kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$ u izomorfizmu ϕ koji preslikava Δ u a. Isti izomorfizam slika Δ_B u b, za neki poduniverzim B algebre $\mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{A}' = (A, F)$, pri čemu je $F = H \cup B$ (F se dobija dodavanjem svih elemenata skupa B kao konstanti skupu H svih operacija algebre $\mathcal{A}$), tada je $Sub\mathcal{A}' \cong [b, a]$ i $Cw\mathcal{A}' \cong \uparrow b$. ■

Sada dajemo jedan dovoljan uslov kada je direktan proizvod predstavljive mreže i neke proizvoljne algebarske mreže predstavljiv. Za to nam treba pojam **$\downarrow a$-proširenja** mreže.

Neka je $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ kompletna mreža i $a \in L$ kodistributivan element u njoj. Proširimo mrežu $\mathcal{L}$ do mreže $\mathcal{L}'$ na sledeći način:

$L' = L \cup S$, gde je $S \cap L = \emptyset$, $S = \{s_b \mid b \in L, b \leqslant a\}$; sada definišemo poredak $\leqslant'$ na L':

ako $x, y \in L$, tada $x \leqslant' y$ ako i samo ako $x \leqslant y$;

ako $x, y \in S$, i $x = s_b$, $y = s_c$, $b, c \in L$, tada $x \leqslant' y$ ako i samo ako $b \leqslant c$;

ako $x \in L$, $y \in S$, $y = s_b$, tada $y \nleqslant x$, dok je $x \leqslant' y$ ako i samo ako $x \wedge a \leqslant b$.

Sada se lako pokazuje da L' u odnosu na relaciju $\leqslant'$ predstavlja mrežu, u oznaci $\mathcal{L}'$, koju zovemo **$\downarrow a$-proširenje** mreže $\mathcal{L}$.

Uočimo da je mreža $\mathcal{L}$ jedan ideal u svom $\downarrow a$-proširenju; skup S je, pak, filter u mreži $\mathcal{L}'$.

Teorema 8.20 *Neka je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{L}'$ $\downarrow a$-proširenje mreže $\mathcal{L}$. Ako je $\mathcal{M}$ proizvoljna algebarska mreža, tada je $(a, 1)$ Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}' \times \mathcal{M}$.*

Dokaz: Može se naći u [41]. ■

8.4 Predstavljivost posebnih mreža

Tvrđenje 8.21 *Ako je $\mathcal{L}$ algebarska mreža koja ima jednistven atom a, takav da je $L \setminus \uparrow a = \{0\}$, tada je $\mathcal{L}$ netrivijalno predstavljiva; tačnije, a je Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Neka je a jedinstveni atom. Skup $L' = L \setminus \{0\}$ zajedno poredkom nalseđenim iz mreže $\mathcal{L}$ čini algebarsku mrežu $\mathcal{L}'$. Na osnovu Grätzer-Schmidt-ove teoreme postoji algebra $\mathcal{A} = (A, F)$, takva da je $\mathcal{L}'$ izomorfna mreži njenih kongruencija. Da bismo predstavili $\mathcal{L}$, posmatramo algebru $\mathcal{A}_1 = (A, F, \{f_c \mid c \in A\})$, gde je $f_c : A \to A$ za svako $c \in A$, unarna operacija, definisana sa $f_c(x) = c$, za svako $x \in A$. Tada, jedini poduniverzumi su $\emptyset$ i A, pa je mreža slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ izomorfna sa $\mathcal{L}$, pri čemu a predstavlja dijagonalnu relaciju. ∎

Posledica 8.22 *Svaki atomaran algebarski lanac je netrivijalno predstavljiv, tj. njegov atom je Δ-podesan.*

Teorema 8.23 ([41]) *Neka je $\mathcal{L}$ atomaran algebarski lanac sa kompaktnim najvećim elementom, tako da i $L' = L \setminus \{0\}$ takođe čini atomaran lanac u odnosu na poredak iz $\mathcal{L}$. Tada $\mathcal{L}$ ima tačno dve netrivijalne reprezentacije pomoću mreža slabih kongruencija; preciznije, atom $0'$ lanca $\mathcal{L}$ i atom a lanca $\mathcal{L}'$ su Δ-podesni u $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Na osnovu posledice 8.22 imamo da je $0'$ Δ-podesan. Sada dokažimo da je i a Δ-podesan. Označimo sa L_k skup $\mathcal{K}(L \setminus \{0, 0'\})$ svih kompaktnih elemenata iz $L \setminus \{0, 0'\}$ i neka je $\mathcal{F}$ skup operacija na L_k definisan sa :

$$F = \{p_b \mid b \in L_k, b \neq 1\} \cup \{q_b \mid b \in L_k\} \cup \{r\} \cup \{s_b \mid b \in L_k\}, \text{ gde je:}$$

$$p_b(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } b < x \\ a, & \text{ako je } x \leqslant b; \end{cases}$$

$$q_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = 1 \\ b, & \text{ako je } b < x < 1 \\ x, & \text{ako je } x \leqslant b; \end{cases}$$

$r(x) = 1$, za svako $x \in L_k$;

$$s_b(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = y = 1 \\ b, & \text{ako je } x = 1 \text{ i } y \neq 1 \\ x \vee y, & \text{ako je } x \neq 1 \text{ i } y \neq 1. \end{cases}$$

Posmatrajmo algebru $\mathcal{A} = (L_k, \mathcal{F})$. Ona nema konstanti pa je $\emptyset$ poduniverzum, takođe se lako proverava da je $\{1\}$ poduniverzum. Zbog operacije r sledi da svaki neprazan poduniverzum M sadrži jedinicu. Ako dati poduniverzum M pored najvećeg elementa sadrži jošneki element, recimo y onda za svako $b \in L_k$ važi $s_b(1,y) = b$ pa je $M = L_k$. Dakle $Sub\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, L_k\}$.

Sada pokažimo da je za proizvoljno $\rho \in Con\mathcal{A}$, $[a]_\rho$ ideal polumreže $(L_k, \subseteq)$. Ako $x \in [a]_\rho$ i $y < x$, tada $q_y(x) = y$, a $q_y(a) = a$, pa iz $x\rho a$ sledi $y\rho a$, tako da je $y \in [a]_\rho$. Dalje neka su $x, y \in [a]_\rho$, i bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $x \neq 1$ i $y \neq 1$. Iz $(x,a) \in \rho$ i $(y,a) \in \rho$ sledi

$$(x \vee y, a \vee a) = (x \vee y, a \vee a) = (s_b(x,y), s_b(a,a)) \in \rho.$$

Očigledno $\rho \supseteq [a]_\rho$, pa zbog refleksivnosti $\rho \supseteq \Delta \vee [a]_\rho^2$. Ako je $x < y$ i $x\rho y$, tada $p_x(x) = a$, $p_x(y) = y$, pa $y\rho a$ i $x\rho a$, tj. $x, y \in [a]_\rho$, tako da $\rho \setminus \Delta \subseteq [a]_\rho^2$, pa $\rho \subseteq [a]_\rho^2 \vee \Delta$. Dakle važi $\rho = \Delta \vee [a]_\rho^2$. S druge strane, svaka relacija oblika $\Delta \vee I^2$, gde je I ideal polumreže $(L_k, \subseteq)$, je relacija ekvivalencije na skupu L_k koja je saglasna sa operacijama algebre $\mathcal{A}$. Dakle dobili smo da je $Con\mathcal{A} = \{I^2 \cup \Delta \mid I \text{ I je ideal polumreže } (L_k, \subseteq)\}$. Iz toga sledi da je $(Con\mathcal{A}, \subseteq) \cong (\mathcal{I}_d(L_k), \subseteq)$, a na osnovu tvrđenja 7.10 znamo da je $(\mathcal{I}_d(L_k), \subseteq) \cong (L \setminus \{0, 0'\}, \subseteq)$ pa je $(Con\mathcal{A}, \subseteq) \cong (L \setminus \{0, 0'\}, \subseteq)$. Kako je $Cw\mathcal{A} = Con\mathcal{A} \cup \{\emptyset\} \cup \{(1,1)\}$, dobijamo da je $Cw\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$ u izomorfizmu u kome dijagonali odgovara element a.

Osim elemenata 0, 0' i a ne može biti drugih Δ-podesnih elemenata u mreži $\mathcal{L}$, na osnovu uslova (2) tvrđenja 8.3. ■

Tvrđenje 8.24 *Prosta algebarska mreža sa više od dva elementa ima samo trivijalno predstavljanje.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}$ prosta algebrarska mreža sa više od dva elementa, i pretpostavimo da je element a kodistributivan i $a \neq 0$ i $a \neq 1$. Iz tvrđenja 5.1 sledi da je relacija θ_a kongruencija mreže $\mathcal{L}$. Klase $[a]_{\theta_a}$ i $[0]_{\theta_a}$ su različite i klasa $[a]_{\theta_a}$ ima bar dva elementa i to a i 1. Dakle $\theta_a \neq L^2$ i $\theta \neq \Delta$. Ali to je kontradikcija sa činjenicom da je mreža $\mathcal{L}$ prosta.

Sa ovim smo pokazali da svaki element koji je različit od jedinice nije kodistributivan pa zbog tvrđenja 8.2 nije ni Δ-podesan. Tvrđenje 8.5 kaže da u mreži sa više od dva elementa najveći element nikad nije Δ-podesan. Dakle jedini element koji je Δ-podesan je najmanji element, tj. mreža $\mathcal{L}$

ima samo trivijalno predstavljanje. ■

Kao posledicu prethodnog tvrđenja i teoreme 4.26 dobijamo da za svaki skup A mreža particija $\Pi(A)$ (pa samim tim i mreža ekvivalencija) ima samo trivijalnu reprezentaciju. Takodje na osnovu prethodnog tvrđenja i tvrđenja 3.9 dobijamo da za svako $n \geq 3$, mreža M_n ima samo trivijalno predstavljanje. Šta više koristeći tvrđenje 3.12 dobijamo da je za svako $k \in \omega \setminus \{0, 1\}$, $n_1, \ldots, n_k \geq 3$ mreža $M_{n_1,\ldots,n_k}$ prosta, pa samim tim ima samo trivijalno predstavljanje.

Tvrđenje 8.25 ([41]) *Svaka algebarska Bulova mreža kardinalnosti veće od 1 koja ima bar jedan atom je netrivijalno predstavljiva.*

Dokaz: Ako Bulova mreža ima dva elementa posledica 8.22 nam kaže da onda data mreža ima netrivijalno predstavljanje. Neka je sada $\mathcal{B}$ Bulova mreža kardinalnosti veće od dva. Neka je a proizvoljni atom iz $\mathcal{B}$. Tada je njegov komplement a' koatom date mreže. Od ranije znamo da se svaki element Bulove mreže nalazi u njenom centru pa zbog posledice 5.5 sledi $\downarrow a' \times \uparrow a' \cong \mathcal{B}$. Sada ako u teoremi 8.20 uzmemo $L = \{a'\}$, tada $L' = \{a', 1\} = \uparrow a'$, pa ako za $\mathcal{M}$ uzmemo mrežu $\downarrow a'$, dobijemo da je element (a', a') Δ-podesan u mreži $\downarrow a' \times \uparrow a'$. Elementu (a', a') odgovara element a' u izomorfizmu f iz posledice 5.5. ■

Posledica 8.26 *Svaka konačna Bulova mreža kardinalnosti veće od 1 je netrivijalno predstavljiva.*

Dokaz: Svaka konačna mreža je algebarska i atomarna, pa na osnovu prethodnog tvrđenja sledi da je netrivijalno predstavljiva. ■

Literatura

[1] S. Burris, H.P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[2] G. Czédli, A. Walendziak, *Subdirect representation and semimodularity of weak congruence lattices*, Algebra Univers. 44 (2000) 371-373.

[3] G. Czédli, B. Šešelja, A. Tepavčević, On the semidistributivity of elements in weak congruence lattices of algebras and groups, Algebra Univers. 58 (2008) 349–355.

[4] G. Czédli, M. Erné, B. Šešelja, A. Tepavčević, Characteristic triangles of closure operators with applications in general algebra, Algebra Univers. 62, 4 (2009) 399–418.

[5] I. Chajda, *Some Modifications of the Congruence Extension Property*, Math. Slovaca, 45 (1995) 251-254.

[6] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, *On weak congruence modular varieties*, Filomat (Niš) 9:3 (1995) 633-638.

[7] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Weak congruences in algebras having restricted similarity types*, Discussiones Math. 18 (1998) 27-38.

[8] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Lattices of compatible relations satisfying a set of formulas*, Algebra Univers. 40 (1998) 51-58.

[9] P. Crawley, R.P. Dilworth, *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[10] B. A. Davey, H. A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 2002.

[11] G. Eigenthaler, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Weak congruences of algebras with constants*, Novi Sad J. Math. 36, 1 (2006) 65-73.

[12] V. Gould, M. Wild, *Every Hamiltonian variety has the congruence extension property - a short proof*, Algebra Universalis 26 (1989) 187-188.

[13] G. Grätzer and H. Lakser, Two observations on the congruence extension property, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 63-64.

[14] G. Grätzer, *Two problems that shaped a century of lattice theory*, Notices Amer. Math. Soc. 54 (2007), 696-707.

[15] G. Grätzer, *Universal Algebra, Second Edition with updates, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin*, 2008.

[16] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation* , Birkhäuser, Basel, 2011.

[17] B. Jónsson, *On the representation of lattices*, Math. Scand. 1 (1953) 193-206.

[18] B. Jónsson, *Topics in universal algebra*, Lecture Notes in Math. Vol. 250, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1972.

[19] W. A. Lampe, *The independence of certain related structures of a universal algebra*, I, Algebra Universalis 2, 1 (1972) 99-112.

[20] W. A. Lampe, *The independence of certain related structures of a universal algebra*, II, Algebra Universalis. 2, 1 (1972) 270-283.

[21] W. A. Lampe, *The independence of certain related structures of a universal algebra*, III, Algebra Universalis 2, 1 (1972) 286-295.

[22] W. A. Lampe, *The independence of certain related structures of a universal algebra*, IV, Algebra Universalis 2, 1 (1972) 296-302.

[23] W. A. Lampe, *Simultaneous congruence representations: a special case*, Algebra Universalis 54, 2 (2005) 249-255.

[24] V. Lazarević, A. Tepavčević, A new ordering relation on lattices applied to weak congruences, Filomat 15 (2001) 39-46.

[25] V. Lazarević, A. Tepavčević, Weak congruences and a graphical composition, Contributions to General Algebra 13 (2001) 199-205.

[26] L. Libkin, *Direct decompositions of atomistic algebraic lattices*, Algebra Universalis 33 (1955) 127-135.

[27] R.Sz.Madarász, *On the partial algebras of weak congruences*, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 25, 1 (1995) 89-97.

[28] S. Roman, *Lattices and Ordered Sets*, Springer, 2008.

[29] M. Ploščica, *Graphical compositions and week congruences*, Publ. Inst. Math. Beograd 56, 70 (1994) 34-40.

[30] P. Pudlák, *A new proof of the congruence lattice representation problem*, Algebra Universalis, 6 (1976) 269-275.

[31] S. Radeleczki, *Some structure theorems for algebraic atomistic lattices*, Acta Math. Hungar. 86 (1-2) (2000) 1-15.

[32] B. Šešelja, G. Vojvodić, Weak congruences of a lattice, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 18, 2 (1988) 205-209.

[33] B. Šešelja, G. Vojvodić, On the complementedness of the lattice of weak congruences, Studia Sci. Mat. Hung. 24 (1989) 289-293.

[34] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Infinitely distributive elements in the lattice of weak congruences*, General Algebra 1988, Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland) (1990) 241-253.

[35] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Relative complements in the lattice of weak congruences*, Publ. Inst. Math. Beograd 67, 81 (2000) 7-13.

[36] B. Šešelja, A. Tepavčević, *A note on CIP varieties*, Algebra Universalis 45 (2001) 349-351.

[37] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Weak Congruences in Universal Algebra*, Institute of Mathematics, Novi Sad, 2001.

[38] B. Šešelja, *Teorija mreža*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2006.

[39] B. Šešelja, A. Tepavčević, *A note on atomistic weak con-gruence lattices*, Discrete Mathematics 308 (2008) 2054-2057.

[40] B. Šešelja, V. Stepanović , A. Tepavčević , *A note on representation of lattices by weak congruences*, Algebra Universalis, Volume 68, Issue 3-4 (2012), 287-291.

[41] V. Stepanović , *Problem reprezentacije mreža slabih kongruencija*, doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2012.

[42] V. Stepanović , A. Tepavčević ,*On Delta-suitable elements in algebraic lattices*, Filomat, Volume 26, 4, 2012, 747754.

[43] V. Stepanović, *The weak congruence representability of sublattices and suborders of representable lattices*, Novi Sad J. Math., Volume 42, Number 1 (2012), 157-166.

[44] V. Stepanović, *Weak congruence representability of suborders and direct products*, Bulletin of International Mathematical Virtual Institute, Volume 2 (2012), 123-131.

[45] A. Tepavčević , *Specijalni elementi mreže i primene, doktorska disertacija*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1992.

[46] A. Tepavčević, *On representation of lattices by weak congruences and weak tolerances*, Algebra and Model Theory, ed. by A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, Novosibirsk (1997) 173-181.

[47] G. Vojvodić, B. Šešelja, On CEP and CIP in the lattice of weak congruences, Proc. of the conf. "Algebra and logic", Cetinje (1986) 221-227.

[48] G. Vojvodić , B. Šešselja, *On the lattice of weak congruence relations*, Algebra Universalis 25, 121-130 (1988).

[49] G. Vojvodić, B. Šešelja, The diagonal relation in the lattice of weak congruences and the representation of lattices, Rev. of Res. Fac. Sci, Univ. Novi Sad 19, 1 (1989) 167–178.

[50] G. Vojvodić, *A note on weak partial congruence algebras*, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad, 22, 1 (1992) 89-94.

[51] F. Wehrung, *A solution to Dilworth's congruence lattice problem*, Adv. Math. 216, 2 (2007) 610-625.

[52] H. Werner, *Which partition lattices are congruence lattices?*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 14, North Holland (1976) 433–453.

[53] P. Whiteman, *Lattices, equivalence relations and subgroups*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 507-522.

Biografija

Dušan Radičanin je rođen 6. januara 1988. godine u Splitu. 2007. godine završio je gimnaziju "Svetozar Marković" u Novom Sadu i iste godine upisao Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer matematika finansija. Osnovne studije (u trajanju od tri godine) je završio sa prosečnom ocenom 8.96 i poslednji ispit na osnovnim studijama je položio u junu 2010. godine. Iste godine je upisao master akademske studije na matičnom fakuletu, modul teorijska matematika. Ispite na master studijama (u trajanju od 2 godine) je završio sa prosečnom ocenom 9.41. U oktobru 2012. godine je položio poslednji ispit na master studijama i time stekao uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, jun 2013. Dušan Radičanin

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Master rad

Autor: (AU): Dušan Radičanin

Mentor: (MN): Branimir Šešelja

Naslov rada: (NR): Reprezentacija algebarskih mreža mrežama slabih kongruencija

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): Srbija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2013.

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (FO):8/126/53/3/17/0/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Algebra

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): Slaba kongruencija, mreža slabih kongruencija, algebarska mreža, Δ-podesan element, predstavljivost,

UDK:

Čuva se: (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): Ovaj rad se bavi slabim kongruencijama i reprezentacijom algebarskih mreža preko istih. Dajemo neke osnovne osobine mreže slabih kongruencija i njene primene u univerzalnoj algebri. Na primer pokazujemo da su svojstvo proširenja kongruencija i hamiltonovost algebri u stvari mrežno teoretske osobine. Takođe dokazujemo neke opšte poznate teoreme o reprezentaciji algebarskih mreža. Na kraju dajemo osnovne osobine Δ-podesnog elementa, i prezentujemo neke rezultate o problemu reprezentacije mreža slabih kongruencija.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP):

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Andreja Tepavčević, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Branimir Šešelja, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Petar Marković, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Master's thesis

Author: (AU): Dušan Radičanin

Mentor: (MN): Branimir Šešelja

Title: (TI): Representation of algebraic lattices via weak congruences

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): Serbia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2013.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (PD): 8/126/53/3/17/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Algebra

Subject/Key words: (SKW): Weak congruence, weak congruence lat-

tice, algebraic lattice, Δ-suitable element, representability

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): This thesis deals with weak congruences and the representation of algebraic lattices via the mentioned. We give some basic properties of the weak congruence lattice and its application in universal algebra. For example me give the interpretation of congruence extension property and Hamiltonian property in lattice-theoretic terms. We also prove some well-known theorems about representation of algebraic lattices. On the end we give some basic features of Δ-suitable elements, and present some results about weak congruence lattice representation problem.

Accepted by the Scientific Board on: (ASb):

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Andreja Tepavčević, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Branimir Šešelja, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Petar Marković, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad