Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Anna Slivková

O nekim klasama $\mathcal{I}$-ultrafiltera na ω

-završni rad-

Mentor:
Docent dr Aleksandar Pavlović

Novi Sad, 2011

Predgovor

Ultrafilteri su poslednjih godina dobijali puno pažnje. Mnoge klase ultrafiltera zauzimaju specijalna mesta u matematici zbog rezultata koji se na njima zasnivaju. Oni su standardno oruđe u teoriji skupova i teoriji modela, a primenu nalaze još i u topologiji, analizi, teoriji društvenog izbora, kombinatorici – Ramseyjevoj teoriji, teoriji igara, Boolovim algebrama, itd. Na taj način oni spajaju ove raznolike grane matematike, te je imao za pravo A. Blass kada je jedan svoj članak naslovio sa: „Ultrafilteri: gde topološka dinamika = algebra = kombinatorika“ [6].

U ovom radu posebnu pažnju posvetićemo klasi tzv. $\mathcal{I}$-ultrafiltera na prirodnim brojevima. Njih je prvi definisao američki matematičar James Earl Baumgartner. Ispitivaćemo njihovu egzistenciju i međusobne odnose, i odnose sa drugim, srodnim klasama ultrafiltera.

U prvoj, uvodnoj glavi navodimo oznake koje se koriste u radu (osim manjeg broja koje se definišu kasnije, u toku samog rada). U drugoj glavi uvodimo osnovne pojmove i njihove osobine. Tu su dodatne aksiome ZFC sistema, filteri, ideali, ultrafilteri, prostor ultrafiltera, uređenja na tom prostoru, kao i tzv. mali kardinali, kardinali koji se nalaze između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$. U trećoj glavi definišemo P-tačke, Q-tačke i selektivne ultrafiltere, i izučavamo njihovo postojanje i međusobne odnose. U četvrtoj glavi uvodimo definiciju $\mathcal{I}$-ultrafiltera, razmatramo njihove opšte osobine, zatim definšemo neke tipove $\mathcal{I}$-ultrafiltera: diskretne, mere nula, raštrkane, nigde guste. Takođe izučavamo njihovo postojanje i odnose između ovih klasa ultrafiltera, kao i odnose sa P-tačkama i Q-tačkama. U petoj, poslednjoj glavi uvodimo tanke, skoro tanke i $\mathcal{W}$-ultrafiltere. Ispitujemo uslove njihovog postojanja kao i odnose sa prethodno uvedenim klasama ultrafiltera. Na kraju je navedena kratka biografija, i literatura na kojoj se bazira ovaj rad.

Autorka bi još želela da zahvali određenim ljudima, bez kojih ovog rada ne bi ni bilo. Prvo bi zahvalila brojnim profesorima koji su joj predavali matematiku na fakultetu. Bilo bi mnogo da se svi navedu, ali u tri slučaja se mora napraviti izuzetak. To su dr Miloš Kurilić i dr Boris Šobot, predsednik i član komisije za odbranu završnog rada. I posebno mentor ovog završnog rada, dr Aleksandar Pavlović, koji je korisnim sugestijama doprineo poboljšanju ovog rada.

Zatim bi zahvalila svojim roditeljima, Anni i Jánu. Oni su je tokom celog školovanja podržavali ne samo kao roditelji nego i kao profesori, jer su joj predavali matematiku u toku osnovnog i srednjeg obrazovanja. I zato ima

veliko zadovoljstvo da im vraća na ovaj način.

Naravno, zahvalila bi i svim prijataljima na podršci, razumevanju i strpljenju, a posebno bi zahvalila Bojanu Bašiću, koji je korisnim savetima olakšao pisanje rada i ponudio dokaze leme 3.2 i smera (1) $\Rightarrow$ (2) teoreme 3.6.

Svima njima hvala.

Novi Sad, septembar 2011 — Anna Slivková

Sadržaj

1 Uvod **4**

2 Osnovni pojmovi i stavovi **5**
2.1 Dodatne aksiome sistema ZFC 5
2.2 Filteri i ideali 5
2.3 Prostor ultrafiltera 9
2.4 Rudin-Keislerov i Katětovljev poredak 14
2.5 Mali kardinali 14

3 P-tačke, Q-tačke i selektivni ultrafilteri **16**
3.1 Definicije i osobine 16
3.2 Međusobni odnosi i postojanje 17

4 $\mathcal{I}$-ultrafilteri: uvod i neke klase **21**
4.1 Definicije i osobine 21
4.2 Postojanje 23
4.3 Zatvorenje pod sumama 25
4.4 Međusobni odnosi 31

5 Tanki, skoro tanki i $\mathcal{W}$-ultrafilteri **40**
5.1 Tanki i skoro tanki ultrafilteri 40
5.2 $\mathcal{W}$-ultrafilteri 47

Biografija **51**

Literatura **52**

1 Uvod

Rad započinjemo definisanjem većeg dela oznaka nadalje korišćenih.

Navedimo sada veći deo oznaka korišćenih u radu. Sa ω je označen skup $\{0, 1, 2, \dots\}$. Simbolom $\subseteq$ označavamo podskup bez ograničenja, a simbol $\subset$ ne dopušta jednakost. Relacija $\subseteq^*$ definiše se sa: $A \subseteq^* B$ (čita se „A je *skoro sadržan* u B") ako je $A \setminus B$ konačan skup.

Ako je $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$, onda je:

- $f \upharpoonright A$ restrikcija funkcije f na skup A;
- $f[A]$ direktna slika od A, tj. $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$;
- $f^{-1}[B]$ inverzna slika skupa B, tj. $f^{-1}[B] = \{f^{-1}(y) : y \in B\}$.

Naredne oznake predstavljaju određene skupove:

- $\mathcal{P}(X)$ – partitivni skup od X;
- $[X]^\kappa$ – familija podskupova od X kardinalnosti κ;
- $[X]^{<\kappa}$ – familija podskupova od X kardinalnosti manje od κ;
- $\overline{A}$ – zatvorenje skupa A;
- ${}^X Y$ – skup svih funkcija $f : X \to Y$;
- $[\![S]\!]$ – skup $\{S' \in {}^\omega\omega : S' \upharpoonright k = S\}$, gde $S \in {}^k\omega$, koji nazivamo skup ekstenzija za S.

Od karakteristika skupova biće nam potrebni:

- $|X|$ – kardinalnost skupa X;
- $m(A)$ – mera skupa A.

Niz s kome je na kraj dodat element x označavaćemo sa $s^\frown x$. Simbol $\forall^\infty$ znači „za sve osim konačno mnogo $n \in \omega$", dok simbol $\exists^\infty$ znači „za beskonačno mnogo $n \in \omega$". Ako je α tip uređenja, sa $\alpha^\star$ obeležavaćemo tip uređenja koji je „obrnut" od tipa uređenja α, to jest: $p \leqslant_{\alpha^\star} q$ ako i samo ako $q \leqslant_\alpha p$.

Tokom ovog rada pretpostavljaćemo da važi ZFC sistem aksioma, a u slučaju potrebe dodatnih aksioma (kao što su Hipoteza kontinuuma i nekoliko oblika Martinove[1] aksiome) to će biti eksplicitno navedeno.

[1]Donald A. Martin (1940—), američki matematičar i filozof

2 Osnovni pojmovi i stavovi

2.1 Dodatne aksiome sistema ZFC

Uvedimo neke dodatne pretpostavke teorije skupova, kao što je najavljeno na kraju prethodne glave.

Hipoteza kontinuuma (skraćeno CH). $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Između ostalog, CH nam omogućava numerisanje svih funkcija iz ω u ω prebrojivim ordinalima.

U definiciji Martinove aksiome biće nam potrebni sledeći pojmovi (koje ćemo nadalje pominjati i u samom radu).

Definicija 2.1. Neka je $(P, \leqslant_P)$ parcijalno uređen skup. Skup $D \subseteq P$ je *gust* u P ako za sve $p \in P$ postoji $q \leqslant_P p$ takvo da $q \in D$. Skup $\mathcal{G} \subseteq P$ je *filter* u P ako za sve $p, q \in \mathcal{G}$ postoji $r \in \mathcal{G}$ da je $r \leqslant_P p$ i $r \leqslant_P q$, i za svako $p \in \mathcal{G}$ i svako $q \in P$ iz $p \leqslant_P q$ sledi $q \in \mathcal{G}$.

Definicija 2.2. Za beskonačni kardinal κ, MA(κ) označava sledeći iskaz:

Za svaki parcijalno uređen skup $(P, \leqslant_P)$ koji zadovoljava uslov prebrojivih lanaca (tj. svaki antilanac je najviše prebrojiv) i za svaku familiju $\mathcal{D}$ koju čine gusti podskupovi od P takvu da važi $|\mathcal{D}| < \kappa$, postoji filter $\mathcal{G}$ na P koji ima neprazan presek sa svakim članom familije $\mathcal{D}$ (kažemo još da je $\mathcal{G}$ $\mathcal{D}$-generički filter na P).

MA($\aleph_0$) važi uvek u ZF teoriji, dok MA($\mathfrak{c}$) ne važi. Za kardinale između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ imamo

Martinova aksioma (skraćeno MA). MA(κ) važi za sve $\kappa < \mathfrak{c}$.

Martinova aksioma sledi iz CH, ali nije sa njom i ekvivalentna (pogledati [15]). Takođe, MA je nezavisna od ZFC teorije [16].

Mi ćemo uglavnom raditi sa malo oslabljenom MA i to je

MA$_{\text{ctble}}$: MA(κ) važi za sve $\kappa < \mathfrak{c}$, za sve prebrojive P.

2.2 Filteri i ideali

Sledeća definicija je specijalan slučaj filtera posmatranog u definiciji 2.1, ali on će nam kao takav biti od naročitog značaja, pa mu zato posvećujemo posebnu pažnju.

Definicija 2.3. Neka je X neprazan skup. Neprazna familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *filter* na X ako važi

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(2) za svako $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ važi $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

(3) ako je $F \in \mathcal{F}$ i $F \subseteq A$ onda $A \in \mathcal{F}$.

Definicija 2.4. *Filter-baza* na X, gde je X neprazan skup, jeste neprazna familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ takva da $\emptyset \notin \mathcal{F}$ i

$$\text{ako } F_1, F_2 \in \mathcal{F}, \text{ onda postoji } F_3 \in \mathcal{F} \text{ takav da } F_3 \subseteq F_1 \cap F_2.$$

Lako se vidi da za svaku filter-bazu $\mathcal{F}$ na X familija

$$\mathcal{G} = \{G \subseteq X : \text{ postoji } F \in \mathcal{F} \text{ takvo da } F \subseteq G\}$$

jeste filter na X.

Definicija 2.5. Za familiju skupova $\mathcal{G}$ kažemo da ima *svojstvo konačnog preseka* ako za svaki konačan $\mathcal{H} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \subseteq \mathcal{G}$ važi $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \neq \emptyset$.

Definicija 2.6. Neprazna familija $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, gde je X neprazan skup, je *ideal* od X ako važi

(1) $X \notin \mathcal{I}$,

(2) za svako $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ važi $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}$,

(3) ako je $I \in \mathcal{I}$ i $A \subseteq I$ onda $A \in \mathcal{I}$.

Primetimo da ako je $\mathcal{F}$ filter i $\mathcal{I}$ ideal na X onda je $X \in \mathcal{F}$ i $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Ako je $\mathcal{F}$ filter na X onda je skup $\mathcal{F}_* = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ ideal od X i za njega kažemo da je *dualni ideal* filtera $\mathcal{F}$. Takođe, ako je $\mathcal{I}$ ideal od X onda je skup $\mathcal{I}_* = \{X \setminus I : I \in \mathcal{I}\}$ filter na X i zovemo ga *dualni filter* ideala $\mathcal{I}$.

Filter $\mathcal{F}$ na X je *glavni* ako je $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

Lema 2.7. [13, str. 74]

(1) Ako je Φ neprazna familija filtera na X, onda je $\bigcap \Phi$ takođe filter na X.

(2) Ako je Ψ $\subseteq$-lanac filtera na X, onda je $\bigcup \Psi$ filter na X.

(3) Ako $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ima svojstvo konačnog preseka, onda postoji filter $\mathcal{F}$ na X takav da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Dokaz.

(1) Pokazujemo da važe uslovi 1), 2) i 3) definicije 2.3.
1) Ako bi bilo $\emptyset \in \bigcap \Phi$, onda bi svako $\mathcal{F} \in \Phi$ sadržalo prazan skup, što je u suprotnosti sa definicijom filtera.
2) Ovaj uslov važi, jer ako $F_1, F_2 \in \bigcap \Phi$, onda F_1, F_2 pripadaju svakom $\mathcal{F} \in \Phi$, te je $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, pa i $F_1 \cap F_2 \in \bigcap \Phi$.
3) Neka $F \in \bigcap \Phi$ i $F \subset G$. Tada za svako $\mathcal{F} \in \Phi$ važi $F \in \mathcal{F}$, pa je $G \in \mathcal{F}$, odakle sledi da je i $G \in \bigcap \Phi$.

(2) Slično kao i prethodno.

(3) Neka je $\mathcal{F}$ skup svih skupova $Y \subseteq X$ takvih da postoji konačan $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{H} = \{X_1, \dots, X_n\}$ i $X_1 \cap \dots \cap X_n \subseteq Y$. Tada se lako pokazuje da je $\mathcal{F}$ filter na X i $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$. $\square$

Kako svaki filter $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ mora da sadrži sve preseke konačno mnogo skupova iz $\mathcal{G}$, sledi da je filter $\mathcal{F}$ konstruisan u dokazu leme 2.7 najmanji filter na X koji sadrži $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ je filter na } X \text{ i } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Za takav filter $\mathcal{F}$ kažemo da je *generisan* sa $\mathcal{G}$ i označavamo sa $\langle \mathcal{G} \rangle$.

Najmanji ideal koji sadrži familiju $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je ideal *generisan* sa $\mathcal{A}$ i označavamo ga sa $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Karakteristika filtera $\mathcal{F}$ je minimalna kardinalnost potfamilije koja generiše $\mathcal{F}$ i označava se sa $\chi(\mathcal{F})$ (analogno se definiše i za ideale).

Definicija 2.8. Filter $\mathcal{F}$ na X je *ultrafilter* ako ne postoji veći filter od njega na X, tj. ako za svaki filter $\mathcal{F}'$ na X za koji važi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ sledi $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Teorema 2.9. Filter $\mathcal{F}$ na X je ultrafilter ako i samo ako za svako $F \subseteq X$ tačno jedan od F i $X \setminus F$ pripada $\mathcal{F}$.

Dokaz.

($\Rightarrow$): Neka je $\mathcal{F}$ filter za koji ne važi da za sve $F \subseteq X$ ili F ili $X \setminus F$ pripada $\mathcal{F}$. Pokazaćemo da onda $\mathcal{F}$ nije ultrafilter. Neka je $G \subseteq X$ takav da ni G ni $X \setminus G$ nisu u $\mathcal{F}$. Posmatrajmo familiju $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{G\}$; tvrdimo da $\mathcal{G}$ ima svojsto konačnog preseka. Ako $H \in \mathcal{F}$ onda $G \cap H \neq \emptyset$, jer bi u suprotnom bilo $X \setminus G \supseteq H$ i $X \setminus G \in \mathcal{F}$. Stoga, ako $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{F}$, onda je $X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{F}$ i takođe $G \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n \neq \emptyset$. Zato $\mathcal{G}$ ima svojstvo konačnog preseka i prema lemi 2.7 postoji filter $\mathcal{F}' \supset \mathcal{G}$. Kako je $G \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ nije ultrafilter.

($\Leftarrow$): Pretpostavimo da $\mathcal{F}$ nije ultrafilter, tj. da postoji filter $\mathcal{F}_1$ takav da $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$. To znači da postoji $F \in \mathcal{F}_1$ takav da $F \notin \mathcal{F}$, pa sledi $X \setminus F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$. Odavde je $\emptyset = F \cap (X \setminus F) \in \mathcal{F}_1$. Kontradikcija. □

Lema 2.10. Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na skupu X i $U \in \mathcal{U}$. Ako važi $U = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, onda je ili $U_1 \in \mathcal{U}$ ili $U_2 \in \mathcal{U}$.

Dokaz.

Neka je $U \in \mathcal{U}$, $U_1 \cup U_2 = U$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Pretpostavimo da $U_1 \notin \mathcal{U}$. Tada je $X \setminus U_1 \in \mathcal{U}$, pa $U \cap (X \setminus U_1) \in \mathcal{U}$, to jest $U_2 \in \mathcal{U}$. Ako je $U_1 \in \mathcal{U}$, onda $X \setminus U_1 \notin \mathcal{U}$. Kako je $U_2 \subseteq X \setminus U_1$, sledi U$_2 \notin \mathcal{U}$. □

Lema 2.11. (Zorn[2]) Ako za svaki linearno uređen podskup A skupa X sa uređenjem $\leqslant$ postoji $x_0 \in X$ takvo da za sve $x \in A$ važi $x \leqslant x_0$, onda X ima maksimalan element.

Prethodna lema jeste ekvivalentan oblik Aksiome izbora, što je pokazano u [9, str. 8], i ona nam je potrebna da bismo dokazali sledeće tvrđenje.

Teorema 2.12. [13, str. 75] Svaki filter sadržan je u nekom ultrafilteru.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{F}_0$ filter na X. Neka je Φ skup svih filtera $\mathcal{F}$ na X takvih da $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ i razmotrimo parcijalno uređen skup $(\Phi, \subseteq)$. Ako je Ψ lanac u Φ, onda zbog leme 2.7 važi da je $\bigcup \Psi$ filter i gornje ograničenje za Ψ u Φ. Prema lemi 2.11 postoji maksimalan element $\mathcal{U}$ u Φ. Kako je $\mathcal{U}$ maksimalan on je ultrafilter. □

Primeri.

(1) Za svako $x \in X$ glavni filter $\{A \subseteq X : x \in A\}$ je ultrafilter.

[2]Max August Zorn(1906—1993), američki matematičar nemačkog porekla

(2) Svaki filter na konačnom skupu X je glavni, pa je i svaki ultrafilter na X glavni.

(3) Neka je X beskonačan skup. Tada je $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X : X \setminus Y \text{ je konačan}\}$ filter na X koji se naziva Fréchetov[3] filter na X (dualni ideal $\mathcal{F}_*$ od Fréchetovog filtera je Fréchetov ideal). Primetimo da Fréchetov filter nije glavni filter. Za beskonačan X postoji i neglavni ultrafilter: ako ultrafilter $\mathcal{U}$ sadrži Fréchetov filter, onda $\mathcal{U}$ nije glavni.

2.3 Prostor ultrafiltera

Ultrafiltere na ω ćemo identifikovati sa tačkama prostora $\beta\omega$. Glavni ultrafilteri biće identifikovani sa tačkama iz skupa ω, a neglavni ultrafilteri sa tačkama iz skupa $\beta\omega \setminus \omega$.

Definicija 2.13. *Kompaktifikacija* prostora X je uređen par (c, Y) takav da je Y kompaktan prostor (u definiciju kompaktnosti uključujemo zahtev da je prostor Hausdorffov[4]), $c : X \to Y$ homeomorfno utapanje i slika od X je gusta u Y. Uobičajeno je da se kaže da je Y kompaktifikacija prostora X i pišemo cX.

Označimo familiju svih kompaktifikacija prostora X sa $\mathcal{C}(X)$ i definišimo relaciju poretka na $\mathcal{C}(X)$.

Definicija 2.14. Neka su cX i dX kompaktifikacije prosotra X. Tada je $cX \leqslant dX$ ako postoji preslikavanje $f : dX \to cX$ koje je neprekidna sirjekcija i za koje su sve tačke iz X fiksne.

Prve dve od narednih lema dajemo bez dokaza, jer smatramo da su dovoljno poznate, a i njihovi dokazi izlaze iz okvira ovog rada.

Lema 2.15. [9, str. 125] Svaki kompaktan prostor je normalan.

Definicija 2.16. Za prostor X kažemo da je *univerzalan* za sve prostore koje imaju topološko svojstvo $\mathcal{P}$ ako X ima svojstvo $\mathcal{P}$ i svaki prostor koji ima svojstvo $\mathcal{P}$ može se utopiti u X.

Lema 2.17. [9, str. 83] Kub Tihonova[5] I^κ je univerzalan prostor za sve Tihonovljeve (kompletno regularane) prostore težine $\kappa \geqslant \aleph_0$.

[3] Maurice René Fréchet (1878—1973), francuski matematičar
[4] Felix Hausdorff (1868—1942), nemački matematičar
[5] Андрей Николаевич Тихонов (1906—1993), ruski matematičar

Lema 2.18. [9, str. 139] Kub Tihonova I^κ je univerzalan prostor za sve kompaktne prostore težine $\kappa \geqslant \aleph_0$.

Dokaz.
Pošto je I^κ univerzalan prostor za sve Tihonovljeve prostore težine $\kappa \geqslant \aleph_0$ (lema 2.17), a svaki kompaktan prostor je Tihonovljev (lema 2.15), onda je univerzalan i za sve kompaktne prostore težine $\kappa \geqslant \aleph_0$. $\square$

Lema 2.19. [9, str. 139] Topološki prostor je Tihonovljev prostor ako i samo ako se može utopiti u kompaktan prostor.

Dokaz.
($\Rightarrow$): Ako je topološki prostor Tihonovljev, onda je on potprostor od I^κ, a I^κ je kompaktan prostor.
($\Leftarrow$): Ako je topološki prostor utopljen u kompaktan prostor, onda je posmatrani prostor utopljen u normalan prostor, pa time i u Tihonovljev (lema 2.15). Svi potprostori Tihonovljevog prostora su Tihonovljevi, te tvrđenje sledi. $\square$

Lema 2.20. [9, str. 166] Topološki prostor X ima kompaktifikaciju ako i samo ako je Tihonovljev.

Dokaz.
($\Rightarrow$): Ako prostor X ima kompaktifikaciju, onda se može utopiti u kompaktan prostor. Svaki kompaktan prostor je i Tihonovljev, pa je i X Tihonovljev.
($\Leftarrow$): Ako je X Tihonovljev prostor, onda ga možemo utopiti u I^κ. Neka je f to utapanje. Neka je $Y = \overline{f[X]}$. Y je kompaktan prostor, jer je zatvoren potprostor kompaktnog prostora kompaktan. Dalje je $f[X]$ gust u Y, te smo dobili kompaktifikaciju (f, Y) od X. $\square$

Definicija 2.21. *Čech[6]-Stoneova[7] kompaktifikacija* Tihonovljevog prostora X je kompaktifikacija prostora X koja je maksimalna u poretku $\leqslant$.

Lema 2.22. [9, str. 169] Svaka neprazna potfamilija $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}(X)$ ima najmanje gornje ograničenje u odnosu na $\leqslant$ u $\mathcal{C}(X)$.

[6] Eduard Čech (1893—1960), češki matematičar
[7] Marshall Harvey Stone (1903—1989), američki matematičar

Dokaz.

Neka je $\mathcal{C}_0 = \{c_sX : s \in S\}$ i $c_S = \triangle_{s\in S} c_s : X \to \prod_{s\in S} c_sX$. Kako familija $\{c_s : s \in S\}$ razdvaja tačke i razdvaja tačke i zatvorene skupove teorema o dijagonalnom preslikavanju [9, str. 82] daje da je dijagonalno preslikavanje c_S homeomorfno utapanje. Pokazaćemo da je $c_SX = \overline{c_S[X]} \subseteq \prod_{s\in S} c_sX$ najmanje gornje ograničenje familije $\mathcal{C}_0$.

Pošto projekcija $p_s : \prod_{s\in S} c_sX \to c_sX$ zadovoljava $p_sc_S = c_s$, imamo $c_sX \leqslant c_SX$ za svako $s \in S$. Pretpostavimo da za kompaktifikaciju cX prostora X važi $c_sX \leqslant cX$, za svako $s \in S$, to jest da postoje preslikavanja $f_s : cX \to c_sX$ takva da $f_sc = c_s$, za sve $s \in S$. Lako se vidi da dijagonala $F = \triangle_{s\in S} f_s$ zadovoljava $Fc = c_S$, te je $c_SX \leqslant cX$. $\square$

Direktna posledica prethodne leme je sledeća teorema.

Teorema 2.23. [9, str. 169] Čech-Stoneova kompaktifikacija postoji za svaki Tihonovljev prostor.

Čech-Stoneova kompaktifikacija topološkog prostora X obično se obeležava sa βX. No, u našem slučaju neka $\beta\omega$ po definiciji označava skup svih ultrafiltera na ω, a u toku poglavlja ovu oznaku ćemo opravdati tako što ćemo pokazati da prostor $\beta\omega$, snabdeven određenom topologijom, predstavlja kompaktifikaciju prostora ω sa diskretnom topologijom.

Za $A \subseteq \omega$ definišemo

$$A^* = \{\mathcal{U} \in \beta\omega : A \in \mathcal{U}\}.$$

Primetimo da za sve $A, B \in \omega$ važi:

$$A^* \cap B^* = (A \cap B)^* \tag{1}$$

i

$$\beta\omega = A^* \cup (\omega \setminus A)^*. \tag{2}$$

Definišemo na $\beta\omega$ topologiju generisanu bazom koja se sastoji od svih A^* takvih da $A \subseteq \omega$. Zbog (1) i (2) ovo je zaista baza Hausdorffovog topološkog prostora.

Lema 2.24. [17, str. 63] Za proizvoljne $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq \omega$ važi:

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = \emptyset \text{ ako i samo ako } \bigcup_{i=1}^{n} (\omega \setminus B_i)^* = \beta\omega.$$

Dokaz.

($\Leftarrow$): Neka je $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = A \neq \emptyset$. Tada je i A^* neprazan, pa postoji $\mathcal{U}_0 \in A^*$, $A \in \mathcal{U}_0$. Kako za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ je $A \subseteq B_i$, imamo $B_i \in \mathcal{U}_0$. Iz $\mathcal{U}_0 \in \beta\omega$ i pretpostavke $\mathcal{U}_0 \in \bigcup_{i=1}^{n} (\omega \setminus B_i)^*$, sledi da postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ da $\mathcal{U}_0 \in (\omega \setminus B_i)^*$. Odavde imamo da $\omega \setminus B_i \in \mathcal{U}_0$, a kako je $\mathcal{U}_0$ ultrafilter, onda je $B_i \notin \mathcal{U}_0$. Kontradikcija.

($\Rightarrow$): Ako je $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ prazan skup, onda ne postoji ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta\omega$ takav da za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $B_i \in \mathcal{U}$, tj. svaki $\mathcal{U}$ je u nekom od skupova $(\omega \setminus B_i)^*$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Lema 2.25. [17, str. 64] Prostor $\beta\omega$ je kompaktan.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, neka $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ takav da $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^*$ pokriva $\beta\omega$, ali da nema konačan potpokrivač. Neka je $\mathcal{F} = \{\omega \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$. Tada je svaki presek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{F}$ neprazan skup, te $\mathcal{F}$ može biti dopunjen do ultrafiltera $\mathcal{U}$. No, tada $\mathcal{U} \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^*$. Kontradikcija. □

Za $n \in \omega$ skup $\{n\}^*$ se sastoji od samo jednog ultrafiltera koji je tačka u $\beta\omega$. Skup $\{\{n\}^* : n \in \omega\}$ identifikujemo sa ω. Ovaj skup je gust u $\beta\omega$, pa $\beta\omega$ jeste kompaktifikacija prostora ω.

Definicija 2.26. Neka je $\mathcal{U}$ fiksirani ultrafilter na ω i $(x_n)_{n \in \omega}$ niz u topološkom prostoru X. Zapisujemo

$$x = \lim_{n \to \mathcal{U}} x_n$$

ako skup $\{n : x_n \in U\} \in \mathcal{U}$ za svaku okolinu U od x u X.

Primetimo: slična definicija, sa Fréchetovim filterom na mestu $\mathcal{U}$, predstavlja klasičnu definiciju limesa.

Lema 2.27. [17, str. 64] Ako je X kompaktan Hausdorffov prostor, onda za svaki ultrafilter $\mathcal{U}$ na ω i svaki niz $(x_n)_{n \in \omega}$ elemenata iz X, $\lim_{n \to \mathcal{U}} x_n$ postoji i jedinstven je.

Dokaz.

Zbog kompaktnosti, skup

$$Y = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \overline{\{x_n : n \in A\}}$$

je neprazan, jer je $\overline{\{x_n : n \in A\}}$, $A \in \mathcal{U}$, familija sa svojstvom konačnog preseka zatvorenih skupova. Takođe, ako je $x \in Y$ i skup U je otvorena okolina tačke x, onda je skup $A = \{n : x_n \in U\}$ u $\mathcal{U}$. Da bismo ovo dokazali, potrebno je pokazati da A ima neprazan presek sa svakim $B \in \mathcal{U}$. Neka je $B \in \mathcal{U}$ fiksiran. Tada je $x \in U \cap \overline{\{x_n : n \in B\}}$, pa ovaj skup nije prazan, i štaviše, kako je U otvoren, neprazan je i skup $U \cap \{x_n : n \in B\}$. I konačno, $A \cap B = \{n \in B : x_n \in U\}$ je neprazan.

Ostaje pokazati da je Y singlton. Pretpostavimo suprotno, da je $x, y \in Y$ i $x \neq y$. Uzmimo otvorene skupove U i V koji razdvajaju x i y. Tada se disjunktni skupovi $\{n : x_n \in U\}$ i $\{n : x_n \in V\}$ oba nalaze u $\mathcal{U}$, što je nemoguće. $\square$

Teorema 2.28. [17, str. 64] Prostor $\beta\omega$ je Čech-Stoneova kompaktifikacija prostora ω.

Dokaz.
Dovoljno je pokazati da za svaku drugu kompaktifikaciju $\gamma\omega$ prostora ω postoji neprekidna sirjekcija $f : \beta\omega \to \gamma\omega$ takva da $f(n) = n$, za sve $n \in \omega$.

Neka je $\gamma\omega$ kompaktifikacija protora ω. Definišimo preslikavanje $f : \beta\omega \to \gamma\omega$ sa

$$f(\mathcal{U}) = \lim_{n \to \mathcal{U}} n.$$

Pomoćno tvrđenje. Preslikavanje f je neprekidno, „na“ i fiksira sve tačke u ω.

- **f je neprekidno:** Treba proveriti šta je inverzna slika otvorenog skupa $U \subseteq \gamma\omega$. Uočimo da

  $$y \in U \text{ ako i samo ako } U \cap \omega \in \mathcal{U}, \text{ za sve } \mathcal{U} \in f^{-1}(y),$$

  pa je $f^{-1}[U] = (U \cap \omega)^*$ i ovo je otvoren skup.

- **$f \restriction \omega$ je identičko preslikavanje:** Za $m \in \omega$ slika $\{m\}^*$ je $\lim_{n \to m} n = m$.

- **f je „na“:** Primetimo da je slika od $\beta\omega$ kompaktan podskup od $\gamma\omega$, jer je f neprekidno preslikavanje. Zato je ovaj skup i zatvoren podskup u $\gamma\omega$ koji sadrži njegov gust podskup ω.

Ovim je završen dokaz. $\square$

2.4 Rudin-Keislerov i Katětovljev poredak

Za svaki kompaktan prostor X i neprekidnu funkciju $f : \omega \to X$ postoji neprekidno proširenje $\beta f : \beta\omega \to X$ koje zovemo *Stoneovo proširenje* [9, str. 173]. Odavde sledi da svaka funkcija $f : \omega \to \omega$ ima Stoneovo proširenje $\beta f : \beta\omega \to \beta\omega$.

Neka su $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\omega$. Ako postoji permutacija π od ω takva da je $\beta\pi(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ pišemo $\mathcal{U} \approx \mathcal{V}$. Relacija $\approx$ je relacija ekvivalencije na $\beta\omega$.

Za $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\omega$ pišemo $\mathcal{U} \leqslant_{RK} \mathcal{V}$ ako i samo ako postoji $f \in {}^{\omega}\omega$ da je $\beta f(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Relacija $\leqslant_{RK}$ je kvaziporedak, jer nije antisimetrična, ali *Rudin*[8]-*Keislerov*[9] *poredak* dobijamo ako posmatramo faktor relaciju definisanu sa $\leqslant_{RK}$ na $\beta\omega/\approx$.

Ovoj definiciji Rudin-Keislerovog poretka ekvivalentne su sledeće definicije [10]: $\mathcal{U} \leqslant_{RK} \mathcal{V}$ akko postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da $f^{-1}[U] \in \mathcal{V}$ za svako $U \in \mathcal{U}$ akko postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da $f[V] \in \mathcal{U}$ za svako $V \in \mathcal{V}$. U daljem radu ove tri definicije koristićemo ravnopravno u zavisnosti od potrebe.

Katětovljev[10] *poredak* $\leqslant_K$ je proširenje Rudin-Keislerovog poretka na proizvoljne filtere ili ideale. Pišemo $\mathcal{F} \leqslant_K \mathcal{G}$ ako postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da $f^{-1}[U] \in \mathcal{U}$ za svako $U \in \mathcal{F}$. Lako se pokazuje da $\mathcal{F} \leqslant_K \mathcal{G}$ ako i samo ako $\mathcal{F}_* \leqslant_K \mathcal{G}_*$.

2.5 Mali kardinali

Jedna grana teorije skupova posvećena je izučavanju pojedinih kardinala između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ određenih raznim kombinatornim postavkama. Ovakvi kardinali obično se nazivaju *mali kardinali*. Ovde ćemo definisati neke od njih, koji će nam trebati u daljem radu.

Definicija 2.29. Za X neprazan skup i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, kažemo da je $\mathcal{F}$ *k-vezana* familija ako je presek $F_0 \cap F_1 \cap \cdots \cap F_k$ beskonačan za $F_i \in \mathcal{F}$, $i \leqslant k$. $\mathcal{F}$ je *centriran sistem* ako je $\mathcal{F}$ k-vezana familija za sve k. $\mathcal{F}$ je *σ-centriran sistem* ako je $\mathcal{F}$ centriran i ω-vezana familija. Ako je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ filter-baza zatvorena za konačne preseke i $A \subset X$ takav da $\mathcal{F} \cup \{A\}$ centriran sistem, kažemo da je A *kompatibilan* sa $\mathcal{F}$.

[8] Walter Rudin (1921—2010), američki matematičar
[9] Howard Jerome Keisler (1936—), američki matematičar
[10] Miroslav Katětov (1918—1995), češki matematičar

Definicija 2.30. Familija $F \subseteq {}^{\omega}\omega$ je *dominantna* (engl. dominating) familija ako važi

$$(\forall g \in {}^{\omega}\omega)(\exists f \in F)(\forall^{\infty} n \in \omega)(g(n) \leqslant f(n)).$$

Familija $F \subseteq {}^{\omega}\omega$ je *neograničena* (engl. unbounded) familija ako je

$$(\forall g \in {}^{\omega}\omega)(\exists f \in F)(\exists^{\infty} n \in \omega)(g(n) < f(n)).$$

Familija $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ beskonačnih podskupova ω je *toranj* (engl. tower) ako $X_\alpha \supseteq^* X_\beta$ za sve $\alpha < \beta$, i ne postoji X takvo da $X_\alpha \supseteq^* X$ za sve $\alpha < \kappa$.

Definicija 2.31. *Pseudopresečni broj* (engl. pseudointersection number) je

$$\mathfrak{p} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega) \text{ je centrirana}, \neg(\exists A \in [\omega]^{\omega})(\forall F \in \mathcal{F})(A \subseteq^* F)\}.$$

Toranjski broj (engl. tower number) je

$$\mathfrak{t} = \text{najmanja kardinalnost tornja.}$$

Dominacijski broj (engl. dominating number) je

$$\mathfrak{d} = \text{najmanja kardinalnost dominantne familije.}$$

Ograničavajući broj (engl. bounding number) je

$$\mathfrak{b} = \text{najmanja kardinalnost neograničene familije.}$$

Kasnije će nam biti potreban sledeći stav o odnosima ovih malih kardinala pod Martinovom aksiomom.

Teorema 2.32. Neka važi MA. Tada važi $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Skica dokaza.

Tvrđenje je direktna posledica narednih rezultata, kako nalazimo u [18]:

- $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}(\leqslant \mathfrak{c})$ [8, str. 111–167];
- ako je κ najmanji kardinal takav da MA(κ) ne važi za σ-centrirane parcijalno uređene skupove, tada je $\kappa = \mathfrak{p}$ [4].

Dakle, kako MA tvrdi da MA(κ) važi za sve $\kappa < \mathfrak{c}$ (za sva parcijalna uređenja, pa, specijalno, i za σ-centrirana), pod pretpostavkom MA imamo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, pa time i $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. $\square$

3 P-tačke, Q-tačke i selektivni ultrafilteri

Posmatrajmo sada ultrafiltere na skupu prirodnih brojeva. U ovom poglavlju obrađićemo tri tipa: P-tačke, Q-tačke i selektivne ultrafiltere.

3.1 Definicije i osobine

Definišimo najpre P-tačku.

Definicija 3.1. Neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ je *P-tačka* (engl. P-point) ako za sve particije $\{R_n : n \in \omega\}$ skupa ω važi: ili je za neko $n \in \omega$ ispunjeno $R_n \in \mathcal{U}$, ili postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da je $U \cap R_n$ konačan skup za sve $n \in \omega$.

Naredna lema daje opšte poznat potreban i dovoljan uslov da neglavni ultrafilter bude P-tačka.

Lema 3.2. Neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ je P-tačka ako i samo ako za svaku familiju $\{U_n \in \mathcal{U} : n \in \omega\}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da je $U \subseteq^* U_n$, za sve $n \in \omega$.

Dokaz.
($\Rightarrow$): Pretpostavimo da je $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$. Neka je $R_0 = \omega \setminus U_0$, $R_n = (\bigcap_{j<n} U_j) \setminus U_n$ i $R_{-1} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Tada je $\{R_n : n \in \omega \cup \{-1\}\}$ particija skupa ω. Prema definicijji 3.1, ili je za neko $n \in \omega \cup \{-1\}$ ispunjeno $R_n \in \mathcal{U}$, ili postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da za sve $n \in \omega \cup \{-1\}$ važi $|U \cap R_n| < \aleph_0$. Kako je $R_n \subseteq \omega \setminus U_n$, sledi $R_n \notin \mathcal{U}$ za sve $n \in \omega$. Zato sada ili $R_{-1} \in \mathcal{U}$, ili postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da za sve $n \in \omega \cup \{-1\}$ važi $|U \cap R_n| < \aleph_0$. Ako $R_{-1} \in \mathcal{U}$, onda je R_{-1} skoro sadržan u U_n za sve $n \in \omega$; u suprotnom, U je traženi skup.

($\Leftarrow$): Neka je $\{R_n : n \in \omega\}$ particija ω. Ako $R_n \in \mathcal{U}$ za neko $n \in \omega$, dokaz je gotov. Pretpostavimo da je za sve $n \in \omega$ ispunjeno $R_n \notin \mathcal{U}$, i definišimo $U_n = \omega \setminus R_n$. Tada $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$, te zbog pretpostavke teoreme postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da za sve $n \in \omega$ važi

$$|U \cap R_n| = |U \setminus U_n| < \aleph_0,$$

što je i trebalo pokazati. □

Prelazimo na definiciju selektivnog ultrafiltera.

Definicija 3.3. Neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ je *selektivni* (engl. selective; *Ramsey-jev*[11]) ako za sve particije $\{R_n : n \in \omega\}$ skupa ω važi: ili je za neko $n \in \omega$

[11] Frank Plumpton Ramsey (1903—1930), britanski matematičar

ispunjeno $R_n \in \mathcal{U}$, ili postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da je $U \cap R_n$ kardinalnosti najviše 1 za sve $n \in \omega$.

Primetimo, ako je $\mathcal{U}$ selektivni ultrafilter na ω, onda za svako $f \in {}^{\omega}\omega$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da je $f \restriction U$ ili konstantno ili injektivno. Još jednu korisnu osobinu selektivnih ultrafiltera navodimo bez dokaza.

Lema 3.4. [7, str. 211] Selektivni ultrafilteri su minimalni u odnosu na Rudin-Keislerov poredak na prostoru ultrafiltera.

Ovim tipovima ultrafiltera srodna je i Q-tačka.

Definicija 3.5. Neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ je *Q-tačka* (engl. Q-point) ako za sve particije $\{Q_n : n \in \omega\}$ od ω na konačne skupove postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da je skup $U \cap Q_n$ kardinalnosti najviše 1 za svako $n \in \omega$.

3.2 Međusobni odnosi i postojanje

Očigledno je da je svaki selektivni ultrafilter P-tačka. Više o odnosima između posmatranih tipova ultrafiltera kazuje sledeća teorema.

Teorema 3.6. [2, str. 189] Neka je $\mathcal{U}$ neglavni ultrafilter na ω. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(1) $\mathcal{U}$ je selektivni ultrafilter;

(2) za svaku familiju $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ takvu da $X_n \supset X_{n+1}$ važi za sve $n \in \omega$ postoji skup $\{x_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$ takav da $x_n \in X_n$ za sve $n \in \omega$;

(3) za svaku familiju $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^2$ postoji $X \in \mathcal{U}$ takav da $[X]^2 \subseteq \mathcal{A}$ ili $[X]^2 \cap \mathcal{A} = \emptyset$;

(4) $\mathcal{U}$ je i P-tačka i Q-tačka.

Dokaz.

(1) $\Rightarrow$ (2): Pretpostavimo da je $\{X_n : n \in \omega\}$ familija iz postavke. Neka je $R_0 = \omega \setminus X_0$, $R_n = X_{n-1} \setminus X_n$ i $R_{-1} = \bigcap_{n\in\omega} X_n$. Tada je $\{R_n : n \in \omega \cup \{-1\}\}$ particija skupa ω. Prema definicijji 3.3, ili je za neko $n \in \omega \cup \{-1\}$ ispunjeno $R_n \in \mathcal{U}$, ili postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da za sve $n \in \omega \cup \{-1\}$ važi $|U \cap R_n| \leqslant 1$. Kako je $R_n \subseteq \omega \setminus X_n$, sledi $R_n \notin \mathcal{U}$ za sve $n \in \omega$. Zato sada ili $R_{-1} \in \mathcal{U}$, ili postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da za sve $n \in \omega \cup \{-1\}$ važi $|U \cap R_n| \leqslant 1$. Ako $R_{-1} \in \mathcal{U}$,

neka je $f : \omega \to R_{-1}$ proizvoljna bijekcija (takva postoji jer $|R_{-1}| = \aleph_0$), i definišimo $x_n = f(n)$; tada je $\{x_n : n \in \omega\} = R_{-1} \in \mathcal{U}$, i očigledno $x_n \in X_n$ za sve $n \in \omega$. U drugom slučaju, neka je $U \in \mathcal{U}$ takvo da za sve $n \in \omega \cup \{-1\}$ važi $|U \cap R_n| \leqslant 1$. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da važi $U \cap R_0 = U \cap R_1 = U \cap R_{-1} = \emptyset$. Definišimo funkciju $g : U \to \omega$ na sledeći način: $g(u) = k$ akko $u \in R_k$. Primetimo da važi $u \in X_k \Leftrightarrow g(u) \geqslant k+1$. Neka je, za $n \in \omega$, x_n ono $u \in U$ za koje važi $g(u) = \min g[U \setminus \{x_i : 0 \leqslant i \leqslant n-1\}]$. Nije teško proveriti da je tada $\{x_n : n \in \omega\} = U \in \mathcal{U}$ i da važi $x_n \in X_n$ za sve $n \in \omega$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Za $n \in \omega$ definišemo $X_n = \{k > n : \{n, k\} \in \mathcal{A}\}$. Kako je $\mathcal{U}$ ultrafilter, možemo naći $Y \in \mathcal{U}$ takvo da ili $X_n \in \mathcal{U}$ za $n \in Y$, ili $\omega \setminus X_n \in \mathcal{U}$ za $n \in Y$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da važi prvo. Za $n \in Y$ neka je $X'_n = \bigcap_{i \in Y \cap n} X_i$. Primenimo (2) na $\{X'_n : n \in Y\}$ da bismo dobili skup $X \in \mathcal{U}$. Tada, ako $n, m \in Y$ i $x_n < x_m$, onda $x_m \in X_{x_n}$, i prema tome $\{x_n, x_m\} \in \mathcal{A}$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Za particiju $\{Y_n : n \in \omega\}$ od ω definišemo $\mathcal{A} = \{\{n, k\} : (\exists m)(n, k \in Y_m)\}$ i primenimo (3).

(4) $\Rightarrow$ (1): Pretpostavimo da je $\{Y_n : n \in \omega\}$ particija od ω takva da $Y_n \notin \mathcal{U}$ za sve $n \in \omega$. Kako je $\mathcal{U}$ P-tačka, postoji $X \in \mathcal{U}$ takvo da $|X \cap Y_n| < \aleph_0$ za sve $n \in \omega$. Neka je $\{y_n : n \in \omega\}$ numeracija od $\omega \setminus X$. Uočimo particiju datu sa $I_n = (X \cap Y_n) \cup \{y_n\}$, za $n \in \omega$. Kako je $\mathcal{U}$ Q-tačka, postoji skup $Z \in \mathcal{U}$ takav da $Z \cap I_n = \{z_n\}$ za sve n. Jasno, Z je skup koji smo tražili. $\square$

Sada prelazimo na ispitivanje postojanja uočenih tipova ultrafiltera.

Primetimo da je lako naći neglavni ultrafilter koji nije P-tačka. Neka je $\{A_n : n \in \omega\}$ proizvoljna particija skupa ω i neka je $\mathcal{F}$ sledeći filter na skupu prirodnih brojeva:

$$X \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{izuzev konačno mnogo } n,\ X \cap A_n \text{ sadrži sve osim konačno mnogo elemenata iz } A_n.$$

Ako je $\mathcal{G}$ bilo koji ultrafilter koji proširuje $\mathcal{F}$, onda $\mathcal{G}$ nije P-tačka.

Rezultat Shelaha[12] pokazuje da postoji model ZFC teorije u kome ne postoje P-tačke [2, str. 182], pa time ni selektivni ultrafilteri. No, uz dodatak CH, postojanje selektivnih ultrafiltera može se dokazati.

Teorema 3.7. [13, str. 78] Neka važi CH. Tada postoji selektivni ultrafilter.

[12] Saharon Shelah (1945—), izraelski matematičar

Dokaz.

Neka je $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ jedna numeracija svih particija skupa ω. Konstruišimo ω_1-niz beskonačnih podskupova skupa ω na sledeći način: neka je $X_0 = \omega$, i za dato X_α, neka je $X_{\alpha+1} \subseteq X_\alpha$ takav da ili važi $X_{\alpha+1} \subseteq A$ za neko $A \in \mathcal{A}_\alpha$, ili je $X_{\alpha+1} \cap A$ kardinalnosti najviše 1 za sve $A \in \mathcal{A}_\alpha$. Ako je α granični ordinal, neka je X_α takav da je $X_\alpha \setminus X_\beta$ konačan za sve $\beta < \alpha$, takav X_α postoji, jer je α prebrojiv, pa $|\alpha| < \mathfrak{t}$. Tada je $\mathcal{S} = \{X : X \supseteq X_\alpha$ za neko $\alpha < \omega_1\}$ selektivni ultrafilter. □

Jasno, direktna posledica gornje teoreme je da pod CH imamo postojanje P-tačke, a uz pomoć teoreme 3.6 i postojanje Q-tačke. Međutim, za postojanje P-tačke dovoljno je pretpostaviti i slabiji uslov, $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Najpre dokazujemo dve preliminarne leme.

Lema 3.8. [2, str. 182] Pretpostavimo da je filter $\mathcal{F}$ generisan sa manje od $\mathfrak{d}$ elemenata, i neka je $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}$. Tada postoji $X \subseteq \omega$ takvo da za sve $n \in \omega$ važi $X \subseteq^* X_n$, i da za sve $Y \in \mathcal{F}$ važi $|X \cap Y| = \aleph_0$.

Dokaz.

Bez gubitka opštosti, neka je $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ Za $Y \in \mathcal{F}$ definišimo $f_Y(n) = \min(Y \cap X_n)$, za $n \in \omega$. Kako je $\mathcal{F}$ generisano sa manje od $\mathfrak{d}$ elemenata, postoji funkcija $f \in {}^\omega\omega$ takva da $f \not\leqslant^* f_Y$ za sve $Y \in \mathcal{F}$. Neka je $X = \bigcup_{n\in\omega}(X_n \cap f(n))$. Jasno je da je X traženi skup. □

Lema 3.9. [2, str. 181] Jednakost $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ važi ako i samo ako se svaki filter generisan sa manje od $\mathfrak{c}$ elemenata može proširiti do P-tačke.

Dokaz.

($\Leftarrow$): Neka je $F \subseteq {}^\omega\omega$ proizvoljna familija sa manje od $\mathfrak{c}$ elemenata. Za $f \in F$ i $n \in \omega$ definišimo $X_f = \{(n,k) \in \omega \times \omega : k \geqslant f(n)\}$ i $X^n = \{(m,k) \in \omega \times \omega : m \geqslant n\}$. Lako se vidi da familija $\{X_f : f \in F\} \cup \{X^n : n \in \omega\}$ generiše filter. Posmatrajmo particiju od $\omega \times \omega$ datu sa $Y_n = \{n\} \times \omega$ za $n \in \omega$. Prema pretpostavci postoji $X \subseteq \omega \times \omega$ takvo da je $X \cap X_f$ beskonačan za sve $f \in F$ i $X \cap Y_n$ konačan za $n \in \omega$. Definišimo sada funkciju $g(n) = \max\{k \in \omega : (n,k) \in X \cap Y_n\}$, za $n \in \omega$. Jasno je da je g definisano na beskonačnom podskupu od ω i da nijedno $f \in F$ nije dominantno nad g.

($\Rightarrow$): Koristeći lemu 3.8 i pretpostavku $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ indukcijom konstruišemo P-tačku. Neka je $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ numeracija prebrojivih podskupova skupa $[\omega]^\omega$. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}_\alpha$ već konstruisano. Ako je $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\alpha$, onda primenimo lemu 3.8 da bismo dobili skup $X_{\alpha+1}$ i neka je $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ filter generisan sa $\mathcal{F}_\alpha \cup$

$\{X_{\alpha+1}\}$. Ako je β granični ordinal i $\mathcal{F}_\alpha$ za $\alpha < \beta$ je konstruisan, onda $\mathcal{F}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{F}_\alpha$. $\Box$

Direktna posledica prethodnog tvrđenja jeste sledeća teorema.

Teorema 3.10. Neka važi $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Tada postoji P-tačka.

Napomena. Na osnovu teoreme 2.32 i njenog dokaza sledi da MA, pa čak i MA za σ-centrirana parcijalna uređenja, impliciraju $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, pa time i postojanje P-tačaka.

4 $\mathcal{I}$-ultrafilteri: uvod i neke klase

U ovoj glavi definišemo centralni pojam rada: $\mathcal{I}$-ultrafiltere, izvodimo neke njihove osnovne osobine, i bliže posmatramo odnose između klasa P-tačaka (koje, kao što će se ispostaviti, takođe spadaju u $\mathcal{I}$-ultrafiltere), diskretnih ultrafiltera, raštrkanih ultrafiltera, ultrafiltera mere nula i nigde gustih ultrafiltera. Materijal iz prva dva poglavlja preuzet je uglavnom iz [12, str. 17–22] (uz izuzetke koji su naznačeni kao takvi), materijal iz trećeg poglavlja preuzet je iz [3], dok je u četvrtom poglavlju uz svaki stav zasebno naveden izvor.

4.1 Definicije i osobine

Definicija 4.1. Neka je $\mathcal{I}$ familija podskupova skupa X takva da $\mathcal{I}$ sadrži sve singltone i da je zatvorena za podskupove. Za dati ultrafilter $\mathcal{U}$ na ω kažemo da je $\mathcal{I}$-*ultrafilter* ako za svako $f : \omega \to X$ postoji $A \in \mathcal{U}$ takvo da $f[A] \in \mathcal{I}$.

Trivijalno važi da ako je $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, onda je svaki $\mathcal{I}$-ultrafilter i $\mathcal{J}$-ultrafilter. Takođe, primetimo da ako za $\mathcal{I}$ uzmemo familiju konačnih skupova, da su tada $\mathcal{I}$-ultrafilteri zapravo glavni ultrafilteri.

Familija $\mathcal{I}$ u opštem slučaju ne mora biti ideal, ali dovoljno je posmatrati ideale na ω, jer zamenom uslova $f[A] \in \mathcal{I}$ u definiciji 4.1 sa uslovom $f[A] \in \langle \mathcal{I} \rangle$ dobijamo isti koncept. To nam potvrđuje sledeća lema.

Lema 4.2. Za svaki ultrafilter $\mathcal{U}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) $\mathcal{U}$ je $\mathcal{I}$-ultrafilter,

(2) $\mathcal{U}$ je $\langle \mathcal{I} \rangle$-ultrafilter.

Dokaz.

Trivijalno važi da iz (1) sledi (2), tako da je dovoljno pokazati da iz (2) sledi (1). Neka je $\mathcal{U}$ $\langle \mathcal{I} \rangle$-ultrafilter i neka $f \in {}^{\omega}\omega$. Tada postoji $V \in \mathcal{U}$ takav da $f[V] \in \langle \mathcal{I} \rangle$, pa za neko $k \in \omega$ postoje skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{I}$ takvi da važi $f[V] \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_k$. Sada je $f^{-1}[A_1] \cup \cdots \cup f^{-1}[A_k] = f^{-1}[A_1 \cup \cdots \cup A_k] \supseteq V \in \mathcal{U}$. Odavde $f^{-1}[A_i] \in \mathcal{U}$ za neko $i \leqslant k$. Neka je $U = f^{-1}[A_i]$. Tada $U \in \mathcal{U}$ i $f[U] = A_i \in \mathcal{I}$, te je $\mathcal{U}$ i $\mathcal{I}$-ultrafilter. $\square$

Lema 4.3. Neka je $\mathcal{I}$ familija podskupova skupa X koja sadrži sve singltone i koja je zatvorena za podskupove. Tada su $\mathcal{I}$-ultrafilteri zatvoreni nadole u odnosu na Rudin-Keislerov poredak $\leqslant_{RK}$.

Dokaz.
Neka $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\omega$, $\mathcal{V} \leqslant_{RK} \mathcal{U}$ i pri tome je $\mathcal{U}$ $\mathcal{I}$-ultrafilter. Treba pokazati da je i $\mathcal{V}$ $\mathcal{I}$-ultrafilter, to jest da za svako $F : \omega \to X$ postoji $V \in \mathcal{V}$ da $F[V] \in \mathcal{I}$. Zbog $\mathcal{V} \leqslant_{RK} \mathcal{U}$ postoji $f \in {}^{\omega}\omega$ takvo da $f[U] \in \mathcal{V}$ za sve $U \in \mathcal{U}$. Neka je $F_1 = F \circ f$. Pošto je $\mathcal{U}$ $\mathcal{I}$-ultrafilter, za $F_1 : \omega \to X$ postoji $U \in \mathcal{U}$ da $F_1[U] \in \mathcal{I}$, to jest $F[f[U]] \in \mathcal{I}$. Dakle, možemo uzeti $V = f[U]$. $\square$

Lema 4.4. Ako je Φ klasa ultrafiltera zatvorena nadole u odnosu na $\leqslant_{RK}$ i $\mathcal{I}$ je ideal na $\mathcal{I}$, onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(1) postoji $\mathcal{U} \in \Phi$ koji nije $\mathcal{I}$-ultrafilter;

(2) postoji $\mathcal{V} \in \Phi$ koji je proširenje $\mathcal{I}_*$, dualnog filtera ideala $\mathcal{I}$.

Dokaz.
Ultrafilter koji proširuje $\mathcal{I}_*$ nije $\mathcal{I}$-ultrafilter, te trivijalno iz (2) sledi (1). Da bismo pokazali suprotan smer, pretpostavićemo da $\mathcal{U} \in \Phi$ nije $\mathcal{I}$-ultrafilter. Prema tome, postoji funkcija $f \in {}^{\omega}\omega$ takva da za svako $A \in \mathcal{I}$ važi $f^{-1}[A] \notin \mathcal{U}$. Neka je $\mathcal{V} = \{V \subseteq \omega : f^{-1}[V] \in \mathcal{U}\}$. Očigledno je $\mathcal{V}$ proširenje $\mathcal{I}_*$ i $\mathcal{V} \leqslant_{RK} \mathcal{U}$. Kako je Φ klasa ultrafiltera zatvorena nadole u odnosu na $\leqslant_{RK}$ i $\mathcal{U} \in \Phi$, sledi da $\mathcal{V} \in \Phi$. $\square$

Lema 4.5. Neka su $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ ideali na ω. Ako postoji $\mathcal{J}$-ultrafilter koji nije $\mathcal{I}$-ultrafilter, onda postoji $\mathcal{J}$-ultrafilter koji proširuje $\mathcal{I}_*$.

Dokaz.
Ovo je direktna posledica leme 4.4. $\square$

Lema 4.6. Ultrafilter $\mathcal{U}$ je $\mathcal{I}$-ultrafilter ako i samo ako $\mathcal{I}_* \nleqslant_K \mathcal{U}$.

Dokaz.
Ako je $\mathcal{I}_* \leqslant_K \mathcal{U}$, onda postoji $f : \omega \to \omega$ takvo da $f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$ za sve $A \in \mathcal{I}_*$. Kako je $U \subseteq f^{-1}[f[U]] \in \mathcal{U}$, za sve $U \in \mathcal{U}$, i $\mathcal{U}$ je filter, imamo $f[U] \notin \mathcal{I}$, za sve $U \in \mathcal{U}$, pa $\mathcal{U}$ nije $\mathcal{I}$-ultrafilter.

Ako je $\mathcal{I}_* \nleqslant_K \mathcal{U}$, onda za svako $f : \omega \to \omega$ postoji $A \in \mathcal{I}_*$ takvo da $f^{-1}[A] \notin \mathcal{U}$. Kako je $\mathcal{U}$ ultrafilter, dobijamo $\omega \setminus f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$ i takođe $f[\omega \setminus f^{-1}[A]] \subseteq \omega \setminus A \in \mathcal{I}$. Zato je $\mathcal{U}$ $\mathcal{I}$-ultrafilter. $\square$

Lema 4.7. Neka je $\mathcal{F}$ filter na ω i $\mathcal{U}$ ultrafilter na ω. Tada $\mathcal{F} \leqslant_K \mathcal{U}$ ako i samo ako postoji ultrafilter $\mathcal{V}$ takav da $\mathcal{V} \leqslant_{RK} \mathcal{U}$ i $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{F}$.

Dokaz.

Ako $\mathcal{F} \leqslant_K \mathcal{U}$, onda postoji funkcija $f : \omega \to \omega$ takva da $f^{-1}[F] \in \mathcal{U}$ za svako $F \in \mathcal{F}$. Neka $\mathcal{V} = \{A \subseteq \omega : (\exists U \in \mathcal{U})(f[U] \subseteq A)\}$. Lako se pokazuje da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ je ultrafilter i $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Zato je $\mathcal{V} \leqslant_{RK} \mathcal{U}$.

Ako je $\mathcal{V} \leqslant_{RK} \mathcal{U}$, onda postoji $f : \omega \to \omega$ takva da $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}$ za svako $V \in \mathcal{V}$. Posebno, $f^{-1}[F] \in \mathcal{U}$ za svako $F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$, te je $\mathcal{F} \leqslant_K \mathcal{U}$. □

Lema 4.8. Neka je $\mathcal{I}$ ideal na ω. Za neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ na ω sledaći uslovi su ekvivalentni:

(1) $\mathcal{U}$ je $\mathcal{I}$-ultrafilter;

(2) $\mathcal{I}_* \nleqslant_K \mathcal{U}$;

(3) $\mathcal{V} \nleqslant_{RK} \mathcal{U}$ za svaki ultrafilter $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{I}_*$.

Dokaz.

Posledica lema 4.6 i 4.7. □

Posledica prethodnih rezultata je sledeća teorema.

Teorema 4.9. Ako je $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$, onda je svaki $\mathcal{I}$-ultrafilter i $\mathcal{J}$-ultrafilter.

4.2 Postojanje

Jedan od osnovnih pojmova prilikom izučavanja $\mathcal{I}$-ultrafiltera je pojam visokog ideala.

Definicija 4.10. Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ zovemo *visok* (engl. tall) ako svako $A \notin \mathcal{I}$ sadrži beskonačan podskup koji se nalazi u $\mathcal{I}$.

Naredna lema objašnjava vezu između $\mathcal{I}$-ultrafiltera i visokih ideala.

Lema 4.11. Za svaki $\mathcal{I}$-ultrafilter, gde je $\mathcal{I}$ ideal važi da je $\mathcal{I}$ visok ideal.

Dokaz.

Pretpostavimo da za $A \in [\omega]^\omega \setminus \mathcal{I}$ važi $\mathcal{I} \cap \mathcal{P}(A) = [A]^{<\omega}$, i neka je $e_A : \omega \to A$ neopadajuća numeracija skupa A.

Sada pretpostavimo suprotno, neka postoji neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ koji je $\mathcal{I}$-ultrafilter. Prema definiciji $\mathcal{I}$-ultrafiltera postoji $U \in \mathcal{U}$ takvo da važi $e_A[U] \in$

$\mathcal{I}$. Kako je $e_A[U] \subseteq A$, skup $e_A[U]$ jeste konačan. Odavde sledi da je U konačan, jer je e_A „1-1“, pa dobijamo kontradikciju sa pretpostavkom da ne postoji konačan skup u $\mathcal{U}$. □

Lema 4.12. Ako je $\mathcal{I}$ maksimalni ideal na ω takav da $\chi(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$, onda $\mathcal{I}$-ultrafilteri postoje.

Dokaz.

Numerišimo sve funkcije u ${}^{\omega}\omega$ sa $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \mathfrak{c}$ konstruisaćemo filter-baze $\mathcal{F}_\alpha$ koje zadovoljavaju sledeće:

(1) $\mathcal{F}_0$ je Fréchetov filter;

(2) $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ kad god je $\alpha \leqslant \beta$;

(3) $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$ za granični ordinal γ;

(4) za svako α je $|\mathcal{F}_\alpha| \leqslant |\alpha| \cdot \aleph_0$;

(5) za svako α postoji $F \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ takvo da $f_\alpha[F] \in \mathcal{I}$.

Pretpostavimo da nam je već poznat $\mathcal{F}_\alpha$. Ako postoji skup $F \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da $f_\alpha[F] \in \mathcal{I}$, onda za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ biramo $\mathcal{F}_\alpha$. Stoga možemo pretpostaviti $f_\alpha[F] \notin \mathcal{I}$, za sve $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Tada zbog maksimalnosti $\mathcal{I}$, $\omega \setminus f_\alpha[F] \in \mathcal{I}$ za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$, i kako je $\chi(\mathcal{I}) = \mathfrak{c} > |\mathcal{F}_\alpha|$, $\mathcal{I}$ nije generisan sa $\omega \setminus f_\alpha[F]$, dok $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Stoga postoji $M \in \mathcal{I}$ takvo da je $|M \setminus (\omega \setminus f_\alpha[F])| \geqslant \aleph_0$, to jest $M \cap f_\alpha[F]$ jeste beskonačan za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Odavde je $f_\alpha^{-1}[M \cap f_\alpha[F]] = f_\alpha^{-1}[M] \cap f_\alpha^{-1} f_\alpha[F] = f_\alpha^{-1}[M] \cap F$ beskonačan za sve $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i $f_\alpha^{-1}[M]$.

Očigledno je da svaki ultrafilter koji proširuje filter-bazu $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$ jeste $\mathcal{I}$-ultrafilter. □

Lema 4.13. Neka važi $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Ako je $\mathcal{I}$ visok ideal, onda $\mathcal{I}$-ultrafilteri postoje.

Dokaz.

Numerišimo sve funkcije u ${}^{\omega}\omega$ sa $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \mathfrak{c}$ konstruisaćemo filter-baze $\mathcal{F}_\alpha$ koje zadovoljavaju sledeće:

(1) $\mathcal{F}_0$ je Fréchetov filter;

(2) $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ kad god je $\alpha \leqslant \beta$;

(3) $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$ za granični ordinal γ;

(4) za svako α je $|\mathcal{F}_\alpha| \leqslant |\alpha| \cdot \aleph_0$;

(5) za svako α postoji $F \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ takvo da $f_\alpha[F] \in \mathcal{I}$.

Pretpostavimo da nam je već poznat $\mathcal{F}_\alpha$. Ako postoji skup $F \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da $f_\alpha[F] \in \mathcal{I}$, onda za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ biramo $\mathcal{F}_\alpha$. Stoga možemo pretpostaviti $f_\alpha[F] \notin \mathcal{I}$ (odatle sledi da je $f_\alpha[F]$ beskonačan za sve $F \in \mathcal{F}_\alpha$).

Kako je $|\mathcal{F}_\alpha| < \mathfrak{c} = \mathfrak{p}$, postoji $M \in [\omega]^\omega$ takav da $M \subseteq^* f_\alpha[F]$ za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Ideal $\mathcal{I}$ je visok, pa postoji $A \in \mathcal{I}$ koji je beskonačan podskup M i važi $A \subseteq^* f_\alpha[F]$, to jest $A \cap f_\alpha[F]$ je beskonačan, a odavde sledi $|f_\alpha^{-1}[A] \cap F| \geqslant \aleph_0$ za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i $f_\alpha^{-1}[A]$.

Lako se vidi da svaki ultrafilter koji proširuje $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$ jeste $\mathcal{I}$-ultrafilter. □

4.3 Zatvorenje pod sumama

Nadalje ćemo izučavati određene klase $\mathcal{I}$-ultrafiltera, u zavisnosti od tipa odgovarajućeg ideala $\mathcal{I}$. Na primer, ako je $\mathcal{I}$ familija skupova A sa zatvorenjem $\overline{A}$ mere nula, odnosno familija nigde gustih skupova, odnosno familija diskretnih skupova, odnosno familija raštrkanih skupova, tada za odgovarajuće $\mathcal{I}$-ultrafiltere kažemo da su *mere nula* (engl. measure zero), *nigde gusti* (engl. nowhere dense), *diskretni* (engl. discrete), odnosno *raštrkani* (engl. scattered), redom. Izučavćemo odnose između ovih klasa ultrafiltera.

Ovo poglavlje je tehničkog karaktera. U njemu su izdvojeni neki stavovi koji će biti od značajne koristi u narednom poglavlju.

Definicija 4.14. Ako su elementi od $\{\mathcal{U}\} \cup \{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ ultrafilteri na ω, onda je $\sum_{\mathcal{U}} (\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ ultrafilter na $\omega \times \omega$ definisan sa

$$X \in \sum_{\mathcal{U}} (\mathcal{V}_n)_{n\in\omega} \text{ ako i samo ako } \{n : \{m : (n,m) \in X\} \in \mathcal{V}_n\} \in \mathcal{U}.$$

Pošto se izomorfni ultrafilteri često međusobno identifikuju, ponekad ćemo $\sum_{\mathcal{U}} (\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ posmatrati kao ultrafilter na ω. Sve ovo ima smisla kako za glavne, tako i za neglavne ultrafiltere. Možemo primetiti da, ako se skup $\{n : \mathcal{V}_n \text{ je glavni}\}$ nalazi u $\mathcal{U}$, onda je $\sum_{\mathcal{U}} (\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ izomorfno sa $\mathcal{U}$.

Ako je $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ za sve $n \in \omega$, onda pišemo $\sum_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}_n)_{n\in\omega} = \mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ i ultrafilter $\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ nazivamo *proizvod ultrafiltera* $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Stepen ultrafiltera $\mathcal{U}^n$ za $n \in \omega$ definišemo induktivno na sledeći način: $\mathcal{U}^0$ je proizvoljni glavni ultrafilter, i $\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{U}\cdot\mathcal{U}^m$. Lako se pokazuje da su $\mathcal{U}^k\cdot\mathcal{U}^l$ i $\mathcal{U}^l\cdot\mathcal{U}^k$ izomorfni za sve $k, l \in \omega$. Neka je $\mathcal{U}^\infty = \sum_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}^n)_{n\in\omega}$.

Definicija 4.15. Neka su Γ i Δ klase ultrafiltera. Kažemo da je Γ *zatvoreno pod* Δ*-sumama* ako važi: kada $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\} \subseteq \Gamma$ i $\mathcal{U} \in \Delta$, onda $\sum_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}_n)_{n\in\omega} \in \Gamma$.

Definicija 4.16. Familija $\mathcal{I}$ podskupova $\mathbb{R}$ (odnosno ${}^\omega 2$) je *zatvorena pod diskretnim unijama* ako za $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ i za disjunktne otvorene skupove $(G_n)_{n\in\omega}$ važi $\bigcup_{n\in\omega}(X_n \cap G_n) \in \mathcal{I}$. Ako je $\mathcal{I}$ još i ideal, za $\mathcal{I}$ kažemo da je *diskretan ideal*.

Može se zapaziti da, ako je $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}({}^\omega 2)$, onda u gornjoj definiciji možemo reći da je svako G_n oblika $[\![S_n]\!]$ za neko $S_n \in {}^{<\omega}2$.

Skup A je *diskretan* u prostoru X ako svaka tačka $x \in A$ ima okolinu U takvu da $A \cap U = \{x\}$, dok je skup B *raštrkan* u X ako ne sadrži neprazan podskup koji je gust u sebi.

Primetimo: familija raštrkanih skupova i familija nigde gustih skupova su diskretni ideali; familija svih A takvih da $m(\overline{A}) = 0$ jeste diskretan ideal; familija diskretnih skupova je zatvorena pod diskretnim unijama, ali nije i ideal; familija konačnih skupova jeste ideal, ali nije zatvorena pod diskretnim unijama; familija prebrojivih skupova jeste diskretni ideal.

Skup X je *dobro zasnovan* za realciju $\leqslant$ ako svaki njegov neprazan podskup ima minimalni element u odnosu na relaciju $\leqslant$.

Definicija 4.17. Familija $\mathcal{I}$ podskupova ${}^\omega 2$ je *zatvorena pod raštrkanim unijama* ako za svako $\mathcal{S} \subseteq {}^{<\omega}2$ važi: ako je $\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$ dobro zasnovan za $\subset$ i $X_S \in \mathcal{I}$ za $S \in \mathcal{S}$, onda $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} X_S \cap [\![S]\!] \in \mathcal{I}$.

Svaka familija zatvorena pod raštrkanim unijama je i zatvorena pod diskretnim unijama.

Motivacija za ovu definiciju je činjenica da je $X \subseteq {}^\omega 2$ raštrkan ako i samo ako postoji $\mathcal{S} \subseteq {}^{<\omega}2$ takav da je $\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$ dobro zasnovan za $\subset$ i za svako $S \in \mathcal{S}$ postoji $f_S \in X \cap [\![S]\!]$ takvo da $X = \{f_S : S \in \mathcal{S}\}$. Dokažimo to. Za $X \subseteq {}^\omega 2$ neka je DX skup svih tačaka nagomilavanja X koje se nalaze u X. Definišimo $D^\alpha X$ induktivno: $D^0 X = X$, $D^{\alpha+1}X = D(D^\alpha X)$, i ako je α granični $D^\alpha X = \bigcap\{D^\beta X : \beta < \alpha\}$. Za neko $\alpha < \omega_1$ važi $D^\alpha X = D^{\alpha+1}X$, jer u X ne možemo imati više od $\aleph_0$ nepraznih međusobno disjunktnih otvorenih podskupova. Uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 4.18. Za $X \subseteq {}^{\omega}2$, neka je $d(X) = D^{\alpha}X$, gde je α određeno gornjim postupkom.

X je raštrkan ako i samo ako važi $d(X) = \emptyset$. Za $\beta < \alpha$ je $D^{\beta}X \setminus D^{\beta+1}X$ diskretan, pa postoji $\mathcal{S}_{\beta} \subseteq {}^{<\omega}2$ sačinjen od po parovima neuporedivih elemenata, takav da je $[\![S]\!] \cap (D^{\beta}X \setminus D^{\beta+1}X)$ singlton za sve $S \in \mathcal{S}_{\beta}$. Ako $S \in \mathcal{S}_{\beta}$, $T \in \mathcal{S}_{\gamma}$ i $[\![S]\!] \subset [\![T]\!]$, onda je $\beta < \gamma$. Stoga je $\mathcal{S} = \bigcup\{\mathcal{S}_{\beta} : \beta < \alpha\}$ kao što je i trebalo.

Teorema 4.19. Svaki diskretan ideal je zatvoren pod raštrkanim unijama.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{I}$ diskretan ideal na ${}^{\omega}2$. Neka je $\mathcal{S} \subseteq {}^{<\omega}2$ i neka je $\{X_S : S \in \mathcal{S}\}$ takav da je $\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$ dobro zasnovan za $\subset$ i $X_S \in \mathcal{I}$ za sve $S \in \mathcal{S}$. Treba pokazati da $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} X_S \cap [\![S]\!] \in \mathcal{I}$. Ovo ćemo pokazati indukcijom po rangu od $\mathcal{S}$, koji je definisan kao najmanji ordinal α za koji postoji $\varphi : \mathcal{S} \to \alpha$ takvo da za sve $S, T \in \mathcal{S}$ važi: ako je $[\![S]\!] \subseteq [\![T]\!]$, onda je $\varphi(S) < \varphi(T)$. Neka

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{S} : [\![T]\!] \text{ je } \subset\text{-maksimalno}\}.$$

Za $T \in \mathcal{T}$ neka je $\mathcal{S}_T = \{S \in \mathcal{S} : [\![S]\!] \subseteq [\![T]\!]\}$. Tada $\mathcal{S}_T$ ima rang najviše $\varphi(T)$ a to je strogo manje od α, pa znamo prema induktivnoj hipotezi da $\mathcal{Y}_T = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_T} X_S \cap [\![S]\!] \in \mathcal{I}$. Kako je $\mathcal{I}$ ideal, sledi $\mathcal{Z}_T = \mathcal{Y}_T \cup (X_T \cap [\![T]\!]) \in \mathcal{I}$. No, elementi skupa $\{[\![T]\!] : T \in \mathcal{T}\}$ po parovima su disjunktni, pa kako je $\mathcal{I}$ zatvoren pod diskretnim unijama, dobijamo

$$\bigcup\{\mathcal{Z}_T : T \in \mathcal{T} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} X_S \cap [\![S]\!]\} \in \mathcal{I}. \square$$

Lema 4.20. Najmanji diskretan ideal koji sadrži sve singltone sastoji se od raštrkanih skupova.

Dokaz.

Na osnovu malopređašnjeg zapažanja o raštrkanim skupovima, za svaki raštrkan skup X postoje $\mathcal{S} \subseteq {}^{\omega}2$ i $(X_S)_{S \in \mathcal{S}}$ takvi da važi: $\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$ je dobro zasnovan, svaki X_S je singlton i $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} X_S \cap [\![S]\!]$. $\square$

U narednih nekoliko tvrđenja koristićemo sledeće označavanje. Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na ω i $F : \omega \to {}^{\omega}2$. Tada postoji jedinstveno $f \in {}^{\omega}2$ takvo da za sve prirodne brojeve n važi $F^{-1}[[\![f{\restriction}n]\!]] \in \mathcal{U}$. Zapisivaćemo $f = \Phi(F,\mathcal{U})$. Ovo je samo limes niza F u $\mathcal{U}$. Ako je $(\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ niz ultrafiltera i $F : \omega \times \omega \to {}^{\omega}2$, onda definišemo $F_n : \omega \to {}^{\omega}2$ sa $F_n(m) = F(n,m)$ i tada $f_n = \Phi(F_n, \mathcal{V}_n)$. Definišemo i $F^* : \omega \to {}^{\omega}2$ sa $F^*(n) = f_n$, i neka $f^* = \Phi(F^*,\mathcal{U})$.

Teorema 4.21. Ako je $\mathcal{I}$ diskretan ideal (koji sadrži sve singltone), onda je klasa $\mathcal{I}$-ultrafiltera zatvorena pod raštrkanim sumama.

Dokaz.

Neka je $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ familija $\mathcal{I}$-ultrafiltera i neka je $\mathcal{U}$ raštrkan. Ako $\{n : \mathcal{V}_n \text{ je glavni}\} \in \mathcal{U}$, dokaz je gotov, te pretpostavimo suprotno. Neka $F : \omega \times \omega \to {}^{\omega}2$. Kako je svako $\mathcal{V}_n$ $\mathcal{I}$-ultrafilter, postoji $A_n \in \mathcal{V}_n$ takvo da $F_n[A_n] \in \mathcal{I}$. Možemo pretpostaviti da svako $m \in A_n$ ispunjava $m > n$. Kako je $\mathcal{U}$ raštrkan, postoji $A \in \mathcal{U}$ takav da je $F^*[A]$ raštrkan. Birajmo $\mathcal{S} \subseteq {}^{<\omega}2$ takav da je $\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$ dobro zasnovan za $\subset$ i da za svako $S \in \mathcal{S}$ postoji $g_S \in [\![S]\!]$ takvo da važi $F^*[X] = \{g_S : S \in \mathcal{S}\}$. Fiksirajmo $S \in \mathcal{S}$ i neka je $C_S = \{n : f_n = g_n\}$. Neka je dalje $C_S = D_S \cup E_S$, gde su $D_S = \{n \in C_S : \{m : F_n(m) = g_S\} \in \mathcal{V}_n\}$ i $E_S = C_S \setminus D_S$. Za $n \in D_S$ neka $B_n = \{m \in A_n : F_n(m) = g_S\}$, i za $n \in E_S$ neka $B_n = \{m \in A_n : F_n(m) \neq g_S \wedge F_n(m) \in [\![S]\!] \wedge F_n(m){\restriction}n = g_S{\restriction}n\}$. Potrebno je pokazati da $F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in A\}] \in \mathcal{I}$ jer $B_n \in \mathcal{V}_n$ za sve $n \in A$.

Za $S \in \mathcal{S}$ neka je $X_S = F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in C_S\}]$. Ako pokažemo da $X_S \in \mathcal{I}$, dokaz će biti gotov, jer $X_S \subseteq [\![S]\!]$ zbog izbora B_n i znamo da je $\mathcal{I}$ zatvoren pod raštrkanim unijama. Sada fiksirajmo $S \in \mathcal{S}$. Tada je $F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in D_S\}] = \{g_S\}$ zbog definicije D_S, pa kako $\mathcal{I}$ sadrži sve singltone, potrebno je jedino pokazati da $F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in E_S\}] \in \mathcal{I}$.

Za $i \geqslant |S|$ neka je T_i jedinstveni element od ${}^{<\omega}2$ takav da $|T_i| = i + 1$, $T_i{\restriction}i = g_S{\restriction}i$ i $T_i(i) \neq g_S(i)$. Primetimo da, ako $m \in B_n$ i $n \in E_S$, onda $F(n,m) = F_n(m) \neq g_s$, ali $F_n(m) \in [\![S]\!]$. Stoga postoji $i \geqslant |S|$ takvo da $F_n(m) \in [\![T_i]\!]$. Primetimo još: ako $F_n(m) \in [\![T_i]\!]$, onda je $i \geqslant n$, pošto je $F_n(m){\restriction}n = g_S{\restriction}n$. Stoga, ako je $Y_i = F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in E_S\}] \cap [\![T_i]\!]$, onda $Y_i \subseteq \{F[B_n] : n \leqslant i\}$. Zato $Y_i \in \mathcal{I}$, jer $F[B_n] \in \mathcal{I}$ za sve $n \leqslant i$. Takođe, kako su elementi skupa $[\![T_i]\!]$ po parovima disjunktni i kako je $\mathcal{I}$ zatvoren pod diskretnim unijama, sledi $\bigcup\{Y_i : i \geqslant |S|\} \in \mathcal{I}$. Ali $\bigcup\{Y_i : i \geqslant |S|\} = F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in E_S\}]$, te je dokaz kompletan. $\square$

Teorema 4.22. Familija nigde gustih ultrafiltera je zatvorena pod nigde gustim sumama.

Dokaz.

Pretpostavimo da su $\{\mathcal{U}\} \cup \{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ nigde gusti ultrafilteri. Pokazaćemo da je $\sum_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ nigde gust. Pretpostavimo da $F : \omega \times \omega \to {}^{\omega}2$. Neka je $A_n \in \mathcal{V}_n$ takvo da je $F_n[A_n]$ nigde gust, i neka je $A \in \mathcal{U}$ takav da je $F^*[A]$ nigde gust.

Neka je $\mathcal{S} \subseteq {}^{<\omega}2$ takav da je $\bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$ gust i disjunktan sa $F^*[A]$. Neka $\{S_n : n \in \omega\}$ numeriše ${}^{<\omega}2$. Za svako n naći ćemo skup $T_n \supseteq S_n$, i ako $n \in A$, i skup $B_n \subseteq A_n$ takav da $B_n \in \mathcal{V}_n$ i $F_n[B_n] \cap [\![T_i]\!] = \emptyset$ i $F_i[B_i] \cap [\![T_n]\!] = \emptyset$, za sve $i \leqslant n$. Nađimo prvo $T \supseteq S_n$ takvo da važi $[\![T]\!] \subseteq \bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$. Sada je $\bigcup\{F_i[B_i] : i < n\}$ nigde gust, pa postoji $T_n \supseteq T$ takav da $[\![T_n]\!] \cap F_i[B_i] = \emptyset$ za sve $i < n$.

Ako je $n \in A$, onda $f_n \notin \bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$, te $f_n \notin \bigcup\{[\![T_i]\!] : i < n\}$. Neka je $B_n = A_n \setminus \{F^{-1}[[\![T_i]\!]] : i \leqslant n\}$. Tada $B_n \in \mathcal{V}_n$.

Prema tome, skup $\bigcup\{[\![T_n]\!] : n \in \omega\}$ jeste gust, otvoren i disjunktan sa $\bigcup\{F_n[B_n] : n \in A\} = F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in A\}]$, te je dokaz završen. $\square$

Teorema 4.23. Klasa ultrafiltera mere nula je zatvorena pod sumama ultrafiltera mere nula.

Dokaz.

Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}_n$, $n \in \omega$, ultrafilteri mere nula. Treba pokazati da je $\sum_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ takođe ultrafilter mere nula. Fiksirajmo $F : \omega \times \omega \to {}^{\omega}2$. Neka je $A_n \in \mathcal{V}_n$ takvo da $m(\overline{F_n[A_n]}) = 0$ i nađimo $A \in \mathcal{U}$ koje ispunjava $m(\overline{F^*[A]}) = 0$. Za $n \in A$ neka je $B_n = A_n \cap F_n^{-1}[[\![f_n{\restriction}n]\!]]$. Tada $B_n \in \mathcal{V}_n$. Ako je $B = \{(n,m) : m \in B_n, n \in A\}$, onda $B \in \sum_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ i $\overline{F[B]} = \bigcup_{n\in A}\overline{F_n[B_n]} \cup \overline{F^*[A]}$, pa $m(\overline{F[B]}) = 0$ što je i trebalo pokazati. $\square$

Teorema 4.24. Za svaki neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ na ω, $\mathcal{U}^{\omega}$ nije diskretan.

Dokaz.

Definišimo linearno uređenje na ${}^{<\omega}\omega$ uzimajući $\sigma \leqslant \tau$ ako i samo ako ili važi $\tau \subseteq \sigma$, ili za minimalno i takvo da $\sigma(i) \neq \tau(i)$ važi $\sigma(i) < \tau(i)$. Primetimo da je u odgovarajućoj topologiji uređenja σ tačka nagomilavanja skupa $\{\sigma^\frown m : m \in A\}$ za svako beskonačno $A \subseteq \omega$. Za svako $n \geqslant 1$ definišemo ultrafilter $\mathcal{U}_n$ na ${}^{n}\omega$ na sledeći način. Ako je $n = 1$, biće $X \in \mathcal{U}_1$ ako i samo ako $\{m : \{m\} \in X\} \in \mathcal{U}$. Ako je $n > 1$, stavljamo $X \in \mathcal{U}_n$ ako i samo ako $\{\sigma : \{m : \sigma^\frown m \in X\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}_{n-1}$. Jasno, $\mathcal{U}$ je izomorfno sa $\mathcal{U}_{n-1} \times \mathcal{U}$, te je po induktivnoj hipotezi $\mathcal{U}_n$ izomorfno sa $\mathcal{U}^n$. Konačno, definišimo $\mathcal{U}_\omega$ na ${}^{<\omega}\omega$ sa $X \in \mathcal{U}^{\omega}$ ako i samo ako $\{n : X \cap {}^{n}\omega \in \mathcal{U}_n\} \in \mathcal{U}$. Tada je $\mathcal{U}_n$ izomorfno sa $\mathcal{U}^n$.

Lako se pokazuje da, ako $X \in \mathcal{U}_n$, onda za zatvorenje $\overline{X}$ skupa X u topologiji uređenja važi $\overline{X} \cap {}^{n-1}\omega \in \mathcal{U}_{n-1}$, i stoga prema induktivnoj hipotezi sledi $X \cap {}^{i}\omega \in \mathcal{U}_i$ za sve i, $1 \leqslant i < n$. Neka $X \in \mathcal{U}_\omega$. Izaberimo takve m, n da važi ${}^{m}\omega \cap X \in \mathcal{U}_m$, ${}^{n}\omega \cap X \in \mathcal{U}_n$ i $m < n$. Tada $\overline{{}^{n}\omega \cap X} \cap {}^{m}\omega \in \mathcal{U}_m$, pa ${}^{m}\omega \cap X$ sadrži tačku nagomilavanja skupa ${}^{n}\omega \cap X$, te X nije diskretan. Preostaje još da definišemo pogodno preslikavanje $f : {}^{<\omega}\omega \to {}^{\omega}2$. Primetimo da, ukoliko za f odaberemo bilo koje homeomorfno utapanje (u odnosu na topologiju uređenja), jasno je da ni za jedno $X \in \mathcal{U}_\omega$ slika $f[X]$ nije diskretan skup, pa prema tome $\mathcal{U}_\omega$ nije diskretan ultrafilter. $\square$

Definicija 4.25. Skup $X \subseteq {}^{\omega}2$ ima *nivo* $\leqslant k$ ako $D^k X = \emptyset$. Ako je

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq {}^{\omega}2 : X \text{ ima nivo } \leqslant k\},$$

onda je $\mathcal{I}$-ultrafilter nivoa $\leqslant k$.

Teorema 4.26. Ako je $\mathcal{U}$ P-tačka, $k < \omega$ i za sve $n \in \omega$ ultrafilter $\mathcal{V}_n$ ima nivo $\leqslant k$, onda $\sum_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}_n)_{n\in\omega}$ ima nivo $\leqslant k+1$.

Dokaz.

Neka $F : \omega \times \omega \to {}^{\omega}2$ kao i dosad, i fiksirajmo $A_n \in \mathcal{V}_n$ sa $F_n[A_n]$ nivoa $\leqslant k$. Neka je $A \in \mathcal{U}$ i $F^*[A]$ singlton uređenja tipa ω ili $\omega^\star$.
Slučaj 1. $F^*[A] = \{g\}$. Za svako n biramo $B_n \subseteq A_n$ takvo da $B_n \in \mathcal{V}_n$ i svako $m \in B_n$ je $F_n(m) \in [\![g{\restriction}n]\!]$. Nije teško videti da $F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in A\}]$ ima nivo $\leqslant k$.
Slučaj 2. $F^*[A]$ ima uređenje tipa ω. (Slučaj kada je uređenje tipa $\omega^\star$ je sličan, te ćemo ga izostaviti.) Kako je $\mathcal{U}$ P-tačka, možemo pretpostaviti da je za svako $g \in F^*[A]$ skup $\{n \in A : f_n = g\}$ konačan. Ako sada biramo $B_n \subseteq A_n$ takvo da $B_n \in \mathcal{V}_n$ i da za svako $m \in B_n$ važi $F_n(m) \in [\![f_n{\restriction}n]\!]$, onda se ponovo lako proverava da $F[\{(n,m) : m \in B_n, n \in A\}]$ ima nivo $\leqslant k$. $\square$

Lema 4.27. Za $k \in \omega$ svaki ultrafilter nivoa $\leqslant k$ je diskretan.

Dokaz.

Prepostavimo da $F : \omega \to {}^{\omega}2$, $\mathcal{U}$ je nivoa $\leqslant k$ i $A \in \mathcal{U}$ takav da $F[A]$ ima nivo $\leqslant k$. Za $i < k$ skupovi $F[A] \cap (D^i F[A] \setminus D^{i+1}F[A])$ su disjunktni i diskretni i jedan od njih mora imati inverznu sliku koja leži u $\mathcal{U}$. $\square$

Teorema 4.28. Ako je $\mathcal{U}$ P-tačka, onda $\mathcal{U}^n$ je diskretan za sve $n \in \omega$.

Dokaz.

Prema teoremi 4.26 svako $\mathcal{U}^n$ ima nivo $\leqslant n$, pa je prema lemi 4.27 svaki od njih diskretan. $\square$

4.4 Međusobni odnosi

U ovom poglavlju posmatraćemo međusobne odnose između raznih klasa $\mathcal{I}$-ultrafiltera.

Pokažimo najpre da i P-tačke spadaju u $\mathcal{I}$-ultrafiltre za povoljno odabrano $\mathcal{I}$.

Teorema 4.29. [3] Ako je

$$\mathcal{I} = \{Y \subseteq {}^{\omega}2 : Y \text{ je konačan ili ima uređenje tipa } \omega \text{ ili } \omega^{\star}\},$$

onda su $\mathcal{I}$-ultrafilteri upravo P-tačke.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ P-tačka i $F : \omega \to {}^{\omega}2$. Indukcijom po n pokazujemo da postoji $f \in {}^{\omega}2$ takvo da za sve n važi $F^{-1}[[\![f{\restriction}n]\!]] \in \mathcal{U}$. Za sve $f \in {}^{\omega}2$ važi $F^{-1}[[\![f{\restriction}0]\!]] = F^{-1}[[\![\emptyset]\!]] = F^{-1}[{}^{\omega}2] = \omega \in \mathcal{U}$ pa možemo odabrati proizvoljno $f \in {}^{\omega}2$, i ono ispunjava bazu indukcije. Pretpostavimo da za neko n imamo $f \in {}^{\omega}2$ takvo da $F^{-1}[[\![f{\restriction}n]\!]] \in \mathcal{U}$. Primetimo da su skupovi $F^{-1}[[\![f{\restriction}n \cup \{(n,0)\}]\!]]$ i $F^{-1}[[\![f{\restriction}n \cup \{(n,0)\}]\!]]$ disjunktni i da je njihova unija $F^{-1}[[\![f{\restriction}n]\!]] \in \mathcal{U}$, pa prema lemi 2.10 sledi da je jedan od njih u $\mathcal{U}$, na primer $F^{-1}[[\![f{\restriction}n \cup \{(n,0)\}]\!]]$. Tada funkcija

$$f'(n) = \begin{cases} f(m), & \text{za } m \neq n; \\ 0, & \text{za } m = n \end{cases}$$

ispunjava $F^{-1}[[\![f'{\restriction}(n+1)]\!]] \in \mathcal{U}$. Kako pritom važi $f'{\restriction}n = f{\restriction}n$, jasno je da ovakvim induktivnim postupkom možemo konstruisati željenu funkciju.

Kako je $\mathcal{U}$ P-tačka, zbog leme 3.2 postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da $U \subseteq^{*} F^{-1}[[\![f{\restriction}n]\!]]$ za sve n. Jasno je da je f jedinstvena tačka nagomilavanja skupa $F[U]$. Ako je $A = \{m \in U : F(m) < f\}$ i $B = \{m \in U : F(m) > f\}$, onda $F[A], F[B] \in \mathcal{I}$ i ili $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{U}$, ili $F^{-1}[\{f\}] \in \mathcal{U}$. Zato je $\mathcal{U}$ $\mathcal{I}$-ultrafilter.

Sada pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ $\mathcal{I}$-ultrafilter i $(U_n)_{n\in\omega}$ niz elemenata iz $\mathcal{U}$. Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da $\bigcap\{U_n : n \in \omega\} = \emptyset$ i $U_{n+1} \subseteq U_n$ za sve n. Fiksirajmo $f \in {}^{\omega}2$, i neka je $F : \omega \to {}^{\omega}2$ proizvoljna „1-1“ funkcija koja za sve $n \in \omega$ ispunjava $F(n) \in [\![f{\restriction}m]\!] \setminus [\![f{\restriction}(m+1)]\!]$, gde je m maksimalno takvo da $n \in U_m$. Ako $U \in \mathcal{U}$ i $F[U] \in \mathcal{I}$, jasno je da važi $F[U] \cap [\![f{\restriction}n]\!] \neq \emptyset$ za sve n, pa f mora biti tačka nagomilavanja od $F[U]$, i stoga je $U \subseteq^{*} U_n$ za sve n. $\square$

Za izvođenje obrata, to jest za konstrukciju $\mathcal{I}$-ultrafiltera koji nisu P-tačke, uvodimo pojam P-ideala.

Definicija 4.30. Ideal $\mathcal{I}$ je *P-ideal* ako za sve $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ postoji $A \in \mathcal{I}$ takav da $A_n \subseteq^* A$ za sve n.

P-ideali su dualni ideali za P-tačke.

Teorema 4.31. [12, str. 21] Neka važi CH. Ako je $\mathcal{I}$ visok P-ideal na ω, onda postoji $\mathcal{I}$-ultrafilter koji nije P-tačka.

Dokaz.
Posmatrajmo particiju $\{R_n : n \in \omega\}$ skupa ω na beskonačne podskupove i numerišimo ${}^{\omega}\omega = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \omega_1$ konstruisaćemo prebrojivu filter-bazu koja zadovoljava sledeće uslove:

(1) $\mathcal{F}_0$ je generisan Fréchetovim filterom i $\{\omega \setminus R_n : n \in \omega\}$;

(2) $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ kad god je $\alpha \leqslant \beta$;

(3) $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$ za granični ordinal γ;

(4) za svako α i svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ skup $\{n : |F \cap R_n| = \aleph_0\}$ je beskonačan;

(5) za svako α postoji $F \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ takvo da $f_\alpha[F] \in \mathcal{I}$;

(6) za svako α važi $|\mathcal{F}_\alpha| = \aleph_0$.

Pretpostavimo da nam je $\mathcal{F}_\alpha$ poznato. Ako postoji skup $f \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da $f_\alpha[F] \in \mathcal{F}$, onda stavimo $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}$. Ako za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ važi $f_\alpha[F] \notin \mathcal{I}$, onda imamo jedan od sledećih slučajeva:

Slučaj 1. $(\forall F \in \mathcal{F}_\alpha)|\{n : |f_\alpha[F \cap R_n]| = \aleph_0\}| = \aleph_0$

Numerišimo $\mathcal{F}_\alpha$ sa $\{F_n : n \in \omega\}$. Prema pretpostavci, skup $M_k = \{n : |f_\alpha[F_k \cap R_n]| = \aleph_0\}$ jeste beskonačan za sve $k \in \omega$. Za svako $k \in \omega$, $n \in M_k$, možemo naći beskonačan skup $I_{k,n} \subseteq f_\alpha[F_k \cap R_n]$, i pri tome $I_{k,n} \in \mathcal{I}$ jer je $\mathcal{I}$ visok. Kako je $\mathcal{I}$ P-ideal, postoji $I \in \mathcal{I}$ takav da $I_{k,n} \subseteq^* I$ za svako $k \in \omega$ i $n \in M_k$. Lako se vidi da za svako $F_k \in \mathcal{F}_\alpha$ skup $\{n : |f_\alpha^{-1}[I] \cap F_k \cap R_n| = \aleph_0\} \supseteq M_k$ jeste beskonačan. Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo prebrojivu filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom $f_\alpha^{-1}[I]$.

Slučaj 2. $(\exists F_0 \in \mathcal{F}_\alpha)|\{n : |f_\alpha[F_0 \cap R_n]| = \aleph_0\}| < \aleph_0$

Numerišimo $\mathcal{F}_\alpha \setminus \{F_0\} = \{F_k : k > 0\}$. Za svako $k > 0$ skup

$$M_k = \{n : |F_0 \cap F_k \cap R_n| = \aleph_0 \text{ i } |f_\alpha[F_0 \cap F_k \cap R_n]| < \aleph_0\}$$

jeste beskonačan. Za svako $n \in M_k$ definišemo

$$u_n = \max\{u \in f_\alpha[F_k \cap F_0 \cap R_n] : |f_\alpha^{-1}[\{u\}] \cap F_k \cap F_0 \cap R_n| = \aleph_0\}.$$

Neka je $A_k = \{u_n : n \in M_k\}$. Ako je za neko k skup A_k konačan, onda neka je $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ filter-baza generisana sa $\mathcal{F}_\alpha$ i $f_\alpha^{-1}[A_k]$. U suprotnom, za svako $k \in \omega$ možemo odabrati beskonačan skup $I_k \in \mathcal{I}$ takav da bude $I_k \subseteq A_k$. Primetimo da za svako $u \in I_k$ postoji neko k takvo da važi $|f_\alpha^{-1}[\{u\}] \cap F_k \cap F_0 \cap R_n| = \aleph_0$. Kako je $\mathcal{I}$ P-ideal, postoji $I \in \mathcal{I}$ takvo da važi $I_k \subseteq^* I$ za svako k. Lako se vidi da je $\{n : |f_\alpha^{-1}[\{u\}] \cap F_k \cap F_0 \cap R_n| = \aleph_0\}$ beskonačan za svako k. Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo prebrojivu filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom $f_\alpha^{-1}[I]$.

Konačno, neka je $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$. Jasno je da svaki ultrafilter koji proširuje $\mathcal{F}$ jeste $\mathcal{I}$-ultrafilter zbog uslova (5). Filter-baza $\mathcal{F}$ zadovoljava i uslov (4), te je, kako bismo dokazali da $\mathcal{F}$ može biti proširena do ultrafiltera koji nije P-tačka, dovoljno pokazati da, za svaku filter-bazu $\mathcal{F}'$ koja zadovoljava (4) i svako $A \subseteq \omega$, ili $\langle \mathcal{F}' \cup \{A\} \rangle$ ili $\langle \mathcal{F}' \cup \{\omega \setminus A\} \rangle$ zadovoljava (4).

Kada god je $\mathcal{F}'$ filter-baza koja zadovoljava (4) i $A \subseteq \omega$, onda ili za svako $F \in \mathcal{F}'$ postoji beskonačno mnogo $n \in \omega$ takvih da važi $|A \cap F \cap R_n| = \aleph_0$, te filter-baza generisana sa $\mathcal{F}'$ i A zadovoljava (4); ili postoji $F_0 \in \mathcal{F}'$ takvo da za sve osim konačno mnogo $n \in \omega$ važi $|A \cap F_0 \cap R_n| < \aleph_0$. U drugom slučaju, kako za svako $F \in \mathcal{F}'$ postoji beskonačno mnogo $n \in \omega$ za koje je $|F \cap F_0 \cap R_n| = \aleph_0$, filter-baza generisana sa $\mathcal{F}'$ i $\omega \setminus A$ zadovoljava uslov (4). $\square$

Teorema 4.32. [3] Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter na ω. Tada u sledećoj listi svaki uslov implicira naredni:

(1) $\mathcal{U}$ je P-tačka;

(2) $\mathcal{U}$ je diskretan;

(3) $\mathcal{U}$ je raštrkan;

(4) $\mathcal{U}$ je mere nula;

(5) $\mathcal{U}$ je nigde gust.

Dokaz.

Prva implikacija sledi na osnovu teoreme 4.29. Naredne implikacije posledice su činjenica da je svaki diskretan skup raštrkan, da svaki raštrkan skup ima zatvorenje koje je mere nula, i da svaki skup koji ima zatvorenje mere nula mora biti nigde gust. $\square$

U nastavku želimo pokazati da, pod odgovarajućim dodatnim pretpostavkama teorije skupova, obratne implikacije ne važe. Za to su nam potrebne dve pripremne leme.

Lema 4.33. [3] Neka važi Martinova aksioma za σ-centirana parcijalna uređenja. Neka je $\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega$, $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$, $\mathcal{A}$ zatvoren za konačne preseke i neka su svi elementi iz $\mathcal{A}$ neraštrkani. Ako $F : \mathbb{Q} \to {}^\omega 2$, onda postoji $Y \in [\mathbb{Q}]^\omega$ takav da je $Y \cap X$ neraštrkan za sve $X \in \mathcal{A}$ i $m(\overline{F[Y]}) = 0$.

Dokaz.

Iz topologije je poznata činjenica da svaki skup $X \in {}^\omega 2$ može biti jedinstveno predstavljen u obliku $X_0 \cup X_1$, gde je X_0 raštrkan a X_1 gust u sebi. Neka je $d(X) = X_1$ (definicija 4.18). Naravno, X je neraštrkan ako i samo ako je $d(X) \neq \emptyset$, pa je $d(X) \neq \emptyset$ za sve $X \in \mathcal{A}$.

Fiksirajmo $F : \mathbb{Q} \to {}^\omega 2$. Dobićemo Y primenjujući Martinovu aksiomu na pogodno konstruisano parcijalno uređenje P.

Neka je P skup elemenata p oblika $(A_p, \mathcal{S}_p, \mathcal{A}_p)$, gde $A_p \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, $\mathcal{S}_p \in [{}^{<\omega}2]^{<\omega}$, $\mathcal{A}_p \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ i, ako označimo $Y_p = \mathbb{Q} \setminus \bigcup\{F^{-1}[[\![S]\!]] : S \in \mathcal{S}_p\}$, onda $A_p \subseteq Y_p$ i $d(X \cap Y_p) \neq 0$ za sve $X \in \mathcal{A}$. Definišimo $p \leqslant q$ ako i samo ako $A_p \supseteq A_q$, $\mathcal{S}_p \supseteq \mathcal{S}_q$, $\mathcal{A}_p \supseteq \mathcal{A}_q$ i, ako $X \in \mathcal{A}_q$, onda $d(X \cap Y_q) \cap A_q \subseteq d(X \cap Y_p) \cap A_p$. Ako je $A_p = A_q$ i $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$ onda su p i q kompatibilni, te je P σ-centrirano.

Želimo naći neke guste skupove takve da, ako je $\mathcal{G} \subseteq P$ filter koji ih sve seče, onda $Y = \bigcup\{A_p : p \in \mathcal{G}\}$ zadovoljava lemu. Za $X \in \mathcal{A}$ definišimo

$$D(X) = \{p \in P : X \in \mathcal{A}_p \text{ i postoji } f \in A_p \text{ takvo da } f \in d(X \cap Y_p)\}.$$

Skup $D(X)$ je gust, jer za $q \in P$ i $f \in d(X \cap Y_q)$ imamo $p = (A_q \cup \{f\}, \mathcal{S}_q, \mathcal{A}_q \cup \{X\}) \leqslant q$ i $p \in D(X)$. Za $X \in \mathcal{A}$ i $n \in \omega$ neka je

$$E(X,n) = \Big\{p \in P : X \in \mathcal{A}_p \text{ i}$$
$$(\forall f \in d(X \cap Y_p) \cap A_p)(\exists g \in d(X \cap Y_p) \cap A_p)(f \neq g \wedge |f-g| < \frac{1}{n})\Big\}.$$

Ovde $|f-g|$ predstavlja udaljenost između f i g u standardnoj metrici na ${}^\omega 2$. Tada je $E(X,n)$ takođe gust. Neka $q \in P$. Za svako $f \in d(X \cap Y_q) \cap A_q$ biramo $g_f \neq f$ takvo da $g_f \in f \in d(X \cap Y_p)$ i $|g_f - f| < \frac{1}{n}$, i neka je

$A_p = A_q \cup \{g_f : f \in d(X \cap Y_q) \cap A_q)\}$. Tada $p = (A_p, \mathcal{S}_q, \mathcal{A}_q \cup \{X\}) \leqslant q$ i $p \in E(X, n)$. Ako je $\mathcal{G}$ filter na P koji seče $D(X)$ i $E(X, n)$, tada Y seče svako $X \in \mathcal{A}$ po neraštrkanom skupu (pošto je $\bigcup\{A_p \cap d(X) : p \in \mathcal{G} \wedge X \in \mathcal{A}_p\}$ gust u sebi). No, ovako izabrano Y ne mora ispunjavati $m(\overline{F[Y]}) = 0$. Zato uvodimo još neke guste skupove.

Ako je $\mathcal{G}$ filter, neka je $\mathcal{S} = \bigcup\{\mathcal{S}_p : p \in \mathcal{G}\}$. Jasno je da važi $\overline{F[Y]} \cap \bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\} = \emptyset$, pa je dovoljno izabrati $\mathcal{G}$ takvo da $\bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}$ ima meru 1. Za ovo je dovoljno dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ sledeći skup D_ε jeste gust:

$$D_\varepsilon = \{p \in P : m(\bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}\}) > 1 - \varepsilon\}.$$

Neka je dato $q \in P$. Fiksirajmo dovoljno veliko k da važi $\mathcal{S}_q \subseteq {}^{\leqslant k}2$. Neka je $|A_q| = m$, $Z = \{(f, X) : f \in A_p \wedge X \in \mathcal{A}_q \wedge f \in d(X \cap Y_q)\}$ i $|Z| = z$. Sada biramo dovoljno veliko n da važi $n \geqslant k$ i $\frac{m+z+1}{2^n} < \varepsilon$. Za $f \in A_q$ neka je $S_f = F(f) \restriction n$. Primetimo da $\mathbb{Q} \cap F^{-1}[[\![S_f]\!]] \subseteq Y_q$. Sada primetimo da, ako je $f \in \overline{d(X)}$ i $X = X_0 \cup X_1$, onda $f \in \overline{X_0}$ ili $f \in \overline{X_1}$. Sledi da, ako $(f, X) \in Z$, onda postoji $t_{f,X} \supseteq F(f) \restriction k$ takvo da $t_{f,X} \in {}^n2$ i $f \in d(X \cap F^{-1}[[\![t_{f,X}]\!]]$. Konačno primetimo da, ako $X_0 \cup X_1$ seče sve elemente od $\mathcal{A}$ po neraštrkanom skupu, onda to važi i za X_0 ili X_1. Odavde sledi da postoji $r \in {}^n2$ takvo da $\mathbb{Q} \cap F^{-1}[[\![r]\!]] \subseteq Y_q$. Ako sada uzmemo $A_p = A_q$, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \cup \{S \in 2^n : (\forall t \in \mathcal{S}_q)([\![S]\!] \cap [\![t]\!] = \emptyset \wedge S \neq S_f, t_{f,X}, r)\}$ i $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_q$, onda je $Y_p = F^{-1}[\bigcup\{[\![S_f]\!] : f \in A_q\} \cup \bigcup\{[\![t_{f,X}]\!] : (f, X) \in Z\} \cup [\![r]\!]] \cap \mathbb{Q}$, pa imamo $m(\bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{S}_q\}) = 1 - \frac{m+z+1}{2^n} > 1 - \varepsilon$. Stoga je $p \leqslant q$. □

Lema 4.34. [3] Neka važi Martinova aksioma za σ-centirana parcijalna uređenja. Neka je $\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega$, $|\mathcal{A}| < \mathfrak{c}$, $\mathcal{A}$ zatvoren za konačne preseke i neka za sve $X \in \mathcal{A}$ važi $m(\overline{X}) > 0$. Ako $F : \mathbb{Q} \to {}^\omega 2$, onda postoji $Y \in [\mathbb{Q}]^\omega$ takav da $m(\overline{Y \cap X}) > 0$ za sve $X \in \mathcal{A}$, i da je $F[Y]$ nigde gust.

Dokaz.

Fiksirajmo $F : \mathbb{Q} \to {}^\omega 2$. Ponovo ćemo dobiti Y primenjujući Martinovu aksiomu na pogodno konstruisano parcijalno uređenje P. Neka je P skup elemenata p oblika $(A_p, n_p, \mathcal{S}_p, \mathcal{A}_p)$, gde $A_p \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, $A_p \neq \emptyset$, $n_p < \omega$, $n_p \geqslant 1$, $\mathcal{S}_p \in [{}^{<\omega}2]^{<\omega}$, $\mathcal{A}_p \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ i, ako označimo

$$Y_p = \mathbb{Q} \setminus \bigcup\{[\![S]\!] : S \in {}^{n_p}2 \wedge A_p \cap [\![S]\!] = \emptyset\} \setminus \bigcup\{F^{-1}[[\![S]\!]] : S \in \mathcal{S}_p\},$$

onda $A_p \subseteq Y_p$ i $m(\overline{Y_p \cap X}) > 0$ za sve $X \in \mathcal{A}$. Definišimo $p < q$ ako i samo ako $A_p \supseteq A_q$, $n_p > n_q$, $\mathcal{S}_p \supseteq \mathcal{S}_q$, $\mathcal{A}_p \supseteq \mathcal{A}_q$, $A_p \cap [\![S]\!] = \emptyset$ za sve $S \in {}^{n_q}2$ koji ispunjavaju $A_q \cap [\![S]\!] = \emptyset$, i za sve $X \in \mathcal{A}_q$ važi

$$m(\overline{X \cap Y_q} \setminus \overline{X \cap Y_p}) < m(\overline{X \cap Y_q}) \sum_{i=n_q+1}^{n_p} 2^{-i}.$$

Primetimo da je tranzitivnost $\leqslant$ jasna, osim možda za poslednji uslov. Ali ako je $p < q < r$, onda važi

$$m(\overline{X \cap Y_r} \setminus \overline{X \cap Y_q}) < m(\overline{X \cap Y_r}) \sum_{i=n_r+1}^{n_q} 2^{-i}$$

i

$$m(\overline{X \cap Y_q} \setminus \overline{X \cap Y_p}) < m(\overline{X \cap Y_q}) \sum_{i=n_q+1}^{n_p} 2^{-i},$$

pa kako je $Y_p \subseteq Y_q \subseteq Y_r$, mora biti $m(\overline{X \cap Y_q}) < m(\overline{X \cap Y_r})$, te imamo

$$m(\overline{X \cap Y_r} \setminus \overline{X \cap Y_p}) \leqslant m(\overline{X \cap Y_r} \setminus \overline{X \cap Y_q}) + m(\overline{X \cap Y_q} \setminus \overline{X \cap Y_p}) <$$

$$< m(\overline{X \cap Y_r}) \sum_{i=n_r+1}^{n_p} 2^{-i},$$

kao što je i trebalo.

Kao i ranije, ako $A_p = A_q$, $n_p = n_q$, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$, onda su p i q kompatibilni. Stoga je P σ-centrirano.

Ponovo tražimo manje od $\mathfrak{c}$ gustih skupova u P takvih da, ako je $\mathcal{G} \subseteq P$ filter koji ih sve seče, onda $Y = \bigcup\{A_p : p \in \mathcal{G}\}$ zadovoljava lemu. Za $X \in \mathcal{A}$ neka je $D(X) = \{p \in P : X \in \mathcal{A}_p\}$. Tada je $D(X)$ gust.

Sada pokažimo da za sve $S \in {}^{<\omega}2$ skup $D_S = \{p \in P : (\exists T \in \mathcal{S}_p)(T \supseteq S)\}$ jeste gust. Tada, ako $\mathcal{G}$ seče sve D_S, $\overline{F(Y)}$ će biti nigde gust. Fiksirajmo $q \in P$ i neka je ε minimum svih vrednosti $m(\overline{X \cap Y_q})$ dok $X \in \mathcal{A}_q$.

Naći ćemo $p \leqslant q$ takvo da $p \in D_S$. Imaćemo $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_q$, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \cup \{T\}$ za neko $T \supseteq S$, $n_p = n_q + 1$, i $A_p \supseteq A_q$ odabrano tako da za sve S' dužine n_p i $X \in \mathcal{A}_p$ važi: ako je $X \cap Y_q \cap [\![S']\!] \neq \emptyset$, onda $X \cap A_p \cap [\![S']\!] \neq \emptyset$. Moramo odabrati takvo T da bude $p \leqslant q$.

Biramo dovoljno veliko n da važi $2^{n-|S|} > |\mathcal{A}_q| \frac{2^{2n_q}}{\varepsilon} + 1$. Zovimo T *loše* za $X \in \mathcal{A}_q$ ako je $S \subseteq T$ i

$$m(\overline{X \cap Y_q}) - m(\overline{X \cap Y_q \setminus F^{-1}[[\![T]\!]]}) > \frac{\varepsilon}{2^{2n_q}}.$$

Primetimo da ne postoji više od $\frac{2^{2n_q}}{\varepsilon}$ nizova $T \in {}^{n}2$ koji su loši za X. Zovimo $T \in {}^{n}2$ *loše* ako je $S \subseteq T$ i za neko $X \in \mathcal{A}$ važi $m(\overline{X \cap Y_q \setminus F^{-1}[[\![T]\!]]}) = 0$. Postoji najviše jedno T koje je loše. Iz izbora n sledi da postoji najmanje jedno $T \in 2^n$ koje nije loše i koje nije loše ni za jedno $X \in \mathcal{A}_q$. Dakle, ovakvo T možemo uzeti za traženo. Primetimo da sada $X \cap Y_p = X \cap Y_q \setminus F^{-1}[[\![T]\!]]$ važi za sve $X \in \mathcal{A}_q$.

Konačno, za svako $f \in \mathbb{Q}$ neka je

$$E_f = \{p \in P : \text{ ili } f \in A_p \text{ ili postoji } S \in {}^{n_p}2 \text{ da } f \in [\![S]\!] \text{ i } [\![S]\!] \cap A_p = \emptyset\}.$$

Pokažimo da će dokaz biti gotov ukoliko utvrdimo da je svako E_f gusto. Ako $\mathcal{G}$ seče sve $D(X)$, D_S i E_f, onda znamo da je $F[Y]$ nigde gust. Neka je $X \in \mathcal{A}$. Biramo $q \in \mathcal{G} \cap D(X)$, i neka $\varepsilon = m(\overline{X \cap Y_q})$. Neka je

$$\mathcal{T} = \{S : (\exists p \in \mathcal{G})(S \in {}^{n_p}2 \wedge [\![S]\!] \cap A_p \neq \emptyset)\}.$$

Kako $\mathcal{G}$ seče sve E_f, zaključujemo $X \cap Y = X \setminus \bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{T}\}$. Štaviše, za svako konačno $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ postoji $p \in \mathcal{G}$, $p \leqslant q$, takvo da za svako $S \in \mathcal{T}'$ važi $[\![S]\!] \cap (X \cap Y_p) = \emptyset$. Stoga $X \setminus \bigcup\{[\![S]\!] : S \in \mathcal{T}'\} \supseteq X \cap Y_p$ i

$$m(\overline{X \cap Y_q}) - m(\overline{X \cap Y_p}) \leqslant \left(\sum_{i=n_q+1}^{n_p} 2^{-2i}\right) m(X \cap Y_q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je sada $\overline{X \cap Y} = \bigcap_{p \in \mathcal{G}} X \cap Y_p$, mora biti $m(\overline{X \cap Y}) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > 0$, odakle bismo dobili kraj dokaza.

Zato je dovoljno pokazati da je E_f gust. Fiksirajmo $q \in P$. Ako $f \in Y_q$, onda neka $A_p = A_q \cup \{f\}$, $n_p = n_q$, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$ i $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_q$. Tada važi $p \leqslant q$ i $p \in E_f$. Pretpostavimo sada $f \notin Y_q$. Ako $f \notin \bigcup\{F^{-1}[[\![S]\!]] : S \in \mathcal{S}_q\}$, onda $q \in E_f$, te možemo pretpostaviti da $f \in F^{-1}[[\![S]\!]]$ za neko $S \in \mathcal{S}_q$. Nađimo dovoljno veliko n takvo da važi $n > n_q$ i $[\![f{\restriction}n]\!] \cap A_q = \emptyset$, uzmimo $n_p = n$, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$, $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_q$, i odaberimo $A_p \supseteq A_q$ takvo da za sve S' dužine n_p i $X \in \mathcal{A}_p$ važi: ako je $S' \neq f{\restriction}n$ i $X \cap Y_q \cap [\![S']\!] = \emptyset$, onda $X \cap A_p \cap [\![S']\!] = \emptyset$. Tada imamo $p \leqslant q$ i p svedoči $f{\restriction}n \in \mathcal{T}$. $\square$

Teorema 4.35. [3] Neka važi Martinova aksioma za σ-centirana parcijalna uređenja. Tada nijedna od implikacija u teoremi 4.32 ne važi u obrnutom smeru.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{U}$ P-tačka (nju možemo odabrati zahvaljujući napomeni posle teoreme 3.10), i neka je $n > 1$ prirodan broj. Prema teoremi 4.28, $\mathcal{U}^n$ je diskretan ultrafilter koji nije P-tačka. Dalje, kako je, prema teoremi 4.32, $\mathcal{U}$ raštrkan ultrafilter, prema teoremi 4.21 $\mathcal{U}^\omega$ je takođe raštrkan, a prema teoremi 4.24 nije i diskretan. Ovim smo dokazali da prve dve implikacije u teoremi 4.32 ne važe u obrnutom smeru.

Pokažimo sada da postoji ultrafilter mere nula koji nije raštrkan. Interpretirajmo skup $\mathbb{Q}$ kao podskup ${}^\omega 2$, kao $\{f \in {}^\omega 2 : (\exists n \in \omega)(\forall m > n)(f(m) = 0)\}$. Biće dovoljno da nađemo ultrafilter $\mathcal{U}$ na skupu $\mathbb{Q}$ koji se sastoji od neraštrkanih skupova ali takav da za sve $F : \mathbb{Q} \to {}^\omega 2$ postoji $X \in \mathcal{U}$ koje zadovoljava $m(\overline{F[X]}) = 0$. Ovakav ultrafilter pravolinijski se konstruiše pomoću transfinitne indukcije, uz lemu 4.33.

Najzad, konstruišimo ultrafilter $\mathcal{U}$ na $\mathbb{Q}$ takav da za sve $X \in \mathcal{U}$ važi $m(\overline{X}) > 0$, i da za sve $F : \mathbb{Q} \to {}^\omega 2$ postoji $X \in \mathbb{Q}$ za koje je $F[X]$ nigde gust. Ponovo je konstrukcija pravolinijska putem transfinitne indukcije i leme 4.34.

Ovim je dokaz završen. □

Za kraj poglavlja navodimo sledeću teoremu o odnosu Q-tačaka i $\mathcal{I}$-ultrafiltera.

Teorema 4.36. [12, str. 32] Neka važi $\mathrm{MA_{ctble}}$. Za svaki visok ideal $\mathcal{I}$ na ω postoji Q-tačka koja nije $\mathcal{I}$-ultrafilter.

Dokaz.

Numerišimo sve particije skupa ω na konačne skupove sa $\{\mathcal{Q}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ i uočimo particiju $\{R_n : n \in \omega\}$ skupa ω na beskonačne skupove. Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \mathfrak{c}$ konstruisaćemo filter-baze $\mathcal{F}_\alpha$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(1) $\mathcal{F}_0$ je Fréchetov filter;

(2) $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ kad god je $\alpha \leqslant \beta$;

(3) $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$ za granični ordinal γ;

(4) za svako α je $|\mathcal{F}_\alpha| \leqslant |\alpha| \cdot \aleph_0$;

(5) za svako α i svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ važi $|F \cap R_n| = \aleph_0$;

(6) za svako α postoji $F \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ takvo da za svako $Q \in \mathcal{Q}_\alpha$ važi $|F \cap Q| \leqslant 1$.

Indukcijski korak: pretpostavimo da nam je $\mathcal{F}_\alpha$ poznato. Ako postoji skup $F \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da za svako $Q \in \mathcal{Q}_\alpha$ važi $|F \cap Q| \leqslant 1$, tada za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ uzimamo $\mathcal{F}_\alpha$. Ako takav F ne postoji, onda ćemo željeni skup konstruisati koristeći Martinovu aksiomu.

Posmatrajmo $P = \{K \in [\omega]^{<\omega} : (\exists Q \in \mathcal{Q}_\alpha)(|K \cap Q| \leqslant 1)\}$ sa parcijalnim uređenjem definisanim sa: $K_2 \leqslant_P K_1$ akko je $K_2 = K_1$ ili $K_2 \supset K_1$ i $\min(K_2 \setminus K_1) > \max K_1$. Za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ i $n, k \in \omega$ neka je $D_{F,n,k} = \{K \in P : |K \cap F \cap R_n| \geqslant k\}$.

Pokažimo da je $D_{F,n,k}$ gust podskup $(P, \leqslant_P)$ za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ i $n, k \in \omega$.

Neka je $L \in P$. Tada postoji konačan skup $S \subseteq \omega$ takav da $L \subseteq \bigcup_{i \in S} Q_i$. Kako je $(F \cap R_n) \setminus [0, \max] \bigcup_{i \in S} Q_i$ konačan, za $j = 1, 2, \ldots, k$ možemo odabrati različite $n_j \in \omega \setminus S$ i elemente $q_j \in F \cap R_n \cap Q_{n_j}$. Neka je $K = L \cup \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$. Očigledno je da važi $K \leqslant_P L$ i $K \in D_{F,n,k}$.

Familija $\mathcal{D} = \{D_{F,n,k} : F \in \mathcal{F}_\alpha, n, k \in \omega\}$ sastoji se od gustih podskupova od P i kardinalnosti je manje od $\mathfrak{c}$. Stoga postoji $\mathcal{D}$-generički filter $\mathcal{G}$ na P.

Neka je $U = \bigcup \{K : K \in \mathcal{G}\}$. Skup U zadovoljava sledeće uslove:

- $(\forall F \in \mathcal{F}_\alpha)(\forall n \in \omega)(|U \cap F \cap R_n| \geqslant \aleph_0)$:

  Za svako $k \in \omega$ i $K \in \mathcal{G} \cap D_{F,n,k}$ imamo $U \supset K$ i $|K \cap F \cap R_n| \geqslant k$. Zato je $U \cap F \cap R_n$ beskonačan.

- $(\forall Q \in \mathcal{Q}_\alpha)(|U \cap Q| \leqslant 1)$:

  Ako $u, v \in U$, onda postoji $K \in \mathcal{G}$ takvo da $u, v \in K$, pa prema definiciji od P elementi u, v pripadaju disjunktnim skupovima particije $\mathcal{Q}_\alpha$.

Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom U.

Konačno, neka je $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$. Očigledno je da svaki ultrafilter koji proširuje $\mathcal{F}$ jeste Q-tačka i da za svako $F \in \mathcal{F}, n \in \omega$ skup $F \cap R_n$ jeste konačan.

Odavde je skup $R_A = \bigcup_{n \in A} R_n$ kompatibilan sa $\mathcal{F}$ za svako $A \subseteq \omega$. Neka je $\mathcal{G} = \{R_A : A \in \mathcal{I}_*\}$. Primetimo da svaki ultrafilter koji proširuje $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ jeste Q-tačka jer proširuje $\mathcal{F}$, i nije $\mathcal{I}$-ultrafilter zbog funkcije definisane sa $f[R_n] = \{n\}$. $\square$

5 Tanki, skoro tanki i $\mathcal{W}$-ultrafilteri

U ovom poglavlju razmatraćemo još neke vrste $\mathcal{I}$-ultrafiltera: tanke, skoro tanke i $\mathcal{W}$-ultrafiltere. Naredni stavovi uglavnom potiču iz [12], uz manji dodatak iz drugih izvora (takvi dodaci su naznačeni u tekstu).

5.1 Tanki i skoro tanki ultrafilteri

Najpre ćemo uvesti tanke i skoro tanke skupove i neke njihove osobine.

Definicija 5.1. Beskonačan skup $A \subseteq \omega$ sa numeracijom $A = \{a_n : n \in \omega\}$ naziva se *tanak* (engl. thin) ako važi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$.

Definicija 5.2. Beskonačan skup $A \subseteq \omega$ sa numeracijom $A = \{a_n : n \in \omega\}$ naziva se *skoro tanak* (engl. almost thin) ako važi $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

Očigledno je da je svaki tanak skup i skoro tanak. Obrnuto nije tačno, jer na primer skup $\{2^n : n \in \omega\}$ jeste skoro tanak a nije tanak. Primer tankog skupa je $\{n! : n \in \omega\}$. Posmatrajući skupove $A = \{n! : n \in \omega\}$ i $B = \{n! + 1 : n \in \omega\}$, koji su tanki, i njihovu uniju $A \cup B$, koja nije ni skoro tanak, možemo zaključiti da ni familija tankih niti familija skoro tankih skupova nije ideal.

Ideal koji je generisan tankim skupovima označavaćemo sa $\mathcal{T}$ a ideal generisan skoro tankim skupovima sa $\mathcal{A}$. Oba ova ideala su proširenja Fréchetovog ideala. Očigledno je da $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{T}$, i sledeća lema pokazuje da se ova dva ideala ne podudaraju.

Lema 5.3. $A = \{2^n : n \in \omega\} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{T}$.

Dokaz.

Kako je A skoro tanak skup on se nalazi u $\mathcal{A}$. Pretpostavimo da postoje tanki skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ takvi da $A \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$. Za svako $i = 1, 2, \ldots, k$ postoji $n_i \in \omega$ takvo da, kad god su a, b dva elementa iz A_i koji ispunjavaju $n_i < a < b$, važi $\frac{a}{b} < \frac{1}{2^k}$. Neka je $n_0 = \max\{n_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ i posmatrajmo skup $\{2^{n_0}, 2^{n_0+1}, \ldots, 2^{n_0+k}\}$. Svaki od njegovih $k+1$ elemenata pripada A_i za neko i, te postoji neko i_0 takvo da A_{i_0} sadrži bar dva od njih. Za ove elemente važi $n_{i_0} < a < b$ i $\frac{a}{b} \geqslant \frac{2^{n_0}}{2^{n_0+k}} = \frac{1}{2^k}$ što je kontradikcija i prema tome $A \notin \mathcal{T}$. $\square$

Lema 5.4. Ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{T}$ nisu P-ideali.

Dokaz.

Posmatrajmo tanke skupove $A_k = \{n! + k : n \in \omega\}$, $k \in \omega$. Želimo dokazati da, kada god $A \subseteq \omega$ sadrži sve osim konačno mnogo elemenata iz svakog A_k, onda A ne možemo zapisati kao konačnu uniju skoro tankih skupova, to jest $A \notin \mathcal{A}$.

Neka je $A = \bigcup_{j \leqslant l} B_j$. Tada postoji $n_0 \in \omega$ takvo da je skup $C_l = \{n!, n! + 1, \dots, n! + l\}$ sadržan u A za svako $n \geqslant n_0$. Stoga jedan od skupova B_j sadrži dva elementa iz skupa C_l. Kako imamo konačno mnogo skupova B_j, a beskonačno mnogo $n \geqslant n_0$, postoji B_j takvo da $|B_j \cap C_l| \geqslant 2$ za beskonačno mnogo n. Odavde sledi da $B_j = \{b^j_n : n \in \omega\}$ nije skoro tanak, jer

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b^j_n}{b^j_{n+1}} \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{n!}{n!+l} = 1. \ \square$$

Definicija 5.5. Neglavni ultrafilter $\mathcal{U}$ na ω je (*skoro*) *tanak* ultrafilter ako je $\mathcal{U}$ $\mathcal{I}$-ultrafilter za neku familiju (skoro) tankih skupova $\mathcal{I}$.

Svaki tanak ultrafilter je i skoro tanak ultrafilter. Sledeća lema pokazuje da se tanki i skoro tanki ultrafilteri podudaraju.

Lema 5.6. Svaki skoro tanak ultrafilter je tanak ultrafilter.

Dokaz.

Zbog leme 4.5 dovoljno je pokazati da svaki skoro tanak ultrafilter sadrži tanak skup. Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ skoro tanak ultrafilter i $U_0 \in \mathcal{U}$ skoro tanak skup numerisan rastući sa $U_0 = \{u_n : n \in \omega\}$. Ako U_0 nije tanak, onda imamo $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = q_0$, gde je $0 < q_0 < 1$. Možemo pretpostaviti da skup parnih brojeva pripada $\mathcal{U}$ (u suprotnom će parni i neparni brojevi zameniti uloge).

Definišimo $g : \omega \to \omega$ takvo da $g(u_n) = 2n$, $g[\omega \setminus U_0] = \{2n+1 : n \in \omega\}$.

Kako je $\mathcal{U}$ skoro tanak ultrafilter, postoji $U_1 \in \mathcal{U}$ takav da je $g[U_1]$ skoro tanak. Neka je $U = U_0 \cap U_1 = \{u_{n_k} : k \in \omega\}$. Skoro tanki skupovi su zatvoreni za podskupove, odakle je $g[U] = \{g(u_{n_k}) : k \in \omega\} \subseteq g[U_1]$ skoro tanak i

$$1 > \limsup_{k\to\infty} \frac{g(u_{n_k})}{g(u_{n_{k+1}})} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2n_k}{2n_{k+1}}.$$

Znamo da postoji n_0 takvo da za svako $n \geqslant n_0$ je $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{q_0+1}{2}$ i da postoji k_0 takvo da za svako $k \geqslant k_0$ važi $n_k \geqslant n_0$. Stoga za $k \geqslant k_0$ imamo

$$\frac{u_{n_k}}{u_{n_{k+1}}} = \frac{u_{n_k}}{u_{n_k+1}} \cdot \frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k+2}} \cdots \frac{u_{n_{k+1}-1}}{u_{n_{k+1}}} \leqslant \left(\frac{q_0+1}{2}\right)^{n_{k+1}-n_k}.$$

Iz $\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} < 1$ sledi $\lim_{k\to\infty}(n_{k+1} - n_k) = +\infty$. Prema tome

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{n_k}}{u_{n_{k+1}}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\frac{q_0+1}{2}\right)^{n_{k+1}-n_k} = 0$$

i skup $U \in \mathcal{U}$ je tanak. □

Teorema 5.7. Svaki selektivni ultrafilter je i tanak filter.

Dokaz.

Posmatrajmo particiju skupa ω, $\{R_n : n \in \omega\}$, gde je $R_0 = \{0\}$ i $R_n = [n!, (n+1)!)$ za $n > 0$. Ako je $\mathcal{U}$ selektivni ultrafilter, onda postoji $U_0 \in \mathcal{U}$ takvo da $|U_0 \cap R_n| \leqslant 1$ važi za sve $n \in \omega$. Kako je $\mathcal{U}$ ultrafilter, jedan od skupova $A_0 = \bigcup\{R_n : n \text{ je parno}\}$ ili $A_1 = \bigcup\{R_n : n \text{ je neparno}\}$ nalazi se u $\mathcal{U}$. Bez gubitka opštosti, neka je $A_0 \in \mathcal{U}$. Numerišimo skup $U = U_0 \cap A_0 \in \mathcal{U}$ sa $\{u_k : k \in \omega\}$. Ako $u_k \in [(2m_k)!, (2m_k+1)!)$, onda $u_{k+1} \geqslant (2m_k+2)!$ i važi $\frac{u_k}{u_{k+1}} \leqslant \frac{(2m_k+1)!}{(2m_k+2)!} = \frac{1}{2m_k+2} \leqslant \frac{1}{2k+2}$. Odavde je U tanak i pokazali smo da svaki selektivni ultrafilter sadrži tanak skup. Na zasnovu leme 3.4, klasa selektivnih ultrafiltera je zatvorena nadole u odnosu na $\leqslant_{RK}$, i sada primenom leme 4.4 zaključujemo da je svaki selektivni ultrafilter i tanak. □

Teorema 5.8. Svaki tanak ultrafilter je Q-tačka.

Dokaz.

Neka je $\mathcal{U}$ tanak ultrafilter i $\mathcal{Q} = \{Q_n : n \in \omega\}$ particija skupa ω na konačne skupove. Numerišimo $Q_n = \{q_i^n : i = 0, 1, \ldots, k_n\}$, gde je $k_n = |Q_n| - 1$. Želimo naći takvo $U \in \mathcal{U}$ da $|U \cap Q_n| \leqslant 1$ važi za sve $n \in \omega$.

Definišimo funkciju $f \in {}^\omega\omega$ na sledeći način: $f(q_0^0) = 0$, $f(q_0^{n+1}) = (n+2) \cdot \max\{f(q_{k_n}^n), k_{n+1}\}$, za $n \in \omega$, i $f(q_i^n) = f(q_0^n) + i$ za $i \leqslant k_n$, $n \in \omega$.

Kako je $\mathcal{U}$ tanak ultrafilter postoji $U_0 \in \mathcal{U}$ takvo da je $f[U_0] = \{v_m : m \in \omega\}$ tanak skup. Stoga postoji $m_0 \in \omega$ takvo da $\frac{v_m}{v_{m+1}} < \frac{1}{2}$ važi za svako $m \geqslant m_0$.

Funkcija f je „1-1" a $\mathcal{Q}$ particija skupa ω na konačne skupove, pa možemo naći $K \subseteq \omega$ sa najviše m_0 elemenata takav da važi $\{f^{-1}(v_i) : i < m_0\} \subseteq \bigcup_{n\in K} Q_n$. Poslednji skup je konačan, što implicira da $U = U_0 \setminus \bigcup_{n\in K} Q_n \in \mathcal{U}$.

Iz definicije imamo $U \cap Q_n = \emptyset$ za $n \in K$, i ostaje nam da provermo da li važi $(\forall n \notin K)(|U \cap Q_n| \leqslant 1)$.

Pretpostavimo suprotno, neka za neko $n \notin K$ postoje dva različita elementa $u_1, u_2 \in U \cap Q_n$, $u_1 < u_2$. Tada $f(u_1) = v_m$ za neko $m \geqslant m_0$, i

$f(u_2) = v_n$ za neko $n \geqslant m_0 + 1$. Dobijamo

$$\frac{v_m}{v_{m+1}} \geqslant \frac{v_m}{v_n} = \frac{f(u_1)}{f(u_2)} \geqslant \frac{f(q_0^n)}{f(q_0^n) + k_n} \geqslant \frac{(n+1) \cdot M}{(n+1) \cdot M + M} = \frac{n+1}{n+2},$$

gde je $M = \max\{f(q_{k_{n-1}}^{n-1}), k_n\}$. Pošto $\frac{n+1}{n+2} \geqslant \frac{1}{2}$, dobijamo kontradikciju. □

Teorema 5.9. Neglavni ultrafilter je selektivni ako i samo ako je P-tačka i tanak ultrafilter.

Dokaz.

Svaki selektivni ultrafilter je prema teoremi 5.7 tanak, a poznato je i da je P-tačka. Svaki tanak ultrafilter je Q-tačka, zbog teoreme 5.8, te svaki ultrafilter koji je tanak i P-tačka mora biti selektivni prema teoremi 3.6. □

Pod pretpostavkom da važi CH dobijamo postojanje tankih ultrafiltera.

Teorema 5.10. [11] Neka važi CH. Tada postoji tanak ultrafilter.

Dokaz.

Numerišimo ${}^{\omega}\omega = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \omega_1$ konstruisaćemo prebrojive filter-baze $\mathcal{F}_\alpha$ koje zadovoljavaju sledeće:

(1) $\mathcal{F}_0$ je Fréchetov filter;

(2) $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ kad god je $\alpha \leqslant \beta$;

(3) $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$ za granični ordinal γ;

(4) za svako α postoji $F \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ takav da važi $f_\alpha[F] \in \mathcal{T}$.

Pretpostavimo da smo konstruisali $\mathcal{F}_\alpha$. Ako postoji skup $F \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da $f_\alpha[F] \in \mathcal{T}$, onda stavljamo $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha$. Ako je $f_\alpha[F] \notin \mathcal{T}$ (odatle sledi da je $f_\alpha[F]$ beskonačan skup) za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$, onda numerišemo $\mathcal{F}_\alpha = \{F_n : n \in \omega\}$, i indukcijom konstruišemo skup $U = \{u_n : n \in \omega\}$ na sledeći način.

Odaberimo proizvoljno $u_0 \in F_0$ takvo da $f_\alpha(u_0) > 0$ (takav element postoji jer je $f_\alpha[F_0]$ beskonačan). Ako su $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ već poznati, možemo odabrati $u_k \in \bigcap_{i\leqslant k} F_i$ takvo da $f_\alpha(u_k) > k \cdot f_\alpha(u_{k-1})$.

Važi $U \subseteq^* F_n$ za sve $n \in \omega$. Skup $f_\alpha[U]$ je tanak, jer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_\alpha(u_n)}{f_\alpha(u_{n+1})} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{f_\alpha(u_n)}{(n+1) \cdot f_\alpha(u_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo prebrojivu filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom U.

Jasno je da svaki ultrafilter koji proširuje $\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathcal{F}_\alpha$ jeste tanak. $\square$

Gornje tvrđenje može se znatno pojačati. Umesto pretpostavke da važi CH, dovoljno je pretpostaviti da važi $\mathrm{MA}_{\mathrm{ctble}}$. Štaviše, pod tom pretpostavkom dokazaćemo ne samo postojanje tankog ultrafiltera, već postojanje takvog koji nije P-tačka. Uporediti narednu teoremu sa teoremom 4.31: kako ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{T}$ nisu P-ideali (lema 5.4,) ništa ne možemo zaključiti pozivajući se na teoremu 4.31, ali uprkos tome sličan zaključak dobijamo uz još slabiju pretpostavku $\mathrm{MA}_{\mathrm{ctble}}$.

Teorema 5.11. Neka važi $\mathrm{MA}_{\mathrm{ctble}}$. Tada postoji tanak ultrafilter koji nije P-tačka.

Dokaz.

Numerišimo ${}^\omega\omega = \{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, i neka je $\{R_n : n \in \omega\}$ particija skupa ω na beskonačne skupove. Želimo konstruisati filter-bazu $\mathcal{F}$ takvu da za svako $F \in \mathcal{F}$ postoji beskonačno mnogo n za koje je $|F \cap R_n| = \aleph_0$.

Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \mathfrak{c}$ konstruisaćemo filter-baze $\mathcal{F}_\alpha$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(1) $\mathcal{F}_0$ je generisana Fréchetovim filterom i $\{\omega \setminus R_n : n \in \omega\}$;

(2) $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ kad god je $\alpha \leqslant \beta$;

(3) $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma}\mathcal{F}_\alpha$ za granični ordinal γ;

(4) za svako α je $|\mathcal{F}_\alpha| \leqslant |\alpha| \cdot \aleph_0$:

(5) za svako α i svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ skup $\{n : |F \cap R_n| = \aleph_0\}$ je beskonačan;

(6) za svako α postoji $F \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ takav da važi $f_\alpha[F] \in \mathcal{T}$.

Pretpostavimo da smo konstruisali $\mathcal{F}_\alpha$. Ako postoji skup $F \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da $f_\alpha[F] \in \mathcal{T}$, onda stavljamo $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha$. Sada pretpostavimo da za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ važi $f_\alpha[F] \notin \mathcal{F}_\alpha$ (odatle sledi da je $f_\alpha[F]$ beskonačan).

Ako postoji $f_\alpha^{-1}[K]$ takvo da je $f_\alpha^{-1}[K] \cap F \cap R_n$ beskonačan za beskonačno mnogo n, gde $F \in \mathcal{F}_\alpha$, onda za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ uzimamo filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i $f_\alpha^{-1}[K]$. U nastavku ćemo pretpostaviti da takav skup ne postoji, to jest:

($\star$) za svako $f_\alpha^{-1}[K]$ postoji $F_K \in \mathcal{F}_\alpha$ takvo da je $f_\alpha^{-1}[K] \cap F_K \cap R_n$ beskonačan samo za konačno mnogo n.

Slučaj 1. $(\forall F \in \mathcal{F}_\alpha)(|\{n \in \omega : |f_\alpha[F \cap R_n]| = \aleph_0\}| \geqslant \aleph_0)$

Neka je $I_F = \{n \in \omega : |f_\alpha[F \cap R_n]| \geqslant \aleph_0\}$. Posmatrajmo parcijalno uređen skup

$$P = \{K \in [\omega]^\omega : v > u^2 \text{ kada je } [u, v] \cap f_\alpha[K] = \{u, v\}\}$$

sa parcijalnim uređenjem datim sa: $K \leqslant_P L$ ako $K = L$ ili $K \supset L$ i $\min(K \setminus L) > \max L$. Za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$, $n \in I_F$ i $k \in \omega$ definišimo $D_{F,n,k} = \{K \in P : |K \cap F \cap R_n| \geqslant k\}$.

Dokažimo da je $D_{F,n,k}$ gust u P za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$, $n \in I_F$, $k \in \omega$. Uzmimo proizvoljno $L \in P$. Kako su $F \cap R_n$ i $f_\alpha[F \cap R_n]$ beskonačni skupovi, možemo izabrati $L' \subseteq F \cap R_n$ takav da $|L'| = k$, $\min L' > \max L$, $f_\alpha(\min L') > (\max f_\alpha[L])^2$ i $f_\alpha(u) > (f_\alpha(v))^2$, kada god je $u, v \in L'$, $u > v$. Neka je $K = L \cup L'$. Očigledno je da $K \in D_{F,n,k}$ i $K \leqslant_P L$.

Familija $\mathcal{D} = \{D_{F,n,k} : F \in \mathcal{F}_\alpha, n \in I_F, k \in \omega\}$ sadrži manje od kontinuum mnogo gustih skupova u P. Prema $\mathrm{MA}_{\mathrm{ctble}}$ postoji $\mathcal{D}$-generički filter $\mathcal{G}$. Neka je $U = \bigcup\{K : K \in \mathcal{G}\}$. Dokazujemo da U zadovoljava sledeće:

- $(\forall F \in \mathcal{F}_\alpha)(|\{n \in \omega : |U \cap F \cap R_n| = \aleph_0\}| \geqslant \aleph_0)$:

  Neka je dato $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Za svako $n \in I_F$ i svako $k \in \omega$ postoji $K \in \mathcal{G} \cap D_{F,n,k}$. Zato je $|U \cap F \cap R_n| \geqslant |K \cap F \cap R_n| \geqslant k$, odakle sledi $|U \cap F \cap R_n| = \aleph_0$ za svako $n \in F_K$.

- $f_\alpha[U] \in \mathcal{T}$:

  Numerišimo $f_\alpha[U] = \{u_n : n \in \omega\}$. Za svako $n \in \omega$ postoji $K_n \in \mathcal{G}$ takvo da $u_n, u_{n+1} \in f_\alpha[K_n]$. Kako $K_n \in P$, imamo $u_{n+1} > (u_n)^2$ i $\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{1}{u_n}$. Prema tome, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom U.

Slučaj 2. $(\exists F_0 \in \mathcal{F}_\alpha)(|\{n \in \omega : |f_\alpha[F_0 \cap R_n]| = \aleph_0\}| < \aleph_0)$

Za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ neka je

$$I_F = \{n \in \omega : |F \cap F_0 \cap R_n| \geqslant \aleph_0 \text{ i } |f_\alpha[F \cap F_0 \cap R_n]| < \aleph_0\}.$$

Primetimo da je, prema pretpostavci, I_F beskonačan za sve $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Za svako $n \in I_F$ definišimo

$$h(n) = \max\{m \in f_\alpha[F \cap F_0 \cap R_n] : |f_\alpha^{-1}[\{m\}] \cap F \cap F_0 \cap R_n| = \aleph_0\}.$$

Poslednji skup je konačan i nije prazan, pa je definicija dobra.

Dokažimo da je skup $\{h(n) : n \in I_F\}$ beskonačan. Pretpostavimo suprotno, da postoji $h \in \omega$ takvo da $h(n) \leqslant h$ za sve $n \in I_F$. Zbog $(\star)$ znamo da postoji $F_h \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da je $\{n : |f_\alpha^{-1}[0,h] \cap F_h \cap R_n| = \aleph_0\}$ konačan. Stoga je $\{n : |f_\alpha^{-1}[0,h] \cap F \cap F_0 \cap F_h \cap R_n| = \aleph_0\}$ konačan. Kako je $I_{F\cap F_h}$ konačan i $I_{F\cap F_h} \subseteq^* I_F$, postoji beskonačno mnogo $n \in I_F$ takvih da važi $|(F \cap F_0 \cap F_h \cap R_n) \setminus f_\alpha^{-1}[0,h]| = \aleph_0$ dok je $f_\alpha[F \cap F_0 \cap F_h \cap R_n]$ konačan. Sledi da možemo naći $m \in f_\alpha[F \cap F_0 \cap F_h \cap R_n] \setminus [0,h]$ takvo da važi $|f_\alpha^{-1}[\{m\}] \cap F \cap F_0 \cap F_h \cap R_n| = \aleph_0$. Imamo $m > h$, što je kontradikcija sa definicijom od $h(n)$.

Izaberimo niz $H_F = (h_i)_{i\in\omega}$ čiji su članovi elementi iz $\{h(n) : n \in I_F\}$, i takav da $h_{i+1} > (h_i)^2$ za svako i. Očigledno je da je H_F tanak i beskonačan. Primetimo da za svako $h_i \in H_F$ postoji $n_i \in I_F$ takvo da je $f_\alpha^{-1}[h_i] \cap F \cap F_0 \cap R_n$ beskonačan. Takođe, $n_i \neq n_j$ za $i \neq j$, pa $|f_\alpha^{-1}[H_F] \cap F \cap F_0 \cap R_n| = \aleph_0$ za beskonačno mnogo n.

Posmatrajmo parcijalno uređen skup

$$P = \{K \in [\omega]^\omega : v > u^2 \text{ kada je } [u,v] \cap K = \{u,v\}\}$$

sa parcijalnim uređenjem datim sa $K \leqslant_P L$ ako $K = L$ ili $K \supset L$ i $\min(K \setminus L) > \max L$. Za $F \in \mathcal{F}_\alpha$ i $k \in \omega$ definišimo $D_{F,k} = \{K \in P : |K \cap H_F| \geqslant k\}$.

Dokažimo sada da je $D_{F,k}$ gust u P za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ i $k \in \omega$.

Uzmimo proizvoljno $L \in P$. Postoji $L' \subseteq H_F \setminus [0, (\max L)^2]$ takvo da važi $|L'| = k$. Neka je $K = L \cup L'$. Očigledno, $K \in D_{F,k}$ i $K \leqslant_P L$.

Familija $\mathcal{D} = \{D_{F,k} : F \in \mathcal{F}_\alpha, k \in \omega\}$ sadrži manje od kontinuum mnogo gustih skupova u P. Prema $\mathrm{MA}_{\mathrm{ctble}}$ postoji $\mathcal{D}$-generički filter $\mathcal{G}$. Neka je $H = \bigcup\{K : K \in \mathcal{G}\}$. Sada nam preostaje da proverimo da li filter-baza generisana sa $\mathcal{F}_\alpha$ i $f_\alpha^{-1}[H]$ zadovoljava uslove (5) i (6).

- $(\forall F \in \mathcal{F}_\alpha)|\{n \in \omega : |f_\alpha^{-1}[H] \cap F \cap R_n| = \aleph_0\}| \geqslant \aleph_0$:

  Za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ i svako $k \in \omega$ postoji $K \in \mathcal{G} \cap D_[F,k]$. Sledi da $|\{n \in \omega : |f_\alpha^{-1}[H] \cap F \cap R_n| = \aleph_0\}| \geqslant |\{n \in \omega : |f_\alpha^{-1}[K] \cap F \cap R_n| = \aleph_0\}| \geqslant k$.

- $f_\alpha[f_\alpha^{-1}[H]] = H \in \mathcal{T}$:

  Numerišimo $H = \{u_n : n \in \omega\}$. Za svako $n \in \omega$ postoji $K \in \mathcal{G}$ takvo da $u_n, u_{n+1} \in K$. Kako $K \in P$ imamo $u_{n+1} > (u_n)^2$ i $\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{1}{u_n}$. Prema tome, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom $f_\alpha^{-1}[H]$.

Konačno, neka je $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$. Filter-baza $\mathcal{F}$ ima svojstvo da za svako $F \in \mathcal{F}$ postoji beskonačno mnogo n takvih da je $F \cap R_n$ beskonačan, i zato može biti proširena do ultrafiltera koji nije P-tačka (pogledati dokaz teoreme 4.31). Očigledno je, zbog uslova (6), da svaki ultrafilter koji jeste proširenje od $\mathcal{F}$ je tanak uktrafilter. $\square$

5.2 $\mathcal{W}$-ultrafilteri

Poslednji tip ultrafiltera kojim ćemo se baviti jeste $\mathcal{W}$-ultrafilter. U njihovoj osnovi je pojam Van der Waerdenovog[13] ideala.

Definicija 5.12. *Van der Waerdenov ideal* je familija

$$\mathcal{W} = \{A \subseteq \omega : (\exists l \in \omega)(A \text{ ne sadrži aritmetičke progresije dužine } > l)\}.$$

Očigledno je da je $\mathcal{W}$ zatvoreno za podskupove, kao i da $\omega \notin \mathcal{W}$. Da bismo pokazali da je $\mathcal{W}$ zatvoreno u odnosu na konačne unije podsetićemo se teoreme Van der Waerdena, koju ovde navodimo bez dokaza.

Teorema 5.13. (Van der Waerden) [14, str. 11–17] Za svako $k, l \in \omega$ postoji $N(k,l) \in \omega$ takvo da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \dots, N(k,l)\}$ sa k boja postoji jednobojna aritmetička progresija dužine l.

Lema 5.14. $\mathcal{W}$ je zatvoren u odnosu na konačne unije.

Dokaz.

Neka su $A_1, A_2, \dots, A_r \in \mathcal{W}$ i pretpostavimo da je $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r \notin \mathcal{W}$, to jest, A sadrži proizvoljno dugačku aritmetičku progresiju. Neka su u skupu A_i, $i = 1, 2, \dots, r$, sve aritmetičke progresije dužine najviše l_i. Neka je $l = 1 + \max\{l_i : i = 1, 2, \dots, r\}$. Prema teoremi 5.13 postoji $N(r,l)$ takvo da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \dots, N(r,l)\}$ sa r boja postoji jednobojna aritmetička progresiju dužine l. Kako A sadrži aritmetičku progresiju proizvoljne dužine, u A uočimo progresiju dužine $N(r,l)$, neka je to $a_1, a_2, \dots, a_{N(r,l)}$. Svaki od indeksa $1, 2, \dots, N(r,l)$ obojimo jednom od r boja, pri čemu su p i q isto obojeni akko a_p i a_q pripadaju istom od skupova $A_1, A_2, \dots, A_r$. Kako među ovim indeksima postoji jednobojna progresija dužine l, sledi da

[13] Bartel Leendert Van der Waerden (1903—1996), holandski matematičar

se odgovarajući elementi nalaze u istom skupu A_i za neko $i = 1, 2, \dots, r$. Oni takođe čine i aritmetičku progresiju, te smo dobili aritmetičku progresiju dužine l u nekom od $A_1, A_2, \dots, A_r$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. □

Lako se vidi da $\mathcal{W}$ sadrži sve konačne skupove. Skup $\{2^n : n \in \omega\}$ je beskonačan skup koji se nalazi u $\mathcal{W}$, jer ne sadrži aritmetičku progresiju dužine 3. Drugi primer beskonačnog skupa koji se nalazi u $\mathcal{W}$ jeste skup $\{n^2 : n \in \omega\}$, jer ne sadrži aritmetičku progresiju dužine 4 (ovo je primetio još Euler[14]). Ova dva primera pokazuju da skupovi u $\mathcal{W}$ ne moraju biti tanki niti skoro tanki. Međutim, svaki skoro tanak skup se nalazi u $\mathcal{W}$ što dokazujemo u sledećoj lemi.

Lema 5.15. Ako je $A = \{a_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ skoro tanak skup, onda $A \in \mathcal{W}$.

Dokaz.
Dokazujemo kontrapozicijom, to jest: ako $A = \{a_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ sadrži aritmetičku progresiju proizvoljne dužine, onda $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. Neka pretpostavka važi. Tada za svako $k \in \omega$ postoje $b_k \in \omega$ i $d_k > 0$ takvi da $b_k + j \cdot d_k \in A$ za sve $j = 0, 1, 2 \dots, k-1$. Štaviše, za svako k postoji beskonačno mnogo takvih parova b_k i d_k. Zato postoji beskonačno mnogo $n \in \omega$ takvih da važi $a_n = b_k + (k-2)d_k$ i $b_k + (k-1)d_k \in A$. Za takve elemente dobijamo:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \frac{b_k + (k-2)d_k}{b_k + (k-1)d_k} \geqslant \frac{(k-2)d_k}{(k-1)d_k} = \frac{k-2}{k-1}.$$

Iz $\lim_{k\to\infty} \frac{k-2}{k-1} = 1$ sledi $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, pa skup A nije skoro tanak. □

Dakle, svaki tanak ultrafilter je i $\mathcal{W}$-ultrafilter, pa na osnovu teoreme 5.11 postoji $\mathcal{W}$-ultrafilter koji nije P-tačka. U narednoj teoremi pokazujemo i obrnuto.

Teorema 5.16. Neka važi $\mathrm{MA}_{\mathrm{ctble}}$. Tada postoji P-tačka koja nije $\mathcal{W}$-ultrafilter.

Dokaz.
Numerišimo sve particije skupa ω na beskonačne skupove sa $\{\mathcal{R}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \mathfrak{c}$ konstruisaćemo filter-baze $\mathcal{F}_\alpha$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

[14]Leonhard Euler (1707—1783), švajcarski matematičar i fizičar

(1) $\mathcal{F}_0$ je Fréchetov filter;

(2) $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ kad god je $\alpha \leqslant \beta$;

(3) $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{F}_\alpha$ za granični ordinal γ;

(4) za svako α je $|\mathcal{F}_\alpha| \leqslant |\alpha| \cdot \aleph_0$;

(5) za svako α i svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ važi $F \notin \mathcal{W}$;

(6) za svako α postoji $F \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$ takvo da ili postoji $R_n^\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ koje ispunjava $F \subseteq R_n^\alpha$, ili za svako $R_n^\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ važi $|F \cap R_n^\alpha| < \aleph_0$.

Indukcijski korak: pretpostavimo da nam je $\mathcal{F}_\alpha$ poznato i konstruišimo $\mathcal{F}_{\alpha+1}$:

Slučaj 1. $(\exists K \in [\omega]^{<\omega})(\forall F \in \mathcal{F}_\alpha)(F \cap \bigcup_{n\in K} R_n^\alpha \notin \mathcal{W})$

Za neko $n_0 \in K$ filter-baza generisana sa $R_{n_0}^\alpha$ i $\mathcal{F}_\alpha$ zadovoljava uslov (5). Zaista, u suprotnom bi za svako $n \in K$ postojao skup $F_n \in \mathcal{F}_\alpha$ takav da $F_n \cap R_n^\alpha \in \mathcal{W}$. Odavde je $\bigcap_{n\in K} F_n \cap \bigcup_{n\in K} R_n^\alpha \in \mathcal{W}$, što je kontradikcija sa pretpostavkom slučaja 1. Dakle, za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ možemo odabrati filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom $R_{n_0}^\alpha$.

Slučaj 2. $(\forall K \in [\omega]^{<\omega})(\exists F_K \in \mathcal{F}_\alpha)(F_K \cap \bigcup_{n\notin K} R_n^\alpha \notin \mathcal{W})$

Posmatrajmo $P = \{(K,n) \in [\omega]^{<\omega} \times \omega : K \subseteq \bigcup_{i\leqslant n} R_i^\alpha, K \cap R_n^\alpha \neq \emptyset\}$ i definišimo $(K,n) \leqslant_P (L,m)$ ako je $(K,n) = (L,m)$ ili $K \supset L$, $\min(K \setminus L) > \max L$, $n > m$ i $(K \setminus L) \cap \bigcup_{i\leqslant m} R_i^\alpha = \emptyset$. Za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ i $k \in \omega$ neka je

$$D_{F,k} = \{(K,n) \in P : K \cap F \text{ sadrži aritmetičku progresiju dužine } k\}$$

i $D_j = \{(K,n) \in P : n \geqslant j\}$. Tvrdimo da je $D_{F,k}$ gust u $(P, \leqslant_P)$ za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ i $k \in \omega$, i da je D_j gust u $(P, \leqslant_P)$ za svako $j \in \omega$. Dokažimo to.

Neka je $(L,m) \in P$ proizvoljno. Prema pretpostavci postoji $F_m \in \mathcal{F}_\alpha$ takvo da $F_m \cap \bigcup_{i\leqslant m} R_i^\alpha \in \mathcal{W}$. Odavde sledi da $(F_m \cap F) \setminus \bigcup_{i\leqslant m} R_i^\alpha \notin \mathcal{W}$. Stoga možemo odabrati aritmetičku progresiju L' sa elementima iz $(F_m \cap F) \setminus \bigcup_{i\leqslant m} R_i^\alpha$ takvu da važi $\min L' > \max L$ i dužina od L' bude k. Neka je $n = \max\{i : L' \cap R_i^\alpha \neq \emptyset\}$ i $K = L \cup L'$. Lako se vidi da je $(K,n) \leqslant_P (L,m)$ i $(K,n) \in D_{F,k}$. Zato je $D_{F,k}$ gust. Za $j \leqslant m$ imamo $(L,m) \in D_j$, i za svako $j > m$ možemo odabrati proizvoljno $r \in R_j^\alpha$ takvo da važi $r > \max L$. Neka je $K' = L \cup \{r\}$. Naravno, $(K',j) \leqslant_P (L,m)$ i $(K',j) \in D_j$, te je D_j gust.

Familija $\mathcal{D} = \{D_{F,k} : F \in \mathcal{F}_\alpha, k \in \omega\} \cup \{D_j : j \in \omega\}$ sastoji se od gustih skupova u P i $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$. Otud postoji $\mathcal{D}$-generički filter $\mathcal{G}$.

Neka je $U = \bigcup\{K : (K,n) \in \mathcal{G}\}$. Ostaje nam da proverimo sledeće:

- Za svako $F \in \mathcal{F}_\alpha$ skup $F \cap U$ sadrži aritmetičku progresiju proizvoljne dužine.

  Neka je $k \in \omega$ proizvoljno. Za svako $K \in \mathcal{G} \cap D_{F,k}$ imamo $U \supseteq K$ i $K \cap F$ sadrži aritmetičku progresiju dužine k. Stoga $U \cap F$ sadrži aritmetičku progresiju proizvoljne dužine.

- Za svako $R_n^\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ važi $|U \cap R_n^\alpha| < \aleph_0$.

  Uzmimo $(K_n, j_n) \in \mathcal{G} \cap D_n$ gde je $j_n = \min\{j : (\exists K \in [\omega]^\omega)(K, j) \in \mathcal{G} \cap D_n\}$. Sada primetimo da za $(K, m) \in \mathcal{G}$ imamo $K \cap R_n^\alpha = \emptyset$ ako je $m < n$ i da $K \cap R_n^\alpha = K_n \cap R_n^\alpha$ ako je $m \geqslant n$. Zaista, prvo je jasno, a drugo sledi ukoliko posmatramo $(L, m') \in \mathcal{G}$ takvo da $(L, m') \leqslant_P (K, m)$ i $(L, m') \leqslant_P (K_n, j_n)$ (takvo postoji jer je $\mathcal{G}$ filter), za koje imamo $L \cap R_n^\alpha = K \cap R_n^\alpha$ i $L \cap R_n^\alpha = K_n \cap R_n^\alpha$. Odavde sledi da je $U \cap R_n^\alpha = K_n \cap R_n^\alpha$ konačan.

Indukcijski korak završavamo tako što za $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ odaberemo filter-bazu generisanu sa $\mathcal{F}_\alpha$ i skupom U.

Očigledno je da svaki ultrafilter koji proširuje $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$ jeste P-tačka. Zbog uslova (5) postoji ultrafilter koji proširuje $\mathcal{F}$ i koji je proširenje dualnog filtera od $\mathcal{W}$, to jest nije $\mathcal{W}$-ultrafilter. $\square$

Biografija

Anna Slivková je rođena 21. novembra 1986. godine u Pančevu. Odrasla je u Padini, gde je i završila Osnovnu školu „Maršal Tito“ sa Vukovom diplomom kao najbolja u svojoj generaciji. Te iste godine, 2001, upisala se u Gimnaziju „Mihajlo Pupin“ u Kovačici. Gimnaziju je završila 2005. godine i ponovo je bila đak generacije, kao i nosilac Vukove diplome. Na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, upisala se na smer diplomirani matematičar – profesor matematike. Diplomirala je 2010. godine odbranivši diplomski rad pod nazivom *Problem crva*. Iste godine upisala se na master studije na istom fakultetu, smer: matematika, modul: nastava matematike. Položila je sve predmete predviđene planom i programom, i tako stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, septembar 2011 — Anna Slivková

Literatura

[1] C. Barney, Ultrafilters on natural numbers, *J. Symbolic Logic* **68** (2003), 764–784.

[2] T. Bartoszyński & H. Judah, *Set Theory: on the Structure of Real Line*, A K Peters Ltd., 1995.

[3] J. Baumgartner, Ultrafilters on ω, *J. Symbolic Logic* **60** (1995), 624–639.

[4] M. G. Bell, On the combinatorial principle P(c), *Fund. Math.* **114** (1981), 149–157.

[5] J. Brendle, Between P-ponts and nowhere dense ultrafilters, *Israel J. Math.* **113** (1999), 205–230.

[6] A. Blass, Ultrafilters: where topologycal dynamics = algebra = combinatorics, *Topology Proc.* **18** (1993), 33–56.

[7] W. W. Comfort & S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer, 1974.

[8] E. K. van Douwen, The integers and topology, u K. Kunen & J.E. Vaughan (eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, 1984, 111–167.

[9] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, 1989.

[10] J. Flašková, $\mathcal{I}$-ultrafilters and summable ideals, u T. Arai, J. Brendle & H. Kikyo (eds.), *Proceedings of the 10th Asian Logic Conference*, World Scientific Publishing Company, 2010, 113–123, verzija sa http://home.zcu.cz/~flaskova/research/ALCproceedings.pdf.

[11] J. Flašková, Thin ultrafilters, *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.* **46** (2005), 13–19.

[12] J. Flašková, *Ultrafilters and small sets*, Charles University of Prague, Faculty of Mathematics and Physics, Doctoral Thesis, 2006.

[13] T. Jech, *Set Theory*, Springer, 2006.

[14] A. Y. Khinchin, *Three Pearls of Number Theory*, Dover Publications, 1998.

[15] K. Kunen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, 1980.

[16] D. Martin & R. M. Solovay, Internal Cohen extensions, *Ann. Math. Logic* **2** (1970), 143–178.

[17] S. Todorčević, *Topics in Topology*, Springer, 1997.

[18] J. E. Vaughan, Small uncountable cardinals and topology, u J. van Mill & G. M. Reed (eds.), *Open Problems in Topology*, North-Holland, 1990, 195–216.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	master rad
Autor: **AU**	Anna Slivková
Mentor: **MN**	dr Aleksandar Pavlović
Naslov rada: **NR**	O nekim klasama $\mathcal{I}$-ultrafiltera na ω
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	s/en
Zemlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2011
Izdavač: **IZ**	autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Novi Sad, Trg D. Obradovića 3

Fizički opis rada
(broj poglavlja/strana/lit.citata/
tabela/slika/grafika/priloga): (14/57/18/0/0/0/0)

FO

Naučna oblast: matematika

NO

Naučna disciplina: teorija skupova

ND

Predmetne odrednice, ključne reči: ultrafilteri, $\mathcal{I}$-ultrafilter, P-tačka, Q-tačka, selektivni ultrafilter, diskretni ultrafilter, tanak ultrafilter

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Predmet ovog rada su nekoliko klasa $\mathcal{I}$-ultrafiltera na skupu prirodnih brojeva ω, gde je $\mathcal{I}$ neka familija podskupova od X koja sadrži sve singltone i koja je zatvorena u odnosu na podskupove. Proučavano je postojanje ovi ultrafiltera, i njihovi međusobni odnosi.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane
NN veća: 30. jun 2011.

DP

Datum odbrane: septembar 2011.

DO

Članovi komisije: Predsednik: dr Miloš Kurilić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Boris Šobot, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Aleksandar Pavlović, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

KO

UNIVESITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Acession number:	
ANO	
Identification number:	
INO	
Document type:	monograph type
DT	
Type of record:	printed text
TR	
Contents code:	master thesis
CC	
Author:	Anna Slivková
AU	
Mentor:	Dr Aleksandar Pavlović
MN	
Title:	On some classes of $\mathcal{I}$-ultrafilters on ω
TI	
Language of text:	Serbian (Latin)
LT	
Language of abstract:	s/en
LA	
Country of publication:	Republic of Serbia
CP	
Locality of publication:	Vojvodina
LP	
Publication year:	2011
PY	
Publisher:	author's reprint
PU	
Publication place:	Novi Sad, Trg D. Obradovića 3
PP	

Physical description
(chapters/pages/references/tables/
pictures/charts/supplements): (14/57/18/0/0/0/0)
PD
Scientific field: mathematics
SF
Scientific discipline: set theory
SD
Subject, key words: ultrafilters, $\mathcal{I}$-ultrafilter, P-point, Q-point, selective ultrafilter, discrete ultrafilter, thin ultrafilter
SKW
UC
Holding data:
HD
Note:
N
Abstract: The subject of this thesis are several classes of $\mathcal{I}$-ultrafilters, where $\mathcal{I}$ is a family of subsets of a given set X such that $\mathcal{I}$ contains all singletons and is closed under subsets. We study the question of existence of these ultrafilters, as well as their mutual relationships.
AB
Accepted on Scientific board on: June 30th 2011
AS
Defended: September 2011
DE
Thesis Defend board: President: Dr. Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: Dr. Boris Šobot, assistant professor, Faculty of Science, Novi Sad
Mentor: Dr. Aleksandar Pavlović, assistant professor, Faculty of Science, Novi Sad
DB