UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Anika Njamcul

Teorema Kantor - Bendiksona i njene primene

Master rad

Mentor: dr. Aleksandar Pavlović

Novi Sad, 2015

Sadržaj

Predgovor

Teoremu kojom se bavimo u ovom radu dokazali su nemački matematičar Kantor i švedski matematičar Bendikson 1883. godine nezavisno jedan od drugog. Veliki broj pojmova koje koristimo u radu prvi je uveo ili proučavao upravo Kantor: od pojma kardinalnosti skupa, preko ideje ordinala, pa sve do Kantor-Bendiksonovog ranga. U vreme kada je teorema dokazana, on je već bio istaknuti naučnik. Mladi Bendikson imao je samo 22 godine kada je pokazao ovo tvrđenje, čime se istakao svojim matematičkim umećem i van granica Švedske.

Teorema Kantor-Bendiksona tvrdi da se svaki poljski prostor može na jedinstven način predstaviti kao disjunktna unija savršenog skupa (skupa čija je svaka tačka tačka nagomilavanja) i prebrojivog skupa. Široka primena spomenutog tvrđenja ostvarena je u topologiji, funkcionalnoj analizi, kao i u deskriptivnoj teoriji skupova koja proučava određene klase podskupova poljskih prostora.

Prvo poglavlje rada posvećeno je uvodnim pojmovima i tvrđenjima iz oblasti teorije skupova i topologije. Dat je detaljan prikaz osobina dobro uređenih skupova i ordinala, a posebno su istaknuti principi transfinitne indukcije i rekurzije. Drugi deo prvog poglavlja obuhvata svojstva topoloških i metričkih prostora. Navedene su osnovne definicije, teoreme i primeri koji će se koristiti u nastavku.

Drugo poglavlje se bavi teoremom Kantor-Bendiksona. Predstavljeni su poljski prostori, u okviru kojih se teorema najviše primenjuje. Definisani su savršeni prostori, a zatim je formulisano i dokazano tvrđenje koje predstavlja temu rada. U okviru ovog dela istaknute su i neposredne posledice teoreme, kao što je činjenica da za poljske prostore važi Hipoteza kontinuuma.

U trećem poglavlju se uvodi pojam Kantor-Bendiksonovog izvoda i ranga, koji proističu iz teoreme Kantor-Bendiksona. Navedena su svojstva rasutih prostora, na kojima je ilustrovana njihova primena. Ukratko su data i svojstva ordinala kao topoloških prostora. Ključno tvrđenje ovog dela je teorema Sierpinski-Mazurkievič, kojom pokazujemo da je svaki prebrojiv kompaktan Hausdorfov prostor homeomorfan ordinalu.

Četvrto poglavlje sadrži kratke biografije poznatih matematičara koji su ovu teoremu dokazali.

Ovom prilikom se posebno zahvaljujem mentoru dr Aleksandru Pavloviću na strpljenju i korisnim savetima koji su mi pomogli u pisanju rada. Želim da se zahvalim i članovima komisije, dr Borisu Šobotu i dr Stevanu Pilipoviću na svim sugestijama. Zahvalnost dugujem i dr Milošu Kuriliću na pomoći prilikom izbora teme i izrade rada.

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Uvodne napomene i oznake

Na samom početku rada dajemo pregled oznaka i pojmova koje ćemo koristiti, a nisu eksplicitno navedene u okviru daljeg teksta. Istaknimo prvo da ćemo u radu u okviru tvrđenja koja se tiču teorije skupova koristiti ZFC sistem aksioma (Zermelo-Frenkelov sistem aksioma sa aksiomom izbora), iako ih uglavnom nećemo navoditi, jer bi to nepotrebno zakomplikovalo strukturu rada.
Ako posmatramo preslikavanje $f : X \to Y$ i $A \subseteq X, B \subseteq Y$sa $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ obeležavamo direktnu sliku skupa A, dok je $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$ inverzna slika skupa B.
Partitivni skup datog skupa A (kolekciju svih podskupova skupa A) obeležavaćemo sa $P(A)$.

Definicija 1.1.1. Skupovi A i B su **ekvipotentni** (iste moći) ako i samo ako postoji $f : A \to B$ koje je bijekcija. Označava se sa $A \backsim B$.

Definicija 1.1.2. Skup A je **beskonačan** ako i samo ako je ekvipotentan nekom svom pravom podskupu ($\exists A_1 \subsetneq A \ A_1 \backsim A$). Skup je **konačan** ako i samo ako nije beskonačan. Skup je **prebrojiv** ako i samo ako je ekvipotentan skupu prirodnih brojeva.

Definicija 1.1.3. Kardinalni broj skupa A je klasa svih skupova koji su $\backsim$ skupu A. Oznaka je $|A|$.

Definicija 1.1.4. Ako su $|A|$ i $|B|$ kardinalni brojevi, definišemo: $|A| < |B|$ ako i samo ako postoji injektivno preslikavanje $f : A \to B$.

Skup prirodnih brojeva bez nule označavaćemo sa $\mathbb{N}$. Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva označavaćemo sa $\aleph_0$ (dakle, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$). Poznato je da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ kardinalnosti $\aleph_0$, dok skup realnih brojeva to nije. Kardinalni broj skupa $P(\mathbb{N})$ obeležava se sa $\mathfrak{c}$ i pokazuje se da je to i kardinalni broj skupa realnih brojeva.

Teorema 1.1.5. Za svaki skup A važi $|A| < |P(A)|$.

U okviru posledica teoreme Kantor-Bendiksona biće reči i o Hipotezi kontinuuma, stoga je ovde navodimo. Naime, prethodna teorema nam daje $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| = c$, pa se postavlja pitanje da li postoji skup A takav da $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$? **Hipoteza kontinuuma** tvrdi da ne postoji skup A takav da $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$. Bitno je istaći da je ona nezavisna od aksioma teorije ZFC (ona se ne može ni dokazati ni oboriti na osnovu aksioma ZFC).

Teorema 1.1.6. Šreder-Bernštajn Ako su A, B proizvoljni skupovi takvi da je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, tada je $|A| = |B|$.

Teorema 1.1.7. Unija najviše prebrojivo mnogo najviše prebrojivih skupova je najviše prebrojiv skup.

Teorema 1.1.8. Konačnih podskupova prebrojivog skupa ima prebrojivo mnogo.

U okviru dokaza jedne teoreme biće nam potreban specijalan slučaj poznate teoreme Remzija primenjene na skup prirodnih brojeva. Neka je $[X]^2 = \{\{x, y\} : x, y \in X \wedge x \neq y\}$.

Teorema 1.1.9. [Ramsey] Ako je $[\mathbb{N}]^2 = K_0 \cup K_1$ i $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, onda postoji beskonačan $H \subset \mathbb{N}$ i $j \in \{0, 1\}$ takvi da $[H]^2 \subset K_j$.

Ako je A neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$ sa A^n označavamo skup svih nizova dužine n u A. Dozvolićemo da n bude i 0 tako što definišemo $A^0 = \emptyset$ (prazan niz). Definišemo i $A^{<\omega} = \cup_{n\in\omega} A_n$. Dužinu niza s obeležavaćemo sa $|s|$. Za $s \in A^n$ i $m \leq n$ je $s|m = (s_0, \ldots, s_{m-1})$ ($s|0 = \emptyset$). Konačni nizovi s i t iz A su kompatibilni ako je t ekstenzija s (u oznaci $s \subseteq t$), odnosno ako je $s = t|m$ za neko $m \leq |s|$. U suprotnom, nizovi su nekompatibilni, što se označava sa $s \perp t$. Konkatenacija nizova $s = \langle s_i : i < n \rangle$ i $t = \langle t_j : j < m \rangle$ je nov niz $s\hat{\ }t = (s_0, \ldots, s_{n-1}, t_0, \ldots, t_{m-1})$. Beskonačni niz pišemo sa $\langle x(n) \rangle = (x_n) = \langle x_n \rangle$. Sa A^ω ćemo označiti skup svih beskonačnih nizova na skupu A.

U okviru deskriptivne teorije skupova često se pri dokazivanju tvrđenja koriste sledeći pojmovi.

Definicija 1.1.10. Drvo na skupu A je podskup $T \subseteq A^{<\omega}$ za koji važi:

$$t \in T \wedge s \subset t \to s \in t.$$

Elemente drveta nazivamo **čvorovima**. **Beskonačna grana** je niz $x \in A^\omega$ $x|n \in T$ za svako n. **Telo drveta** T, [T] je skup njegovih beskonačnih grana.

T je savršeno ako i samo ako

$$(\forall s \in T)(\exists t, u)(t \supseteq s \wedge u \supseteq s \wedge t, u \in T \wedge t \perp u),$$

tj svaki član T ima dva nekompatibilna proširenja u T.

Drvo je potkresano ako za svako $s \in T$ postoji $a \in A$ da $s\hat{\ }a \in T$.

1.2 Teorija skupova

Nakon uvodnih napomena predstojeći odeljak daje kratak osvrt na pojedine delove teorije skupova koje ćemo koristiti u delu o primenama teoreme Kantor-Bendiksona. Pri tome, posebnu pažnju posvećujemo ordinalima i njihovim svojstvima. Dokazi tvrđenja ovog poglavlja mogu se naći u [5] i [11].

1.2.1 Dobro uređeni skupovi

Pojam uređenja, naročito linearnog i dobrog uređenja biće nam neophodan prilikom rada sa ordinalima, a kasnije i u susretu sa posebnom klasom topoloških prostora indukovanih linearnim uređenjem.

Definicija 1.2.1. Neka je A skup. Binarna relacija $\leq \subseteq A^2$ je relacija **parcijalnog uređenja** ako i samo ako je refleksivna $((\forall x \in A) x \leq x)$, antisimetrična $((\forall x, y \in A) x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$i tranzitivna $((\forall x, z, y) x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z\ )$. Tada je $\langle A, \leq \rangle$ **parcijalno uređen skup** sa **nosačem** A.

U literaturi se ponekad koristi i termin uređen skup (kao na primer u [11]).

Na skupu prirodnih brojeva dobro poznata relacija $\leq$ je parcijalno uređenje.

U parcijalno uređenom skupu izdvajaju se tačke skupa A sa posebnim osobinama.

Definicija 1.2.2. Neka je $\langle A, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup, $B \subseteq A$ i $x \in A$. Tada je x:

- **majoranta** (gornje ograničenje) skupa B ako i samo ako za svako $y \in B$ $y \leq x$;
- **minoranta** (donje ograničenje) skupa B ako i samo ako za svako $y \in B$ $x \leq y$;
- **najveći (najmanji) element** skupa B ako i samo ako je x majoranta (minoranta) B i $x \in B$; označavaćemo ga sa $maxB$ ($minB$);
- **maksimalan (minimalan)** elemenat skupa B ako i samo ako $\neg \exists y \in B$ tako da $x \leq y \wedge x \neq y$ ($y \leq x \wedge x \neq y$);
- **supremum (infimum)** skupa B (u oznaci $supB$ ($infB$)) ako i samo ako je x najmanje gornje (najveće donje) ograničenje B, odnosno x je $min\{y \in A : y$ je majoranta $B\}$ ($max\{y \in A : y$ je minoranta $B\}$);

Teorema 1.2.3. Neka je $\langle A, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup i $B \subseteq A$. Tada, ako postoji najveći elemenat skupa B onda je on jedinstven.

Analogno tvrđenje važi i za najmanji elemenat skupa, kao i infimum i supremum, dok za majorantu i minorantu skupa to ne važi - njih može biti i više u parcijalno uređenom skupu.

Ako je $\langle A, \leq_A \rangle$ parcijalno uređen skup, neka za $x, y \in A$ važi

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y.$$

Na ovaj način smo definisali **striktno parcijalno** uređenje na skupu A. Može se pokazati da tada za sve $x, y, z \in A$ važi:

1. $\neg(x < x)$ (irefleksivnost);

2. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetričnost);

3. $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ (tranzitivnost).

Ako definišemo $x \leq^* y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$, onda $\leq^* = \leq$.
S druge strane, ako je $< \subset A^2$ proizvoljna binarna relacija koja zadovoljava uslove prethodna tri uslova i definišemo

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y,$$

onda se može pokazati da je $\langle A, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup. Prema tome, imamo potpunu paralelu između pojma parcijalnog uređenja i striktnog parcijalnog uređenja: svako parcijalno uređenje ”indukuje” striktno i obratno.

Definicija 1.2.4. Neka su $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ parcijalno uređeni skupovi i preslikavanje $f : A \to B$. Za funkciju f kažemo da je **rastuća** ako i samo ako $(\forall x, y \in A)\ x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$.
Preslikavanje f je **izomorfizam** ako i samo ako je: f bijekcija i $\forall x, y \in A(x \leq_A y \Longleftrightarrow f(x) \leq_B f(y))$.
Tada za parcijalno uređene skupove $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ kažemo da su **izomorfni** i to označavamo sa $\langle A, \leq_A \rangle \cong \langle B, \leq_B \rangle$.

Ako je preslikavanje f izomorfizam, tada je i inverzno presllkavanje f^{-1} izomorfizam.

Definicija 1.2.5. Neka je $\langle A, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup. $\langle A, \leq \rangle$ je **linearno uređen skup** ako i samo ako važi

$$(L)\ \forall x, y \in A(x \leq y \vee y \leq x).$$

Svojstvo linearnosti (L) zahteva da svaka dva elementa datog skupa budu uporediva. Zato se ovakav skup nekada naziva i **lanac**. Za skupove koji nemaju uporedivih elemenata kažemo da predstavljaju **antilanac**.
Svima nam je intuitivno poznat primer skupa prirodnih brojeva na kome je definisana relacija $\leq$. To je ujedno i primer linearno uređenog skupa.

Teorema 1.2.6. Neka je $\langle L, < \rangle$ linearno uređenje i $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ niz u L. Tada on sadrži ili neopadajući podniz ili opadajući podniz.

Dokaz. Definišemo $K_0 = \{\{m,n\} : m < n \wedge x_m \leq x_n\}$ i $K_1 = \{\{m,n\} : m < n \wedge x_m > x_n\}$. Očigledno je $[\mathbb{N}]^2 = \{K_0 \cup K_1\}$ i $K_0 \cap K_1 = \emptyset$. Prema teoremi 1.1.9, postoji skup H takav da je ili $[H]^2 \subset K_0$ ili $[H]^2 \subset K_1$. U prvom slučaju, niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ je neopadajući, a u drugom opadajući. □

Definicija 1.2.7. Parcijalno uređen skup $\langle A, \leq_A\rangle$ je **dobro uređen** ako i samo ako svaki njegov neprazan podskup ima najmanji elemenat, to jest

$$(\forall B)(\emptyset \neq B \subset A \Rightarrow \exists x \in B\ \forall y \in B\ x \leq y) \tag{1.1}$$

Teorema 1.2.8. Ako je $\langle A, \leq_A\rangle$ dobro uređen, onda je on i linearno uređen skup.

Dokaz. Da bismo pokazali da skup $\langle A, \leq_A\rangle$ linearno uređen, dovoljno je da pokažemo osobinu linernosti - (L) iz definicije 1.2.1. Neka $x, y \in A$. Tada $B = \{x, y\} \in A$, pa zbog 1.1 $\exists t \in B\ \forall a \in B\ t \leq a$. Tada je moguće: $t = x$, pa ako uzmemo $a = y$ dobijamo $x \leq y$; $t = y$, se radi analogno. U oba slučaja sledi da je $x \leq y \vee y \leq x$. □

Teorema 1.2.9. Neka je $\langle A, \leq_A\rangle$ dobro uređen i $B \subseteq A$. Tada je i $\langle B, \leq_B\rangle$ dobro uređen.

Dokaz. $\langle B, \leq_B\rangle$[1] je linearno uređen, što se lako pokazuje. Ostaje da se pokaže da svaki neprazan podskup B ima minimum. Neka $\emptyset \neq C \subset B$. Tada očigledno $C \subseteq A$, pa postoji $x \in C$ tako da za sve $y \in C$ važi $x \leq_A y$. Ali, tada za sve $y \in C$ važi i $x \leq_B y$, odakle sledi da je x $\leq_B$-minimum C. □

Prema tome, podskup dobro uređenog skupa je ponovo dobro uređen.

Primer 1.2.10. Ako je $\langle A, \leq\rangle$ dobro uređen skup i $a \in A$. **Početni segment** skupa A određen elementom a je podskup svih elemenata iz A koji su manji od a, odnosno

$$pred_{\langle A,\leq\rangle}(a) = \{x \in A : x < a\}.$$

Iz teoreme 1.2.9 sledi da je $\langle pred_{\langle A,\leq\rangle}(a), \leq\rangle$ takođe dobro uređen skup.

Navedimo sada neke osobine dobro uređenih skupova koje će biti neophodne za razumevanje pojma ordinala.

Teorema 1.2.11. Neka je $\langle A, \leq\rangle$ dobro uređen skup i $f : A \to A$ rastuća funkcija. Tada važi

$$\forall x \in A\ x \leq f(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka postoji $x \in A$ tako da $x > f(x)$. Posmatrajmo skup $B = \{x \in A | x > f(x)\} \subseteq A$. Očigledno je $B \neq \emptyset$, pa postoji $c = minB$ (jer je $\langle A, \leq\rangle$ dobro uređen). S obzirom da $c \in B$ važi $c > f(c)$. Po pretpostavci, f je rastuća funkcija, pa je $f(f(c)) < f(c)$. Takođe, prema definiciji skupa B sledi da $f(c) \in B$, ali onda c nije $minB$, kontradikcija. □

[1] Pri tome, podrazumevamo da je $\leq_B = \leq_A \cap B^2$.

Prema tome, jedini automorfizam (izomorfizam skupa na samog sebe) dobro uređenog skupa je identičko preslikavanje.

Teorema 1.2.12. Neka su $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ dobro uređeni skupovi i $A \cong B$. Tada postoji tačno jedan izomorfizam $f : A \to B$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji i preslikavanje $g : A \to B$ koje je takođe izomorfizam. Preslikavanja $g^{-1} \circ f : A \to A$ i $f^{-1} \circ g : A \to A$ su tada izomorfizmi, pa su i rastuća. Ako $x \in A$, na osnovu teoreme 1.2.11 imamo $x \leq (g^{-1} \circ f)(x)$ i $x \leq (f^{-1} \circ g)(x)$. Funkcija g je izomorfizam, pa sledi $g(x) \leq g((g^{-1} \circ f)(x)) = f(x)$, a i funkcija f je izomorfizam, pa imamo $f(x) \leq f((f^{-1} \circ g)(x)) = g(x)$. Tada, zbog (AS) iz definicije 1.2.1 sledi $f(x) = g(x)$. $\square$

Teorema 1.2.13. Neka je $\langle A, \leq \rangle$ dobro uređen skup. Tada:

(i) ne postoji $x \in A$ tako da $\langle A, \leq \rangle \cong pred_{\langle A, \leq \rangle}(x)$;

(ii) ne postoje $x, y \in A$ takvi da je $x \neq y \wedge pred_{\langle A, \leq \rangle}(x) \cong pred_{\langle A, \leq \rangle}(y)$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo suprotno, neka postoji $x \in A$ i preslikavanje $f : A \to pred_{\langle A, \leq \rangle}(x)$ koje je izomorfizam. Na osnovu teoreme 1.2.11 imamo $x \leq f(x) < x$, iz čega sledi kontradikcija.
(ii) Posledica tvrđenja pod (i).

$\square$

Teorema 1.2.13 ističe da dobro uređen skup ne može biti izomorfan svom početnom segmentu. Ispitajmo sada odnos podskupa.

Teorema 1.2.14. Neka je $\langle A, \leq \rangle$ dobro uređen skup i neka je $\emptyset \neq X \subseteq A$ sa osobinom

$$\forall x, y \in A \ (x \in X \wedge y \leq x \Rightarrow y \in X). \tag{1.2}$$

Tada je $X = A$ ili postoji $c \in A$ tako da $X = pred_{\langle A, \leq \rangle}(c)$.

Dokaz. Ako je $X = A$, dokaz je gotov. Pretpostavimo da $X \neq A$. To znači da postoji $x \in A \setminus X$, pa je skup $B = \{x \in A : x \notin X\}$ neprazan. Iz teoreme 1.2.9 znamo da je i B dobro uređen, pa postoji $b = minB$. Uočimo da tada $b \notin X$ i za svako $y < b$ važi $y \in X$. Zbog toga, $pred_{\langle A, \leq \rangle}(b) \subset X$. Ako $z \in X \setminus pred_{\langle A, \leq \rangle}(b)$, onda $z \notin pred_{\langle A, \leq \rangle}(b)$, pa $z \geq b$. Ali sada je $b \leq z \in X$, pa zbog (1.2) je $b \in X$ imamo kontradikciju. $\square$

Konačno, može se pokazati da su dva dobro uređena skupa ili izomorfna ili je jedan izomorfan početnom segmentu drugog (ili obratno).

1.2.2 Ordinali

Pojam ordinala prvi put se javlja u drugoj polovini XIX veka. Prvi ga je upotrebio nemački matematičar Georg Kantor. Od tada, različiti naučnici su imali drugačiji pristup ovoj teoriji. Mi ćemo se koristiti pristupom koji je dao von Neumann[2] 1923. godine. On je ordinale posmatrao kao specijalne skupove koji se uzimaju kao istaknuti predstavnici klase svih mogućih dobro uređenih skupova.

U nastavku, podrazumeva se da skupovi sa kojima radimo zadovoljavaju sve aksiome ZF teorije.

Definicija 1.2.15. Skup A je **tranzitivan** ako i samo ako za sve $x \in A$ važi $x \subseteq A$.
Drugim rečima, skup A je tranzitivan ako za sve x važi implikacija $a \in x \in A \Rightarrow a \in A$.

Primer 1.2.16. Skupovi $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ su tranzitivni.

Definicija 1.2.17. Za skup A kažemo da je **ordinal** ako i samo ako važi:

(OR1) tranzitivnost: za sve $x \in A$ važi $x \subseteq A$;

(OR2) irefleksivnost relacije $\in$: za sve $x \in A$ važi $\neg x \in x$;

(OR3) tranzitivnost relacije $\in$: za sve $x, y, z \in A$ važi

$$x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z;$$

(OR4) za sve $x, y, z \in A$ važi $x = y \vee x \in y \vee y \in x$ (trihotomija);

(OR5) $\forall X \subset A \Big(X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y \in X)\ (\forall z \in X \setminus \{y\}\ )\ y \in z \Big)$.

Primetimo da iz osobine $(OR1)$ definicije 1.2.17 sledi da je relacija $\in$ irefleksivna. Takođe, iz osobine $(OR4)$ vidimo da je $\langle A, \in \rangle$ linearno uređen skup. Konačno, $(OR5)$ nam daje da je $\langle A, \in \rangle$ i dobro uređen skup, pa možemo dati ekvivalentnu definiciju ordinala.

Definicija 1.2.18. Za skup A kažemo da je **ordinal** ako i samo ako je tranzitivan i relacija $\in$ je dobro uređenje na A.

Primer 1.2.19. Skupovi $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ su i ordinali. Lako se proverava da zadovoljavaju uslove definicije 1.2.17.

Teorema 1.2.20. Neka je α ordinal i $\beta \in \alpha$.

(i) β je ordinal;

(ii) $\beta = pred(\beta) = \{\delta \in \alpha | \delta \in \beta\}$.

[2] John von Neumann (1903-1957), mađarsko-američki matematičar

Dokaz. (i) Pokažimo da je β ordinal. Znamo da je α tranzitivan skup, pa važi $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$. Iz teoreme 1.2.9 znamo da je podskup dobro uređenog skupa takođe dobro uređen, pa je $\langle \beta, \in \rangle$ dobro uređenje.
Ostaje da se pokaže da je β tranzitivan skup. Ako $\delta \in \beta$ tada i $\delta \in \alpha$ (zbog $\beta \subseteq \alpha$). Neka $\gamma \in \delta$. Zbog $\delta \in \alpha$ je $\delta \subseteq \alpha$, pa $\delta \in \alpha$. To nam daje $\beta, \gamma, \delta \in \alpha$, $\gamma \in \delta$ i $\delta \in \beta$, zbog $(OR3)$ je $\gamma \in \beta$. Dakle, $\delta \subseteq \beta$ za sve $\delta \in \beta$, čime smo pokazali da je β tranzitivan skup.
(ii) Pokazujemo $\beta = pred(\beta) = \{\gamma : \gamma \in \beta\}$. Ako $\gamma \in \beta$, zbog $\beta \subseteq \alpha$ imamo da je $\gamma \in \alpha$, pa $\gamma \in pred(\beta)$. S druge strane, ako $\gamma \in pred(\beta)$ onda, po definiciji $pred(\beta)$ imamo $\gamma \in \beta$.

□

Time smo pokazali da je svaki elemenat ordinala takođe ordinal i da je sam ordinal jednak svom početnom segmentu. U nastavku ćemo ispitati u kakvom odnosu mogu biti dva ordinala.

Teorema 1.2.21. Ako je α ordinal različit od praznog skupa, onda je $\emptyset \in \alpha$ i $\emptyset = min\alpha$.

Dokaz. S obzirom da je $\langle \alpha, \in \rangle$ dobro uređen skup, postoji njegov najmanji elemenat, označimo ga sa β. Neka $\gamma \in \beta$, odnosno pretpostavimo da $\beta \neq \emptyset$. Tada $\beta \in \alpha$, pa zbog tranzitivnosti $\beta \subseteq \alpha$. Sada $\gamma \in \alpha$, pa iz teoreme 1.2.20 imamo da su β i γ ordinali, ali $\gamma \in \beta$, a to je u kontradikciji sa pretpostavkom da je β najmanji. □

Važi i da izomorfni ordinali ujedno moraju biti i jednaki.

Teorema 1.2.22. Neka su α i β ordinali. Tada važi tačno jedna od sledećih relacija:

$$\alpha = \beta, \alpha \in \beta, \beta \in \alpha.$$

Definicija 1.2.23. Ako su α i β ordinali, definišemo:

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha \in \beta \text{ i } \alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta.$$

Primetimo da je očigledno $\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha < \beta$. Dokaz tvrđenja koje sledi je rutinski.

Teorema 1.2.24. $<$ je strogo linearno uređenje na klasi ordinala.

Nakon utvrđivanja osnovnih osobina ordinala, prelazimo na svojstva skupova ordinala. Jedna od ključnih osobina ordinala data je sledećim tvrđenjem.

Teorema 1.2.25. Neka je α ordinal. Tada

$$\alpha = \{\beta : \beta \text{ je ordinal i } \beta \in \alpha\}.$$

Definicija 1.2.26. Neka je X neprazan skup ordinala. Tada je $supX = \cup X$ i $min(X) = \cap X$.

Teorema 1.2.27. Neka je X neprazan skup ordinala. Tada:

(i) presek elemenata X je ordinal;

(ii) presek elemenata X pripada skupu X;

(iii) za svako $\alpha \in X$ je $\cap X \in \alpha$ ili $\cap X = \alpha$.

Dokaz. Pokažimo (ii). Prema tvrđenju pod (i) imamo $\cap X \subseteq \alpha$ za sve $\alpha \in X$. Neka za neko $\alpha \in X$ važi $\alpha \in \cap X$. Tada $\alpha \in \cap X \subseteq \alpha$, pa $\alpha \in \alpha$, pa smo dobili kontradikciju. Zbog trihotomije je

$$\forall \alpha \in X \left(\cap X = \alpha \vee \cap X \in \alpha\right).$$

Neka je za sve $\alpha \in X$ $\cap X \in \alpha$. Tada $\cap X \in \cap_{\alpha \in X} \alpha = \cap X$, pa opet imamo kontradikciju. Dakle, ostaje da postoji $\alpha \in X$ tako da $\cap X = \alpha$, pa je tvrđenje dokazano. (iii) sledi direktno iz (ii).

□

Za uniju elemenata skupa ordinala X važi da je ona najmanji ordinal sadržan u X.

Teorema 1.2.28. Svaki skup ordinala je dobro uređen relacijom $\in$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $X \neq \emptyset$ (ako je X prazan skup, dokaz je gotov). Očigledno je $(X, \in)$ linearno uređen skup, jer je irefleksivan, tranzitivan i važi trihotomija. Uzmimo neprazan podskup Y skupa X. Kako je Y neprazan skup ordinala, prema teoremi 1.2.27, $\cap Y \in Y$ je najmanji ordinal u Y. □

Kako je $<$ na skupu ordinala dobro uređenje, važi sledeća teorema.

Teorema 1.2.29. Svaki opadajući niz ordinala je konačan.

Kao što smo videli iz definicije 1.2.17, ordinali su posebne vrste skupova. Posmatrajmo $\{x : x \text{ je ordinal}\}$. Ovo nije skup! Naime, od ranije nam je poznat Raselov paradoks koji tvrdi da ne postoji "skup svih skupova", odnosno ne postoji skup oblika $\{x : x \notin x\}$. Isti je slučaj i sa ordinalima,što ilustruje sledeća teorema.

Teorema 1.2.30. (Burali-Fortijev paradoks) Ne postoji skup svih ordinala.

Dokaz. Pretpostavimo da je $ON = \{x : x \text{ je ordinal }\}$ skup. Na osnovi teoreme 1.2.29 on je onda dobro uređen relacijom $\in$. Takođe, on je i tranzitivan, jer za ordinal α i $\beta \in \alpha$, bilo bi $\beta \in ON$, pa $\alpha \subset ON$. Na osnovu ovoga zaključujemo da je ON ordinal. No, tada je $ON \in ON$, a to je nemoguće, jer nijedan skup nije sam sebi elemenat. □

Dakle, ne može se govoriti o "skupu" svih ordinala. Zbog toga uvodimo pojam **klase**. Klase, za razliku od skupova, ne mogu pripadati drugim objektima. Primetimo da se i skupovi mogu posmatrati kao klase. Klase koje nisu skupovi nazivaćemo **pravim klasama**. U suštini, klase su formule. Elementi klase su svi oni skupovi x koji zadovoljavaju formulu $A(x)$. Navedimo primere klasa koje smo već spominjali u radu.

Primer 1.2.31. Klasa svih skupova je $V = \{x|x = x\}$ (naziva se i **univerzalna klasa**), dok je klasa ordinala označena sa $ON = \{x|x \text{ je ordinal}\}$ (nekada se označava i sa ORD). Klasa dobro uređenih skupova izomorfnih sa $\langle A, R\rangle$ je

$$type\langle A, R\rangle = \{x|x \text{ je dobro uređen i } x \cong \langle A, R\rangle\}.$$

Naredna teorema nam daje reprezentaciju ordinala pomoću dobro uređenih skupova.

Teorema 1.2.32. Za svaki dobro uređen skup $\langle X, <\rangle$ postoji jedinstven ordinal α takav da je $\alpha \cong \langle X, <\rangle$.

Jedinstvenost ovakvog ordinala α omogućava nam da definišemo $type\langle X, < \rangle = \alpha$ - **ordinalni tip** uređenja $\langle X, <\rangle$.

Teorema 1.2.33. Ako je $\langle X, <\rangle$ dobro uređen skup tada je sa $type\langle X, <\rangle = \alpha$ definisan **ordinalni tip** uređenja $\langle X, <\rangle$.

Spomenimo i posebnu vrstu ordinala - prirodne brojeve. Ako je α ordinal, pokazuje se da je $\alpha \cup \{\alpha\}$ takođe ordinal, pri čemu je $\alpha \subset \alpha \cup \{\alpha\}$. Takođe, može se pokazati da ne postoji β takvo da je $\alpha < \beta < \alpha \cup \{\alpha\}$. Označimo $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ (u literaturi se koristi i oznaka $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha^+$).

Definicija 1.2.34. Ordinal α je **sledbenik (nasledni)** ako postoji ordinal β takav da $\alpha = \beta^+$, dok za α kažemo da je **granični** ako nije 0 i nije nasledni.

Definicija 1.2.35. Ordinal α je **prirodan broj** ako i samo ako je

$$\forall \beta \in ON(\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta = 0 \vee \beta \text{ je naredni }).$$

Iako nećemo detaljnije ispitivati osobine ovako definisanih prirodnih brojeva, napomenimo da je klasa svih prirodnih brojeva sa nulom (u oznaci ω) zapravo skup i to prebrojiv. Takođe, može se pokazati:

Teorema 1.2.36. ω je najmanji granični ordinal.

1.2.3 Transfinitna indukcija i rekurzija

U ovom segmentu rada objasnićemo pojmove transfinitne indukcije i rekurzije koji su izuzetno značajni u teoriji skupova, ali i šire. Princip indukcije nam daje "alat" za dokazivanje tvrđenja, dok se principom rekurzije konstruišu novi

objekti.
Sam termin "indukcije" već nam je poznat od ranije. U okviru izučavanja osobina prirodnih brojeva nemoguće je zaobići princip matematičke indukcije. Grubo rečeno, ovaj princip tvrdi da ako neka osobina P važi za 1 i ako iz osobine da važi za neko $n \in \mathbb{N}$ sledi da važi i za $n+1$, onda ta osobina važi za sve prirodne brojeve. Preciznije, ako je $P(x)$ neka formula, onda je

$$(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}(P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}(P(n))$$

U nastavku ćemo videti da je ovo samo jedan specijalni slučaj mnogo jačeg tvrđenja.
Princip transfinitne indukcije prvo definišemo za dobro uređene skupove sledećim tvrđenjem.

Teorema 1.2.37. Princip transfinitne indukcije
Neka je $\langle A, \leq_A \rangle$ dobro uređen skup i $\emptyset \neq B \subset A$. Tada važi:

$$[(\forall x \in A)\ pred_{\langle A, \leq \rangle}(x) \subset B \Rightarrow x \in B] \Rightarrow B = A. \tag{1.3}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da $B \neq A$, što znači da $A \setminus B \neq \emptyset$. Tada $\emptyset \neq A \setminus B \subset A$, pa postoji $x = min(A \setminus B)$. Posmatrajmo $pred_{\langle A, \leq_A \rangle}(x)$. Ako je $pred_{\langle A, \leq_A \rangle}(x) = \emptyset$, onda $\emptyset \subset B$, pa $x \in B$, a to je nemoguće. Ako je $pred_{\langle A, \leq_A \rangle}(x) \neq \emptyset$, neka $t \in pred_{\langle A, \leq_A \rangle}(x)$. Sledi da $t < x$, pa $t \in B$, zbog čega imamo $pred_{\langle A, \leq_A \rangle}(x) \subset B$. Zato je $x \in B$, što ponovo daje kontradikciju. Zaključujemo da mora biti $A = B$. □

Prethodna teorema nam daje sledeću posledicu koja se izuzetno lako dokazuje.

Teorema 1.2.38. Neka je $\langle A, \leq_A \rangle$ dobro uređen skup i $B \subset A$. Tada važi:

$$[a_0 \in B \wedge (\forall x \in A)\ (pred_{\langle A, \leq \rangle}(x) \subset B \Rightarrow x \in B)] \Rightarrow B = A. \tag{1.4}$$

Ako uzmemo da je skup A skup prirodnih brojeva, dobijamo baš princip matematičke indukcije. Takođe, za skup A možemo uzeti i neki ordinal, s obzirom da su ordinali posebno definisani skupovi. Na osnovu prethodno dokazanih teorema isto važi i za proizvoljan skup ordinala. Analogno tvrđenje se može dobiti i ako se umesto skupa A posmatra neka potklasa ordinala. Prema tome, princip transfinitne indukcije za klasu ordinala bi se mogao opisati na sledeći način:

• ***Princip transfinitne indukcije*** Neka je $A(\alpha)$ neki iskaz definisan za sve ordinale α. Pretpostavimo da je za svako α tačno: ako je za sve ordinale $\beta < \alpha$ iskaz $A(\beta)$ tačan, sledi da je tačan i za α. Tada je iskaz $A(\alpha)$ tačan za sve ordinale.

Na kraju, samo navodimo princip transfinitne rekurzije koji ćemo koristiti prilikom kontrukcije određenih matematičkih objekata.

Teorema 1.2.39. Princip transfinitne rekurzije Neka je $G(x, y)$ formula takva da je $G : V \to V$. Tada postoji jedinstveno F tako da

$$(\forall \alpha) F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

.

Njenu primenu pokazujemo odmah na primeru definisanja operacija sa ordinalima. Transfinitnom rekurzijom definišemo sabiranje ordinala. Ako je α ordinal, onda:

(i) $\alpha + 0 = \alpha$;

(ii) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ za svako β ordinal;

(iii) $\alpha + \beta = sup_{\xi<\beta}(\alpha + \xi)$, ako je $\beta > 0$ granični ordinal.

Istim postupskom daje se i definicija množenja dva ordinala.

(i) $\alpha \cdot 0 = 0$;

(ii) $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$ za svako β;

(iii) $\alpha \cdot \beta = sup_{\xi<\beta}(\alpha \cdot \xi)$.

Ako su α i β ordinali, onda je uslov $\alpha \leq \beta$ ekvivalentan uslovu da postoji jedinstveni ordinal γ takav da $\alpha + \gamma = \beta$. Takav ordinal se naziva razlika i označava se sa $\gamma = -\alpha + \beta$. Stepenovanje dva ordinala uvodimo na sledeći način.

(i) $\alpha^0 = 1$;

(ii) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$;

(iii) $\alpha^\beta = sup_{\xi<\beta}\alpha^\xi$ za svako $\beta > 0$ granični ordinal.

Sabiranje i množenje ordinala su asocijativne operacije, ali nisu komutativne.

Primer 1.2.40. $1 + \omega = \omega < \omega + 1$ i $2\omega = \omega < \omega \cdot 2$

Primer 1.2.41. Primer naslednog ordinala su svi prirodni brojevi i recimo $\omega + 1$. Ordinal $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ je granični.

Poznata nam je definicija niza u skupu X kao preslikavanja $x : \mathbb{N} \to X$, pri čemu niz označavamo sa $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ili $\langle x_n \rangle$.

Definicija 1.2.42. Transfinitni niz je funkcija čiji je domen ordinal: $\langle a_\beta : \beta < \alpha \rangle$. Naziva se i α niz ili niz dužine α.

1.3 Topologija

U ovom odeljku upoznajemo se sa pojmom i osnovnim osobinama topoloških prostora, sa posebnim osvrtom na metričke prostore. Svrha poglavlja je podsećanje na dobro poznata tvrđenja topologije i funkcionalne analize koja se izučavaju na osnovnim studijama matematike, pa je većina teorema data bez dokaza. Zainteresovani čitaoci dokaze tvrđenja navedenih u ovom odeljku mogu naći u [7] i [3].

1.3.1 Topološki prostori

Definicija 1.3.1. Neka je X neprazan skup. Za kolekciju $\mathcal{O}$ podskupova skupa X kažemo da je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(O1) Prazan skup i skup X su otvoreni, odnosno $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

(O2) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, odnosno za svako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, odnosno za svako $\{O_i | i \in I\}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Kolekcija $\mathcal{O}$ je **topologija** na skupu X, uređeni par $(X, \mathcal{O})$ nazivamo **topološkim prostorom**, a elementi skupa X su **tačke**.

Kada smo objasnili pojam otvorenog skupa, prirodno se postavlja pitanje osobina njegovog komplementa.

Definicija 1.3.2. Skup $F \subset X$ je **zatvoren** ako i samo ako je skup $X \backslash F$ otvoren skup. Kolekciju svih zatvorenih skupova označićemo sa $\mathcal{F}$.

Teorema 1.3.3. Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, tada familija svih zatvorenih skupova zadovoljava sledeće uslove:

(F1) Prazan skup i skup X su zatvoreni;

(F2) Unija dva zatvorena skupa je zatvoren skup;

(F3) Presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Neposredno iz definicija 1.3.1 i 1.3.2 i teoreme 1.3.3, primenom matematičke indukcije lako se pokazuje sledeće tvrđenje.

Teorema 1.3.4. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor.

(i) Presek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.

(ii) Unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Primer 1.3.5. Diskretna i antidiskretna topologija Ako je X proizvoljan neprazan skup, onda je očigledno kolekcija svih podskupova skupa X topologija na skupu X. Nazivamo je **diskretnom topologijom** i obeležavamo sa $\mathcal{O}_{disc}$. U diskretnom prostoru $(X, \mathcal{O}_{disc})$ svaki skup je istovremeno i otvoren i zatvoren, jer važi $\mathcal{O}_{disc} = P(X) = \mathcal{F}_{disc}$.
Kolekcija $\{\emptyset, X\}$ je takođe topologija na skupu X - **antidiskretna** topologija. I u antidiskretnom prostoru $(X, \mathcal{O}_{adisc})$ je očigledno $\mathcal{O}_{adisc} = \mathcal{F}_{adisc}$.

Uočimo i da ako je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{O}$ proizvoljna topologija na skupu X, onda je

$$\mathcal{O}_{adisc} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{disc}.$$

Zanimljivo je da se na proizvoljnom skupu X topološka struktura može definisati pomoću zatvorenih skupova. Naime, ako zadamo kolekciju $\mathcal{F}$ podskupova skupa X na kojoj su ispunjeni uslovi $(F1), (F2), (F3)$ i njene elemente nazovemo zatvorenim skupovima, otvoreni skupovi će, očigledno, biti njihovi komplementi. Ovo nije jedini način na koji se može definisati topologija, što će biti ilustrovano kasnije u radu.

Definicija 1.3.6. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je:

(i) G_δ **skup** ako i samo ako se može predstaviti kao presek prebrojive kolekcije otvorenih skupova;

(ii) F_σ **skup** ako i samo ako se može predstaviti kao unija prebrojive kolekcije zatvorenih skupova.

Definicija 1.3.7. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je **baza** topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(B1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ (elementi $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi);

(B2) za svaki skup $O \in \mathcal{O}$ postoji familija $\{B_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{B}$ tako da je $O = \bigcup_{j \in J} Bj$.

Drugim rečima, bazu topologije čine otvoreni skupovi takvi da se svaki otvoren skup topologije $\mathcal{O}$ može prikazati kao unija neke potkolekcije kolekcije $\mathcal{B}$.

Primer 1.3.8. Bazu diskretne topologije na skupu realnih brojeva čine svi singltoni, odnosno

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}.$$

To je prilično lako zaključiti, s obzirom da se svaki otvoren skup $O \in P(\mathbb{R})$ može predstaviti kao $O = \bigcup_{x \in O} \{x\}$.

Bitno je napomenuti da baza topologije u opštem slučaju nije jedinstvena. Prilikom posmatranja više baza istog topološkog prostora, važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.3.9. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ baza topologije. Tada:

(i) Ako je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{O}$, onda je i $\mathcal{B}_1$ baza topologije;

(ii) Ako je $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{O}$ i svako $B \in \mathcal{B}$ je unija nekih iz $\mathcal{B}'$, onda je i $\mathcal{B}'$ baza $\mathcal{O}$;

(iii) Ako je i $\mathcal{O}_1$ topologija na skupu X, onda iz $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_1$ sledi $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_1$.

Na početku poglavlja topologiju smo definisali pomoću otvorenih skupova, uz napomenu da se ona može zadati i na druge načine. Jedan od njih je da se to učini zadavanjem njene baze.

Definicija 1.3.10. Ako je X neprazan skup, kolekcija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je **baza neke topologije** na skupu X ako i samo ako je kolekcija $\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X (zatvorenje familije $\mathcal{B}$ u odnosu na proizvoljne unije predstavlja topologiju na X).

Navodimo teoremu koja nam olakšava utvrđivanje da li je neka kolekcija skupova baza neke topologije.

Teorema 1.3.11. Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je baza neke topologije na skupu X ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

(BN1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;

(BN2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists\{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B}(B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i\in I} B_i)$.

Posledica 1.3.12. Neka je kolekcija podskupova $\mathcal{B} \subset P(X)$ takva da zadovoljava uslove:

(BN1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;

(BN2') $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \cup \{\emptyset\})$.

Tada je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na skupu X.

Time smo naveli i jedan dovoljan uslov da familija skupova bude baza neke topologije.

Primer 1.3.13. Uobičajena topologija na skupu $\mathbb{R}$
Familija otvorenih intervala

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\} \tag{1.5}$$

je baza neke topologije na $\mathbb{R}$. To se lako pokazuje primenom teoreme 1.3.12. Uslov $(BN1)$ je zadovoljen, jer $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, n) \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \mathbb{R}$. Ako je $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathcal{B}$, onda jednostavno uzmemo $a = min\{a_1, a_2\}$, $b = min\{b_1, b_2\}$, pa je

$$(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = \begin{cases} \emptyset, & a \geq b \\ (a, b), & a \neq b \end{cases}$$

a to daje ispunjenost uslova $(BN2')$. Dakle, $\mathcal{B}$ je baza neke topologije na skupu realnih brojeva. Ovu topologiju nazivamo **uobičajena topologija** na skupu $\mathbb{R}$.

Ona je jedna od prvih topologija koje su proučavane u matematici. Topološki prostor sa uobičajenom topologijom označava se sa $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. Dodajmo da je skup O otvoren u $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ ako i samo ako je unija neke familije otvorenih interevala.
Može se pokazati i da se svaki neprazan otvoren skup $O \in \mathcal{O}_{uob}$ može predstaviti kao unija najviše prebrojivo mnogo disjunktnih otvorenih intervala.

Definicija 1.3.14. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{P} \subseteq P(X)$ je **podbaza** topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako je:

(P1) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$;

(P2) Familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ je neka baza topologije $\mathcal{O}$.

Teorema 1.3.15. Ako je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{S}$ neka familija njegovih podskupova, onda postoji najgrublja topologija na X koja sadrži familiju $\mathcal{S}$.

Napomenimo da je to presek svih topologija koje sadrži datu kolekciju podskupova (lako se pokazuje da je presek proizvoljne familije topologija na datom skupu X ponovo topologija). Način na koji se konstruiše takva topologija dat je u narednoj teoremi.

Teorema 1.3.16. Neka je $X \neq \emptyset$ i familija $\mathcal{S} \subseteq P(X)$ takva da je $\bigcup \mathcal{S} = X$. Familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{S}$ je baza neke topologije na skupu X, a $\mathcal{S}$ je njena podbaza. To je i najmanja topologija koja sadrži $\mathcal{S}$.

Posebno ćemo istaći topološke prostore sa prebrojivom bazom. Svojstva ovih prostora koristićemo kasnije, naročito u okviru ispitivanja osobina metričkih prostora.

Definicija 1.3.17. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava **drugu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije takva da je $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$.

Primer 1.3.18. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.
Familija $\mathcal{B} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \wedge p < q\}$ je takođe baza uobičajene topologije, što se pokazuje direktno koristeći teoremu 1.3.9 i činjenicu da između svaka dva realna broja postoji racionalan broj.

Teorema 1.3.19. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti ako i samo ako ima prebrojivu podbazu.

Dokaz. Ako topološki prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, to znači da on ima prebrojivu bazu, a samim tim i prebrojivu podbazu (jer je svaka baza ujedno i podbaza), pa je ovaj smer tvrđenja očigledan.
S druge strane, ako je $\mathcal{P} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva podbaza topologije $\mathcal{O}$, u teoremi 1.3.16 smo videli da konačni preseci elemenata podbaze čine bazu $\mathcal{O}$. S obzirom da konačnih podskupova prebrojivog skupa ima prebrojivo mnogo (teorema 1.1.8), zaključujemo da mora biti $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. $\square$

U nastavku navodimo jednu od značajnijih teorema u topologiji koja se bavi problemom prebrojivih baza prostora. Tačnije, pokazaćemo da svaka baza prostora koji zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti sadrži prebrojiv podskup koji je takođe baza.

Teorema 1.3.20. [**Teorema Lindelefa**[3]]
Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor sa prebrojivom bazom $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$.

(i) Ako $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$, onda postoji prebrojiv podskup $J \subseteq I$ takav da je

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

(ii) Ako je $\mathcal{B}_1$ neka druga baza topologije $\mathcal{O}$, onda postoji prebrojiv podskup $\mathcal{B}'_1 \subseteq \mathcal{B}_1$ koji je baza topologije $\mathcal{O}$.

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojivu bazu topologije $\mathcal{O}$.
(i) Posmatrajmo skup $M = \{n \in \mathbb{N} : \exists i \in I(B_n \subseteq O_i)\}$. Zbog aksiome izbora, za svako $n \in \mathbb{N}$ možemo izabrati $i_n \in I$ tako da je $B_n \subseteq O_{i_n}$. Neka je $J = \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dokažimo

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Pokažimo prvo inkluziju "$\subseteq$". Neka $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$. Tada postoji $i^* \in I$ takvo da $x \in O_{i^*}$ i postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ da $x \in B_{n_0} \subseteq O_{i^*}$. Sada $n_0 \in M$, odakle sledi $B_{n_0} \subseteq O_{i_{n_0}} \subseteq \bigcup_{i \in J} O_i$, što je i trebalo dokazati. Druga inkluzija očigledno važi, jer $J \subseteq I$.
(ii) Označimo $\mathcal{B}_1 = \{V_i : i \in I\}$ i za $n \in \mathbb{N}$ definišimo $I_n = \{i \in I : V_i \subseteq B_n\}$. $\mathcal{B}_1$ je baza, pa je $B_n = \bigcup_{i \in I_n} V_i$. Iz prethodno dokazanog pod (i) znamo da postoji $J_n \subseteq I_n$ tako da $|J_n| \leq \aleph_0$, pri čemu je

$$B_n = \bigcup_{i \in J_n} V_i.$$

Ako sada definišemo

$$\mathcal{B}'_1 = \{V_i : i \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n\},$$

onda imamo $|\mathcal{B}'_1| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n| \leq \aleph_0$ Ovde smo koristili da je prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiv skup. S obzirom da je svaki B_n unija nekih elemenata kolekcije $\mathcal{B}'_1$, pa je prema teoremi 1.3.9 $\mathcal{B}'_1$ baza topologije $\mathcal{O}$. □

Osvrnimo se na još neke osobine topoloških prostora.

Definicija 1.3.21. Topološki prostor je **povezan** ako i samo ako ne postoje otvoreni, neprazni skupovi U i V takvi da je $X = U \cup V$, pri čemu je $U \cap V = \emptyset$. U suprotnom prostor je **nepovezan**.

[3]Ernst Leonhard Lindelöf (1870-1946),švedski matematičar

Definicija 1.3.22. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **nuladimenzionalan** ako i samo ako je Hausdorfov i ima bazu koju čine skupovi koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni.

Primer takvih prostora su očigledno diskretna i antidiskretna topologija.

Definicija 1.3.23. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **potpuno nepovezan** ako i samo ako za svake dve različite tačke prostora X postoji otvoreno-zatvoren skup O takav da $x \in O$, ali $y \notin O$.

Videli smo da se topologija može zadati preko otvorenih ili zatvorenih skupova. Uvođenjem pojma okoline dobijamo još jednu mogućnost definisanja topološkog prostora.

Definicija 1.3.24. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je **okolina** tačke $x \in X$ ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \subseteq A$. Skup svih okolina date tačke označicemo sa $\mathcal{U}(x)$.

Primer 1.3.25. U diskretnom prostoru $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$ skup okolina tačke x je kolekcija svih skupova koji tu tačku sadrže: $\mathcal{U}(x) = \{A \subseteq X : x \in A\}$.
Posmatrajmo prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. Intervali $(-\infty, 2), (-1, 1)$ su otvoreni skupovi, a ujedno i okoline tačke 0. Za njih kažemo da su **otvorene okoline** date tačke. Skup $[-7, 5]$ je okolina koja nije otvorena.

Napomenimo da je presek dve okoline okolina i da je svaki nadskup okoline takođe okolina.
U nastavku ćemo pod pojmom okoline podrazumevati da se radi o otvorenoj okolini posmatrane tačke.
Sada kada smo uveli pojam okoline, možemo dati malo drugačiji pristup pojmu otvorenog skupa. Naime, važi sledeće tvrđenje, koje nam olakšava dokazivanje da je neki skup otvoren.

Teorema 1.3.26. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada: skup $A \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke.

Definicija 1.3.27. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, $x \in X$. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je **baza okolina** tačke x ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(BO1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x, odnosno $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$;

(BO2) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x)\ (B \subseteq U)$.

Koristi se i termin **lokalna baza**. $\mathcal{U}(x)$ je jedna baza okolina tačke x.
Kao i kod baze topologije, posebno izdvajamo prostore koji imaju prebrojivu bazu okolina u svakoj tački.

Definicija 1.3.28. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava **prvu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako u svakoj tački $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina.

Teorema 1.3.29. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, $x \in X$ proizvoljna tačka i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Tada važi:

a) Familija $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ je baza okolina tačke x;

b) Ako prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti.

Primer prostora koji zadovoljava I, ali ne i II aksiomu prebrojivosti može se naći u [7], strana 79.

Teorema 1.3.30. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada svaka tačka $x \in X$ ima prebrojivu bazu okolina koja je pritom i opadajuća u odnosu na relaciju inkluzije.

Dokaz. Neka je $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ neka prebrojiva baza okolina tačke x. Ako skupove $B'_n, n \in \mathbb{N}$ definišemo sa $B'_n = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$, onda kolekcija $\{B'_n : n \in \mathbb{N}\}$ ima tražena svojstva. □

Posmatrajući topološki prostor i njegov proizvoljan podskup, izdvajaju se određene tačke tog prostora koje imaju posebna svojstva, kako je opisano u sledećoj definiciji.

Definicija 1.3.31. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je:

- **unutrašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji $O \in \mathcal{O}$ takav da $x \in O \subseteq A$; skup svih unutrašnjih tačaka naziva se **unutrašnjost** skupa A (u oznaci $IntA$);

- **spoljašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji $O \in \mathcal{O}$ takav da $x \in O \subseteq X \setminus A$; skup svih spoljašnjih tačaka naziva se **spoljašnjost** skupa A (u oznaci $ExtA$);

- **rubna tačka** skupa A ako i samo ako za svaki $O \in \mathcal{O}$ koji je sadrži seče i A i $X \setminus A$; skup svih rubnih tačaka naziva se **rub** skupa A (u oznaci δA).

Teorema 1.3.32. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve $A, B \subseteq X$ važi:

(i) unutrašnjost skupa A je najveći otvoren podskup skupa A;

(ii) skup A je otvoren ako i samo ako je $A = Int(A)$;

(iii) operator unutrašnjosti je monoton.

Definicija 1.3.33. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je:

- **adherentna tačka** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče A; skup svih adherentnih tačaka naziva se **adherencija** skupa (ili zatvorenje), u oznaci A;

- **tačka nagomilavanja** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup $A \setminus \{x\}$, skup svih tačaka nagomilavanja naziva se **izvod** skupa i označava sa A';

Iz definicije je očigledno da je svaka tačka nagomilavanja skupa A ujedno i njena adherentna tačka, dok obratno ne važi.

Definicija 1.3.34. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $x \in A \subseteq X$ je **izolovana tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da $O \cap A = \{x\}$.

Očigledno je da je spoljašnjost skupa A prostora X zapravo unutrašnjost njenog komplementa. Takođe, važi i $X = IntA \cup ExtA \cup \delta A$ i dati skupovi su disjunktni (neki mogu biti i prazni). Može se pokazati da je rub skupa zatvoren i da je adherencija skupa najmanji zatvoren nadskup skupa A.

Teorema 1.3.35. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tada važi da je skup zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, to jest $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A' \subseteq A$.

Definicija 1.3.36. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Za skup $D \subset X$ kažemo da je **gust** u X ako i samo ako je $\bar{D} = X$. $(X, \mathcal{O})$ je **separabilan** topološki prostor ako i samo ako postoji skup $D \subset X$ koji je gust i prebrojiv.

Primer 1.3.37. Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je separabilan.
Skup racionalnih brojeva ($\mathbb{Q}$) je gust u $\mathbb{R}$. Naime, u primeru 1.3.13 smo pokazali da je $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$ baza uobičajene topologije. Znamo da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv i $\mathbb{Q} \cap (a, b) \neq \emptyset$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$, što znači da $\mathbb{Q}$ jeste gust u $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3.38. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}$. Važi: skup $D \subset X$ je gust ako i samo ako je $B \cap D \neq \emptyset$ za svaki neprazan skup $B \in \mathcal{B}$.

U praksi se najčešće koristi specijalan slučaj prethodne teoreme.

Teorema 1.3.39. Skup D je gust ako i samo ako seče svaki neprazan otvoren skup $O \in \mathcal{O}$.

Teorema 1.3.40. Svaki topološki prostor koji zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti je i separabilan.

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor koji zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. To znači da postoji prebrojiva baza topologije $\mathcal{O}$, označimo je sa $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da su bazni skupovi neprazni. Aksiomom izbora iz svakog baznog skupa B_n izaberimo elemenat $x_n \in B_n$. Tada skup $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ seče svako $B_n \in \mathcal{B}$, pa je na osnovu teoreme 1.3.39 gust skup. Ako uočimo da je $|D| \leq \aleph_0$, očigledno je da je prostor $(X, \mathcal{O})$ separabilan. $\square$

Sa pojmovima neprekidnosti i granične vrednosti funkcije smo se upoznali još na osnovnim kursevima analize. U topološkim prostorima, daje se njihova uopštenija definicija.

Definicija 1.3.41. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **neprekidno u tački** x_0 ako i samo ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 tako da $f[U] \subseteq V$. Funkcija f je **neprekidna** ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački skupa X.

Teorema 1.3.42. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ dato preslikavanje. Tada su uslovi ekvivalentni:

(i) f je neprekidno presllikavanje;

(ii) Inverzna slika otvorenog skupa je otvoren skup, odnosno za svako $O \in \mathcal{O}_Y$ je $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$;

(iii) Inverzna slika zatvorenog skupa je zatvoren skup, odnosno za svako $F \in \mathcal{F}_Y$ je $f^{-1}[F] \in \mathcal{F}_X$;

(iv) Za svaki skup $B \in \mathcal{B}_Y$ (gde je sa $\mathcal{B}_Y$ označena proizvoljna baza prostora $\mathcal{O}_Y$) važi da je $f^{-1}[B] \subseteq X$ otvoren skup;

(v) Za svaki skup $P \in \mathcal{P}_Y$ (gde je sa $\mathcal{B}_Y$ označena proizvoljna podbaza prostora $\mathcal{O}_Y$) važi da je $f^{-1}[P] \subseteq X$ otvoren skup;

(v) Za svako $A \subset X$ važi $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Uslov neprekidnosti ima veliki broj ekvivalentnih tvrđenja, kao što je pokazala prethodna teorema. U zavisnosti od potreba dokaza koje radimo, koristićemo neke od njih.

Primer 1.3.43. Svako preslikavanje iz diskretnog prostora je neprekidno, jer je očigledno inverzna slika otvorenog skupa svakako otvoren skup. Međutim, važi i obratno tvrđenje: ako je za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ svako preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidno, onda je topologija na skupu X diskretna.

Primer 1.3.44. Ako je $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje, pri čemu je $(Y, \mathcal{O}_Y)$ antidiskretni prostor, f je neprekidno. Naime, ako je $\mathcal{O}_Y = \{\emptyset, Y\}$ antidiskretna topologija, onda je $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ i $f^{-1}[Y] = X$, a iz definicije 1.3.1$\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$.

Definicija 1.3.45. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je:

- **otvoreno** ako i samo ako za svaki otvoren skup O u $\mathcal{O}_X$ $f[O] \in \mathcal{O}_Y$;
- **zatvoreno** ako i samo ako za svaki zatvoren skup F u X $f[F] \in \mathcal{F}_Y$;

- **homeomorfizam** ako i samo ako je obostrano neprekidna bijekcija. Prostori X i Y su **homeomorfni** ako i samo ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$. Homeomorfizam topoloških prostora označavamo sa $X \cong Y$.

Definicija homeomorfizma zahteva da funkcija f bude neprekidna bijekcija i da f^{-1} bude neprekidno preslikavanje. Dodajmo da je u klasi topoloških prostora $\cong$ refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Teorema 1.3.46. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada su dati uslovi ekvivalentni:

(i) f je homeomorfizam;

(ii) f je otvoreno;

(iii) f je zatvoreno.

Bitno je napomenuti da se neke osobine topoloških prostora prenose na sve njegove neprekidne slike.

Definicija 1.3.47. Ako je $\mathcal{P}$ neka osobina kažemo da je ona **invarijanta** neprekidnih preslikavanja ako i samo ako za proizvoljne topološke prostore $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ važi da ako X ima osobinu $\mathcal{P}$ i postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ koje je sirjekcija, tada i Y ima tu osobinu.

Analogno se definišu invarijante otvorenih, zatvorenih preslikavanja, kao i homeomorfizama. Invarijante homeomorfizama se nazivaju **topološke osobine**.

Teorema 1.3.48. Separabilnost je invarijanta neprekidnih preslikavanja, pa i topološka osobina.

U okviru teme rada bavićemo se i topologijom koju "nasleđuju" podskupovi skupa X topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$.

Teorema 1.3.49. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i A neprazan podskup skupa X. Tada je sa $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ definisana topologija na skupu A.

Definicija 1.3.50. Topologija $\mathcal{O}_A$ je **indukovana** topologijom $\mathcal{O}$ na skupu A. Topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ naziva se **potprostor** prostora $(X, \mathcal{O})$.

Označimo sa $\mathcal{F}_A$ familiju svih zatvorenih skupova prostora $(A, \mathcal{O}_A)$. Dokaz narednog tvrđenja je jednostavan.

Teorema 1.3.51. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ neprazan skup. Tada važi:

(ii) $\mathcal{F}_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$;

(ii) $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{O}$ ako i samo ako $A \in \mathcal{O}$;

(iii) $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}$ ako i samo ako $A \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.3.52. Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **nasledna** ako i samo ako za svaki topološki prostor važi: ako prostor $(X, \mathcal{O})$ poseduje osobinu $\mathcal{P}$ onda svaki njegov potprostor ima tu osobinu. Za topološku osobinu kažemo da je **nasleđuju otvoreni (zatvoreni) skupovi** ako i samo ako važi: ako prostor $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$ onda svaki njegov otvoren (zatvoren)potprostor ima tu osobinu.

Navodimo i neke aksiome separacije koje će biti od značaja u radu.

Definicija 1.3.53. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. On je:

- T_0 **-prostor** ako i samo ako za svake sve različite tačke prostora postoji otvoren skup koji sadrži tačno jednu od njih;
- T_1 **-prostor** ako i samo ako za svake sve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup O takav da $x \in O$ i $y \notin O$;
- T_2 **-prostor (Hausdorfov)** ako i samo ako za svake sve različite tačke $x, y \in X$ postoje dusjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$.

Definicija 1.3.54. Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, kažemo da je on **regularan** ako i samo ako za svaki zatvoren skup F i svaku tačku x van skupa F postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $x \in O_1$ i $F \subset O_2$. Regularan T_1 -prostor naziva se T_3 **-prostor.**
Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **normalan** ako i samo ako za svaka dva zatvorena disjunktna skupa F_1 i F_2 postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da $F_1 \subseteq O_1$ i $F_2 \subseteq O_2$. X je T_4 **-prostor** ako i samo ako je normalan T_1 -prostor.

Teorema 1.3.55. Svaki T_4-prostor je T_3-prostor, svaki T_3-prostor je Hausdorfov, svaki Hausdorfov prostor je T_1, a svaki T_1-prostor je i T_0.

Teorema 1.3.56. Neka je $(X, \mathcal{O})$ T_1 prostor i x tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq X$. Tada u svakoj okolini tačke x postoji beskonačno mnogo elemenata skupa A.

Definicija 1.3.57. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **kompletno-regularan** ako i samo ako $\forall F \in \mathcal{F}\ \forall x \in X \setminus F\ \exists f : X \to [0, 1]$ neprekidno tako da je $f(x) = 0 \wedge f[F] = \{1\}$. Prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$ ako i samo ako je T_1 i kompletno-regularan.

Teorema 1.3.58. Svaki T_4 prostor je i $T_{3\frac{1}{2}}$.

Jedna od značajnih osobina topoloških prostora je i svojstvo kompaktnosti.

Definicija 1.3.59. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\emptyset \neq A \subseteq X$. Kolekcija $\{O_i : i \in I\}$ je **otvoreni pokrivač** skupa A ako i samo ako je $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Skup $\{O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}\}$ se naziva **konačan potpokrivač** pokrivača $\{O_i : i \in I\}$ ako i samo ako je $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_i$. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **kompaktan** ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač. $\emptyset \neq A \subseteq X$ je **kompaktan skup** ako i samo ako je $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan topološki prostor.

Lako se pokazuje sledeća lema koja se češće koristi u dokazima.

Lema 1.3.60. *Skup A je kompaktan u prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako i samo ako svaki otvoren pokrivač A ima konačan potpokrivač.*

Primetimo da je svaki prostor sa konačno mnogo tačaka kompaktan.

Definicija 1.3.61. Familija $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ ima svojstvo konačnog preseka ako i samo ako svaka konačna potfamilija $\mathcal{A}$ ima neprazan presek.

Teorema 1.3.62. Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako svaka familija zatvorenih skupova sa svojstvom konačnog preseka ima neprazan presek.

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan prostor i $\{F_i : i \in I\}$ familija zatvorenih skupova tog prostora sa svojstvom konačnog preseka. Pretpostavimo da je $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Tada je $X = \bigcup (X \setminus F_i)$ otvoren pokivač X. Kako je X kompaktan, postoje $i_1, \ldots, i_k \in I$ takvi da $X = \bigcup_{j=1}^{k} (X \setminus F_{i_j})$, pa imamo da je $\emptyset = \bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}$, a to je u kontradikciji sa svojstvom konačnog preseka.
Pretpostavimo da svaka familija zatvorenih skupova sa svojstvom konačnog preseka ima neprazan presek. Neka je $\{O_i : i \in I\}$ otvoren pokrivač X. Tada je $\emptyset = \bigcap_{i \in I} (X \setminus O_i)$, pa prema pretpostavci familija skupova $\{X \setminus O_i : i \in I\}$ nema svojstvo konačnog preseka. Zato postoje $i_1, \ldots, i_k \in I$ da $\bigcap_{j=1}^{k} (X \setminus O_{i_j}) = \emptyset$, odnosno $X = \bigcup_{j=1}^{k} O_{i_j}$. Dakle, prostor ima konačan potpokrivač, pa je kompaktan. $\square$

Teorema 1.3.63. Neka je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan prostor i $F \subseteq X$ zatvoren skup. Tada je F kompaktan.

Dokaz. Označimo sa $\bigcup_{i \in I} O_i$ otvoren pokrivač skupa F, $O_i, i \in I$ su otvoreni skupovi. Tada je $(X \setminus F) \cup \bigcup_{i \in I} O_i$ otvoren pokrivač prostora X. Kako je X kompaktan postoji njegov konačan potpokrivač $X = (X \setminus F) \cup O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_k}$. Ali, tada je $F \subseteq O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_k}$, pa je prema lemi 1.3.60 F kompaktan skup. $\square$

Time je pokazano da je kompaktnost nasledna prema zatvorenim skupovima.

Teorema 1.3.64. Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hausdorfov prostor i $A \subseteq X$ kompaktan skup.

(i) Ako $x \notin A$ onda postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da $x \in V$ i $A \subseteq U$.

(ii) Skup A je zatvoren.

Teorema 1.3.65. Neka je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan Hausdorfov prostor. Tada važi: skup $A \subseteq X$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren.

Teorema 1.3.66. Svaki kompaktan Hausdorfov prostor je T_4-prostor.

Teorema 1.3.67. Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup.

Teorema 1.3.68. Neka je f neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u Hausdorfov prostor. Tada važi:

(i) f je zatvoreno preslikavanje;

(ii) Ako je preslikavanje f bijekcija, onda je homeomorfizam.

(iii) Ako je preslikavanje f injekcija, onda je potapanje.

Teorema 1.3.69. (**Hajne-Borel**) U $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ $A \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.

Definicija 1.3.70. Neka su $X_i, i \in I$ skupovi. **Direktan proizvod** familije skupova $\{X_i : i \in I\}$ je skup svih funkcija $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ sa osobinom da $\forall i \in I \; x(i) \in X_i$. Označava se sa $\prod_{i \in I} X_i$.

Definicija 1.3.71. Neka je $I \neq \emptyset$, $X_i \neq \emptyset, i \in I$ i $i_0 \in I$. Preslikavanje $\pi_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \to X_{i_0}$ definisano sa $\pi_{i_0}(\langle x_i \rangle) = x_{i_0}$ je **projekcija** proizvoda $\prod_{i \in I} X_i$ na X_{i_0}.

Teorema 1.3.72. Neka je $I \neq \emptyset$ i neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$ $i \in I$ topološki prostori. Tada važi:

(i) Kolekcija $\mathcal{P} = \{\pi_i^{-1}[O_i] : i \in I \wedge O_i \in \mathcal{O}_i\}$ je podbaza neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu $\prod_{i \in I} X_i$.

(ii) Kolekcija svih konačnih preseka $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}[O_i] : K \subseteq I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge \forall i \in K O_i \in \mathcal{O}_i\}$ je baza topologije $\mathcal{O}$.

Definicija 1.3.73. Topologija definisana teoremom 1.3.72 naziva se **topologija Tihonova** na $\prod_{i \in I} X_i$. Topološki prostor $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{O})$ je **Tihonovski proizvod** topoloških prostora $(X_i, \mathcal{O}_i)$.

Definicija 1.3.74. Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **(prebrojivo) multiplikativna** ako i samo ako za svaku (prebrojivu) kolekciju topoloških prostora važi: ako za svako $i \in I$ prostor ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i proizvod poseduje tu osobinu.

Teorema 1.3.75. (Tihonov) Proizvod proizvoljne familije kompaktnih prostora je kompaktan prostor.

Teorema 1.3.76. Druga aksioma prebrojivosti je prebrojivo multiplikativna.

Teorema 1.3.77. Separabilnost je prebrojivo multiplikativna osobina.

Primer 1.3.78. [**Hilbertov kub**] Prostor $[0,1]^{\mathbb{N}}$ naziva se Hilbetov kub.

Teorema 1.3.79. Svaki $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti može da se potopi u Hilbertov kub $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Ključni pojam za definisanje kompletnih metričkih prostora biće Košijevi nizova. Stoga se upoznajemo i sa terminom niza i njegovim svojstvima u nekim klasama topoloških prostora.

Definicija 1.3.80. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Za tačku $a \in X$ kažemo da je **granica niza** ako i samo ako važi: za svaku okolinu tačke a postoji prirodan broj n_0 takav da za svako $n \geq n_0$ x_n pripada toj okolini. Za niz koji ima granicu kažemo da je **konvergentan**.

U opštem slučaju, granica niza nije jedinstvena, ali važi sledeća teorema.

Teorema 1.3.81. U Hausdorfovom prostoru niz može imati najviše jednu granicu.

Ako niz ima jedinstvenu granicu pišemo $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Teorema 1.3.82. Ako je a granica nekog niza tačaka skupa A, onda je $a \in \overline{A}$.

Definicija 1.3.83. Niz $\langle x_n \rangle$ u prostoru X je **stacionaran** ako i samo ako postoje tačka a i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je za sve $n \geq n_0$ $x_n = a$.

Očigledno, u svakom topološkom prostoru stacionarni nizovi konvergiraju.

Primer 1.3.84. U diskretnom prostoru konvergiraju samo stacionarni nizovi. Neka je $\langle x_n \rangle$ konvergentan niz u diskretnom prostoru $(X, P(X))$. Granicu niza označimo sa a. Posmatrajmo okolinu $\{a\}$, odnosno singlton. Prema prethodnoj definiciji tada postoji prirodan broj n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ $x_n \in \{a\}$, a to znači da je $x_n = a$.

Definicija 1.3.85. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i a proizvoljna tačka. Preslikavaje $f : X \to Y$ je **nizovno (sekvencijalno)** neprekidno u a ako i samo ako za svaki niz $\langle x_n \rangle$ u prostoru X važi: ako $\lim x_n = a$ onda $\lim f(x_n) = f(a)$.

Teorema 1.3.86. Ako je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački a onda je u toj tački i sekvencijalno neprekidna.

Obratno ne mora da važi.

Teorema 1.3.87. Neka je $(X, \mathcal{O})$ prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti.

(i) Tada $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz $\langle x_n \rangle$ u A takav da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) Skup A je zatvoren ako i samo ako je granica svakog konvergentnog niza tačaka iz skupa A takođe elemenat skupa A;

(iii) $D \subseteq X$ je gust ako i samo ako za svako $x \in X$ postoji niz $\langle x_n \rangle$ u D čija je granica x.

1.3.2 Metrički prostori

U ovom odeljku navodimo osnovne osobine metričkih prostora.

Definicija 1.3.88. Neka je X neprazan skup i $d : X^2 \to [0, \infty)$ funkcija takva da za svako $x, y, z \in X$ važi:

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetričnost);

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trougla).

Preslikavanje d se naziva **metrika** na skupu X. Uređeni par (X, d) je **metrički prostor**, a broj $d(x, y)$ se naziva **rastojanje** tačaka x i y.

Skup $L(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, gde je $x \in X$ i $r > 0$ naziva se **otvorena lopta** sa centrom u x poluprečnika r.

Teorema 1.3.89. Neka je (X, d) metrički prostor. Ako je $x \in X$ i $r > 0$, onda za proizvoljno $y \in L(x, r)$ postoji broj $\rho > 0$ takav da je $L(y, \rho) \subseteq L(x, r)$.

U metričkom prostoru kolekcije ovako definisanih otvorenih lopti od velikog su značaja, što se vidi iz sledećeg tvrđenja.

Teorema 1.3.90. Neka je (X, d) metrički prostor. Familija

$$\mathcal{B}_d = \{L(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

svih otvorenih lopti predstavlja bazu neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X.

Dokaz. Pokazaćemo da su zadovoljeni uslovi (BN1) i (BN2) teoreme 1.3.11. Ako je $x \in X$ proizvoljna tačka, uočimo da je $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L(x, n)$, jer za $y \in X$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $d(x, y) < n_0$, pa $y \in L(x, n_0) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L(x, n)$. Suprotna inkluzija je trivijalna i time smo pokazali uslov $(BN1)$. Za uslov $(BN2)$ neka su $L(x_1, r_1)$ i $L(x_2, r_2)$ elementi $\mathcal{B}_d$. Prema teoremi 1.3.89 za $x \in L(x_1, r_1) \cap L(x_2, r_2)$ postoje $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ da $L(x, \rho_i) \subseteq L(x_i, r_i)$ za $i = 1, 2$. Tada je za $\rho = min\{\rho_1, \rho_2\}$ $x \in L(x, \rho) \subseteq L(x_1, r_1) \cap L(x_2, r_2)$, pa je zbog $L(x, \rho) \in \mathcal{B}_d$ dokazano $(BN2)$. □

Za topologiju definisanu prethodnom teoremom kažemo da je **indukovana** (određena) metrikom d.
Primetimo i da je familija svih otvorenih lopti tačke x jedna baza okolina te tačke.

Zaključujemo da u proizvoljnom metričkom prostoru važi da je skup otvoren ako i samo ako je unija neke kolekcije otvorenih lopti. Može se pokazati i sledeće tvrđenje.

Teorema 1.3.91. U metričkom prostoru (X, d) skup O je otvoren ako i samo ako za svako $x \in O$ postoji otvorena lopta sa centrom u x koja je sadržana u skupu O.

Pored pojma metričkih prostora, značajni su nam i metrizabilni prostori.

Definicija 1.3.92. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **metrizabilan** ako i samo ako postoji metrika d na skupu X takva da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Primer 1.3.93. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Definišemo preslikavanje $d : X^2 \to [0, \infty)$ sa:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Funkcija d je metrika na skupu X i nazivamo je **trivijalna** ili **01-metrika**. Uslovi (M1) i (M2) definicije metrike su očigledno zadovoljeni. Pokažimo (M3). Ako bi postojale tačke $x, y, z \in X$ takve da $d(x,y) > d(x,z) + d(z,y)$, a s obzirom da je $d[X^2] = \{0,1\}$, moralo bi biti $d(x,y) = 1$ i $d(x,y) = d(z,y) = 0$, odakle $x = y = z$. Poslednja jednakost dala bi $d(x,y) = 0$, što je nemoguće.

Za proizvoljnu tačku $x \in X$ imamo

$$L\left(x, \tfrac{1}{2}\right) = \{y \in X : d(x,y) = 0\} = \{x\}, \text{ pa } \{x\} \in \mathcal{O}_d.$$

Za proizvoljno $A \subseteq X$ imamo $A = \bigcup\{x\}$, pa je $\mathcal{O}_d = P(X)$, odnosno trivijalna metrika indukuje diskretnu topologiju.

Iz prethodnog primera zaključujemo:

Posledica 1.3.94. Svaki diskretan prostor je metrizabilan.

Definicija 1.3.95. Neka je $X \neq \emptyset$. Metrike d_1 i d_2 na skupu X su **uniformno ekvivalentne** ako i samo ako postoje $k, h > 0$ takvi da je za sve $x, y \in X$ $d_1(x,y) \leq kd_2(x,y)$ i $x, y \in X$ $d_2(x,y) \leq hd_1(x,y)$.

Može se pokazati da je relacija "biti uniformno ekvivalentan" u skupu svih metrika na X refleksivna, simetrična i tranzitivna. U nastavku navodimo neke ključne osobine metrike i metričkih prostora.

Definicija 1.3.96. Metrika d definisana na skupu X je **ograničena** ako i samo ako postoji realan broj $M > 0$ takav da za sve $x, y \in X$ važi: $d(x,y) < M$.

Teorema 1.3.97. Neka je (X, d) metrički prostor. Tada važi:

a) Funkcija $d_1 : X^2 \to \mathbb{R}$ data sa

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

je ograničena metrika na skupu X.

b) Metrike d i d_1 na skupu X određuju istu topologiju.

Primer 1.3.98. Posmatrajmo uobičajenu topologiju na skupu $\mathbb{R}^n$. Za $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ i $y = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ sledeće funkcije su metrike:
$d_1(x, y) = \sum |x_k - y_k|$, $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$, $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^p}$, $d_\infty(x, y) = max\{|x_k - y_k| : k \leq n\}$. Dokaz da su na ovaj način zaista definisane metrike može se naći u [7].
Pokažimo da su one uniformno ekvivalentne. Važi:

$$d_p(x, y) \leq (n(d_\infty(x, y))^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y)$$

$$d_\infty(x, y) = ((d_\infty(x, y))^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^p)^{\frac{1}{p}} = d_p(x, y).$$

Prema tome, metrike d_p i d_∞ su uniformno ekvivalentne, pa su i sve d_p metrike međusobno uniformno ekvivalentne.
Uočimo da je za $n = 1$ odgovarajuća metrika d_∞ data sa $d_\infty : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$,

$$d_\infty(x, y) = |x - y|.$$

Lako se pokazuje da je topologija indukovana ovom metrikom zapravo uobičajena topologija na skupu $\mathbb{R}$. Naime, očigledno je $\mathcal{B}d \subseteq \mathcal{B}_{uob}$, gde je $\mathcal{B}_{uob} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$. S druge strane, $(a, b) = (x - r, x + r)$ za $x = \dfrac{a + b}{2}$ i $r = \dfrac{b - a}{2}$, što konačno daje $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}_{uob}$.
Dakle, prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je metrizabilan.

Definicija 1.3.99. Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$. Definišemo **dijametar** skupa A sa

$$diam(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Po definiciji uzimamo da je $diam(\emptyset) = 0$.

Lema 1.3.100. *Za proizvoljan podskup A metričkog prostora važi:* $diam(A) = diam(\overline{A})$.

Uslov neprekidnosti u metričkim prostorima dobija poznatiju formulaciju sa kojom smo se susreli u okviru osnovnog kursa realne analize.

Teorema 1.3.101. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno u tački x_0 ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon). \tag{1.6}$$

Teorema 1.3.102. Neka je (X, d) metrički prostor. Tada važi: (X, d) je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

Teorema 1.3.103. Svaki metrički prostor je T_4 prostor.

Teorema 1.3.104. Svaki metrički prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

Dokaz. Uzmimo da je (X, d) metrički prostor i $x \in X$. Dokažimo da je kolekcija $\mathcal{B}(x) = \{L(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ baza okolina tačke x. Uslov (BO1) očigledno važi, jer je $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. Ako je U proizvoljna okolina tačke x, prema teoremi 1.3.91 postoji $r > 0$ takvo da $L(x, r) \subseteq U$. Neka je n prirodan broj takav da je $\dfrac{1}{n} < r$. Tada, za $B = L(x, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}(x)$ imamo $B \subseteq U$, čime je pokazano da važi (BO2). $\square$

Istaknimo da teorema 1.3.104 važi i za svaki metrizabilan topološki prostor. U nastavku navodimo još neka svojstva metrizabilnih prostora.

Teorema 1.3.105. Metrizabilnost je topološka osobina.

Teorema 1.3.106. Metrizabilnost je prebrojivo multiplikativna osobina.

Teorema 1.3.107. Metrizabilnost je nasledna osobina.

Kako se tema ovog rada odnosi i na tvrđenja u kompletnim metričkim prostorima, neophodno je objasniti i taj pojam. No, prvo se moramo upoznati sa Košijevim nizovima.

Definicija 1.3.108. Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ je **Košijev** ako i samo ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(d(x_n, x_m) < \varepsilon). \tag{1.7}$$

Definicija 1.3.109. Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ je ograničen ako i samo ako postoji $M > 0$ takvo da važi $d(x_i, x_j) < M$ za sve x_i, x_j iz niza $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$.

Teorema 1.3.110. U proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) važi:

(i) Svaki Košijev niz je ograničen.

(ii) Ako Košijev niz ima konvergentan podniz, onda je i sam konvergentan.

(iii) Svaki konvergentan niz je Košijev.

Definicija 1.3.111. Metrički prostor (X, d) je **kompletan** ako i samo ako je svaki Košijev niz u X konvergentan.

Primer 1.3.112. Prostor sa diskretnom metrikom je kompletan.
Neka je (X, d) diskretan prostor i $\langle x_n \rangle$ Košijev niz. Prema definiciji 1.3.108, imamo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $m, n \geq n_0$ je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Uzmimo da je $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada, zbog definicije trivijalne metrike imamo da za sve $m, n \geq n_0$ je $x_m = x_n = x_{n_0}$, pa se dobija stacionaran niz. Dakle, niz je konvergentan.

Navodimo i jedan potreban i dovoljan uslov kompletnosti metričkog prostora.

Teorema 1.3.113. Kantor
Metrički prostor (X, d) je kompletan ako i samo ako za svaki opadajući niz $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ nepraznih, zatvorenih i ograničenih skupova takvih da je $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ važi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Dokaz. Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $F_n, n \in \mathbb{N}$ kolekcija zatvorenih skupova sa osobinama navedenim u teoremi. Iz svakog skupa F_n biramo tačku x_n (to nam omogućava aksioma izbora). Pokažimo prvo da je niz $\langle x_n \rangle$ Košijev. Ako je $\varepsilon > 0$ dato, zbog $lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $n \geq n_0$ $diam(F_n) < \varepsilon$. Prema tome, za proizvoljne $m, n \geq n_0$ je $x_n, x_m \in F_{n_0}$, a važi i $d(x_m, x_n) \leq diam(F_{n_0}) < \varepsilon$. Time smo pokazali da je niz Košijev. Kako je prostor kompletan, niz je konvergentan. Označimo njegovu granicu sa x. Podniz $\langle x_n : n \geq m \rangle$ niza $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ je niz u skupu F_m i konvergira ka x. Po pretpostavci F_m je zatvoren skup, pa iz teoreme 1.3.87 sledi $x \in F_m$. Kako $x \in F_m$ za svako $m \in \mathbb{N}$ konačno dobijamo da je $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m \neq \emptyset$.
Pretpostavimo da metrički prostor (X, d) zadovoljava uslov teoreme. Pokažimo da je on kompletan. Neka je $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ Košijev niz u X. Posmatrajmo skupove $A_n = \{x_k : k \geq n\}, n \in \mathbb{N}$. Očigledno važi $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$. Pokažimo da njihovi dijametri teže nuli. Niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ je Košijev, pa za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $m, n \geq n_0$ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, odakle sledi $diam(A_{n_0}) = sup\{d(x_m, x_n) : m, n \geq n_0\} < \varepsilon$. Za $n \geq n_0$ je $A_n \subset A_{n_0}$, pa je $diam(A_n) < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$, odnosno $\lim_{n\to\infty} diam(A_n) = 0$.
Uočimo da za skupove $A_n, n \in \mathbb{N}$ važi $\overline{A_1} \supset \overline{A_2} \supset \overline{A_3} \supset \dots$. Zbog leme 1.3.100 je $diam(\overline{A_n}) = diam(A_n)$, ti dijametri teže nuli. Dakle, po pretpostavci, sledi da postoji tačka x koja pripada preseku skupova $\overline{A_n}$. Ostaje da se pokaže da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za svako $n \geq n_0$ je $diam(\overline{A_n}) < \varepsilon$, a kako je $x, x_n \in \overline{A_n}$, imamo $d(x, x_n) < \varepsilon$. Time smo pokazali konvergenciju niza i dokaz je kompletan.

□

Za ispitivanje kompaktnosti u metričkim prostorima koristićemo sledeća tvrđenja.

Definicija 1.3.114. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **nizovno kompaktan** ako i samo ako svaki niz u X ima konvergentan podniz. Prostor je **prebrojivo kompaktan** ako i samo ako svaki beskonačan podskup skupa X ima tačku nagomilavanja.

U metričkim prostorima važi ekvivalencija ovih pojmova.

Teorema 1.3.115. Neka je (X, d) metrički prostor. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) (X, d) je kompaktan;

(ii) (X, d) je nizovno kompaktan;

(iii) (X, d) je prebrojivo kompaktan.

Teorema 1.3.116. Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan.

Teorema 1.3.117. Kompaktan metrički prostor je kompletan.

Primer 1.3.118. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je kompletan.
Uzmimo proizvoljan Košijev niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u $\mathbb{R}$. Prema 1.3.110 (i) niz je ograničen, pa pripada nekom intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Kako je $[a, b]$ ograničen i zatvoren skup, prema teoremi Hajne-Borela (1.3.69), on je i kompaktan. Teorema 1.3.115 kaže da je on i nizovno kompaktan, pa niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ima konvergentan podniz. Konačno, prema teoremi 1.3.110 (ii) niz je konvergentan. Prostor je kompletan.

Teorema 1.3.119. Neka je (X, d) metrički prostor. Ako je $A \subset X$ kompaktan, onda je on zatvoren i ograničen.

Kod preslikavanja između metričkih prostora posebno ističemo funkcije koje "čuvaju rastojanje".

Definicija 1.3.120. Neka su dati metrički prostori (X, d_X) i (Y, d_Y). Preslikavanje $f : X \to Y$ je **izometrija** ako i samo ako za svako $x_1, x_2 \in X$ važi

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Za prostore X i Y kažemo da su **izometrični** ako i samo ako postoji sirjektivna izometrija iz skupa X u skup Y.

Teorema 1.3.121. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ izometrija, $\langle x_n \rangle$ niz u prostoru X i $x \in X$. Tada važi:

a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$;

b) Niz $\langle x_n \rangle$ je Košijev ako i samo ako je niz $\langle f(x_n) \rangle$ Košijev.

Definicija 1.3.122. Za metrički prostor (Y, d_Y) kažemo da je **kompletiranje** metričkog prostora (X, d_X) ako i samo ako je

(i) Y kompletan;

(ii) postoji izometrija $f : X \to Y$;

(iii) $f[X]$ je gust skup u Y.

Teorema 1.3.123. Ako je (X, d_X) nekompletan metrički prostor, onda postoji kompletan metrički prostor $(\tilde{X}, d)$ i izometrija $f : X \to \tilde{X}$ tako da je $f[X]$ gust u prostoru $\tilde{X}$.

Kompletnost nije ni nasledna ni topološka osobina. Ali, važi sledeće bitno tvrđenje.

Teorema 1.3.124. Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Skup $K \subseteq X$ je kompletan ako i samo ako je zatvoren.

Definicija 1.3.125. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Preslikavanje $||\cdot|| : X \to [0,\infty)$ sa osobinama:

(N1) $||x|| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;

(N2) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$;

(N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

se naziva **norma** na skupu X, a $(X, ||\cdot||)$ je **normiran** vektorski prostor.

Ako je $(X, ||\cdot||)$ normiran vektorski prostor, onda je sa $d : X^2 \to [0,\infty)$, $d(x,y) = ||x - y||$ za sve $x, y \in X$ definisana metrika na X. Kompletan normiran prostor naziva se **Banahov** prostor.

Poglavlje 2

Teorema Kantor-Bendiksona

Prvo ćemo navesti oblik teoreme koji se najčešće primenjuje u deskriptivnoj teoriji skupova, tj. formulaciju teoreme koja se odnosi na poljske prostore. Zato se prvo upoznajemo sa definicijom i svojstvima poljskih prostora. Nakon toga, teoremu Kantor-Bendiksona ćemo formulisati na prostorima koji nisu poljski i dati direktniji dokaz. Konačno, uvođenjem pojma Kantor-Bendiksonovog ranga u narednom poglavlju, dokaz teoreme koja predstavlja temu ovog rada postaje skoro rutinski. Ovakvim redosledom izlaganja nastoji se pokazati da, iako ova teorema u literaturi često ima komplikovan dokaz, (kao na primer u [6]), suštinski, ona je mnogo jednostavnija.
S obzirom da se bitne posledice teoreme Kantor-Bendiksona zaključuju neposredno iz njenog dokaza, one će biti navedene u okviru ovog poglavlja radi kompletnosti izlaganja.

2.1 Poljski prostori

Poljski prostori predstavljaju ključni pojam deskriptivne teorije skupova. Narednim poglavljem daje se pregled njihovih osnovnih svojstava.

Definicija 2.1.1. Separabilan, kompletno metrizabilan prostor naziva se **poljski prostor**.

Iz same definicije 2.1.1, kao očigledna posledica izdvaja se naredno tvrđenje.

Teorema 2.1.2. [[6], Propozicija 3.3(i)] Kompletiranje separabilnog metričkog prostora je poljski prostor.

Primeri poljskih prostora su nam dobro poznati od ranije. U nastavku navodimo neke od njih.

Primer 2.1.3. Prostor realnih brojeva sa uobičajenom topologijom, $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$, je poljski.

U primeru 1.3.98 smo pokazali da je prostor metrizabilan, a u primeru 1.3.118 da je i kompletan. Primer 1.3.37 nam daje separabilnost, pa je $(R, \mathcal{O}_{uob})$ poljski prostor.

Primer 2.1.4. Prostor $\mathbb{I} = [0,1]$ sa uobičajenom topologijom je poljski. Posmatrajmo interval $[0,1]$ u $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. U primeru 1.3.98 je pokazano da je prostor realnih brojeva sa uobičajenom topologijom metrizabilan. Za metriku na $[0,1]$ uzećemo restikciju metrike iz tog primera. Interval $[0,1]$ je zatvoren i ograničen, pa je prema teoremi Hajne-Borela i kompaktan. Kompaktnost je u metričkim prostorima ekvivalentna nizovnoj kompaktnosti (teorema 1.3.115), što znači da svaki niz sadrži konvergentan podniz. Na osnovu teoreme 1.3.116 dobijamo da je svaki Košijev niz konvergentan, pa je $\mathbb{I}$ kompletan. On je i separabilan jer je skup $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$ gust i prebrojiv.

Istaknimo očigledno, ali značajno svojstvo poljskih prostora.

Teorema 2.1.5. Poljski prostori zadovoljavaju drugu aksiomu prebrojivosti.

Dokaz. Sledi direktno iz teoreme 1.3.102. □

Primer 2.1.6. Prebrojivi diskretni prostori su poljski. Neka je X prebrojiv skup na kome je definisana diskretna topologija. Metrika

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

je kompletna metrika koja indukuje ovu topologiju, kao što je pokazano u primeru 1.3.112. Prostor je i separabilan na osnovu teoreme 1.3.108, jer je metrizabilan i zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

Teorema 2.1.7. [[12], Lema 1.5.] Neka je X poljski prostor i $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ zatvoreni podskupovi X takvi da $\lim_{n\to\infty} diam(X_n) = 0$. Tada postoji $x \in X$ sa svojstvom $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \{x\}$.

Dokaz. Iz teoreme 1.3.113 direktno sledi da je $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. Pretpostavimo da presek nije singlton. Neka su x i y sadržani u $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ i $x \neq y$. Tada je $d(x,y) = \delta > 0$ i $diam(X_n) \geq d(x,y) \geq \delta$ za svako n, a to je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme. □

Teorema 2.1.8. Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ poljski prostor i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ proizvoljan topološki prostor. Ako je preslikavanje $f : X \to Y$ homeomorfizam, onda je i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ poljski prostor.

Dokaz. Pokažimo prvo da je prostor $(Y, \mathcal{O}_Y)$ metrizabilan. S obzirom da je $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor, on je kompletno metrizabilan, pa postoji metrika $d_X : X^2 \to [0, \infty)$. Ako je preslikavanje f homeomorfizam, očigledno je to i f^{-1}. Radi jednostavnosti zapisa, označimo $g = f^{-1}$. Definišimo preslikavanje $d_Y : Y^2 \to [0, \infty)$ sa $d_Y(y_1, y_2) = d_X(g(y_1), g(y_2))$ za sve $y_1, y_2 \in Y$. Lako se proverava da ovako definisana funkcija zadovoljava uslove $(M1) - (M3)$ definicije 1.3.88.
Da bismo pokazali kompletnost, uzmimo Košijev niz $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u Y i pokažimo da konvergira. Niz $\langle g(y_n) : n \in \mathbb{N} \rangle$ u X je Košijev, jer za proizvoljno $\varepsilon > 0$ imamo $d_X(g(y_m), g(y_n)) = d_Y(y_m, y_n) < \varepsilon$ (jer je niz $\langle y_n \rangle$ Košijev u Y i za dato ε

postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $n, m \geq n_0$ važi $d_Y(y_m, y_n) < \varepsilon$). Prostor $(X, \mathcal{O}_X)$ je kompletno metrizabilan, pa je Košijev niz $\langle g(y_n) : n \in \mathbb{N} \rangle$ konvergentan, odnosno postoji $x_0 \in X$ takvo da $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = x_0$. Uočimo da je

$$d_Y(y_n, f(x_0)) = d_X(g(y_n), g(x_0)) = d_X(g(y_n), x_0) < \varepsilon,$$

pa je $\lim_{x\to\infty} = f(x) \in Y$. Time smo pokazalli da je dati prostor kompletno metrizabilan.
Iz teoreme 1.3.48(i) znamo da je separabilnost topološka osobina, pa je konačno prostor $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i separabilan, odnosno poljski prostor. $\square$

Ovo tvrđenje omogućilo nam je da zaključimo da je osobina "biti poljski prostor" topološka. Takođe, otvorila nam je i mogućnost da otkrijemo nove primere poljskih prostora, kao što je ilustrovano u nastavku.

Primer 2.1.9. Znamo da su topološki prostori $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ i $((0,1), \mathcal{O}_{uob})$ homeomorfni. Na osnovu teoreme 2.1.8 imamo da je $(0,1)$ poljski prostor, kao homeomorfna slika poljskog prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. Međutim, uočimo da uobičajena metrika na $(0,1)$ nije kompletna! To se lako vidi na primeru niza $\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$. On jeste Košijev, ali ne konvergira u datom skupu. Prema tome, na $(0,1)$ se može definisati kompletna metrika (kao što je ilustrovano u dokazu teoreme 2.1.8).

Još jedna značajna osobina poljskih prostora je da je to svojstvo prebrojivo multiplikativno.

Teorema 2.1.10. [[12], Primer 1.3.] Proizvod prebrojivo mnogo poljskih prostora je poljski prostor.

Dokaz. Neka su prostori $X_1, X_2, \ldots$ poljski. To znači da su metrizabilni, pa označimo sa d_k kompletnu metriku koja odgovara prostoru (X_k, d_k) za sve $k \in \mathbb{N}$. Zbog teoreme 1.3.97 možemo pretpostaviti da su metrike ograničene, odnosno da je $d_k < 1$. U teoremi 1.3.106 smo naveli da je metrizabilnost prebrojivo multiplikativna osobina, odnosno na skupu $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ se može definisati metrika. Proverom definicije 1.3.88 zaključuje se da je sa:

$$d^*(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f(n), g(n))}{2^{n+1}}$$

definisana metrika. Pokažimo da je prostor $(\prod_{n=0}^{\infty} X_n, d^*)$ kompletan. Neka je $\langle f_0, f_1, \ldots \rangle$ Košijev niz u $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$. Uočimo da, prema definiciji Košijevog niza, imamo $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, k \geq n_0)(d^*(f_m, f_k) < \varepsilon)$. Za svako m, k je tada

$$\frac{d_n(f_m(n), f_k(n))}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f_m(n), f_k(n))}{2^{n+1}} = d^*(f_m, f_k) < \varepsilon,$$

a to znači da je niz $\langle f_0(n), f_1(n), \dots\rangle$ Košijev u prostoru X_n, za sve $n \in \mathbb{N}$. S obzirom da je (X_n, d_n) poljski prostor, što znači da je i kompletan, sledi da je niz $\langle f_0(n), f_1(n), \dots\rangle$ konvergentan za svako $n \in \mathbb{N}$. Označimo sa $g(n)$ granicu tog niza u X_n. Pokazujemo da je $\langle g(0), g(1), \dots\rangle$ granica niza $\langle f_1, f_2, \dots\rangle$. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. S obzirom da je $\lim_{k\to\infty} f_k(n) = g(n)$, postoji $l_0^n \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $l \geq l_0^n$ je $d_n(f_l(n), g(n)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $\varepsilon > 0$ odredimo prirodan broj $M > 0$ takvo da je $\frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $k = max\{l_0^n : n = 0, 1, \dots, M-1\}$. Uočimo da je

$$d^*(f_l, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f_l(n), g(n))}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(f_l(n), g(n))}{2^{n+1}} + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{d_n(f_l(n), g(n))}{2^{n+1}}.$$

Kod drugog sabirka koristimo ograničenost datih metrika i dobijamo

$$\sum_{n=M}^{\infty} \frac{d_n(f_l(n), g(n))}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dalje je

$$\sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(f_l(n), g(n))}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dobili smo da $d^*(f_l, g) < \varepsilon$. Dakle, prostor je kompletan.
Ostaje da se pokaže separabilnost. Prostori X_i su separabilni za svako $i \in \mathbb{N}$. Neka je $G_i = \{x_i^0, x_i^1, \dots\}$ prebrojiv gust skup u X_i. Za $\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}$ definišemo

$$f_\sigma(n) = \begin{cases} x^n_{\sigma(n)}, & n < |\sigma| \\ x^n_0, & n \geq |\sigma|. \end{cases}$$

Pokažimo da skup $G = \{f_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ gust u $\prod X_n$. Pokazujemo da za svako $f \in \prod X_n$ i unapred dato $\varepsilon > 0$ skup G seče loptu $B(f, \varepsilon)$. Ponovo uzmimo prirodan broj M takav da $\frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$. Kao što smo rekli, X_i su separabilni prostori što znači da za $i = 0, 1, \dots, M-1$ postoje $x^i_{k_i} \in B(f(i), \frac{\varepsilon}{2})$. Ako je sada $\sigma(i) = k_i$ za $i = 0, 1, \dots, M-1$ onda

$$d^*(f_\sigma, f) = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(f_\sigma(n), f(n))}{2^{n+1}} + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{d_n(f_\sigma(n), f(n))}{2^{n+1}}.$$

Drugi sabirak majoriramo kao u prvom delu dokaza, dok za prvi koristimo

$$\sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(f_\sigma(n), f(n))}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(x^n_{k_n}, f(n))}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Dobili smo da je $d^*(f_\sigma, f) < \varepsilon$, tj $f_\sigma \in B(f, \varepsilon)$. Uočimo da je skup G prebrojiv, jer je skup svih konačnih nizova prirodnih brojeva prebrojiv. Time smo pokazali da je proizvod prebrojivo mnogo poljskih prostora separabilan, a samim tim i poljski.

□

Primer 2.1.11. Hilbertov kub je poljski prostor.
Prostor $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ je prema teoremi 2.1.10 i primeru 2.1.4 poljski.

Primer 2.1.12. [[6], Primer 3.4]**Jaka topologija na** $L(X, Y)$
Neka su X i Y separabilni Banahovi prostori. Sa $L(X, Y)$ označavamo Banahov prostor ograničenih linearnih operatora T, $T : X \to Y$ sa normom $||T|| = sup\{||Tx|| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$. Može se pokazati da je ograničenost ekvivalentna uslovu neprekidnosti ([3]), pa se naziva i prostorom neprekidnih linearnih funkcionela. Ako je $X = Y$ koristimo oznaku $L(X)$.
Jaka topologija na $L(X, Y)$ je topologija generisana linearnim funkcionelama oblika $f_x(T) = Tx$, $f_x : L(X, Y) \to Y$. Bazu prostora čine skupovi oblika

$$Y_{x_1,\ldots,x_{n,\varepsilon;T}} = \{S \in L(X, Y) : ||Sx_1 - Tx_1|| < \varepsilon, \ldots, ||Sx_n - Tx_n|| < \varepsilon\}$$

za sve $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\varepsilon > 0$ i $T \in L(X, Y)$. Označimo $L_1(X, Y) = \{T \in L(X, Y) : ||T|| < 1\}$. Lopta $L_1(X, Y)$ sa (indukovanom) jakom topologijom je poljski prostor.
Pokažimo to na primeru Banahovog prostora X. Po definiciji 1.3.125 on je kompletan i metrizabilan, ostaje da se pokaže separabilnost. Neka je $D \subseteq X$ prebrojiv i gust u X i neka je zatvoren u odnosu na racionalne linearne kombinacije (odnosno, svaka racionalna linearna kombinacija elemenata D je u skupu D). Prostor Y^D je poljski na osnovu teoreme 2.1.10, jer je D prebrojiv skup. Preslikavanje iz $L_1(X, Y)$ u Y^D dato sa $T \to T|D$ je injektivno i kodomen je dat sa

$$\{f \in Y^D : (\forall x, y \in D)(\forall p, q \in \mathbb{Q})[f(px+qy) = pf(x)+qf(y)] \wedge (||f(x)|| \leq ||x||)\}$$

Pokazuje se lako da je ovo homeomorfizam, pa je $L_1(X, Y)$ poljski prostor.

Primer 2.1.13. Ako je A prebrojiv, prostor $A^{\mathbb{N}}$ koji predstavlja prebrojivo mnogo kopija A sa diskretnom topologijom je poljski na osnovu primera 2.1.6 i teoreme 2.1.10. Izdvojimo posebno sledeće slučajeve:

- ako je $A = 2 = \{0, 1\}$, sa $\mathcal{C} = A^{\mathbb{N}}$ označavamo **Kantorov prostor**;
- ako je $A = \mathbb{N}$, tada je sa $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ označen **Berov prostor**.

Dakle, Kantorov i Berov prostor su poljski prostori.

Primer 2.1.14. Kantorov prostor je kompaktan prostor jer je prostor $\{0, 1\}$ sa diskretnom topologijom kompaktan i važi teorema Tihonova (1.3.75).

Primerima 2.1.4 i 2.1.9 ilustrovani su potprostori $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ koji su poljski. U nastavku cilj nam je da odredimo kako se osobina "biti poljski prostor" prenosi na podskupove datog prostora X.

Definicija 2.1.15. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i (Y, d) metrički prostor. **Oscilacija** funkcije $f : X \to Y$ u tački $x \in X$ definiše se na sledeći način:

$$osc_f(x)=\inf\ \{diam(f[U]) : U \text{ je otvorena okolina tačke } x\}.$$

Uočimo da važi da je x tačka u kojoj je funkcija f neprekidna ako i samo ako je $osc_f(x) = 0$.

Teorema 2.1.16. [[6], Propozicija 3.6.] Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i (Y, d) metrizabilan, $f : X \to Y$, tada je skup $\{x : osc_f(x) = 0\}$ G_δ skup.

Dokaz. Ako definišemo $A_\varepsilon = \{x \in X : osc_f(x) < \varepsilon\}$, taj skup je otvoren i važi $\{x : osc_f(x) = 0\} = \bigcap_n A_{\frac{1}{n+1}}$, pa je to, kao presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova, G_δ skup. □

Time smo pokazali da je skup tačaka u kojima je funkcija neprekidna zapravo G_δ skup.

Teorema 2.1.17. [[6], Propozicija 3.7.] Neka je X metrizabilan prostor. Svaki zatvoren podskup X je G_δ skup.

Dokaz. Označimo sa d odgovarajuću metriku na X i neka je $F \subseteq X$ zatvoren, neprazan. Definišemo rastojanje tačke $x \in X$ od nepraznog podskupa A skupa X sa

$$d(x, A) = inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Neposredno iz osobina metrike sledi $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Lopta oko A data sa $B(A, \varepsilon) = \{x : d(x, A) < \varepsilon\}$ je otvorena. Dalje sledi da je

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(F, \frac{1}{n}),$$

pa je F, kao presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova G_δ skup.

□

Teorema 2.1.18. (**Kuratovski**)[[6], Teorema 3.8.] Neka je X metrizabilan, Y kompletno metrizabilan, $A \subseteq X$ i $f : A \to Y$ neprekidno. Tada postoji G_δ skup G tako da $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ i postoji neprekidno proširenje funkcije f, preslikavanje $g : G \to Y$.

Dokaz. Neka je $G = \{x : osc_f(x) = 0\} \cap \overline{A}$. Ovako definisan skup je G_δ, jer je prema teoremi 2.1.17 svaki zatvoren skup (pa i $\overline{A}$) G_δ, a iz teoreme 2.1.16 $\{x : osc_f = 0\}$ je takođe G_δ (samim tim je i njihov presek G_δ). Preslikavanje f je neprekidno na A, što znači da je $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$.
Neka $x \in G$. Pošto $x \in \overline{A}$, prema teoremi 1.3.87, postoji niz $\langle x_n\rangle \in A$ koji konvergira ka x. Tada je $\lim_{n\to\infty}(diam(f[\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}])) = 0$, jer $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \subset U$, gde je U neka okolina tačke x. Zbog toga je niz $\langle f(x_n)\rangle$ Košijev, što znači da je konvergentan u prostoru Y.
Neka je

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Prvo pokazujemo da je g dobro definisano, odnosno da ne zavisi od izbora niza $\langle x_n \rangle$. Neka je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Pretpostavimo da postoji i niz $\langle y_n \rangle$ u X takav da je $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = b$, $a \neq b$. Znamo da je Y Hausdorfov prostor (iz teoreme 1.3.103), pa postoje disjunktne okoline U i V takve da $a \in U$ i $b \in V$. Tada, ako izaberemo dovoljno veliko $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$ za $m \geq m_0$ i $k \geq k_0$ imaćemo $f(x_m) \in U$ i $f(y_k) \in V$. Tada postoji $r > 0$ da $d(f(x_m), f(y_k)) > r$. Znamo da je f neprekidna, odnosno da je $osc_f(x) = 0$ za $x \in A$. To znači da postoji okolina W tačke x takva da je $diam f[A \cap W] < \frac{r}{2}$. Ta dovoljno veliko m, k biće $f(x_m), f(y_k) \in A \cap W$, odnosno $d(f(x_m), f(y_k)) < \frac{r}{2}$. Kontradikcija. Prema tome, pokazali smo da je definicija dobra.
Pokažimo da je preslikavanje g neprekidno tako što ćemo dokazati da $osc_g(x) = 0$ za $x \in G$. Neka je $x \in G$ proizvoljno. Tada, za okolinu U u G tačke x važi $g(U) \subseteq \overline{f[U]}$ (jer za $x \in A$ je $g(x) = f(x)$, a za $x \in G \setminus A$ znamo da je $g(x)$ baš definisano kao elemenat $\overline{f[U]}$), pa

$$diam(g[U]) \leq diam(\overline{f[U]}) = diam f[U],$$

pa je $osc_g(x) \leq osc_f(x) = 0$. Da je funkcija g zaista proširenje funkcije f je očigledno, jer za $x \in X$ je $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$. □

Teorema 2.1.19. [[6], Teorema 3.11]

(i) Neka je X metrizabilan prostor i $Y \subseteq X$ kompletno metrizabilan. Tada je Y G_δ u X.

(ii) Ako je prostor X kompletno metrizabilan i $Y \subseteq X$ je G_δ, onda je Y kompletno metrizabilan.

Dokaz. (i) Neka je X metrizabilan i Y njegov kompletno metrizabilan potprostor. Posmatrajmo identičko preslikavanje $id_Y : Y \to Y$. Ono je neprekidno, pa iz teoreme Kuratovkog sledi da postoje G_δ skup G takav da $Y \subseteq G \subseteq \overline{Y}$ i neprekidno proširenje preslikavanja id_Y, funkcija $g : G \to Y$. Za tačku $x \in G$ važi da je granica nekog niza $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ iz Y (prema teoremi 1.3.87, jer je $Y \subseteq G \subseteq \overline{Y} \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{G} \wedge \overline{G} \subseteq \overline{Y}$) . Dalje je $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = x$. Kako je $g(x) \in Y$ sledi da je $x \in Y$, pa je $Y = G$ i $g = id_Y$.

(ii) Ako je Y G_δ skup on je presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova U_n. Dakle, $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Definišimo $F_n = X \setminus U_n$. Neka je sa d označena kompletna metrika prostora X. Pokažimo da je sa

$$d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} min\{2^{-1-n}, |\frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)}|\}$$

definisana metrika na Y. Bitno je prvo uočiti da red u gornjem izrazu konvergira (jer konvergira red $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-n}$). Uslovi definicije 1.3.88 se lako proveravaju.

Ovako definisana metrika d' je kompatibilna sa topologijom indukovanom na Y. Ostaje da se pokaže kompletnost prostora Y. Neka je $\langle y_i \rangle$ Košijev niz u prostoru (Y, d'). Tada je se lako pokazuje da je on Košijev i u X, pa ima granicu u X, označimo je sa y. Da bi važilo $\sum_{n=1}^{\infty} min\{2^{-1-n}, |\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}|\} < \frac{\varepsilon}{2}$, za svako ε, mora biti $|\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}| < \frac{1}{2^{n+1}}$ za svako n. Zato, za sve $n \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{i,j\to\infty} |\frac{1}{d(y_i, F_n)} - \frac{1}{d(y_j, F_n)}| = 0.$$

jer Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ niz realnih brojeva $\{\frac{1}{d(y_i,F_n)}\}$ konvergira (a samim tim je i ograničen). Znamo da $\lim_{i\to\infty} d(y_i, F_n) = d(y, F_n)$ pa $d(y, F_n) \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, što znači da $y \notin F_n$ za sve n, odnosno $y \in Y$. Prema tome, $\lim_{i\to\infty} y_i = y$ u prostoru (Y, d'). Time je pokazano da je prostor kompletan.

□

Kao specijalan slučaj prethodne teoreme izdvaja se potreban i dovoljan uslov da potprostor poljskog prostora bude poljski.

Teorema 2.1.20. [[6], Teorema 3.11] Potprostor poljskog prostora je poljski ako i samo ako je G_δ.

Posledica 2.1.21. Zatvoren potprostor poljskog prostora je poljski.

Dokaz. Iz teoreme 2.1.17 svaki zatvoren skup je G_δ, a iz teoreme 2.1.20 on je i poljski. □

Teorema 2.1.22. [[12], Teorema 1.4.] Svaki poljski prostor je homeomorfan nekom potprostoru Hilbertovog kuba.

Dokaz. Neka je X poljski prostor. Prema teoremi 1.3.102, on zadovoljava i drugu aksiomu prebrojivosti. Prema teoremi 1.3.103 prostor je i T_4, a iz teoreme 1.3.58 sledi da je on i $T_{3\frac{1}{2}}$. Prema teoremi 1.3.79 prostor se moze potopiti u Hilbertov kub. □

Teorema 2.1.23. Svaki poljski prostor je homeomorfan sa G_δ podskupom Hilbertovog kuba.

Dokaz. Prema teoremi 2.1.22 poljski prostor X je homeomorfan sa nekim podskupom Y Hilbertovog kuba. Ostaje da se pokaže da je Y sa svojstvom G_δ, a to sledi iz teoreme 2.1.20. □

2.2 Savršeni prostori. Teorema Kantor-Bendiksona

Podsetimo se definicije 1.3.33. **Tačka nagomilavanja** topološkog prostora je tačka koja nije izolovana, odnosno, svaka otvorena okolina U tačke x sadrži tačku $y \in U$, takvu da $y \neq x$. To ujedno znači da je svaka okolina tačke nagomilavanja u metričkom prostoru beskonačna. U nastavku se bavimo osobinama prostora čija je svaka tačka tačka nagomilavanja.

Definicija 2.2.1. Prostor je **savršen** ako i samo ako su mu sve tačke tačke nagomilavanja.

Po definiciji je $\emptyset$ savršen. Prema tome, savršen prostor je specifičan topološki prostor bez izolovanih tačaka.

Definicija 2.2.2. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Za $P \subset X$ kažemo da je **savršen** u X ako i samo ako je P zatvoren i savršen u odnosu na indukovanu topologiju.

Primer 2.2.3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ **je savršen prostor.**
Svaka tačka skupa $\mathbb{R}$ je njegova tačka nagomilavanja. Naime, za $x \in O$ $\exists \varepsilon > 0$ da $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O$. Tada $x - \dfrac{\varepsilon}{2} \in O \setminus \{x\}$.

Primer 2.2.4. Kantorov skup

Posmatrajmo interval $[0, 1]$ sa uobičajenom topologijom. Podelimo ga na tri dela jednake dužine i izostavimo srednji interval $I_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Ponovimo isto na preostale dve "trećine" intervala, odnosno izostavimo interval $I_2 = (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$. Nastavljajući postupak, konstruišemo Kantorov skup na sledeći način: ako sa I označimo uniju intervala koji su izostavljeni, Kantorov skup biće $E_{\frac{1}{3}} = [0, 1] \setminus I$.
Označimo sa $C_n = [0, 1] \setminus I_n = [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \cup \cdots \cup [\frac{3^n-1}{3^n}, 1]$. Uočimo da se skup C_n sastoji on 2^n intervala i da je konačna unija zatvorenih skupova, pa je i sam zatvoren skup. Očigledno je $E_{\frac{1}{3}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Bitno je istaći da na ovaj način krajnje tačke svih intervala C_n, za sve $n \in \mathbb{N}$, ostaju u Kantorovom skupu.

Kantorov skup se može predstaviti i preko ternarnog zapisa. Naime, ako broj x predstavimo u obliku $x = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{3^k}$, gde $a_k \in \{0, 1, 2\}$ onda je to njegova ternarna reprezentacija. Ona je jedinstvena osim za $x = \dfrac{p}{3^n}$ gde je $p, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada imamo dve mogućnosti:

a) $a_n \neq 0$ i $a_k = 0$ za sve $k > n$;

b) na n-tom mestu je 0 ili 1, a na ostalim mestima su dvojke.

Ovakvi brojevi predstavljaju granice intervala koje izostavljamo prilikom konstrukcije Kantorovog skupa i može se pokazati da bar jedan od ova dva zapisa u sebi nema cifru 1. Elementi Kantorovog skupa su brojevi koji se u ternarnoj reprezentaciji zapisuju samo preko 0 i 2.

Primetimo da je I, kao unija otvorenih intervala, otvoren skup, što znači da je Kantorov skup zatvoren skup. On je i kompletan kao zatvoren podskup kompletnog prostora sa uobičajenom topologijom (teorema 1.3.124).

Teorema 2.2.5. Kantorov skup je savršen.

Dokaz. Pokazujemo da je svaka tačka Kantorovog skupa tačka nagomilavanja. Neka $x \in E_{\frac{1}{3}}$. Tada $x \in C_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, što znači da x pripada nekom od 2^n intervala koji čine C_n. Posmatrajmo krajnju tačku x_n ovog intervala koja je bliža tački x (ako je x jedna krajnja tačka intervala posmatramo drugu krajnju tačku). Očigledno je $|x_n - x| \leq \frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}$. Dakle, za svako dato n možemo naći bar jednu tačku $x_n \in E_{\frac{1}{3}}$ takvu da $|x - x_n| < \frac{1}{n}$ i $x \neq x_n$, pa je x tačka nagomilavanja. S obzirom da smo x uzeli proizvoljno i kako je Kantorov skup zatvoren, sledi da je on savršen. □

U nastavku pokazujemo vezu između Kantorovog skupa i Kantorovog prostora. Metrika d^* na Kantorovom prostoru data je u teoremi 2.1.10. Međutim, rastojanje d' na istom prostoru definisano sa

$$d'(x, y) = \begin{cases} 0, & f = g \\ \frac{1}{2^{n+1}}, & f \neq g, \text{ gde je n najmanji broj za koji je } f(n) \neq g(n) \end{cases}$$

je takođe metrika (što se lako pokazuje). Važi i više:

Lema 2.2.6. *Metrike d^* i d' na prostoru $\mathcal{C}$ su ekvivalentne.*

Dokaz. Neka su $f, g \in \mathcal{C}$. Primetimo prvo da Kantorov prostor prestavlja proizvod prebrojivo mnogo topoloških prostora sa diskretnom topologijom, pa je metrika d iz dokaza teoreme 2.1.10 zapravo metrika d_{01} iz primera 1.3.93. Iz definicija datih metrika vidimo da je $d'(f, g) \leq d^*(f, g)$. S druge strane je

$$d^*(f, g) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{d_{01}(f(i), g(i))}{2^{i+1}} \leq \sum_{\frac{1}{2^{i+1}}} = \frac{1}{2^n} = 2d'(f, g).$$

Dakle, posmatrane metrike jesu ekvivalentne. □

Analogno lemi 2.2.6 na prostoru Bera na isti način je definisana ekvivalentna metrika.

Teorema 2.2.7. [[12],Exercise 1.8.] Kantorov skup $E_{\frac{1}{3}}$ je homeomorfan Kantorovom prostoru $\mathcal{C}$.

Dokaz. Neka je preslikavanje $\varphi : \mathcal{C} \to E_{\frac{1}{3}}$ definisano na sledeći način. Ako je $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ proizvoljan niz iz Kantorovog prostora, onda

$$\varphi(\langle x_n \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}.$$

Vrednosti ove funkcije su očigledno elementi Kantorovog skupa, prema primeru 2.2.4. Zbog jedinstvenosti ovakve ternarne reprezentacije brojeva preslikavanje je bijekcija. Pokažimo da je neprekidno. Neka je $\varepsilon > 0$ dato i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$. Prema definiciji metrike na $\mathcal{C}$ ako je $d(x, a) < \frac{1}{2^{n_0}}$ za neke nizove $\langle x_i \rangle$ i

$\langle a_i \rangle$ to znači da se vrednosti tih nizova poklapaju na prvih n_0 mesta, pa imamo da je

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|x_n - a_n|}{3^n} \leq \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon.$$

Dakle, φ je neprekidno preslikavanje. Analogno se može pokazati da je i inverzno prelikavanje neprekidno, pa je ono homeomorfizam. $\square$

Zbog toga se u literaturi Kantorov prostor često naziva Kantorovim skupom. Navedimo još neka svojstva ovog prostora.
Posmatrajmo skup svih konačnih nizova nula i jedinica ($\{0,1\}^{<\omega} = 2^{<\omega}$). Ako je $s \in 2^{<\omega}$, definišimo skup $N_s = \{f \in \mathcal{C} : s \subseteq f\}$. Naredna dva tvrđenja navedena su u vidu primera u [[10], p.5].

Lema 2.2.8. *Skup $U \subseteq \mathcal{C}$ je otvoren ako i samo ako postoji $S \subseteq 2^{<\omega}$ takav da $U = \bigcup_{s \in S} N_s$.*

Dokaz. Pokazujemo da je skup N_s otvorena okolina svake svoje tačke. Neka $f \in \mathcal{C}$. Prema definiciji okoline, potrebno je naći otvoren skup $O \subseteq N_s$ koji sadrži f. Ako posmatramo $a \in L_d(f, \frac{1}{2^{|s|+1}})$ imamo $d(f,a) < \frac{1}{2^{|s|+1}}$, što znači da je $s \subseteq a$, pa $a \in N_s$. Dakle, $L_d(f, \frac{1}{2^{|s|+1}}) \subseteq N_s$ i N_s je otvoren skup.
S druge strane, neka je $a \in N_s$. Tada je $a|_{(|s|)} \subseteq f$, pa $d(f,a) < \frac{1}{2^{|s|+1}}$ i $a \in L_d(f, \frac{1}{2^{|s|+1}})$. Dakle, zaključujemo da je $N_s = L_d(f, \frac{1}{2^{|s|+1}})$, pa je skup $\{N_s : s \in 2^{<\omega}\}$ baza topologije na $\mathcal{C}$. Prema tome, skup $U \subseteq \mathcal{C}$ je otvoren ako i samo ako može da se prikaže kao unija neke podfamilije $\{N_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$. $\square$

Teorema 2.2.9. Kantorov prostor je nuladimenzionalan.

Dokaz. Ako posmatramo $\mathcal{C} \setminus N_s$, prema prethodnoj teoremi vidimo da $\mathcal{C} \setminus N_s = \cup\{N_t : \exists k < |s|, t_k \neq s_k\}$. Skupovi u ovoj uniji su otvoreni, pa je i sam skup otvoren. Dakle, N_s je i otvoren i zatvoren skup. Kako je $\mathcal{C}$ metrizabilan i Hausdorfov, sledi da je nuladimenzionalan. $\square$

Analogno prethodnom, sa $N_\sigma = \{f \in \mathcal{N} : \sigma \subseteq f\}$, gde je $\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}$ definisani su elementi baze topologije prostora Bera. Prema tome, važi i sledeće tvrđenje, čiji je dokaz analogan prethodnom.

Lema 2.2.10. *Berov prostor je nuladimenzionalan.*

Teorema 2.2.11. [[12], Lema 1.22] Neka je X poljski prostor i $P \subseteq X$ njegov savršen podskup. Tada postoji neprekidna injekcija $f : \mathcal{C} \to P$ i savršen podskup F skupa P koji je homeomorfan prostoru $\mathcal{C}$.

Dokaz. Neka je dato drvo $U_s, s \in 2^{<\omega}$ takvo da $U_s \cap P \neq \emptyset$. P je savršen skup, pa postoje tačke x, y takve da $x \neq y$ i $x, y \in U_s \cap P$. Po definiciji, poljski prostor je metrizabilan, pa je i T_4, zbog čega možemo izabrati skupove $U_{s^\frown 0}$ i $U_{s^\frown 1}$ koji su disjunktne otvorene okoline redom tačaka x i y sa osobinom $\overline{U_{s^\frown i}} \subseteq U_s$ i $diam(U_s) \leq \frac{1}{|s|+1}$. Prema tome, možemo formirati drvo $\{U_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ nepraznih otvorenih podskupova X sa svojstvima:

(i) $U_\emptyset = X$;

(ii) za $s \subset t$ je $\overline{U_t} \subset U_s$;

(iii) $U_{s^\frown 0} \cap U_{s^\frown 1} = \emptyset$;

(iv) $diam(U_s) < \frac{1}{|s|}$;

(v) $U_s \cap P \neq \emptyset$.

Definišimo preslikavanje $f : \mathcal{C} \to P$ sa:

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{x|n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_{x|n}} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_{x|n}} \cap P.$$

Dobra definisanost preslikavanja sledi iz teoreme 2.1.7. Pokazujemo da je f neprekidno. Neka je $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$. To znači da je $x|n = y|n$, pa je $f(x) \in U_{x|n}$ i $f(y) \in U_{x|n}$. Zbog osobine (iv) iz konstrukcije drveta U_s sledi da $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}$.
Ako je $x \neq y$ preslikavanje f je injektivno. Naime, ako $x \neq y$ i oni se prvi put razlikuju na n-toj komponenti, npr. $x_n = 0$ i $y_n = 1$, onda je zbog osobine (iii) $U_{x|n} \cap U_{y|n} = \emptyset$. S obzirom da $f(x) \in U_{x|n}$ i $f(y) \in U_{y|n}$ sledi $f(x) \neq f(y)$.
Posmatramo skup $F = f[\mathcal{C}]$. U primeru 2.1.14 smo pokazali da je $\mathcal{C}$ kompaktan prostor, a prema teoremi 1.3.67 znamo da je neprekidna slika kompaktnog skupa kompaktan skup. Dakle, F je kompaktan podskup metričkog prostora, što, prema teoremi 1.3.119, znači da je zatvoren i ograničen. Za $a \in F$ postoji $x \in \mathcal{C}$ tako da je $f(x) = a$. F je savršen skup. Naime, iz injektivnosti i neprekidnosti preslikavanja f za dovoljno bliske x i y i njihove slike će biti dovoljno blizu, pa za svaku okolinu proizvoljne tačke $a \in F$ može se naći bar još jedna tačka iz F različita od nje. Dakle, svaka tačka F je tačka nagomilavanja i F je savršen.
Pokazujemo da je preslikavanje f zatvoreno. U primeru 3.2.5 smo pokazali da je Kantorov prostor kompaktan. Prostor X je poljski, što znači metrizabilan, pa je prema teoremi 1.3.103 T_4. Prema teoremi 1.3.55 on je i Hausdorfov. Konačno, prema teoremi 1.3.68 preslikavanje f iz kompaktnog u Hausdorfov prostor je zatvoreno. Dakle, f je neprekidna zatvorena bijekcija, pa je prema 1.3.46 homeomorfizam. □

Posledica 2.2.12. Savršeni neprazni poljski prostori su kardinalnosti $2^{\aleph_0}$.

Dokaz. Teoremom 2.1.22 smo pokazali da je svaki poljski prostor homeomorfan potprostoru Hilbertovog kuba, pa je $|X| \geq |[0, 1]^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$. Prethodna teorema nam daje $|\mathcal{C}| \leq |X|$, a znamo da je Kantorov prostor kardinalnosti $2^{\aleph_0}$, pa zaključak sledi iz teoreme Šreder-Bernštajn (1.1.6). □

Teorema 2.2.13. [[12], strana 8] Neka je X poljski prostor i $F \subseteq X$ zatvoren skup. Tada F ima prebrojivo mnogo izolovanih tačaka.

Dokaz. Neka je X poljski prostor. Prema teoremi 2.1.5 postoji njegova prebrojiva baza $U_0, U_1, \dots$. Ako sa A označimo skup svih izolovanih tačaka skupa F, onda za svako $x \in A$ prema definiciji izolovane tačke možemo naći i_x da $U_{i_x} \cap F = \{x\}$. Odatle zaključujemo da je A prebrojiv i zatvoren, pa je $F \setminus A = F \setminus \bigcup_{x\in A} U_{i_x}$ zatvoren skup. □

Primer 2.2.14. Posmatrajmo $\mathbb{Q}$ kao potprostor $\mathbb{R}$ sa uobičajenom topologijom. Znamo da je $\mathbb{Q}$ zatvoren potprostor i da nema izolovanih tačaka. Međutim, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, iz čega zaključujemo da $\mathbb{Q}$ nije poljski prostor.

Definicija 2.2.15. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $x \in X$ je **tačka kondenzacije** ako je svaka otvorena okolina x neprebrojiva.

Teorema 2.2.16. Neka je X savršen poljski prostor. Tada je svaka njegova tačka ujedno i tačka kondenzacije.

Dokaz. Ako je X savršen poljski prostor, znamo da je svaka njegova tačka x zapravo tačka nagomilavanja. Neka je U proizvoljna okolina x. Tada je U neprazan savršen poljski prostor, pa mora biti kardinalnosti $2^{\aleph_0}$ (prema 2.2.12). □

U deskriptivnoj teoriji skupova obično se, bez daljih razmatranja osobina tačaka kondenzacije direktno izvodi dokaz teoreme Kantor- Bendiksona, koji navodimo u nastavku.

Teorema 2.2.17. (**Kantor-Bendikson**)[[6], Teorema 6.4.] Neka je $X \neq \emptyset$ i $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor. Tada se X na jedinstven način može predstaviti kao disjunktna unija prebrojivog skupa C i savršenog podskupa P skupa X (odnosno, može se zapisati kao $X = P \cup C, P \cap C = \emptyset$).

Dokaz. Za dati poljski prostor X definišimo skup X^* na sledeći način:

$$X^* = \{x \in X : x \text{ je tačka kondenzacije skupa } X\}. \tag{2.1}$$

Uzmimo da je $P = X^*$ i $C = X \setminus P$. Primetimo da, po definiciji, skup P sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, pa je zatvoren skup (teorema 1.3.35). Prema tome, C je otvoren skup (jer mu je komplement zatvoren (definicija 1.3.2)). Prostor X je poljski, pa prema teoremi 2.1.5 zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Neka je sa $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ označena prebrojiva baza prostora X. Skup C je, kao otvoren skup, unija nekih baznih skupova $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots\}$ (u ovom slučaju njih najviše prebrojivo mnogo). Svaki od baznih skupova koji čine C može biti najviše prebrojiv (u suprotnom bi u C postojala tačka kondenzacije, a to je u kontradikciji sa definicijom C). Prema teoremi 1.1.7 C je prebrojiv skup.

Pokažimo da je P savršen. Već smo videli da je zatvoren, pa ostaje da se pokaže da je i savršen u odnosu na indukovanu topologiju. Neka je $x \in P$ i

pretpostavimo da je U proizvoljna okolina tačke x. Znamo da je x po definiciji skupa P tačka kondenzacije prostora X, što znači da u svakoj oklini x (pa i u U) ima neprebrojivo mnogo tačaka. Kako smo pokazali da je C prebrojiv, a $U = (U \cap P) \cup (U \cap C)$ sledi da $U \cap P$ ima neprebrojivo mnogo tačaka. Dakle, P je savršen skup.
Pokažimo jedinstvenost. Pretpostavimo da se X može predstaviti na bar još jedan način kao disjunktna unija savršenog skupa i prebrojivog i otvorenog skupa, odnosno da je $X = P_1 \cup C_1$. Podsetimo se da ako je Y proizvoljan savršen poljski prostor, onda je $Y = Y^*$ (2.2.16). Dakle, $P_1 = P_1^*$, pa $P_1 \subset P$. Ako uzmemo $x \in C_1$, mora biti $x \in C$, jer je C unija svih baznih prebrojivih skupova, a C_1 je prebrojiv i otvoren. Sledi $P = P_1$ i $C = C_1$.

□

Teorema 2.2.18. [[6],Exercise 6.6.] Skup P definisan u teoremi Kantor - Bendiksona je najveći savršeni podskup skupa X.

Dokaz. Ako je Y neki drugi savršen podskup skupa X, onda je $Y = Y^*$, pa imamo $Y = Y^* \subset X^* = P$. Dakle, svaki drugi savršen podskup X mora biti sadržan u skupu P. □

Definicija 2.2.19. Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor i neka je $X = P \cup C$, gde je P savršen skup, a C prebrojiv (gde su P i C disjunktni skupovi). Tada se P naziva **savršeno jezgro** skupa X.

Dakle, skup svih tačaka kondenzacije poljskog prostora X predstavlja savršeno jezgro skupa X.

Neposredno iz dokaza teoreme Kantor-Bendiksona izdvajaju se posledice navedene u nastavku.

Posledica 2.2.20. [[13], Posledica 2A.2.] Neka je X poljski prostor i F njegov zatvoren i neprebrojiv podskup. Tada F sadrži neprazan savršen skup, a sam skup F je kardinalnosti $2^{\aleph_0}$.

Dokaz. Prema 2.1.21 zatvoren potprostor poljskog prostora je poljski prostor, pa se teorema Kantor-Bendiksona može primeniti na skup F. Sledi da on može da se napiše kao unija savršenog P i prebrojivog skupa C. Kako je F neprebrojiv, zaključujemo da savršen skup u ovom razlaganju nije prazan (inače u uniji sa prebrojivim skupom ne bi dao neprebrojiv skup). Prema 2.2.12 imamo da je savršen poljski prostor kardinalnosti $2^{\aleph_0}$, pa je $|F| = |P| + |C| = 2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$. □

Posledica 2.2.21. [[6], Posledica 6.5.] Svaki neprebrojiv poljski prostor sadrži homeomorfnu kopiju $\mathcal{C}$ i kardinalnosti je $2^{\aleph_0}$.

Dokaz. Iz teoreme Kantor-Bendiksona imamo da je $X = P \cup C$, gde je P savršen, a C prebrojiv skup. Istim rezonom kao u prethodnoj posledici, sledi da je $|P| = 2^{\aleph_0}$. Prema teoremi 2.2.11 sledi ostatak tvrđenja. □

Poslednja teorema nam daje jednu od najznačajnijih direktnih posledica teoreme Kantor-Bendiksona.

Posledica 2.2.22. Za poljske prostore važi Hipoteza kontinuuma.

2.3 Opštiji oblik teoreme Kantor-Bendiksona

Promenimo sada pristup problemu. Posmatrajmo separabilan metrički prostor X (dakle, u odnosu na prethodno razmatranje, zanemarujemo kompletnost). Držimo se već uvedenih definicija: sa A' označavamo skup tačaka nagomilavanja skupa A, a sa A^* tačaka kondenzacije. Ispitajmo osobine i odnose ovih skupova. Lako se proveravaju sledeće osobine:

Teorema 2.3.1. [[9], strana 44.]Neka je X separabilan metrički prostor. Tada je:

(i) $A^* \subset A' \subset \overline{A}$;

(ii) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$;

(iii) $A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^*$;

(iv) $A^* = \overline{A^*}$;

(v) za svaku kolekciju skupova $\mathcal{K}$ je $\bigcup_{A \in \mathcal{K}} A' \subset (\bigcup_{A \in \mathcal{K}} A)'$;

(vi) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

vii $A'' \subset A'$;

(viii) $\overline{A} = A \cup A'$.

Istaknimo takođe očigledno tvrđenje:

Teorema 2.3.2. Neka je X separabilan metrički prostor i $A \subset X$. Skup svih tačaka kondenzacije A je zatvoren skup.

Teorema 2.3.3. [[9], Teorema 8.1.] Ako je X separabilan metrički prostor onda je $|A \setminus A^*| \leq \aleph_0$.

Dokaz. Neka je X separabilan metrički prostor. Prema 1.3.102 on zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Iz teoreme 1.3.29 sledi da prostor zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti, pa za svaku tačku prostora X postoji prebrojiva baza okolina. Neka $x \in A \setminus A^*$. Tada postoji okolina U tačke x takva da $|U \cap A| \leq \aleph_0$. Označimo sa $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojivu bazu okolina x. Znamo da postoji $n_x \in \mathbb{N}$ takvo da $x \in G_{n_x} \subset U$, pri čemu je očigledno $|G_{n_x} \cap A| \leq \aleph_0$. Sada je

$$A \setminus A^* \subset \bigcup_{x \in A \setminus A^*} (G_{n_x} \cap A). \tag{2.2}$$

Primetimo da je unija (2.2) najviše prebrojiva (na osnovu teoreme 1.1.7, jer imamo najviše prebrojivo mnogo skupova G_{n_x}, a pokazali smo da je $|G_{n_x} \cap A| \leq \aleph_0$). Dakle, i skup $A \setminus A^*$ je najviše prebrojiv. $\square$

.

Posledica 2.3.4. [[9], Posledica 8.1.] Neka je X separabilan metrički prostor i $A \subset X$. Tada je $(A \setminus A^*)^* = \emptyset$.

Dokaz. Sledi direktno iz definicije skupa A^* i prethodne teoreme. $\square$

Posledica 2.3.5. [[9], Posledica 8.2.] Ako je X separabilan metrički prostor i $A \subset X$ tada $(A^*)^* = A^*$.

Dokaz. Kako je A^* zatvoren skup (teorema 2.3.2), imamo da $(A^*)^* \subset \overline{A^*} = A^*$. S druge strane, $A \subset A^* \cup (A \setminus A^*)$, pa koristeći teoremu 2.3.1 dobijamo

$$A^* \subset (A^*)^* \cup (A \setminus A^*)^* = (A^*)^*.$$

$\square$

Nakon što se izvedu ove osobine tačaka kondenzacije, dokaz teoreme Kantor-Bendiksona postaje neuporedivo lakši.

Teorema 2.3.6. [Kantor-Bendikson][[9], Teorema 8.2.] Neka je X separabilan metrički prostor. Tada je $X = A \cup B$, gde je $A = A^*$ i $|B| \leq \aleph_0$.

Dokaz. Posmatrajmo separabilan metrički prostor X i definišimo $\mathcal{H} = \{C \subset X : C \subset C'\}$. Uzmimo da je $A = \bigcup \mathcal{H}$ i $B = X \setminus A$. Tada je $A \subset A'$, odakle sledi $A' = A' \cup A = \overline{A}$. Sada je

$$(\overline{A})' = A' \cup A'' = A' = \overline{A}.$$

Dakle, $\overline{A} \in \mathcal{H}$, pa je $\overline{A} \subset A$. To znači da $A \cup A' \subset A$, tj $A' \subset A$. Pošto smo već utvrdili da je $A \subset A'$, sledi da je $A = A'$, odnosno skup A je savršen. Primenom posledice 2.3.5 dobijamo $B^* = (B^*)^* \subset (B^*)'$, sto znači da $B \in \mathcal{H}$ i $B^* \subset A$. Iz definicije B je očigledno $B \cap B^* = \emptyset$ i $B = B \setminus B^*$. Konačno, prema teoremi 2.3.3 imamo $|B| = |B \setminus B^*| \leq \aleph_0$. $\square$

Specijalan slučaj teoreme Kantor-Bendiksona primenjene na zatvoren podskup ovakvog prostora najčešće se primenjuje u praksi.

Teorema 2.3.7. [[9], strana 45] Neka je X separabilan metrički prostor i D njegov zatvoren podskup. Tada je $D = A \cup B$, gde je A savršen i B najviše prebrojiv skup.

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi, svaki podskup D može se predstaviti kao $D = A \cup B$, pri čemu $A = A'$ i $|B| \leq \aleph_0$. Bitno je uočiti da je A' određen u odnosu na indukovanu topologiju, dakle to su tačke x za čiju proizvoljnu okolinu U važi $|D \cap U \cap A| > 1$. Međutim, s obzirom da iz $|D \cap U \cap A| > 1$ sledi $|U \cap A| > 1$, svaka tačka koja je tačka nagomilavanja A u D je ujedno i tačka nagomilavanja A u X, pa je A' u D sadržan u A' u X. Zato kao posledicu imamo da je $D = A \cup B$ i $A \subset A'$i $|B| \leq \aleph_0$.

$\square$

Poglavlje 3

Primena

3.1 Kantor-Bendiksonov izvod i rang

U nastavku uvodimo pojam Kantor-Bendiksonovog izvoda i ranga pomoću kog se dokaz date teoreme može izvesti na elegantniji način primenom transfinitne indukcije i rekurzije o kojima je bilo reči na početku rada. Takođe, uvođenjem ovih pojmova, ilustrovaćemo primenu teoreme koja je tema rada.
Navedimo prvo teoremu koja ilustruje vezu između topoloških prostora i ordinala.

Teorema 3.1.1. [[6], Teorema 6.9.] Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti i $(F_\alpha)_{\alpha<\rho}$ striktno opadajući transfinitni niz zatvorenih skupova (to znači da $\alpha < \beta \Rightarrow F_\alpha \supsetneqq F_\beta$). Tada je ρ prebrojiv ordinal. Slično važi i za striktno rastuće transfinitne nizove zatvorenih skupova.

Dokaz. Neka je $\{U_n\}$ prebrojiva baza prostora $(X, \mathcal{O})$. Za svaki zatvoren skup $F \subset X$ definišemo skup brojeva $N(F) = \{n | U_n \cap F \neq \emptyset\}$.
Uočimo da je $X \setminus F = \bigcup\{U_n : n \notin N(F)\}$, što znači da je preslikavanje $F \longmapsto N(F)$ injektivno. Važi i monotonost, jer ako $F \subseteq G$ onda $N(F) \subseteq N(G)$. Time smo pokazali da za svaki strogo monoton transfinitni niz $(F_\alpha)_{\alpha<\rho}$ imamo da je $(N_\alpha) = (N(F_\alpha))$ striktno monoton transfinitni niz podskupova skupa prirodnih brojeva, pa je ρ prebrojiv. $\square$

Definicija 3.1.2. Za proizvoljan topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ definišimo

$$X' = \{x \in X : x \text{ je tačka nagomilavanja skupa } X\}.$$

Skup X' od sada nazivamo **Kantor-Bendiksonov izvod** skupa X.

Iz definicije 1.3.41 se lako vidi da tačke skupa X' nisu njegove izolovane tačke. Očigledno, taj skup je zatvoren i važi da je X savršen ako i samo ako je $X' = X$. Koristeći transfinitnu rekurziju uvodimo pojam Kantor-Bendiksonovog izvoda kao što sledi:

Definicija 3.1.3. Iterirane Kantor-Bendiksonove izvode, u oznaci $X^{(\alpha)}$, $\alpha \in ORD$ definišemo na sledeći način:

$$X^{(0)} = X$$

$$X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$$

$$X^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} X^{(\alpha)} \text{ ako je } \lambda \text{ granični ordinal.}$$

Primetimo da je ovako definisan niz $(X^{\alpha})_{\alpha \in ORD}$ zapravo opadajući transfinitni niz zatvorenih podskupova skupa X.

Dakle, Kantor-Bendiksonov prvi izvod u suštini je skup tačaka nagomilavanja datog prostora. Drugi izvod predstavlja skup tačaka nagomilavanja prvog izvoda itd. Primetimo da u prvom koraku "eliminišemo" izolovane tačke prostora X, pri čemu ostaju tačke nagomilavanja. U svakom narednom koraku, "izbacivanjem" izolovanih tačaka mi u stvari formiramo savršeno jezgro prostora X.

Teorema 3.1.4. [[6], Teorema 6.11.] Neka je $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor. Tada postoji prebrojiv ordinal α_0, takav da je $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha_0)}$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$ i $X^{(\alpha_0)}$ je savršeno jezgro prostora X.

Dokaz. Neka je sa P označeno savršeno jezgro datog topološkog prostora. Pokažimo transfinitnom indukcijom po α da je $P \subseteq X^{(\alpha)}$ za sve $\alpha \in ORD$. Neka je $P \subseteq X^{(\beta)}$ za sve $\beta < \alpha$. Razlikujemo slučajeve:

(i) α je nasledni ordinal
Tada postoji $\gamma \in ORD$ da $\alpha = \gamma + 1$. S obzirom da je $P \subseteq X^{(\gamma)}$, očigledno sledi $P \subseteq X^{(\alpha)}$, jer je $P \subseteq (X^{(\gamma)})' = X^{(\gamma+1)} = X^{(\alpha)}$.

(ii) α je granični ordinal
Ako je $P \subseteq X^{(\beta)}$ za $\forall \beta < \alpha$, onda je $P \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$.

Posmatrajmo skup ordinala dat sa $\{\beta : X^{(\beta)} = X^{(\alpha)} \text{ za sve } \alpha > \beta\}$. Na osnovu teoreme 1.2.28 postoji najmanji elemenat ovog skupa, označimo ga sa α_0. Prema teoremi 3.1.1 ovaj ordinal je prebrojiv. Ako je α_0 prebrojiv ordinal za koji važi da je $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha_0)}$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$, očigledno je $P \subseteq X^{(\alpha_0)}$. S druge strane imamo $X^{(\alpha_0)} = (X^{(\alpha_0)})'$, što znači da je $X^{(\alpha_0)}$ savršen, pa je i $X^{(\alpha_0)} \subseteq P$.

□

Prema tome, transfinitni niz Kantor-Bendiksonovih izvoda pojskog prostora mora u jednom trenutku postati konstantan.

Definicija 3.1.5. Za poljski prostor X najmanji ordinal α_0 definisan u teoremi 3.1.4 naziva se **Kantor-Bendiksonov rang** X i označava se sa $|X|_{CB}$. Označimo i

$$X^{\infty} = X^{(|X|_{CB})} = \text{ savršeno jezgro od } X.$$

Teorema 3.1.6. Za Kantor-Bendiksonove izvode iz definicije 3.1.3 važi:

$$|X^{(\alpha+1)} \setminus X^{(\alpha)}| \leq \aleph_0$$

.

Dokaz. Pokazujemo transfinitnom indukcijom da je za svaki ordinal α $|X^{\alpha+1} \setminus X^{\alpha}| \leq \aleph_0$.

Za $\alpha = 0$ treba pokazati da je $|X \setminus X'| \leq \aleph_0$. Skup $X \setminus X'$ nema tačaka nagomilavanja, pa predstavlja skup svih tačaka prostora X takvih da postoji njihova okolina u kojoj se nalazi samo ta tačka. Prema definiciji 1.3.34, to su izolovane tačke. Dakle, $X \setminus X'$ je unija takvih okolina i to prebrojiva (prema teoremi 1.3.20). Prema tome, $X \setminus X'$ je najviše prebrojiv.

□

Sada možemo dati alternativni dokaz ključne teoreme ovog rada.

Teorema 3.1.7. (**Kantor-Bendikson**) Neka je $X \neq \emptyset$ i $(X, \mathcal{O})$ poljski prostor. Tada se X na jedinstven način može predstaviti kao disjunktna unija prebrojivog skupa C i savršenog podskupa P skupa X.

Dokaz. Za dati poljski prostor X, savršeno jezgro $X^{\infty} = X^{(|X|_{CB})}$ uzimamo za skup P, a za C uzmimo $\bigcup_{\beta<|X|_{CB}}(X^{(\beta+1)} \setminus X^{(\beta)})$. Ovi skupovi su očigledno disjunktni, P je savršen, a C je prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova.

□

3.2 Rasuti prostori

Nasuprot savršenim prostorima kod kojih je svaka tačka tačka nagomilavanja, u ovom odeljku se bavimo prostorima čiji svaki zatvoren podskup ima bar jednu izolovanu tačku.

Definicija 3.2.1. Za topološki prostor X kažemo da je **rasut** (engl. *scattered*) ako i samo ako ne sadrži neprazan savršen podskup.

Sledeće tvrđenje ilustruje kako pri definisanju rasutih prostora do izražaja dolazi teorema Kantor-Bendiksona, odnosno Kantor-Bendiksonov rang koji proizilazi iz njenog dokaza.

Lema 3.2.2 ([10], Lema 1.5.5.). *Topološki prostor X je rasut ako i samo ako postoji ordinal α takav da je $A^{(\alpha)} = \emptyset$.*

Dokaz. S obzirom da je izvodni skup prostora X zatvoren (teorema 1.3.35), za svaki ordinal β je $X^{(\beta+1)} \subseteq X^{(\beta)}$. Zato je $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$ za neki ordinal α. Jasno je da skup $X^{(\alpha)}$ nema izolovanih tačaka. Dakle, ako je $X^{(\beta)} \neq \emptyset$ za sve ordinale β, onda prostor X nije rasut. S druge strane, pretpostavimo da X nije rasut. Neka je A neprazan savršen podskup X. Tada je za svaki ordinal β $\emptyset \neq A \subseteq X^{(\beta)}$. □

Teorema 3.2.3. [[15], Teorema 7.1.13.] Neka su X i Y kompaktni Hausdorfovi prostori i $f : X \to Y$ neprekidno sirjektivno preslikavanje. Tada postoji zatvoren podskup $A \subseteq X$ takav da $f[A] = Y$ i $f \restriction_A$ je sa osobinom da za svaki zatvoren skup $F \subset A$ ako $f \restriction_A [F] = Y$, onda $F = A$.

Dokaz. Posmatrajmo skup $\mathcal{A} = \{B \subseteq X : f[B] = Y\}$. On je neprazan, jer bar X pripada $\mathcal{A}$. Tada se lako pokazuje da je $A = \bigcap_{B \in \mathcal{A}} B$. □

Lema 3.2.4 ([10], Teorema 1.5.7.). *Neka je X kompaktan Hausdorfov prostor. Prostor X je potpuno nepovezan ako i samo ako je nuladimenzionalan.*

Dokaz. Jedan smer je očigledan. Ako je prostor X nuladimenzionalan Hausdorfov i kompaktan, onda za svake dve različite tačke x i y postoji otvoreno-zatvoren skup O takav da $x \in O$ i $y \notin O$.
Neka je prostor X totalno nepovezan i neka je $x \in X$ i O otvoren skup koji sadrži tačku x. Pokazujemo da postoji skup V koji je i otvoren i zatvoren takav da je $x \in V \subseteq O$. Neka je $C = X \setminus O$. Primetimo da je C kao zatvoren podskup kompaktnog prostora i sam kompaktan (teorema 1.3.63). S obzirom da je X totalno nepovezan, za svako $y \in C$ postoji skup O_y koji je i otvoren i zatvoren takav da je $y \in O_y$, ali $x \notin O_y$. Posto je C kompaktan, postoje $x_1, x_2, \dots \in C$ takvi da je $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$. Ako uzmemo da je $W = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$ i $V = X \setminus W$, dobijamo da je W u isto vreme i otvoren i zatvoren skup (jer je konacna unija takvih skupova), a i skup V je takav (kao njegov komplement). □

Teorema 3.2.5. [[15], Propozicija 8.5.3.] Neka je X kompaktan Hausdorfov rasut prostor, Y Hausdorfov prostor i $f : X \to Y$ neprekidno sirjektivno preslikavanje. Tada je i Y rasut.

Dokaz. Pokazujemo da je Y rasut, tj. da ne sadrži neprazan savršen podskup. Dovoljno je pokazati da svaki zatvoren podskup Y ima bar jednu izolovanu tačku.
Neka je Q proizvoljan zatvoren podskup prostora Y. Prema teoremi 3.2.3 postoji minimalan zatvoren podskup $P \subseteq X$ takav da je $f[P] = Q$. Prostor X je rasut, pa P ima izolovanu tačku x. Kako je f neprekidno preslikavanje, slika zatvorenog skupa $P \setminus \{x\}$ je pravi zatvoren podskup Q, pa je $f(x)$ izolovana tacka Q. Dakle, zaključujemo da je Y rasut prostor. □

Teorema 3.2.6. [[10], Lema 1.5.8.] Neka je X kompaktan Hausdorfov prostor. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) X je rasut prostor;

(ii) ne postoji neprekidna sirjekcija iz X na $[0, 1]$;

(iii) X je nuladimenzionalan, pa ne postoji neprekidna sirjekcija iz X u $\mathcal{C}$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pretpostavimo suprotno, da postoji neprekidna sirjekcija iz X na $[0,1]$. Prema teoremi 3.2.5 tada bi prostor $[0,1]$ bio rasut. Očigledno je da je $[0,1]$ savršen prostor, što daje kontradikciju.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka prostor X nije nuladimenzionalan. Tada postoje dve različite tačke $x, y \in X$ koje se ne mogu razdvojiti otvoreno-zatvorenim skupovima. Uočimo da je prema teoremama 1.3.66 i 1.3.58 X $T_{3\frac{1}{2}}$- prostor, pa postoji neprekidna funkcija $g : X \to [0,1]$ tako da $g(x) = 0$ i $g(y) = 1$. Ako postoji $r \in (0,1)$ takvo da $r \notin g[X]$ (odnosno, ako preslikavanje g nije sirjekcija), onda je $g^{-1}([0,r])$ otvoren i zatvoren podskup takav da $x \in O$ ali $y \notin O$. Time je dobijena kontradikcija sa polaznom pretpostavkom i zaključujemo da je prostor X nuladimenzionalan.
Pretpostavimo sada da postoji neprekidna sirjekcija iz X na prostor $\mathcal{C}$. Definišimo funkciju iz $\mathcal{C}$ na interval $[0,1]$ sa $h(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{2^i}$, gde je $s = \langle s_i \rangle \in \{0,1\}^{\omega}$. Lako se pokazuje da je h neprekidna sirjekcija iz $\mathcal{C}$ na $[0,1]$, pa ponovo dobijamo kontradikciju.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Neka je X nuladimenzionalan i pretpostavimo da nije rasut. To znači da X sadrži neprazan savršen podskup P. Kako je P neprazan, on sadrži bar dve različite tačke x i y. Prostor X je nuladimenzionalan, pa postoji skup P_0 koji je istovremeno i otvoren i zatvoren takav da $x \in P_0$ i $y \notin P_0$. Neka je $P_1 = X \setminus P_0$. Tada su $P_0 \cap P$ i $P_1 \cap P$ neprazni savršeni podskupovi X. Posmatrajmo konačan $\{0,1\}$niz s. Neka je P_s skup koji je i otvoren i zatvoren takav da je $P_s \cap P \neq \emptyset$. Primetimo da je $P_s \cap P$ neprazan savršen skup, pa sadrži bar dve tačke. Primenjujući isti argument kako ranije, sledi da možemo da nađemo dva disjunktna otvoreno-zatvorena skupa $P_{s\hat{}0}$ i $P_{s\hat{}1}$ takva da

$$P_{s\hat{}0} \cup P_{s\hat{}1} = P_s, P_{s\hat{}0} \cap P \neq \emptyset \neq P_{s\hat{}1} \cap P.$$

Prema tome, formiramo drvo $\{P_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ sa osobinama:

(i) $P_{\emptyset} = P$;

(ii) ako $s \subset t$ onda $P_t \subset P_s$;

(iii) $P_{s\hat{}0} \cap P_{s\hat{}1} = \emptyset$;

(iv) $P_{s\hat{}i} \cap P \neq \emptyset, i = 0, 1$.

Tada za proizvoljno $x \in X$ postoji niz $\langle s_i \rangle \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ $x \in P_{s|n}$.
Definišimo preslikavanje $g : X \to \mathcal{C}$ na sledeći način: $g(x) = \langle s_i \rangle$. Tada je g neprekidna sirjekcija iz X na $\mathcal{C}$. $\square$

S obzirom da je $[0,1]$ neprebrojiv, ne postoji sirjekcija iz kompaktnog prebrojivog Hausdorfovog prostora u $[0,1]$.

Posledica 3.2.7. [[10], Posledica 1.5.9.] Svaki prebrojiv kompaktan Hausdorfov prostor je rasut.

Može se pokazati i da je svaki prebrojiv kompaktan Hausdorfov prostor ujedno i metrizabilan (videti [15], strana 149.).

Teorema 3.2.8. [[15], Propozicija 8.5.5.] Ako je X topološki prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti, onda je svaki rasut podskup X prebrojiv.

Dokaz. U teoremi 2.3.3 smo pokazali da je $|A \setminus A^*| \leq \aleph_0$. Ako sada pretpostavimo da je A rasut skup, on onda nema tačaka kondenzacije, pa je $A^* = \emptyset$ i preostaje da je A prebrojiv. $\square$

Posledica 3.2.9. [[15], Posledica 8.5.6.] Neka je X kompaktan Hausdorfov rasut prostor i f neprekidno preslikavanje na X. Tada je $f[X]$ prebrojiv skup.

Dokaz. Direktna posledica teorema 3.2.5 i 3.2.8. $\square$

Zanimljivo je napomenuti da se može pokazati je Hausdorfov prostor X rasut ako i samo ako se može "isprazniti" od izolovanih tačaka, odnosno elementi skupa X se mogu poređati u transfinitni niz $\langle x_\xi : \xi < \eta \rangle$ takav da nijedno x_ξ nije tačka akumulacije skupa $A_\beta = \{x_\beta : \beta > \xi\}$.

3.3 Teorema Sierpinski Mazurkiewicz

Nakon što smo se upoznali sa najznačajnijim karakteristikama rasutih prostora, u ovom delu rada ilustrovaćemo bitnu primenu teoreme Kantor-Bendiksona, tačnije upotrebe Kantor-Bendiksonovog ranga. Za to će nam biti potrebne još neke osobine ordinala. Najpre, navedimo da se oni mogu posmatrati i kao topološki prostori.

Primer 3.3.1. Topologija određena linearnim uređenjem
Neka je $(X, <)$ strogo linearno uređen skup koji ima bar dva elementa. Topologija određena linearnim uređenjem $<$ označava se sa $\mathcal{O}_<$ i definiše na sledeći način. Ako za $a \in X$ označimo

$$(-\infty, a) = \{x \in X : x < a\} \text{ i } (a, \infty) = \{x \in X : x > a\},$$

tada je $\mathcal{P} = \{(-\infty, a) : a \in X\} \cup \{(a, \infty) : a \in X\}$, prema teoremi 1.3.16, podbaza neke topologije na skupu X. Jedna baza ove topologije data je sa $\mathcal{B} = \mathcal{P} \cup \{(a, b) : a, b \in X \wedge a < b\}$.
Kolekcija otvorenih polupravih u $\mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) : b \in \mathbb{R}\}$ je podbaza uobičajene topologije (jer se presecima ovakvih skupova mogu dobiti elementi baze $\mathcal{O}_{uob}$). Dakle, ako na skupu realnih brojeva posmatramo dobro poznatu relaciju poretka, dobijamo baš uobičajenu topologiju.
Prostor čija je topologija indukovana linearnim uredenjem naziva se **linearno uređen topološki prostor** (eng. *linearly ordered topological space* ili LOTS).

Teorema 3.3.2. Svaki linearno uređen topološki prostor je Hausdorfov.

Dokaz. Neka je dat linearno uređen prostor X i neka su x, y elementi tog prostora. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $x < y$. Pokazujemo da se one mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima. Ako postoji $z \in X$ takvo da je $x < z < y$ tada $x \in (-\infty, z)$, a $y \in (z, \infty)$, pa teorema važi. Ako pak takvo z ne postoji, onda $x \in (-\infty, y)$ i $y \in (x, \infty)$ pri čemu je očigledno da su ti skupovi disjunktni. Dakle, u oba slučaja sledi da je prostor Hausdorfov. □

U definiciji 1.2.17 ordinale smo definisali kao specijalne skupove na kojima je definisana relacija dobrog uređenja. Kako je svaki dobro uređen skup i linearno uređen (teorema 1.2.8), na ordinalima se može definisati topologija određena linearnim uređenjem.
Teoremom 1.2.25 smo istakli da se svaki ordinal poistovećuje sa skupom ordinala manjih od njega, odnosno ako je α ordinal, onda je $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\} = pred(\alpha)$. Ako posmatramo ordinale kao topološke prostore, to znači da prostor α zapravo predstavlja interval $[0, \alpha)$ (ordinali su dobro uređeni, pa postoji najmanji elemenat 0). Radi pojednostavljivanja zapisa, uvodimo oznaku $\{\beta : \beta \leq \alpha\} = [0, \alpha] = \alpha + 1$.

Teorema 3.3.3. [[15], strana 151] Neka je α ordinal. Tada je on Hausdorfov i rasut prostor.

Dokaz. Da je α Hausdorfov prostor, sledi iz teoreme 3.3.2. Prostor je rasut, jer svaki neprazan podskup ima izolovanu tačku - uzme se najmanji elemenat tog skupa (on postoji, jer su ordinali dobro uređeni). □

Teorema 3.3.4. [[15], strana 151] Ordinal α je kompaktan ako i samo ako je naslednі.

Dokaz. Neka je $\alpha = \beta + 1$ nasledni ordinal i neka je $\{U_n\}$ njegov otvoren pokrivač. Tada postoji otvoren skup U_k koji sadrži β. Bez umanjenja opštosti, neka je to $(\alpha_1, \beta + 1)$. No, tada mora da postoji otvoren skup (α_2, γ) (gde $\gamma \geq \alpha_1 + 1$) iz pokrivača koji sadrži α_1. Nastavljajuci ovaj postupak dobijamo niz ordinala $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ koji je opadajući. Prema teoremi 1.2.29, svaki opadajući niz ordinala je konačan, pa je i dati niz konačan. Dakle, na ovaj način smo dobili konačan niz otvorenih skupova koji pokriva ordinal α.
S druge strane, neka je ordinal α kompaktan i pretpostavimo da je granični. Tada je $\{[0, \beta) : \beta < \alpha\}$ otvoren pokrivač iz kog se ne može izvući konačan potpokrivač. □

Teorema 3.3.5. Svaki nasledni ordinal je normalan prostor.

Dokaz. Prema teoremama 1.3.66 i 3.3.4 tvrđenje sledi direktno. □

U [9](p. 153) navodi se da svaki ordinal ima jedinstvenu reprezentaciju u Kantorovoj normalnoj formi.

$$\xi = \omega^{\alpha_0} m_0 + \dots + \omega^{\alpha_k} m_k \tag{3.1}$$

gdje je $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k \geq 0$, $1 \leq m_0 < \omega, \ldots, 1 \leq m_k < \omega$ i $0 \leq k < \omega$. Takođe, α je naredni ordinal ako i samo ako je $\alpha_k = 0$.

Neka je X kompaktan Hausdorfov rasut prostor. Prema teoremi Kantor-Bendiksona postoji ordinal β takav da je $X^{(\beta)} = \emptyset$. Jasno je da je najmanje β sa ovim svojstvom nasledni ordinal (u suprotnom bi $X^{(\beta)}$ bio presek opadajućeg niza nepraznih kompaktnih skupova $X^{(\gamma)}, \gamma < \beta$). Zato $\beta = \alpha + 1$ i $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$. Pošto je $X^{(\alpha)}$ kompaktan skup bez tačaka nagomilavanja, on je konačan (recimo da se sastoji od m tačaka).

Definicija 3.3.6. Uređeni par (α, m) naziva se **karakteristični sistem** prostora X.

Teorema 3.3.7. [[15], Propozicija 8.6.5.] Svaki beskonačan nasledni ordinal ξ je homeomorfan ordinalu oblika $\omega^{\alpha_0} \cdot m_0 + 1$, gde je $n < \omega$.

Dokaz. Ako je ξ nasledni ordinal, onda Kantorova normalna forma dobija oblik $\xi = (\omega^{\alpha_0} m_0 + 1) + \cdots + (\omega^{\alpha_k} m_k + 1)$, pri čemu je svaki $\omega^{\alpha_i} m_i + 1$ otvoren i zatvoren u ξ. Zato, uzimajući u obzir da važi $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots$, ξ je homeomorfno sa $(\omega^{\alpha_1} m_1 + 1) + \cdots + (\omega^{\alpha_k} m_k + 1) + (\omega^{\alpha_0} m_0 + 1) = \omega^{\alpha_0} m_0 + 1$ □

Napomenimo da smo u dokazu prethodnog tvrđenja koristili sabiranje topoloških prostora ordinala koje je komutativno (za razliku od sabiranja ordinala definisanog transfinitnom rekurzijom u poglavlju 1.2.3. koje nije komutativno!).

Teorema 3.3.8. [[15], Teorema 8.6.6.] Neka je α ordinal i $X = \omega^{\alpha} \cdot m + 1$. Tada za svaki ordinal $\beta \leq \alpha$ važi

$$X^{(\beta)} = \{\omega^{\beta}\gamma : 0 < \gamma \leq \omega^{-\beta+\alpha} m\} \tag{3.2}$$

Pri tome, $X^{(\alpha)}$ se sastoji od tačno m tačaka $\omega^{\alpha}, \omega^{\alpha} \cdot 2, \ldots, \omega^{\alpha} \cdot m$ i $X^{(\alpha+1)} = \emptyset$.

Dokaz. S obzirom da je $\omega^{\alpha} \cdot m + 1 = (\omega^{\alpha} + 1) + \cdots + (\omega^{\alpha} + 1)$ dekompozicija X na m međusobno homeomorfnih skupova koji su i otvoreni i zatvoreni, bez gubitka opštosti pretpostavićemo da je $m = 1$. Tvrđenje pokazujemo postupkom transfinitne indukcije. Ako je $\beta = 0$ tada je po definiciji $X^{(0)} = X = \{\gamma : \gamma \leq \omega^{\alpha}\}$. Ako je $\beta = 1$, onda je $X^{(1)}$ skup svih graničnih ordinala u X, tj. $X^{(1)} = \{\omega\gamma : 0 < \gamma \leq \omega^{-1+\alpha}\}$. Pretpostavimo da je teorema tačna za neko β. Tada je $X^{(\beta)}$ prema induktivnoj pretpostavci izomorfno sa $\omega^{-\beta+\alpha} + 1$, odnosno skupu svih γ takvih da je $\gamma \leq \omega^{-\beta+\alpha}$. Zaključujemo da se $X^{(\beta+1)}$ sastoji od svih ordinala oblika $\omega^{\beta} \cdot \gamma$, pri čemu $\gamma \leq \omega^{-\beta+\alpha}$ i γ je granični ordinal ($\gamma = \omega\xi$ za neko ξ). Zato,

$$X^{(\beta+1)} = \{\omega^{\beta} \cdot \omega\xi : 0 < \omega\xi \leq \omega^{-\beta+\alpha}\} = \{\omega^{\beta+1}\xi : o < \xi \leq \omega^{-(\beta+1)+\alpha}\}.$$

Prema tome, tvrdenje važi za nasledne ordinale. Neka je sada λ granični ordinal manji od $\alpha + 1$ i pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svako β manje od λ. Tada

$$X^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} X^{(\beta)} = \bigcap_{\beta<\lambda} \{\omega^{\beta} \cdot \gamma : 0 < \gamma \leq \omega^{-\beta+\alpha}\} \tag{3.3}$$

Neka ξ pripada ovom preseku i neka je sa $\xi = \omega^{\delta_1} n_1 + \omega^{\delta_2} n_2 + \cdots + \omega^{\delta_k} n_k$ data Kantorova normalna forma za ξ, $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_k \geq 0$, $0 < n_i < \omega$ za sve $i = 1, 2, \ldots k$. Kako je ξ granični ordinal, $\delta_k \neq 0$, pa je $\xi = \omega^\delta \cdot \eta$, $\delta = \delta_k$ i $\eta = \omega^{-\delta+\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{-\delta+\delta_{k-1}} + n_k$. Zbog $n_k \neq 0$ je η naslední ordinal. Prema induktivnoj pretpostavci, za svako $\beta < \lambda$ postoji γ_β takav da $\xi = \omega^\beta \gamma_\beta$ i $\gamma_\beta < \omega^{-\beta+\alpha}$. Sledi da $\omega^\delta \eta = \omega^\beta \gamma_\beta$ za sve $\beta < \lambda$. Iz jedinstvenosti Kantorove normalne forme sledi da $\delta \geq \beta$ za $\beta < \lambda$. Prema tome, $\delta \geq \lambda$ i to znači da možemo uzeti

$$\xi = \omega^\delta \eta = \omega^{\lambda + (-\lambda+\delta)} \eta = \omega^\lambda \omega^{-\lambda+\delta} \eta = \omega^\lambda \gamma,$$

gde je $\gamma = \omega^{-\lambda+\delta} \eta = \omega^{-\lambda+\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{-\lambda+\delta_k} n_k$. Uočimo još da ako bi γ bilo veće od $\omega^{-\lambda+\alpha}$, tada bi ξ bilo veće od ω^α. Time smo pokazali da je $X^{(\lambda)} \subset \bigcap_{\beta<\lambda} \{\omega^\beta \cdot \gamma : 0 < \gamma \leq \omega^{-\beta+\alpha}\}$.
Obratno, neka je $\xi = \omega^\lambda \cdot \gamma, 0 < \gamma \leq \omega^{-\lambda+\alpha}$ i $\beta < \lambda$. Tada je $\xi = \omega^\beta \omega^{\text{ffl}-\beta+\lambda} \gamma$ i $\omega^{-\beta+\lambda} \leq \omega^{-\beta+\alpha}$. Prema (3.3) tada je $\xi \in X^{(\lambda)}$. Tako smo pokazali da je teorema tačna za svaki granični ordinal $\lambda \leq \alpha$. □

Posledica 3.3.9. [[15], Propozicija 8.6.9.] Ordinal je homeomorfan sa $\omega^\alpha \cdot m + 1$ ako i samo ako ima karakteristični sistem (α, m).

Dokaz. Sledi direktno iz teorema 3.3.7 i 3.3.8. □

Teorema 3.3.10. [[10], Teorema 1.5.12.](**Mazurkiewicz, Sierpinski**) Neka je X kompaktan Hausdorfov rasut prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti. Tada je X homeomorfan prebrojivom naslednom ordinalu.

Dokaz. Neka je X rasut kompaktan Hausdorfov prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti karakterističnog sistema (α, m). Pokažimo da je on homeomorfan ordinalu $\omega^\alpha \cdot m + 1$. Tvrđenje pokazujemo duplom indukcijom po α i po m.
Fiksirajmo prvo α i pretpostavimo da je tvrđenje tačno za prostor X karakterističnog sistema $(\alpha, 1)$. Pokazujemo da je tačno i za par (α, m) $(m = 2, 3, \ldots)$. Neka se $X^{(\alpha)}$ sastoji od tačno m tačaka - označimo ih sa $x_1, \ldots, x_m$. Pošto je X kompaktan i nuladimenzionalan (prema teoremi 3.2.6), postoje međusobno disjunktni skupovi $F_1, \ldots, F_m$ koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni takvi da $x_i \in F_i$ za $i = 1, \ldots, m$ i $X = F_1 \cup \cdots \cup F_m$. Tada se skup $F_i^{(\alpha)}$ sastoji od jedne tačke x_i i prema induktivnoj pretpostavci je homeomorfan sa $\omega^\alpha + 1$. Prema tome, X je suma m prostora homeomorfnih sa $\omega^\alpha + 1$, što znači da je homeomorfan sa $\omega^\alpha \cdot m + 1$.
Pretpostavimo da je teorema tačna za svaki par (β, m), gde je $\beta < \alpha$ i $m = 1, 2, \ldots$. Pokažimo prvo da je tvrđenje tačno za $(\alpha, 1)$, pa će iz prvog dela dokaza slediti da je tačno i za svako m. Neka je x_0 jedina tačka $X^{(\alpha)}$. Prostor X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i nuladimenzionalan je, pa postoji baza okolina tačke x_0 koju čine istovremeno otvoreni i zatvoreni skupovi $G_0, G_1, \ldots$ takvi da $G_n \subset G_{n-1}$, za $n \in \mathbb{N}$ (teorema 1.3.30). S obzirom da $x_0 \notin X \setminus G_0$ postoji ordinal $\beta_1 < \alpha$ takav da $(X \setminus G_0)^{(\beta_1)} = \emptyset$. Štaviše, kako $x_0 \notin G_i \setminus G_{i-1}$ za $i \in \mathbb{N}$ postoje ordinali $\beta_i < \alpha$ takvi da $(G_i \setminus G_{i-1})^{(\beta_i+1)} = \emptyset$,

ali $(G_i \setminus G_{i-1})^{(\beta_i)} \neq \emptyset$. Zbog teoreme Remzija (njenog specijalnog slučaja iz teoreme 1.2.6) možemo pretpostaviti da postoji nerastući niz $\langle \beta_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ takav da $(G_{n-1} \setminus G_n)^{(\beta_n+1)} = \emptyset$ i $(G_{n-2} \setminus G_{n-1})^{(\beta_n)} \neq \emptyset$ (opadajući niz ne može postojati, jer su u pitanju ordinali). Prema induktivnoj hipotezi, svaki $G_{n-1} \setminus G_n$ je homeomorfan ordinalu $\omega^{\beta_n} \cdot m_n + 1$, gde je $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots < \alpha$ i $m_n < \omega$. Možemo pretpostaviti da je niz $\langle \alpha_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ rastući. Jasno je da je $\alpha_n < \alpha$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$. Zato je $\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_{n-1} \setminus G_n)$ homeomorfan sa

$$\omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot m_2 + \cdots = \xi$$

a sam prostor X je homeomorfan sa $\xi + 1$, a prema teoremi 3.3.9 on je homeomorfan i sa $\omega^{\alpha} \cdot m + 1$. Kako je prostor X sa prvom aksiomom prebrojivosti, sledi da je $\omega^{\alpha} \cdot m + 1$ prebrojiv.

□

Kod nekih autora (na primer, u [10]) pod teoremom Sierpinski-Mazurkiewicz podrazumeva se

Teorema 3.3.11. Svaki prebrojiv kompaktan Hausdorfov prostor karakterističnog sistema (α, n) je homeomorfan ordinalu $\omega^{\alpha} \cdot n + 1$.

Dokaz. Tvrđenje je specijalan slučaj prethodno dokazane teoreme. U teoremi 3.2.7 smo pokazali da je svaki prebrojiv kompaktan Hausdorfov prostor rasut, a u napomeni nakon te teoreme zaključili smo da se može pokazati i da je metrizabilan. Prema 1.3.104 on tada zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Dakle, važe uslovi prethodne teoreme i dokaz je gotov.

□

Iz ove teoreme direktno se izvode značajna tvrđenja o prebrojivim kompaktnim Hausdorfovim prostorima.

Posledica 3.3.12. Svaka dva prebrojiva kompaktna Hausdorfova prostora su homeomorfna ako i samo ako imaju isti karakteristični sistem.

Posledica 3.3.13. Svaki prebrojiv kompaktan Hausdorfov prostor je homeomorfan dobro uređenom skupu.

Poglavlje 4

Iz istorije matematike...

4.1 Ivar Bendikson (1861-1935)

Slika 4.1: Bendikson

Švedski matematičar Bendikson (*Ivar Otto Bendixson*) rođen je 1. avgusta 1861. godine u Stokholmu. Otac mu je bio trgovac, što mu je omogućilo pristup dobrom obrazovanju. 1878. godine upisuje Kraljevski Institut Tehnologije u Stokholmu. Naredne godine prelazi na Univerzitet u Upsali, gde je za dve godine stekao diplomu. U to vreme osniva se *Stockholm University Colege*, a mladi Bendikson prelazi tamo. Tu i postaje docent 1890. godine, nakon što mu je Univerzitet u Upsali dodelio doktorat. Do kraja XIX veka paralelno je predavao na Kraljevskom Institutu i na koledžu u Stokholmu. 1905. godine postao je profesor više analize na koledžu u Stokholmu, gde je i bio rektor u periodu od 1911-1927.

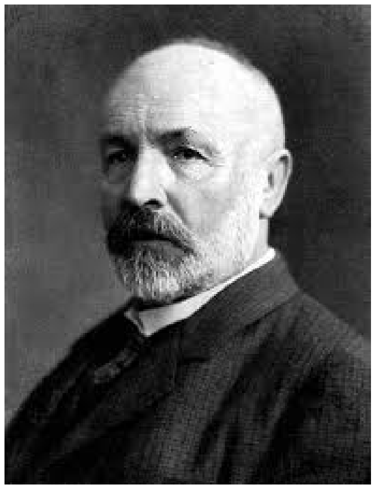
Bio je oženjen ćerkom bankara, Anom Lind (*Anna Helena Lind*). Kao izuzetno cenjen matematičar, Bendikson je bio i politički aktivan. Značajno je istaći da je organizovao pomoć za siromašne studente.

Bendikson je uspeo da se izdvoji kao brilijantan matematičar. Fasciniran Kantorovim idejama, prvo se počeo baviti teorijom skupova, a imao je i zapažene rezultate u topologiji. Dokaz teoreme Kantor-Bendiksona iz 1883. godine proslavio je tada mladog studenta . Jedan od zanimljivijih rezultata njegovog rada je primer savršenog skupa koji je totalno nepovezan. Interesovalo ga je i ispitivanje integralnih krivih, a ostaće poznat i po teoremi Poenkare-

Bendiksona, koju je dokazao nakon Poenkrea[1], 1901. godine.

4.2 Georg Kantor (1845-1918)

Slavni nemački matematičar Georg Kantor (*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*) smatra se utemeljivačem teorije skupova. Njegov rad uspeo je da prodrma same osnove matematike i da uvede matematičare širom sveta u novu epohu.



Slika 4.2: Kantor

Rođen je 3. marta 1845. godine u Petrovgradu u Rusiji, kao prvi od šestoro dece bogatog trgovca Georga Kantora (*Georg Woldemar Cantor*) i Marije Bom (*Maria Anna Bohm*). Zbog očeve bolesti porodica se 1856. godine seli u Nemačku. Odrastao je u religioznoj porodici. Sa majčine strane nasledio je talenat za muziku (bio je odličan violinista). Pohađao je škole u Frankfurtu i Visbadenu i istakao se kao učenik darom za nauku, naročito matematiku. Poštujući očevu odluku da mu sin bude uspešan inženjer, upisao se na Politehniku u Cirihu, iako je njegova želja bila da se posveti matematici. Ipak, uz očev pristanak, Kantor ubrzo prelazi na Univerzitet u Berlinu, koji je tada bio centar nove matematičke misli. Slušao je predavanja kod Kumera[2], Vajerštrasa[3] i Kronekera[4], a proučavao je i fiziku i filozofiju.

Sa samo 22 godine odbranio je doktorsku disertaciju pod nazivom "O neodređenim jednačinama drugog stepena" (*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*). Nakon toga je jedno vreme radio kao učitelj u školi, da bi se zatim zaposlio na Univerzitetu u Haleu. Tu je proveo svoj radni vek, iako mu je neostvarena želja bila da bude predavač u Berlinu.

Kao mladog studenta prvo ga je zanimala Gausova teorija brojeva, da bi se kasnije, pod Vajerštrasovim uticajem počeo baviti teorijom redova. Proučavao je pitanje jedinstvenosti Furijeove reprezentacije funkcije. Svoj prvi revolucionarni rad iz ove oblasti napisao je sa 29 godina. Iste godine oženio se prijateljicom svoje sestre. Imali su šestoro dece.

U periodu od 1879. do 1884. godine objavio je niz radova iz teorije skupova. Jedan od tih radova - *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*

[1] Poencare

[2] Ernst Eduard Kummer (1810-1893)

[3] Karl Weierstrass (1815-1897)

[4] Leopold Kronecker(1823-1891)

- postao je temelj njegove teorije. Ideje iznete u ovim radovima nisu dobro prihvaćene. Kantorova razmatranja su osporavana od strane istaknutih matematičara, među kojima je bio i Kroneker, koji je tvrdio da Kantor "kvari omladinu". Nedostatak podrške okruženja za njegovu teoriju uticao je na Kantora toliko da je jedno vreme napustio svoj matematički rad i posvetio se filozofiji. Njegov švedski kolega Mitag-Lefler[5] objavljivao je Kantorove radove u svom časopisu *Acta Mathematica* u periodu kada su drugi odbijali da publikuju njegove ideje. Podršku je dobijao i od dobrog prijatelja Dedekinda[6], ali je veći broj matematičara bio skeptičan prema njegovom radu.

Matematički rad Kantor je nastavio 1895. godine kada je objavljen prvi deo svog velikog dela "Doprinosi osnovama transfinitne teorije skupova" (*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*) posvećen uređenim skupovima. Drugi deo je izašao 1897. godine, a bavio se dobro uređenim skupovima. Ovaj rad je doveo do promene opšteg raspoloženja prema Kantorovim idejama. Preveden je na italijanski i francuski jezik i njegova teorija širi se i van granica Nemačke.

Kantorov rad otežavali su i zdravstveni problemi. Borbu sa maničnom depresijom započeo je još u ranim dvadesetim godinama, a napadi su sa vremenom postajali sve ozbiljniji. Mnogi su neosnovano tvrdili da je sukob sa Kronekerom doveo do Kantorovog teškog psihičkog stanja, ali se moderniji istoričari matematike sa time ne slažu (pogledati [4]).

Dokaz teoreme Kantor-Bendiksona samo je kap u moru fascinantnih rezultata do kojih je Kantor došao svojim radom. Prvi je shvatio značaj "1-1" preslikavanja. Zasnovao je teoriju kardinalnih i ordinalnih brojeva i uveo pojam kardinalnosti skupa. Pored toga, bavio se ispitivanjem topologije realne prave. Ovo su samo neki od njegovih otkrića čisto matematičke prirode, dok njegova razmatranja problema beskonačnosti prelaze u prave filozofske rasprave.

Preminuo je 6. januara 1918. godine u psihijatrijskoj bolnici u Haleu. Pred kraj života konačno je dobio podršku za svoj rad. Značaj njegovih revolucionarnih ideja postaće evidentan tek kasnije, tokom XX veka kada se sve matematičke discipline zasnivaju na teoriji skupova.

[5]Gösta Mittag-Leffler (1846-1927)

[6]Richard Dedekind(1831-1916)

Zaključak

Iako se dokaz teoreme Kantor-Bendiksona javio još u drugoj polovini XIX veka, do današnjih dana ova tema intrigira matematičare širom sveta. Osnovna ideja ovog master rada bila je prezentacija teoreme Kantor-Bendiksona iz ugla onih matematičkih disciplina u kojima se najčešće primenjuje, kao i isticanje veze rezultata ove teoreme i teorije skupova, kako je ilustrovano u dokazu teoreme Sierpinski - Mazurkiewicz. Značajno je istaći da se obe navedene teoreme primenjuju u velikom broju tvrđenja iz topologije i funkcionalne analize, ali su retko date sa dokazom koji ne zahteva široko predznanje. Zato je ovim radom obuhvaćen i detaljan uvod u pojmove koji se koriste, radi potpunije slike problema kojima smo se bavili.

"Suština matematike jeste u njenoj slobodi." G.Cantor

Literatura

[1] E. T. Bell, *Veliki matematičari*, Nakladni zavod Znanje, Zagreb, 1972.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[3] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Stylos, Novi Sad, 1996.

[4] I. James, *Remarkable Mathematicians (From Euler to von Neumann)*, Cambridge University Press, 2002.

[5] T. Jech, *Set Theory*, The Third Millenium Edition, revised and expanded, Springer, Berlin, 2006.

[6] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer Verlag, 1995.

[7] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, 1998.

[8] M. Kurilić, skripta iz Teorije skupova

[9] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa-Krakow-Katiwice, 1985.

[10] Pei-Kee Lin, *Köthe-Bochner Function Spaces*, Springer Science + Business Media New York, 2004.

[11] R. Madarász, *Matematička logika, Skripte*,Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2012.

[12] D. Marker, *Descriptive Set Theory*, lecture notes, 2002.

[13] Y. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, American Mathematical Society, 2009.

[14] J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer Verlag, New York, 1980.

[15] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions, Volume 1*, Warszava, 1971.

[16] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bendixson.html

Biografija

Anika Njamcul je rođena 25.7.1990. godine u Zrenjaninu. Osnovnu školu "Vuk Karadžić" u Zrenjaninu završila je 2005. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisala je Zrenjaninsku gimnaziju. Godine 2009. upisuje se na studije matematike Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Nakon toga, 2012. godine upisuje master studije matematike na istom fakultetu, smer MA. Položila je sve ispite predviđene planom i programom.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Anika Njamcul
AU
Mentor: dr Aleksandar Pavlović, vanredni profesor PMF-a u Novom Sadu
MN
Naslov rada: Teorema Kantor-Bendiksona i njene primene
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
ZGP
Godina: 2015
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (5/75/16/40/0/2/0)
(broj poglavlja/strana/lit/citata/tabela/slika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Topologija
ND
Predmetna odrednica/ Ključne reči: poljski prostori, savršeni prostori, teorema Kantor-Bendiksona, Kantor-Bendiksonov rang, karakteristični sistem, rasuti prostori, ordinali
PO
UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi teoremom Kantor-Bendiksona i njenim primenama. Prvo se upoznajemo sa osnovnim pojmovima iz teorije skupova i topologije. U drugom poglavlju definišemo poljske prostore uz navedene primere. Dajemo pregled topoloških svojstava poljskih i savršenih prostora i dokazujemo teoremu Kantor-Bendiksona primenjenu na savršene poljske prostore. Takođe, ističemo najznačajnije neposredne posledice teoreme, kao što je tvrđenje da za sve poljske prostore važi hipoteza kontinuuma. U okviru trećeg poglavlja, nakon uvođenja Kantor-Bendiksonovog ranga, ispitujemo svojstva rasutih prostora i dokazujemo teoremu Sierpinski-Mazurkiewicz. Na kraju rada je dat kratak istorijski deo o Kantoru i Bendiksonu.
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 26.02.2014.
DP
Datum odbrane:
Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Aleksandar Pavlović, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Boris Šobot, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic publication
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Anika Njamcul
AU
Mentor: Aleksandar Pavlović, Ph.D.
MN
Title: Cantor-Bendixson theorem and its applications
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2015.
PY
Publisher: Authors reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Departaman of Mathematics and Informatics, Faculty od Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (5/75/16/0/2/0)
(chapters/pages/literature/tables/pictures/additional lists)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Topology
PD
Subject/Key words: Polish spaces, perfect spaces, Cantor-Bendixson theorem, Cantor-Bendixson rank, characteristic system, scattered spaces, ordinals

UDC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract:
This thesis explores the Cantor-Bendixson theorem and its applications. First we present the basic notions of set theory and topology. In the second chapter we define Polish spaces and give examples. We describe the topological properties of Polish and perfect spaces and prove the Cantor-Bendixson theorem applied on perfect Polish spaces. Moreover, we emphasise the most important consequences of this theorem, such as the fact that for all Polish spaces the continuum hypotesis holds. After introducing the Cantor-Bendixson rank in the third chapter, we study properties of scattered spaces and prove the Sierpinski-Mazurkiewicz theorem. The thesis ends with a short historical note about Cantor and Bendixson.

Accepted by the Scientific Board on: February 26th 2014
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board: (Degree/name/surname/title/faculty)
DB
President: dr Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics,University of Novi Sad
Menthor: dr Aleksandar Pavlović, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: dr Boris Šobot, assistant professor, Novi Sad