Seminar iz teorije skupova, skup-teoretske topologije i teorije modela

Boris Šobot
Deljivost ultrafiltera vs nestandardna aritmetika

Nestandardne ekstenzije

Neka je $X \supseteq \mathbb{N}$ skup atoma (ne sadrže kao elemente druge relevantne skupove).

Rekurzivno definišemo: $V_0(X) = X$, $V_{n+1}(X) = V_n(X) \cup P(V_n(X))$, $V(X) = \bigcup_{n<\omega} V_n(X)$.

$V(X)$ je tzv. superstruktura - sadrži (skoro) sve skupove koji nam trebaju: aritmetičke operacije na $\mathbb{N}$, relaciju deljivosti... $m, n \in X$ $\{m, n\} \in V_1(X)$ $(m, n) \in V_2(X)$

$| \in V_3(X)$

Njena *nestandardna ekstenzija* je $(V(Y), *)$, gde:

- Y je skup atoma koji sadrži X;
- $* : V(X) \to V(Y)$ je preslikavanje takvo da ${}^*X = Y$ i važi

Princip transfera Za svaku formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ s ograničenim kvantifikatorima i sve $a_1, \ldots, a_k \in V(X)$ važi:

$$V(X) \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \text{ akko } V(Y) \models \varphi({}^*a_1, \ldots, {}^*a_k).$$

Elementi $x \in X$ se identifikuju sa ${}^*x$. Relacija $=$ se identifikuje sa ${}^*=$.

Najbolji uvod u nestandardnu analizu:

R. Goldblatt, Lectures on the hyperreals. An introduction to nonstandard analysis, Springer-Verlag, New York, 1998.

Primeri. (1) Konačni podskupovi $A \subseteq X$ se „zvezdiraju" u sebe: ako $(\forall x \in X)(x \in A \Leftrightarrow x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_k)$ onda $(\forall x \in {}^*X)(x \in {}^*A \Leftrightarrow x = {}^*a_1 \vee \ldots \vee x = {}^*a_k)$.

(2) Zvezdiranje se slaže s aritmetičkim operacijama: ako je $x = y + z$, onda je i ${}^*x = {}^*y \; {}^*\!+ \; {}^*z$. Drugim rečima, $\underline{{}^*(y + z) = {}^*y + {}^*z}$.

(3) Kako je deljivost definisana sa $(\forall x, y \in \mathbb{N})(x \mid y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) y = kx)$, njena ekstenzija je data sa $(\forall x, y \in {}^*\mathbb{N})(x \;{}^*\!\!\mid y \Leftrightarrow (\exists k \in {}^*\mathbb{N}) y = kx)$.

(4) Za $a, b \in \mathbb{N}$, ${}^*(a, b) = ({}^*a, {}^*b)$.

(5) Za $X, Y \in P(\mathbb{N})$, ${}^*(X \times Y) = {}^*X \times {}^*Y$.

Veza sa $\beta\mathbb{N}$

Za svako $x \in {}^*\mathbb{N}$ familija $v(x) = \{A \subseteq \mathbb{N} : x \in {}^*A\}$ je ultrafilter. Tako dobijamo $v : {}^*\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$.

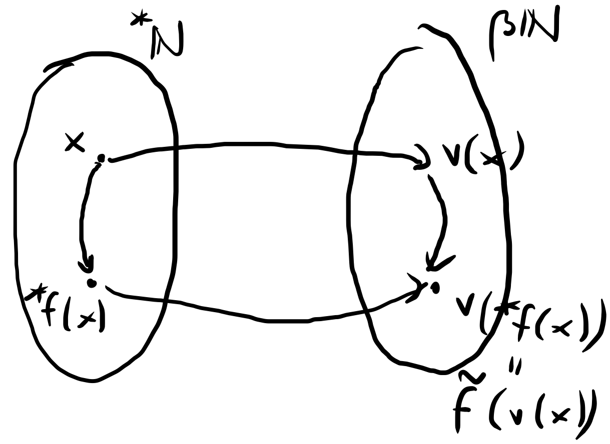
Obratno, za ultrafilter $\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N}$, njegov monad je $\mu(\mathcal{F}) = \{x \in {}^*\mathbb{N} : v(x) = \mathcal{F}\}$.

v se slaže s Rudin-Keislerovim poretkom: za svako $x \in {}^*\mathbb{N}$ i svaku $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$v({}^*f(x)) = \widetilde{f}(v(x)).$$

${}^*f : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{N}$

$\widetilde{f} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$



Nažalost, ne mora važiti $v(x \cdot y) = v(x) \cdot v(y)$.

$(V(Y), *)$ je κ-enlargement ako za svaki skup $S \in V(X)$ i svaku familiju $\mathcal{F} \subseteq [S]^{<\kappa}$ koja ima svojstvo konačnog preseka, $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} {}^*A \neq \emptyset$.

Ovakve ekstenzije postoje u ZFC.

Ako je $(V(Y), *)$ $\mathfrak{c}^+$-enlargement (ili samo „enlargement"), v je „na":

Ako $\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N}$, $\mathcal{F} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\mathfrak{c}^+}$

$\Rightarrow \bigcap_{A \in \mathcal{F}} {}^*A \neq \emptyset \qquad x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} {}^*A \Rightarrow v(x) = \mathcal{F}$:

$(x \in {}^*A \Leftrightarrow A \in \mathcal{F})$

Relacija $\widetilde{\mid}$ na $\beta\mathbb{N}$

$A\uparrow = \{n \in \mathbb{N} : (\exists a \in A) a \mid n\}$

$\mathcal{U} = \{A \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} : A = A\uparrow\}$

$$\mathcal{F} \,\widetilde{\mid}\, \mathcal{G} \text{ akko } \mathcal{F} \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}.$$

Ultrafilteri na 2. nivou deljivi sa $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \overline{P}$ sadrže:

$$F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = \{AB : A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}, A \subseteq P, B \subseteq P, A \cap B = \emptyset\}.$$

Ultrafilteri na 2. nivou deljivi samo sa $\mathcal{P} \in \overline{P}$ sadrže:

$$F_2^{\mathcal{P}} = \{A^{(2)} : A \in \mathcal{P}, A \subseteq P\}.$$

Deljivost u $^*\mathbb{N}$ i $\beta\mathbb{N}$

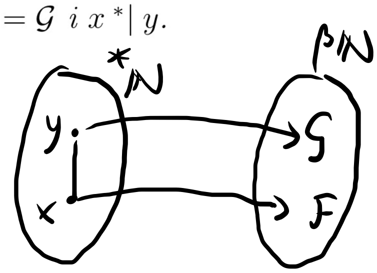
Rezultati iz:

B. Š. Divisibility in $\beta\mathbb{N}$ and $^*\mathbb{N}$, Reports on Mathematical Logic 54 (2019)

B. Š. More about divisibility in $\beta\mathbb{N}$, to appear in Mathematical Logic Quarterly

Teorema 1 *Za sve $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\beta\mathbb{N}$ ekvivalentni su uslovi:*
(i) $\mathcal{F}\,\widetilde{|}\,\mathcal{G}$;
(ii) u svakom enlargementu postoje $x,y\in{}^*\mathbb{N}$ takvi sa $v(x)=\mathcal{F}$, $v(y)=\mathcal{G}$ i $x\;{}^*|\;y$;
(iii) u nekoj nestandardnoj ekstenziji postoje $x,y\in{}^*\mathbb{N}$ takvi sa $v(x)=\mathcal{F}$, $v(y)=\mathcal{G}$ i $x\;{}^*|\;y$.

(ii) ⇒ (iii) ✓



(iii) ⇒ (i) NEKA $A\in\mathcal{F}\cap\mathcal{U}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $A\in\mathcal{G}$

$x\in{}^*A \overset{?}{\Rightarrow} y\in{}^*A$

A ZATV. NAGORE ⇒ $^*A$ ZATV. NAGORE

$(\forall x\in A)(\forall y\in\mathbb{N})(x\mid y\Rightarrow y\in A)$

⇓ TR.

$(\forall x\in{}^*A)(\forall y\in{}^*\mathbb{N})(x\;{}^*|\;y\Rightarrow y\in{}^*A)$ ✓

(i) ⇒ (ii)

ZA SVE $A\in P(\mathbb{N})$:

$\Phi_A=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2:(m\in A\Leftrightarrow A\in\mathcal{F})\wedge(n\in A\Leftrightarrow A\in\mathcal{G})\wedge m\mid n\}$

$\{\Phi_A:A\in P(\mathbb{N})\}$ IMA S.K.P:

NEKA $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ $\quad E:=A_1\cap\dots\cap A_k\cap B_1\cap\dots\cap B_l\setminus(C_1\cup\dots\cup C_r\cup D_1\cup\dots\cup D_s)\in\mathcal{F}$

$B_1,\dots,B_l\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}$

$C_1,\dots,C_r\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{F}$ $\quad F:=A_1\cap\dots\cap A_k\cap C_1\cap\dots\cap C_r\setminus(B_1\cup\dots\cup B_l\cup D_1\cup\dots\cup D_s)\in\mathcal{G}$

$D_1,\dots,D_s\notin\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$

$E\uparrow\in\mathcal{F}\overset{\mathcal{F}\widetilde{|}\mathcal{G}}{\Rightarrow}E\uparrow\in\mathcal{G}\Rightarrow E\uparrow\cap F\in\mathcal{G}$

$n\in E\uparrow\in\mathcal{F}\Rightarrow(\exists m\in E)\,\underline{m\mid n}$

ENLARG ⇒ POSTOJI $(x,y)\in\bigcap_{A\in P(\mathbb{N})}{}^*\Phi_A$

${}^*\Phi_A=\{(x,y)\in({}^*\mathbb{N})^2:\underbrace{(x\in{}^*A\Leftrightarrow\underbrace{{}^*A\in{}^*\mathcal{F}}_{A\in\mathcal{F}})}_{v(x)=\mathcal{F}}\wedge\underbrace{(y\in{}^*A\Leftrightarrow\underbrace{{}^*A\in{}^*\mathcal{G}}_{A\in\mathcal{G}})}_{v(y)=\mathcal{G}}\wedge x\;{}^*|\;y\}$

Nivoi relacija deljivosti

Teorema 2 *$p \in {}^*\mathbb{N}$ je prost akko je ultrafilter $v(p)$ prost.*

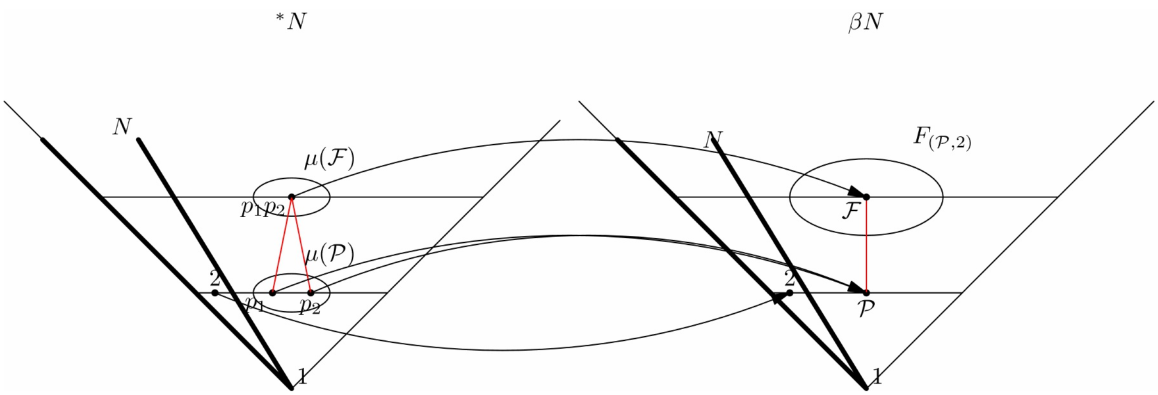
$\in {}^*P$

Teorema 3 *U svakoj nestandardnoj ekstenziji:*

(a) $x \in {}^*\mathbb{N}$ je oblika p^2 za neko $p \in {}^*P$ akko $v(x) = \mathcal{P}^2$ za neki prost ultrafilter $\mathcal{P}$.

(b) $x \in {}^*\mathbb{N}$ je oblika $p \cdot q$ za neke različite proste p, q takve da $v(p) = v(q) = \mathcal{P}$ akko $v(x) \supseteq F_2^{\mathcal{P}}$.

(c) $x \in {}^*\mathbb{N}$ je oblika $p \cdot q$ za proste p, q takve da $v(p) = \mathcal{P}$, $v(q) = \mathcal{Q}$ i $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$ akko $v(x) \supseteq F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.



Zasićene ekstenzije

Skup $S \in V(Y)$ je unutrašnji (internal) ako $S \in {}^*A$ za neko $A \in V(X)$.

$(V(Y), *)$ je κ-zasićeno ako za svaku familiju $\mathcal{F}$ kardinalnosti $< \kappa$ unutrašnjih skupova iz $V(Y)$ koja ima svojstvo konačnog preseka, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Ovo je jače od κ-enlargementa i takođe postoji u ZFC.

Bridge teoreme

Lema 4 (Luperi-Baglini, PhD Thesis) *U $\mathfrak{c}^+$-zasićenoj ekstenziji, neka $z_1, \ldots, z_k \in V(\mathbb{N})$ i $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni za svaku formulu ϕ:*

(i) $(\forall x_1, \ldots, x_n \in \mu(\mathcal{F}))(\exists y_1, \ldots, y_m \in \mu(\mathcal{G}))\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, {}^*z_1, \ldots, {}^*z_k)$;

(ii) $(\forall B \in \mathcal{G})(\exists A \in \mathcal{F})(\forall a_1, \ldots, a_n \in A)(\exists b_1, \ldots, b_m \in B)\phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m, z_1, \ldots, z_k)$.

Lema 5 *U $\mathfrak{c}^+$-enlargementu, neka $z_1, \ldots, z_k \in V(\mathbb{N})$ i $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni za svaku formulu ϕ:*

(i) $(\exists x_1, \ldots, x_n \in \mu(\mathcal{F}))(\exists y_1, \ldots, y_n \in \mu(\mathcal{G}))\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, {}^*z_1, \ldots, {}^*z_k)$;

(ii) $(\forall A \in \mathcal{F})(\forall B \in \mathcal{G})(\exists a_1, \ldots, a_n \in A)(\exists b_1, \ldots, b_m \in B)\phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m, z_1, \ldots, z_k)$.

Još neki ekvivalenti deljivosti

Teorema 6 *Za sve* $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\beta\mathbb{N}$ *ekvivalentni su uslovi:*

(i) $\mathcal{F}\,\widetilde{\mid}\,\mathcal{G}$;

(i') $(\forall A\in\mathcal{F})(\forall B\in\mathcal{G})(\exists a\in A)(\exists b\in B)a\mid b$;

(ii) u svakom enlargementu postoje $x,y\in{}^*\mathbb{N}$ *takvi sa* $v(x)=\mathcal{F}$, $v(y)=\mathcal{G}$ *i* $x\,{}^*\!\mid y$;

(iii) u nekoj nestandardnoj ekstenziji postoje $x,y\in{}^*\mathbb{N}$ *takvi sa* $v(x)=\mathcal{F}$, $v(y)=\mathcal{G}$ *i* $x\,{}^*\!\mid y$;

(iv) u svakoj $\mathfrak{c}^+$*-zasićenoj ekstenziji, za svako* $x\in\mu(\mathcal{F})$ *postoji* $y\in\mu(\mathcal{G})$ *takvo da* $x\,{}^*\!\mid y$;

(v) u svakoj $\mathfrak{c}^+$*-zasićenoj ekstenziji, za svako* $y\in\mu(\mathcal{G})$ *postoji* $x\in\mu(\mathcal{F})$ *takvo da* $x\,{}^*\!\mid y$.