Seminar iz teorije skupova, skup-teoretske topologije i teorije modela

Boris Šobot
Deljivost ultrafiltera 1

Stone-Čechova kompaktifikacija

$\beta\mathbb{N}$ - skup ultrafiltera na $\mathbb{N}$

Glavni ultrafilteri $\{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$ identifikuju se sa $n \in \mathbb{N}$

Bazu topologije na $\beta\mathbb{N}$ čine zotvoreni skupovi $\overline{A} = \{\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{F}\}$

$(\mathbb{N}, \cdot)$ - diskretna polugrupa

Svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ može se na jedinstven način proširiti do neprekidne $\widetilde{f} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$:

$$\widetilde{f}(\mathcal{F}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : f^{-1}[A] \in \mathcal{F}\}.$$

Za $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta\mathbb{N}$:

$$A \in \mathcal{F} \cdot \mathcal{G} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : nm \in A\} \in \mathcal{G}\} \in \mathcal{F}.$$

Tako se dobija desno topološka polugrupa $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.

Relacija $\widetilde{|}$

$A\uparrow = \{n \in \mathbb{N} : (\exists a \in A) a \mid n\}$

$\mathcal{U} = \{A \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} : A = A\uparrow\}$

Definicija 1

$$\mathcal{F} \,\widetilde{|}\, \mathcal{G} \text{ akko } \mathcal{F} \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}.$$

$\widetilde{|}$ je kvaziporedak (refleksivna i tranzitivna relacija)

$\mathcal{F} =_\sim \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F} \,\widetilde{|}\, \mathcal{G} \wedge \mathcal{G} \,\widetilde{|}\, \mathcal{F}$

$\widetilde{|}$ je poredak na skupu klasa ekvivalencije:

$$[\mathcal{F}]_\sim = \{\mathcal{G} \in \beta\mathbb{N} : \mathcal{F} =_\sim \mathcal{G}\}.$$

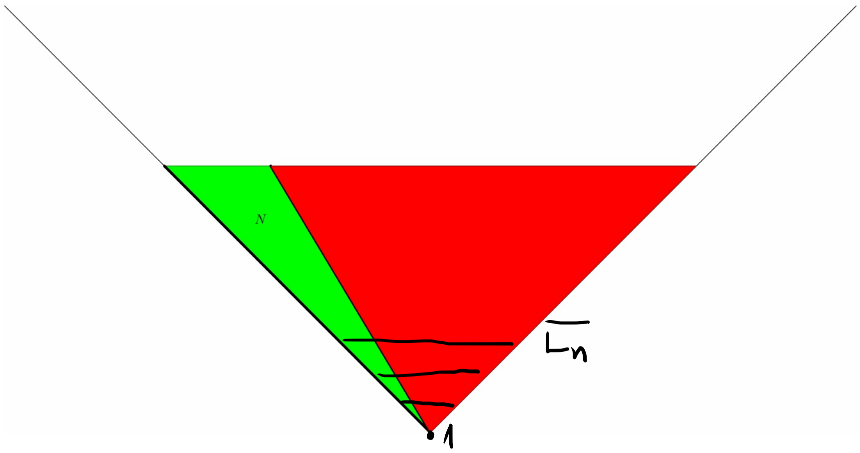
Restrikcija $\widetilde{|}$ na $\mathbb{N}^2$ je uobičajeno $|$.

Nivoi relacije $\widetilde{|}$

Svi rezultati iz:

B. Š. $\widetilde{|}$-divisibility of ultrafilters, Annals of Pure and Applied Logic 172 (2021), No.1

$(\beta\mathbb{N}, \widetilde{|})$ se može podeliti na dva ,,sloja": niži...

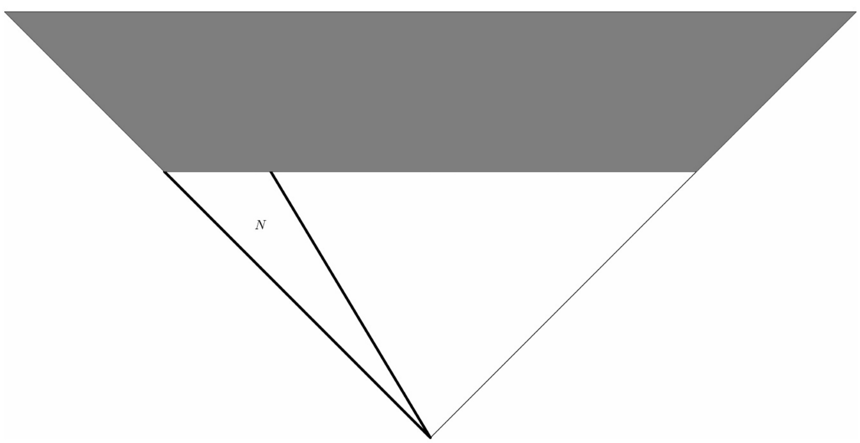


P-skup prostih brojeva

$L_0 = \{1\}$ i $L_n = \{a_1 a_2 \dots a_n : a_1, a_2, \dots, a_n \in P\}$ za $n \geq 1$

n-ti nivo $\widetilde{|}$-hijerarhije: $\overline{L_n}$.

...i viši:



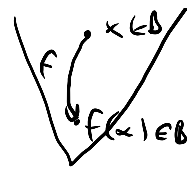
Prosti ultrafilteri

$\mathcal{F} \tilde{\mid} \mathcal{G} \iff \mathcal{F} \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$

Lema 2 *(a) Ako $\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}$ i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je takva da $f(a) \mid a$ za sve $a \in A$, tada $\underline{\tilde{f}(\mathcal{F}) \tilde{\mid} \mathcal{F}}$.*
(b) Za svako $\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N} \setminus \{1\}$ postoji $\mathcal{P} \in \overline{P}$ takvo da $\mathcal{P} \tilde{\mid} \mathcal{F}$.

(a) NEKA $B \in \tilde{f}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \Rightarrow f^{-1}[B] \cap A \in \mathcal{F}$

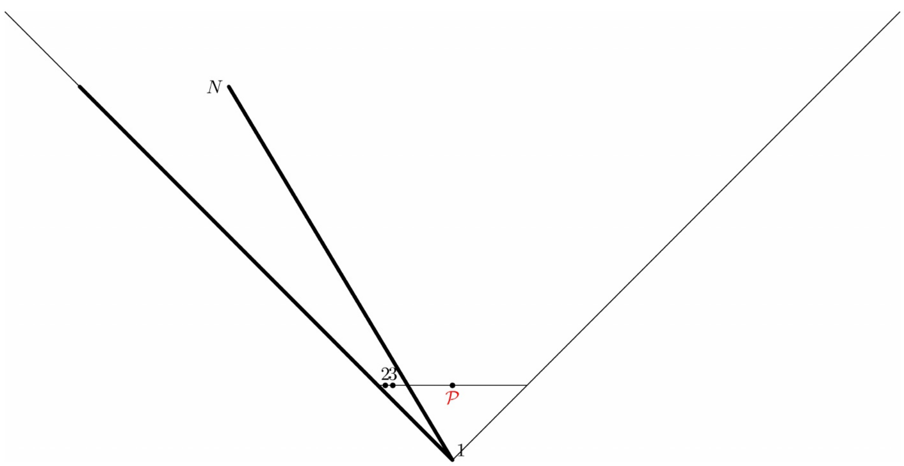
$\underline{f^{-1}[B] \cap A} \subseteq \underline{B} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$



(b) DEF. $f(a_1 a_2 \dots a_k) = a_1$ $\quad a_1 \leq \dots \leq a_k \in P$ $\quad f(1) = 1$

$\tilde{f}(\mathcal{F}) \tilde{\mid} \mathcal{F}$ $\quad f^{-1}[P] = \mathbb{N} \setminus \{1\} \Rightarrow P \in \tilde{f}(\mathcal{F})$ TJ. $\tilde{f}(\mathcal{F}) \in \overline{P}$

Ultrafiltere $\mathcal{P} \neq 1$ čiji su jedini delitelji 1 i $\mathcal{P}$ zovemo *prosti*



Teorema 3 *$\mathcal{P} \in \beta\mathbb{N}$ je prost akko $\mathcal{P} \in \overline{P}$.*

($\Leftarrow$) PPS. $\mathcal{F} \in \overline{\mathbb{N} \setminus P \setminus \{1\}}$

L2 (b) $\Rightarrow$ POSTOJI PROST $\mathcal{P} \tilde{\mid} \mathcal{F}$ $\lightning$

($\Rightarrow$) AKO $\mathcal{P} \in \overline{P}$ PPS. POSTOJI $\mathcal{F} \tilde{\mid} \mathcal{P}$

L2 (b) $\Rightarrow$ POSTOJI PROST $\mathcal{Q} \tilde{\mid} \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{Q} \tilde{\mid} \mathcal{P}$

AKO $A \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ $\quad A\uparrow \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ $\lightning$

($P \setminus A \in \mathcal{P}$)

Stepeni prostih ultrafiltera

$pow_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definišemo kao $pow_k(n) = n^k$

$\mathcal{F}^k = \widetilde{pow_k}(\mathcal{F})$ je generisan skupovima $A^k = \{n^k : n \in A\}$ za $A \in \mathcal{F}$

Npr. $\mathcal{F}^0 = 1$ i $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$

Lema 4 *Za $\mathcal{P} \in \overline{P}$, jedini ultrafilteri $\widetilde{\mid}$-ispod $\mathcal{P}^n$ su $\mathcal{P}^k$ za $k \leq n$.*

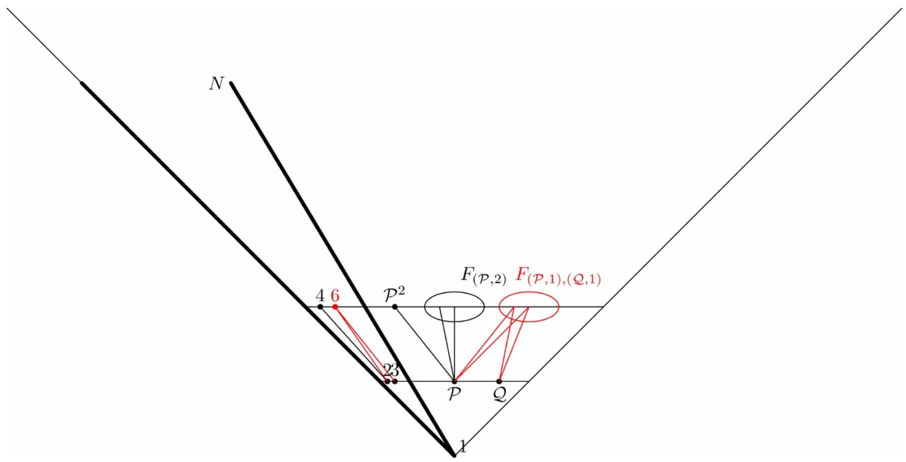
Ultrafilteri $\mathcal{F} \supseteq F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$

Lema 5 *Nijedan ultrafilter $\mathcal{F} \in \overline{L_2}$ nije $\widetilde{\mid}$-deljiv s više od dva prosta ultrafiltera.*

$AB = \{ab : a \in A, b \in B, NZD(a, b) = 1\}$

Za $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \overline{P}$:

$$F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = \{AB : A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}, A \subseteq P, B \subseteq P, A \cap B = \emptyset\}$$



Lema 6 *Za sve različite $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \overline{P}$:*

(a) postoji ili konačno mnogo ili $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltera $\mathcal{F} \supseteq F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.

(b) $\mathcal{P} \cdot \mathcal{Q} \supseteq F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ i $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{P} \supseteq F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.

Teorema 7 *Za svaki $\mathcal{P} \in \overline{P} \setminus P$ postoji $\mathcal{Q} \in \overline{P} \setminus P$ takav da postoji $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltera $\mathcal{F} \supseteq F_{1,1}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.*

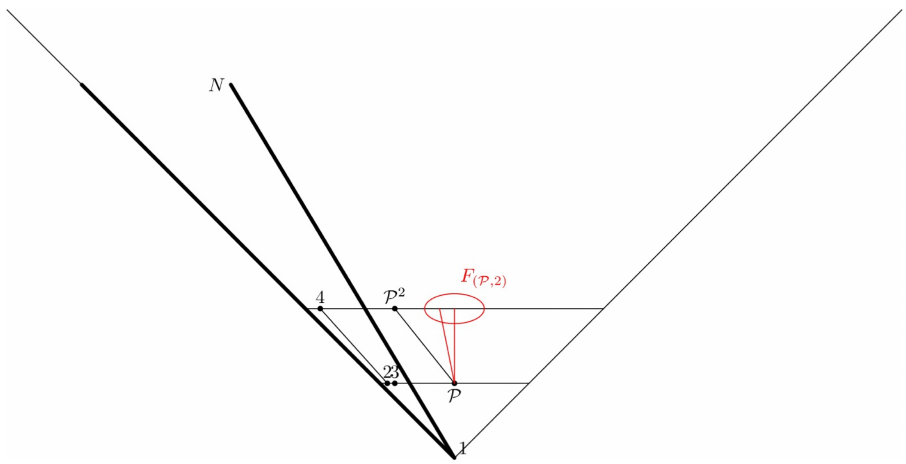
Ultrafilteri $\mathcal{F} \supseteq F_n^{\mathcal{P}}$

$A^{(n)} = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$.

Za $\mathcal{P} \in \overline{P}$:

$$F_n^{\mathcal{P}} = \{A^{(n)} : A \in \mathcal{P}, A \subseteq P\}$$

Lema 8 *Ako $\mathcal{P} \in \overline{P} \setminus P$, za svaki ultrafilter $\mathcal{F} \supseteq F_n^{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}$ je jedini prost ultrafilter ispod $\mathcal{F}$.*



Lema 9 *(a) Za svaki $\mathcal{P} \in \overline{P} \setminus P$ postoji ili konačno mnogo ili $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltera $\mathcal{F} \supseteq F_2^{\mathcal{P}}$.*
(b) Za $\mathcal{P} \in \overline{P} \setminus P$, $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \supseteq F_2^{\mathcal{P}}$.

Teorema 10 *Za $\mathcal{P} \in \overline{P}$ postoji jedinstven ultrafilter $\mathcal{F} \supseteq F_n^{\mathcal{P}}$ akko je $\mathcal{P}$ Ramseyev ultrafilter.*

Dokazujemo:

Teorema 11 *(CH) Postoji prost $\mathcal{P}$ takav da za svako $n \geq 2$ postoji $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltera $\mathcal{F} \supseteq F_n^{\mathcal{P}}$.*

$P^{(n)} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ $\qquad$ $F_n^{\mathcal{P}} \cup \{A_i\}$ IMA S.K.P.

$\forall B \in \mathcal{P}$ $\quad$ $\underline{B^{(n)} \cap A_i \neq \emptyset}$

Definicija 12 *Neka je $d = \{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ particija skupa $P^{(n)}$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Skup $A \subseteq P$ je d-širok ako, za sve $m \in \mathbb{N}$ i sve konačne particije $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, postoji $i \leq m$ takvo da, za sve $k \in \mathbb{N}$, $A_i^{(n)} \cap X_k \neq \emptyset$.*

$\{a_1 a_2 \ldots a_n : a_1, \ldots, a_n \in P,\ a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$

Lema 13 *Neka $A \subseteq P$, $B \subseteq P$ i $d = \{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ je particija skupa $P^{(n)}$ za neko $n \in \mathbb{N}$.*
(a) Ako je A d-širok i $A \subseteq B$, onda je i B d-širok.
(b) Ako ni A ni B nisu d-široki, onda ni $A \cup B$ nije d-širok.

(b) $A \setminus B$ nije d-širok $\Rightarrow$ $A \setminus B = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ ...
$B \setminus A$ —— $\Rightarrow$ $B \setminus A = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ ...
$A \cap B$ —— $\Rightarrow$ $A \cap B = C_1 \cup \cdots \cup C_k$

$A \cup B = A_1 \cup \cdots \cup A_m \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$

Lema 14 *Ako je, za svako $n \geq 2$, $d_n = \{X_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ particija skupa $P^{(n)}$ takva da za sve $k \in \mathbb{N}$:*

$$\underline{X_{n+1,k} \subseteq \{xa : x \in X_{n,k}, a \in P\}}$$

i $A \subseteq P$ nije d_{n_0}-širok, onda za sve $n \geq n_0$, A nije d_n-širok.

$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m$

$A_i^{(n)} \cap X_{n_0,i} = \emptyset$

$\Downarrow$

$A_i^{(n_0+1)} \cap \underline{X_{n_0+1,i}} = \emptyset$

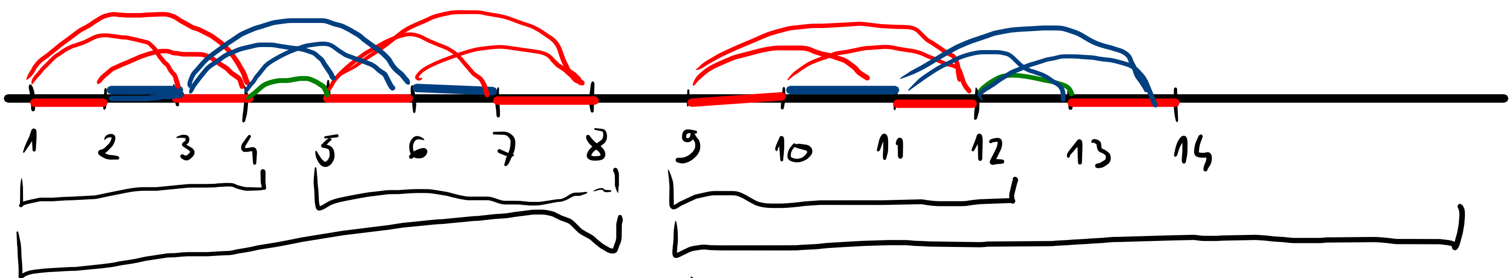
$y \in = \underline{\underline{xa}} \qquad x \in \underline{X_{n_0,i}} \cap A_i^{(n_0)}$

Lema 15 *(a) Postoji bojenje $c : [\mathbb{N}]^2 \to \mathbb{N}$ takvo da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi:*

za svaku aritmetičku progresiju s dužine 2^k+1 postoje uzastopni članovi $a, b \in s$ takvi da $c(\{a,b\}) = k$.

(b) Postoje particije $d_n = \{X_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ skupova $P^{(n)}$ redom (za $n \geq 2$) takve da je P d_n-širok za sve $n \geq 2$ i važi

$$X_{n+1,k} \subseteq \{xa : x \in X_{n,k}, a \in P\}.$$



RAZLIKE POLOG.

k	1	2	3	4	…
1	✓	✓	✓		
2, 3	✓	✓			
4, 5, 6, 7	✓				

(b) $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$X_{2,k} = \{p_m p_n : c(\{m,n\}) = k\}$$

$$x_1 < x_2 < \dots x_n$$

$$c_n(\{x_1, \dots, x_n\}) = c(\{x_1, x_2\})$$

$$P = A_1 \cup \dots \cup A_k$$

$$\mathbb{N} = B_1 \cup \dots \cup B_k \qquad n \in B_i \iff p_n \in A_i$$

T. (VAN DER WAERDEN): ZA SVAKU PARTICIJU POSTOJI i TAKVO DA B_i SADRŽI ARITM. PROGR. PROIZVOLJNE DUŽINE

$\Rightarrow$ U B_i IMA SVE MOGUĆE BOJE

Teorema 16 *(CH) Postoji prost $\mathcal{P}$ takav da za svako $n \geq 2$ postoji $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltera $\mathcal{F} \supseteq F_n^{\mathcal{P}}$.*

KONSTR. REKURZIVNO FAMILIJU FILTERA $\mathcal{F}_\xi$ $(\xi < \mathfrak{c})$

SVE $A \subseteq P$ POREĐAMO U NIZ: $\langle S_\xi : \xi < \mathfrak{c} \rangle$

- SVI $B \in \mathcal{F}_\xi$ SU d_n-ŠIROKI (ZA $d_n = \{x_{n,k} : \dots\}$ IZ L15)
- $\underline{S_\xi \in \mathcal{F}_{\xi+1}}$ ILI $\underline{P \setminus S_\xi \in \mathcal{F}_{\xi+1}}$
- $\mathcal{F}_\zeta = \bigcup_{\xi<\zeta} \mathcal{F}_\xi$ (ζ LIMIT)

PP DA NE MOGU DA UBACIM NI S_ξ NI $P \setminus S_\xi$

POSTOJI $A \in \mathcal{F}_\xi$, $\underline{S_\xi \cap A} = A_1 \cup \dots \cup A_m$, $A_i^{(n)} \cap X_{n,k} = \emptyset$

POSTOJI $B \in \mathcal{F}_\xi$, $\underline{(P \setminus S_\xi) \cap B} = B_1 \cup \dots \cup B_l$, $B_i^{(m)} \cap X_{m,i} = \emptyset$

$$\underbrace{(S_\xi \cap A) \cup ((P \setminus S_\xi) \cap B)}_{\text{NIJE } d_n\text{-ŠIROK}} \supseteq \underbrace{A \cap B}_{\text{NIJE } d_n\text{-ŠIROK}} \ \lightning$$

NA KRAJU, $\mathcal{P} = \bigcup \mathcal{F}_\xi$ JE ULTRAFILTER

ZA SVAKO $A \in \mathcal{P}$, $A \subseteq P$, $A^{(n)} \cap X_{n,k} \neq \emptyset$

$F_n^{\mathcal{P}} \cup \{X_{n,k}\}$ IMA SKP.