| | |
|---|---|
| Departman za matematiku i informatiku<br>Prirodno - matematički fakultet<br>Univerzitet u Novom Sadu | |

# Prijemni ispit

1) Date su sledeće iskazne formule:

$A_1 : (p \vee q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \Rightarrow s)$ $\quad$ $A_2 : (p \vee q) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow r) \wedge t)$

Pokazati da je iskazna formula $A : (p \vee q) \Rightarrow (s \wedge t)$ logička posledica tih formula, bez upotrebe istinitosnih tablica. Rešavanje zadatka svodi se na pokazivanje da je iskazna formula $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A$ tautologija.

2) Data je funkcija $f(x) = |x^2 - 4| - p.$ Odrediti

a) nule funkcije $f$ u zavisnosti od parametra $p$;
b) parametar $p$ tako da funkcija $f$ ima tačno dve realne nule.

3) Data je funkcija $f(x) = \sin \dfrac{x^2}{2}$.

a) Odrediti vrednosti $x$ za koje funkcija $f$ dostiže maksimum i izračunati taj maksimum.
b) Rešiti jednačinu $2^{\sqrt{2(1-\cos x^2)}} = 4$.

4) U trouglu $ABC$ važi da je $|AB| = 20$, a poznati su i uglovi $\angle CAB$ koji iznosi $73^\circ$ i $\angle ABC$ koji iznosi $62^\circ$. Tačka $O$ je centar kružnice opisane oko tog trougla.

a) Dokazati da je ugao $\angle AOB$ prav.
b) Izračunati poluprečnik kružnice opisane oko trougla $OAB$.
c) Izračunati poluprečnik kružnice upisane u trougao $OAB$.

5) Za evropsko prvenstvo u fudbalu selektor reprezentacije treba da izabere 11 igrača. On može da bira igrače iz 18 timova od kojih svaki ima po 20 igrača. Na koliko načina selektor može da odabere reprezentaciju?

a) Bez ikakvih ograničenja.
b) U reprezentaciji ne smeju biti svi igrači iz istog tima.
c) Nakon odabira igrača (među kojima je 1 golman, 4 odbrambena igrača, 4 igrača sredine terena i 2 napadača) treba im dodeliti brojeve od 1 do 11. Golman mora imati broj 1, odbrambeni igrači dobijaju brojeve od 2 do 5, igrači sredine terena od 6 do 9 i napadači 10 i 11. Na koliko načina je moguće dodeliti brojeve prema ovim pravilima?

6) Napisati program koji od korisnika učitava prirodan broj $N$, $10 \leq N \leq 1000$, a zatim i niz $L$ od $N$ realnih brojeva. Vršiti kontrolu unosa u svim učitavanjima. Niz $L$ treba izmeniti tako da svaki elemenat koji je bar 2 puta manji od prosečne vrednosti članova niza treba zamenuti sa nulom. Na kraju treba odštampati izmenjeni niz $L$. Npr. za $N=10$ i niz *L=[2.4, -3.2, 7.3, 8.2, 12.6, -2.2, -1.0, 8.0, 16.4, 4.0]*, ispisuje se *L=[0, 0, 7.3, 8.2, 12.6, 0, 0, 8.0, 16.4, 4.0]*. Treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

- Boduje se 5 najbolje urađenih zadataka
- Vreme rada je 120 minuta

| | |
|---|---|
| Departman za matematiku i informatiku<br>Prirodno - matematički fakultet<br>Univerzitet u Novom Sadu | |

# REŠENJA ZADATAKA

1) Pretpostavimo suprotno, da su, za neke vrednosti $\alpha(p),\ldots\ \alpha(t)$ slova $p,\ldots,t$ formule $A_1$ i $A_2$ tačne (pišemo: $v_\alpha(A_1)=v_\alpha(A_2)=\top$) a formula $A$ netačna (pišemo: $v_\alpha(A)=\perp$). Kako je formula u obliku implikacije netačna samo ako joj je leva strana tačna a desna netačna, sledi $v_\alpha(p\vee q)=\top$ i $v_\alpha(s\wedge t)=\perp$. Pošto su $A_1$ i $A_2$ tačne i njihove leve strane tačne, sledi da je $v_\alpha((p\Leftrightarrow r)\Rightarrow s)=\top$ i $v_\alpha((p\Leftrightarrow r)\wedge t)=\top$. Odavde sledi da je $v_\alpha(p\Leftrightarrow r)=\top$ i $\alpha(t)=\top$. Iz $v_\alpha((p\Leftrightarrow r)\Rightarrow s)=\top$ sada dobijamo $\alpha(s)=\top$, dakle $v_\alpha(s\wedge t)=\top$, što je kontradikcija s našom pretpostavkom.

2)

a) Nule funkcija $f$ su rešenja jednačine $|x^2-4|-p=0$, odnosno jednačine $|x^2-4|=p$.

Na osnovu $|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4, & x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty) \\ -x^2+4 & x\in(-2,2)\end{cases}$

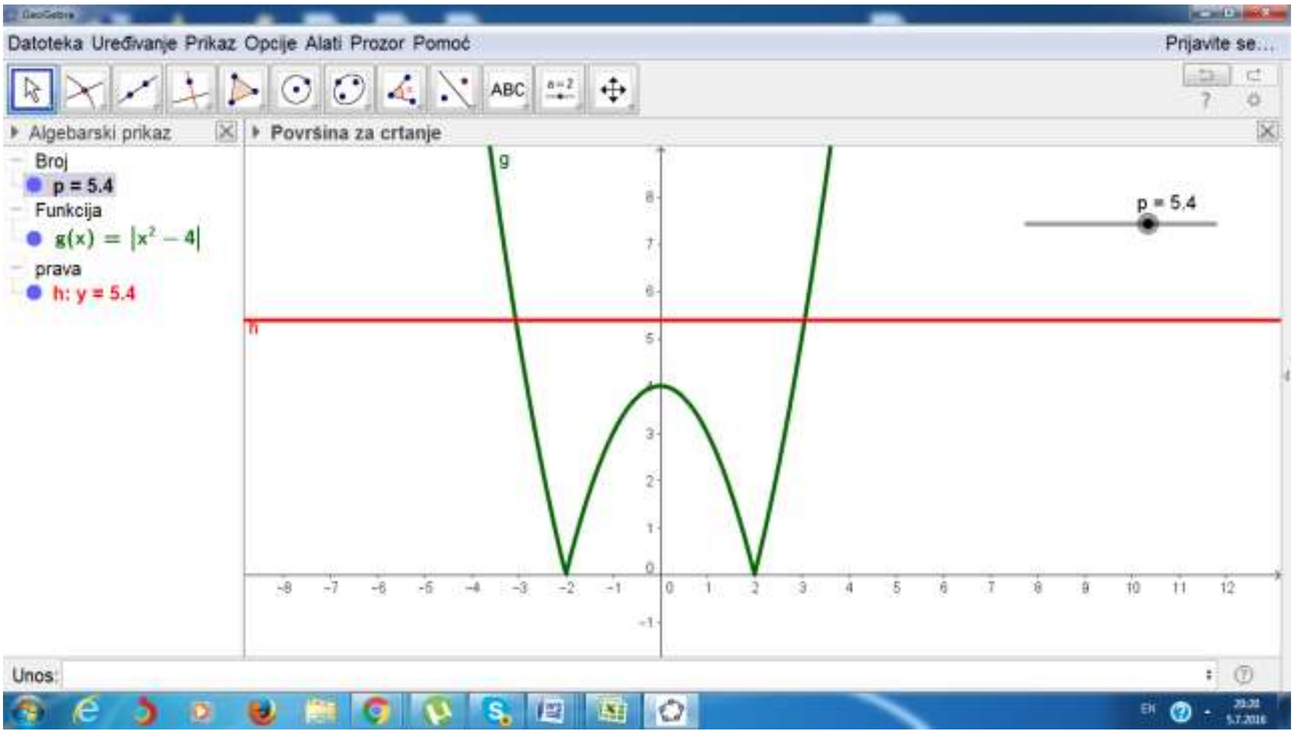
sledi da se rešavanje $|x^2-4|-p=0$, svodi na rešavanje sledeće dve jednačine

| | |
|---|---|
| $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$ | $x\in(-2,2)$ |
| $x^2-4-p=0,$ | $-x^2+4-p=0,$ |
| $x=\pm\sqrt{4+p}$ | $x=\pm\sqrt{4-p}$ |
| $4+p\geq 0$ | $4-p\geq 0$ |
| $p\geq -4$ | $p\leq 4$ |
| $p\geq 0$ | $0<p\leq 4$ |

Primetimo da prva jednačina ima rešenje za $p\geq 0$, jer rešenje mora pripadati intervalu $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.

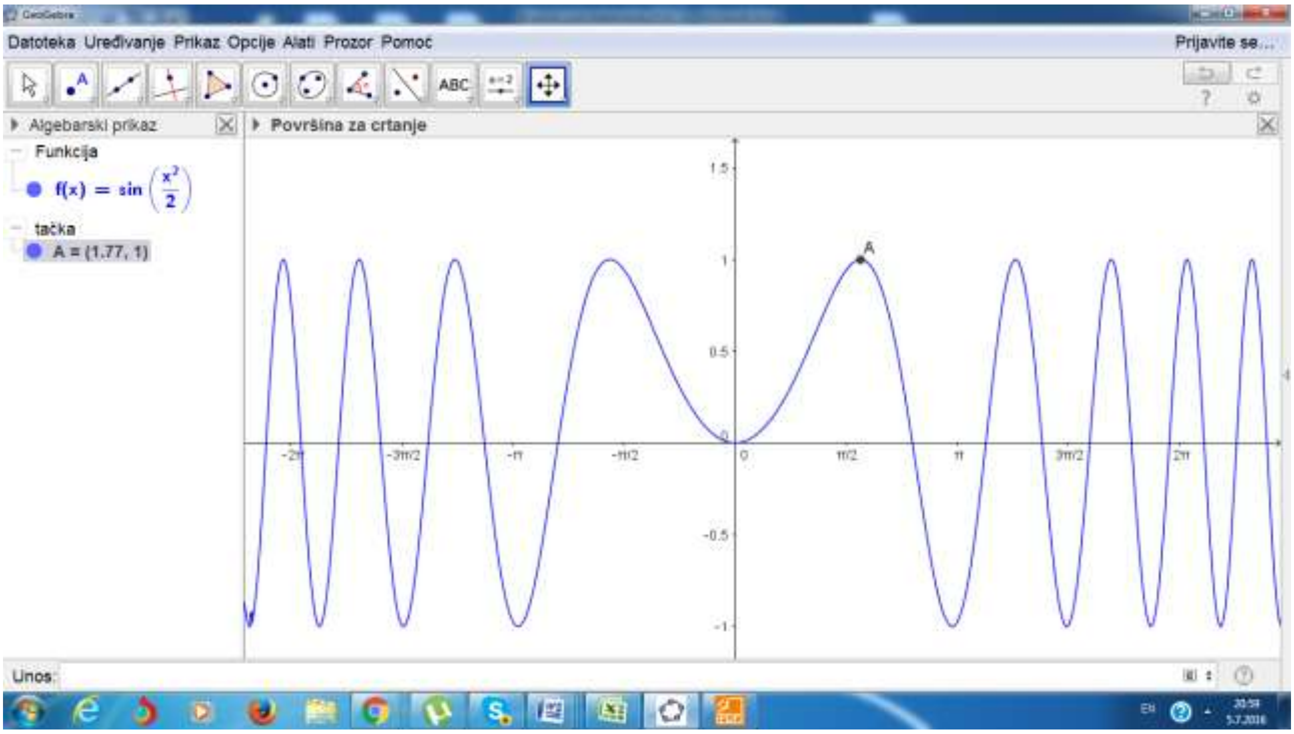
Analogno druga jedančina ima rešenja za $0<p\leq 4$, jer rešenje mora pripadati intervalu $(-2,2)$.

b) Na osnovu prethodnog sledi da funkcija $f$ ima tačno dve realne nule za $p=0$, i $p\geq 4$, što se vidi iz grafika funkcija $g(x)=|x^2-4|$ i $h(x)=p$, (Istovremenim pritiskanjem Ctrl i klikom na grafik se može ući u Geogebru i pomeranjem klizača $p$ dobiti rešenje.)




Slika 1.

3) Grafik funkcije $f(x)=\sin\dfrac{x^2}{2}$ je dat na slici 2




Slika 2.

a) Data funkija $f$ ima maksimum za

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in Z,\quad \text{odakle je}$$

$$x = \pm\sqrt{\pi + 4k\pi}, \quad k = 0, \quad ili \quad k \in N.$$

Vrednost maksimuma je 1.

b) Data jednačina se može zapisati kao

$$2^{\sqrt{4^{\frac{1-\cos x^2}{2}}}} = 4, \text{ odnosno } 2^{2\sin\frac{x^2}{2}} = 2^2.$$

Znači treba odrediti vrednosti $x$ za koje je $\sin\frac{x^2}{2} = 1.$

Na osnovu zadatka pod a) sledi da su rešenja jednačine $x = \pm\sqrt{\pi + 4k\pi}, \quad k = 0, \quad ili \quad k \in N.$

4)

a) Lako dobijamo da je $\angle$ACB=45° pa, kako je to periferijski ugao kružnice opisane oko trougla ABC nad tetivom AB, a $\angle$AOB odgovarajući centralni ugao, sledi da je $\angle$AOB=90°.

b) Trougao OAB je pravougli (na osnovu a)) pa je hipotenuza AB prečnik njegove opisane kružnice, odakle sledi da je njen poluprečnik jednak 10.

c) (1. rešenje) Obeležimo c=|AB|, a=|OA|, b=|OB|, r-poluprečnik kružnice upisane u trougao OAB, i neka su M,N,P tačke dodira te kružnice sa stranicama OA, OB,AB redom. Tada je OM=ON (kao tangentne duži na tu kružnicu) i slično AM=AP i BN=BP. S druge strane, ako je S centar te upisane kružnice, SMON je kvadrat pa je r=OM=ON. Sada možemo izraziti 2r=OM+ON=(OA-AM)+(OB-BN)=a+b-c pa kako je c=20 i a=b=10$\sqrt{2}$ sledi r=10($\sqrt{2}$ -1).

(2. rešenje) Koristićemo dve formule za površinu trougla sa stranicama a,b,c: P=$\frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2}r$, gde su R i r poluprečnik opisane, odnosno upisane kružnice. Kako imamo je c=20, a=b=10$\sqrt{2}$ i R=10 lako računamo r=10($\sqrt{2}$ -1).

5)

a) Broj načina da se od 18·20=360 igrača izabere 11 jednak je $\binom{360}{11}$.

b) Traženi broj dobićemo oduzimanjem od rešenja zadatka a) ona kod kojih su svi izabrani igrači iz istog tima. Za svaki od 18 timova imamo po $\binom{20}{11}$ načina za izbor 11 igrača, pa je rezultat $\binom{360}{11}$-18·$\binom{20}{11}$.

c) Izbor broja za golmana je jednoznačan. Za obrambene igrače imamo 4! načina za raspoređivanje brojeva, za igrače sredine terena takođe 4! načina a za napadače 2 načina. Kako su ti izbori nezavisni (mogu se kombinovati „svaki sa svakim”), rešenje je 4!·4!·2.

6) Data su rešenja u programskom jeziku C i programskom jeziku Pascal.

```
#include <stdio.h>
int main(){
     int N, i;
     char c;
     float prosek, suma;
     float L[1000];
     do{
             do{
                    printf("Unesite prirodan broj izmedju 10 i 1000: ");
                    scanf("%i", &N);
             } while (N<10 || N>1000);
             suma=0;
             for (i=0; i<N; i++){
                    printf("Unesite element niza na indeksu %i: ", i);
                    scanf("%f", &L[i]);
                    suma+=L[i];
             }
             prosek=suma/N;
             for (i=0; i<N; i++){
                    if (2*L[i]<=prosek)
                           L[i]=0;
                    printf("%f\n", L[i]);
             }
             printf("Da li zelite jos (D/N)? ");
             scanf("%c\n",&c);
       } while (c!='n' && c!='N');
}
```

```
program mat2016;
var
L :array [1..1000] of real;
N, i :integer;
pros, s :real;
c :char;
begin
repeat
  repeat
    writeln('Unesite prirodan broj izmedju 10 i 1000');
    readln(N);
  until (N >= 10) and (N <= 1000);
  s := 0;
  for i:=1 to N do
        begin
        writeln('Unesite element niza');
        readln(L[i]);
        s := s+L[i];
        end;
  pros := s / N;
  for i := 1 to N do
        if 2*L[i] <= pros then
                L[i] := 0;
  for i:=1 to N do
        writeln(L[i]);
  writeln('Da li zelite ponovo (D/N)?');
  readln(c);
until (c = 'N') or (c = 'n');
end.
```