Departman za matematiku i informatiku Prirodno - matematički fakultet Univerzitet u Novom Sadu	

Prijemni ispit

1) Date su sledeće iskazne formule:

$A_1 : ((p \Leftrightarrow q) \vee r) \Rightarrow u \qquad A_2 : \neg u \wedge s$

$A_3 : (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow w$

Pokazati da je iskazna formula $A : s \wedge \neg r \wedge \neg w$ logička posledica tih formula, bez upotrebe istinitosnih tablica. Rešavanje zadatka svodi se na pokazivanje da je iskazna formula $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \Rightarrow A$ tautologija.

2) Data je funkcija $f(x) = x^2 - |x|$. Odrediti

a) nule funkcije *f*;
b) ekstremne vrednosti funkcije *f*;
c) parametar *p* tako da funkcija $g(x) = x^2 - |x| - p$ ima realne nule.

3) Rešiti jednačine

a) $2\sin x = \dfrac{1}{\cos x}$ b) $\log_2(4\sin x) + \log_2(\cos x) = 1$.

4) Neka je *ABCD* pravougaonik čije strane su $|AB| = 16$ i $|BC| = 12$. Uočene su tačke *E* i *F*, takve da je E na strani [*AB*], *F* na strani [CD] i *BFDE* je romb.

a) Izračunati dužinu stranice romba.
b) Izračunati dužinu duži [EF].

5) Registarske tablice jedne države se sastoje od 7 simbola: 2 slova engleske abecede i 5 cifara (engleska abeceda ima 26 slova). Slova i cifre su pomešani u bilo kom redosledu.

a) Koliko najviše različitih registarskih tablica može da postoji u ovoj državi?
b) Koliko najviše različitih registarskih tablica može da postoji u ovoj državi ako na prvom mestu ne sme stajati cifra 0?

6) Napisati program koji od korisnika učitava prirodan broj *N*, *5≤N≤1000*, a zatim i niz *L* od *N* prirodnih brojeva. Vršiti kontrolu unosa u svim učitavanjima. Među članovima niza pronaći i ispisati one koji su deljivi prvom cifrom broja *N* (gledano sleva na desno). Npr. za *N=8* i *L=[2,18,32,45,17,64,12,56]* ispisuju se *32, 64* i *56*. Treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

- Boduje se 5 najbolje urađenih zadataka
- Vreme rada je 120 minuta

Departman za matematiku i informatiku Prirodno - matematički fakultet Univerzitet u Novom Sadu	

REŠENJA ZADATAKA

1) Pretpostavimo da su, za neke vrednosti *α(p),… α(w)* slova *p,…,w* formule A_1 A_2 i A_3 tačne (pišemo: $v_\alpha(A_1)=v_\alpha(A_2)=v_\alpha(A_3)=\top$). Kako je formula u obliku konjukcije tačna samo ako su joj i leva i desna strana tačne, sledi $\alpha(u)=\perp$ i $\alpha(s)=\top$. Pošto je A_1 tačna a njena desna strana netačna, sledi da je $v_\alpha((p\Leftrightarrow q)\vee r)=\perp$. Odavde sledi da je $v_\alpha(p\Leftrightarrow q)=\perp$ i $\alpha(r)=\perp$. Iz $v_\alpha((p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow w)=\top$ sada dobijamo $\alpha(w)=\perp$. Sada iz $\alpha(s)=\top$, $\alpha(r)=\perp$ i $\alpha(w)=\perp$ zaključujemo da je $v_\alpha(s\wedge\neg r\wedge\neg w)=\top$.

2) Grafik funkcije $f(x)=x^2-|x|$ je dat na slici 1.

Na osnovu $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ i

$x\geq 0$ $f(x)=x^2-x$	$x<0$ $f(x)=x^2+x$

a) Sledi da su nule funkcije f rešenja jednačine $x^2-|x|=0$, odnosno

$$x^2-x=0, \quad \text{i} \quad x^2+x=0.$$

Tako da su nule funkcije f $x=1$, $x=-1$, $x=0$.

b) ekstremne vrednosti funkcije f su temena parabola

(grafika funkcija $f(x)=x^2-x,\ \ x\geq 0,$ I $f(x)=x^2+x,\ \ x<0)$

$A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ $B(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$, Slika 3.

c) Nule funkcija $g(x)=x^2-|x|-p$ su rešenja jednačina:

$x\geq 0$ $x^2-x-p=0,$ $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4p}}{2}$ $1+4p\geq 0$ $p\geq -\frac{1}{4}$	$x<0$ $x^2+x-p=0,$ $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4p}}{2}$ $1+4p\geq 0$ $p\geq -\frac{1}{4}$

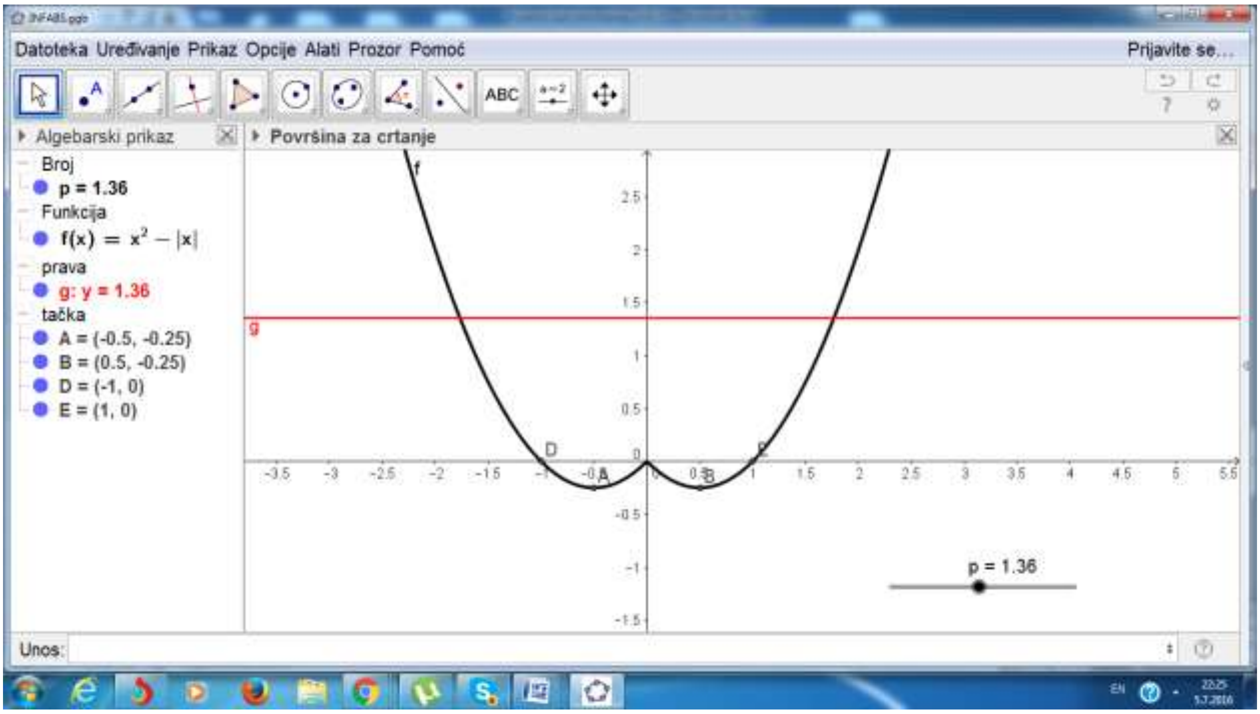
Ako je $p=-\frac{1}{4}$, i $p>0$, tada data jednačina ima 2 rešenja.

Ako je $-\frac{1}{4}<p<0$, tada data jednačina ima 4 rešenja.

Ako je $p=0$, tada data jednačina ima 3 rešenja.

Na slici 1 prikazana je funkcija f i prava $y=p$.

Klikom na grafik se može ući u Geogebru i pomeranjem klizača p dobiti rešenje.



Slika 1

3)

a) U datoj jednačini mora biti $\cos x \neq 0$ i može se zapisati kao $2\sin x\cos x = 1$, odakle je $\sin(2x) = 1$, pa je rešenje jednačine $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z,$ odnosno $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$

b) U datoj jednačini mora biti $\sin x > 0, \quad \cos x > 0$ i može se zapisati kao $\log_2(4\sin x\cos x) = 1,$ odakle je $2\sin x\cos x = 1.$ Međutim zbog uslova zadatka $\sin x > 0, \quad \cos x > 0$, rešenja jednačine su $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$

4)

a) Obeležimo dužinu stranice romba sa x. Tada je |CF|=|CD|-|DF|=16- x. Iz pravouglog trougla BCF imamo, upotrebom Pitagorine teoreme, da je $12^2+(16 - x)^2 = x^2$. Rešavanjem ove jednačine dobijamo $x=\frac{25}{2}$.

b) Neka je tačka G podnožje normale iz F na stranicu AB. Tada je GBCF pravougaonik pa je |BG|=|CF|= 16 - $x = \frac{7}{2}$. Sledi da je |GE|=|BE|-|BG|=9. Sada, primenom Pitagorine teoreme na trougao FGE dobijamo $|EF|^2=|GF|^2+|EG|^2$ odakle |EF|=15.

Departman za matematiku i informatiku Prirodno - matematički fakultet Univerzitet u Novom Sadu	

5)

a) Da bismo izabrali jednu registarsku tablicu treba najpre da izaberemo na kojim od 7 pozicija će se nalaziti slova a na kojim cifre (za to imamo $\binom{7}{2}$ načina) a zatim koja slova i koje cifre će biti na svakom od izabranih mesta. Kako za svako od 5 mesta određenih za cifre imamo po 10 mogućnosti, tih 5 cifara možemo izabrati na 10^5 načina (bitan nam je i redosled izabranih cifara!). Slično, dva slova možemo izabrati na 26^2 načina. Dakle, ukupan broj tablica koje mogu da postoje je $\binom{7}{2}\cdot 10^5\cdot 26^2$.

b) Oduzmimo od ukupnog broja mogućih tablica izračunatog pod a) broj onih koje počinju nulom. Njega ćemo izračunati na isti način kao pod a), ali prethodno fiksirajući nulu na prvo mesto. Dakle, treba ustvari naći broj nizova od 2 slova i 4 cifre (u bilo kojem redosledu); mesta za slova možemo izabrati na $\binom{6}{2}$ načina, cifre na 10^4 načina a slova na 26^2 načina. To je ukupno $\binom{6}{2}\cdot 10^4\cdot 26^2$ tablica koje počinju nulom, pa je konačno rešenje $\binom{7}{2}\cdot 10^5\cdot 26^2 - \binom{6}{2}\cdot 10^4\cdot 26^2$.

6) Data su rešenja u programskom jeziku C i programskom jeziku Pascal.

```
#include <stdio.h>

int main(){
     int N, i, cifra;
     char c;
     int L[1000];
     do{
            do{
                  printf("Unesite prirodan broj izmedju 5 i 1000: ");
                  scanf("%i", &N);
            } while (N<5 || N>1000);
            cifra=N;
            while (cifra>9)
                  cifra/=10;
            for (i=0; i<N; i++){
                  do{
                        printf("Unesite element niza na indeksu %i: ", i);
                        scanf("%i", &L[i]);
                  } while (L[i]<= 0);
            }
            for (i=0; i<N; i++){
                  if (L[i]%cifra==0)
                        printf("%i \n", L[i]);
            }
            printf("Da li zelite jos (D/N)? ");
            scanf("%c\n",&c);
```

```
       } while (c!='n' && c!='N');
}
```

```
program inf2016;
var
N, i, cif :integer;
c :char;
L  :array [1..1000] of integer;

begin
repeat
   repeat
       writeln('Unesite prirodan broj izmedju 5 i 1000');
       readln(N);
   until (N >= 5) and (N <= 1000);
   cif := N;
   while cif > 9 do
     cif := cif div 10;
   for i := 1 to N do
      repeat
           writeln('Unesite element niza');
           readln(L[i]);
      until L[i] > 0;
   for i := 1 to N do
      if L[i] mod cif = 0 then
          writeln(L[i]);
   writeln('Da li zelite jos (D/N)?');
   readln(c);
until (c = 'N') or (c = 'n');
end.
```